



HAL
open science

Énergie cinétique moyenne d'une particule en mouvement brownien dans un fluide réel

J.L. Soulé

► **To cite this version:**

J.L. Soulé. Énergie cinétique moyenne d'une particule en mouvement brownien dans un fluide réel. Annales de l'ISUP, 1955, IV (1), pp.93-104. hal-04095223

HAL Id: hal-04095223

<https://hal.science/hal-04095223>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ÉNERGIE CINÉTIQUE MOYENNE D'UNE PARTICULE EN MOUVEMENT BROWNIEN DANS UN FLUIDE RÉEL

par

J. L. SOULÉ

Résumé-Cette énergie cinétique est moindre que celle qui résulte du principe d'équipartition. On l'évalue moyennant certaines hypothèses, valables pour un rayon de particule assez grand.

INTRODUCTION

A. EINSTEIN a publié en 1905 (1) une étude théorique quantitative du mouvement brownien de translation d'une particule sphérique dans un fluide, aboutissant à la célèbre formule suivante, qui a fait l'objet de nombreuses vérifications expérimentales :

$$(1) \quad 2D = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{x^2}}{t} \right) = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta r}$$

D étant la constante de diffusion brownienne, $\overline{x^2}$ le carré moyen du déplacement de la particule selon une direction pendant le laps de temps t, R la constante des gaz parfaits, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro, η la viscosité du fluide et r le rayon de la particule, Einstein généralisa et simplifia sa démonstration dans son mémoire suivant sur le sujet (2)

Une démonstration différente fut d'abord donnée de façon approximative par SMOLUCHOWSKI (3), puis reprise par Einstein lui-même (4), enfin mise sous une forme définitive très simple par LANGEVIN (5)

Cette seconde démonstration est souvent considérée comme plus satisfaisante que la première. En fait, nous nous proposons de montrer qu'elle n'aboutit au résultat exact que par un intermédiaire incorrect - sauf lorsque la masse spécifique du fluide est négligeable par rapport à celle de la particule ;

Notre étude ne concernera que le mouvement brownien de translation mais ses principes s'appliqueraient au mouvement brownien de rotation.

RAPPEL DE LA DÉMONSTRATION DE LANGEVIN

Rappelons rapidement les termes de la démonstration de LANGEVIN. Tout d'abord on évalue le carré moyen de la vitesse de la particule selon une direction, grâce au principe d'équipartition de l'énergie :

$$(2) \quad m \overline{u^2} = \frac{RT}{N}$$

Ensuite on relie $\overline{u^2}$ à $\lim \left(\frac{\overline{x^2}}{t} \right)$ par une étude hydrodynamique du mouvement. A cet effet, on distingue dans les impulsions communiquées à la particule par les molécules du fluide qui la heurtent deux parties : d'une part, une valeur moyenne (c'est-à-dire en fait une espérance mathématique) qui s'identifie avec les composantes de la pression hydrodynamique et qui se relie au mouvement de la particule par la formule de Stokes ; d'autre part, une succession d'effets aléatoires indépendants L'équation du mouvement s'écrira :

$$(3) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + 6\pi\eta r \frac{dx}{dt} = F(t)$$

où $F(t)$ est la part aléatoire de la pression.

En multipliant par x et en intégrant de 0 à t , on obtient ;

$$(4) \quad m x u(t) - m \int_0^t u^2 dt + 3\pi\eta r x^2 - \int_0^t x F dt = 0$$

En prenant les espérances mathématiques de chacun des termes, il vient :

$$(5) \quad m \overline{x \cdot u(t)} - m \overline{u^2} \cdot t + 3\pi\eta r \overline{x^2} - \int_0^t \overline{x \cdot F} dt = 0$$

Il est intuitif que le premier et le quatrième termes deviennent négligeables à côté des 2 autres lorsque t augmente indéfiniment (voir par exemple pour une justification rigoureuse : (6)), et on a l'égalité asymptotique :

$$(6) \quad \lim \frac{\overline{x^2}}{t} = \frac{m \overline{u^2}}{3\pi\eta r}$$

qui établit, par comparaison avec (2), la formule (1).

Les variantes de cette démonstration ne sont différentes que dans la manière de passer de l'équation (3) à la formule (6).

DEUX OBJECTIONS A LA DÉMONSTRATION DE LANGEVIN

Si l'on tient compte de l'inertie du fluide, on doit faire une double objection à la démonstration que nous venons d'exposer :

1) La formule de Stokes n'est valable que pour un mouvement uniforme (nous ne parlerons pas de la correction de "glissement" ou correction de Cunningham, à faire intervenir lorsque r n'est pas assez grand devant le

libre parcours moyen des molécules du fluide). Puisque la vitesse de la particule est constamment et rapidement variable, l'inertie du fluide a pour conséquence que la résistance hydrodynamique qu'il oppose au mouvement de la particule dépend à chaque instant de toutes les accélérations antérieures, et en fait conduira à une vitesse moins fluctuante que ne le voudrait la loi de Stokes. Par suite, pour une vitesse quadratique moyenne donnée, le déplacement quadratique moyen sera plus grand que celui qu'on calcule avec la loi de Stokes.

2) Comme l'indique Einstein (4), lorsqu'on applique le principe d'équipartition, on suppose que l'énergie cinétique du mouvement de la particule est "indépendante de son environnement". Autrement dit, lorsqu'on démontre l'équipartition de l'énergie entre deux systèmes en interaction (ici : les molécules d'une part, la particule de l'autre), on suppose l'indépendance des probabilités d'état des deux systèmes (voir par exemple (7)), à la condition près de respecter les conditions imposées comme celle de la valeur de l'énergie totale. Mais cette hypothèse n'est pas satisfaite ici : il y a un certain entrainement du fluide par la particule et les paramètres qui échangent de l'énergie (vitesse de la particule et vitesse des molécules qui la heurtent) n'ont pas des valeurs indépendantes. On peut rétablir l'indépendance en n'attribuant comme énergie thermique aux molécules avoisinant la particule que celle qui correspond à la différence entre leurs vitesses réelles et les vitesses moyennes-hydrodynamiques) aux points coïncidants. Simultanément il faut attribuer à la particule toute l'énergie cinétique hydrodynamique supplémentaire. La vitesse quadratique moyenne de la particule en est donc réduite d'autant.

Ces deux effets jouent en sens inverse sur le coefficient de diffusion, Nous allons montrer qu'il se compensent parfaitement sous certaines hypothèses (mais bien entendu la vitesse quadratique moyenne sera plus faible que celle qu'on utilise dans la démonstration de LANGEVIN.

FORME MODIFIÉE POUR L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Pour remplacer l'équation (3), nous devons déterminer quelle est la résistance hydrodynamique que le fluide oppose au mouvement de la particule à l'instant t , connaissant toute l'histoire de ce mouvement jusqu'à l'instant t . Or, avec les hypothèses de l'hydrodynamique, si l'on pose que le fluide a au contact de la particule la même vitesse que celle-ci et qu'il est au repos à l'infini, le mouvement du fluide est parfaitement défini, donc aussi la valeur de la résistance.

Les équations du mouvement du fluide sont l'équation de continuité (condition d'incompressibilité) et les équations dynamiques. Si dans ces dernières, on néglige le terme d'accélération, on aboutit finalement à la formule de Stokes. On sait que si on conserve ce terme d'accélération, on est en présence d'équations non linéaires. Dans ces conditions, on ne sait pas résoudre le problème posé ; d'ailleurs on ne peut plus traiter séparément les mouvements selon les trois directions, ni même le mouvement brownien de translation et celui de rotation. Nous opérerons la linéarisation habituelle qui consiste à assimiler la dérivée totale par rapport au temps à la dérivée partielle au point considéré comme fixe par rapport à la particule.

Divers auteurs depuis BOUSSINESQ (8) ont résolu le problème dans ces conditions et établi l'expression suivante pour la résistance :

$$(7) \quad R(t) = 6\pi\eta r \frac{dx}{dt} + \frac{2}{3}\pi r^3\rho \frac{d^2x}{dt^2} + 6r^2\sqrt{\pi\eta\rho} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

où ρ est la masse spécifique du fluide.

On trouvera dans l'ouvrage de VILLAT (9) une étude détaillée de cette solution.

On déduit de là immédiatement l'équation du mouvement modifiée:

$$(8) \quad \left(m + \frac{2}{3}\pi r^3\rho\right) \frac{d^2x}{dt^2} + 6\pi\eta r \frac{dx}{dt} + 6r^2\sqrt{\pi\eta\rho} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F(t)$$

où $F(t)$ est de nouveau l'écart aléatoire (de moyenne nulle) de la résultante des forces de pression. (1)

Notons ici les hypothèses faites (nous les discuterons in fine) :

Hypothèse I - Les équations des fluides continus donnent l'espérance mathématique des composantes réelles de la pression.

Hypothèse II - On peut négliger les termes quadratiques dans les équations du mouvement du fluide.

Hypothèse III - On peut assimiler la vitesse hydrodynamique du fluide au contact de la particule à la vitesse de la particule.

Hypothèse IV - On peut assimiler l'accélération hydrodynamique du fluide au contact de la particule à l'accélération de la particule (ce qui suppose une fluctuation pas trop rapide de cette dernière).

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

L'étude du mouvement brownien se ramène donc à l'inversion de l'équation (8). Si on se donne la fonction $F(t)$, la vitesse de la particule $U(t) = \frac{dx}{dt}$ sera donnée par la solution de l'équation (8) (qui, on peut le montrer, existe et est unique). Puisque la fonction $F(t)$ est aléatoire, il

(1) Tandis que le présent travail était en cours, nous avons découvert que l'idée d'étudier le remplacement de l'équation (3) par l'équation (8) se trouvait déjà suggérée dans une note en bas de page d'un article de WEYSSENHOFF [10] sur la résistance des fluides, note ainsi rédigée : "Es hätte sich vielleicht gelohnt, die verschiedenen Theorien der Brownschen Bewegung, bei welchen die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes sogar für die einzelnen Zickzackwege der unregelmässigen Bahn vorausgesetzt wird, im Lichte der eben erwähnten theoretischen Untersuchungen durchzudiskutieren".

en sera de même de la fonction $U(t)$, et les problèmes mathématiques se ramèneront à l'étude de la correspondance des propriétés stochastiques de ces deux fonctions. (1)

Cette étude rentre dans un cadre classique (voir par exemple (11) dont divers résultats seront utilisés par la suite). En effet on passe de $F(t)$ à $U(t)$ par l'intermédiaire d'un "filtre linéaire" et il suffira de caractériser ce dernier par son "gain" pour pouvoir répondre aux diverses questions qui se posent. Ce "gain" sera lié de façon simple à la "réponse percussionnelle".

Pratiquement la fonction aléatoire $F(t)$ a des propriétés particulières. Tout d'abord elle est "stationnaire d'ordre deux", et il en sera par suite de même pour $U(t)$. D'autre part, considérons les ordres de grandeur mis en jeu. $F(t)$ est la superposition d'impulsions indépendantes dues à chacune des molécules "heurtant" la particule ; pour des températures, des pressions et des natures de fluides courants, il y a plus de 10^{15} chocs par seconde et micron carré de surface, chaque "choc" durant 10^{-12} à 10^{-10} secondes. La réponse percussionnelle s'étend sur une durée qu'on peut caractériser par le paramètre $\frac{m}{6\pi\eta r}$ qui vaut pratiquement 10^{-6} à $10^{-5.2}$ secondes (r en microns), pour des fluides non exceptionnellement visqueux. On pourra donc assimiler $F(t)$, par rapport à $U(t)$, à un "phénomène à corrélation microscopique" (ou "à spectre blanc") et $U(t)$ sera quasi-laplacienne. Dans ces conditions, le problème est équivalent à celui de l'observation du "bruit pur" à travers un filtre linéaire. Notons enfin que le troisième ordre de grandeur mis en jeu, celui des intervalles entre les observations visuelles, est à son tour extrêmement grand devant les deux autres, de sorte que $U(t)$ est à son tour à corrélation microscopique par rapport à des phénomènes à cette échelle et que $x(t)$ peut être assimilé à une fonction aléatoire à accroissements indépendants ou "mouvement brownien" mathématique.

CALCUL DU GAIN

La façon la plus commode d'utiliser l'équation (8) consiste à déterminer préalablement le "gain" du filtre qu'elle représente. Le calcul revient à résoudre cette équation par la transformation de Fourier, ce qui a été déjà fait par divers auteurs (voir à ce sujet (6)), (10), Par défini-

(1) $U(t)$ étant une fonction aléatoire, l'intégrale qui intervient dans l'équation (8) doit être considérée comme une intégrale stochastique. On peut montrer que celle-ci est définie en moyenne quadratique avec les précisions que nous indiquerons au sujet de $F(t)$. On sait en effet qu'il suffit pour cela de prouver l'existence d'une limite finie lorsque $T \rightarrow -\infty$ de l'intégrale double suivante :

$$\iint_{-T}^T \frac{E[U'(\tau) U'(\tau')]}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}} d\tau d\tau'$$

c'est-à-dire

$$2 \int_0^{-T} \frac{d^2 \Gamma(u)}{du^2} [2L(\sqrt{-T-u} + \sqrt{-T}) - Lu] du$$

où $\Gamma(u)$ est la fonction de corrélation de $U(t)$. Or les propriétés de $\Gamma(u)$ assurent cette convergence.



tion, si à la fonction $F(t) = e^{2\pi i \nu t}$, l'équation (8) fait correspondre la fonction :

$$U(t) = G(\nu) e^{2\pi i \nu t}$$

$G(\nu)$ est le gain (complexe) relatif à la fréquence ν ;

En portant ces expressions de F et U dans l'équation (8), il vient :

$$G(\nu) \left[\left(m - \frac{2}{3} \pi r^3 \rho \right) 2\pi i \nu + 6\pi \eta r + 6r^2 \sqrt{\pi \eta \rho} \cdot 2\pi i \nu \int_{-\infty}^{-t} \frac{e^{-2\pi i \nu (t-\tau)} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] = 1$$

or l'intégrale écrite vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu z} dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2i\nu}}$$

quel que soit ν réel, en prenant pour détermination de la racine carrée celle qui est à partie réelle positive. D'où :

$$(9) \quad \frac{1}{G(\nu)} = \left(m + \frac{2}{3} \pi r^3 \rho \right) 2\pi i \nu + 6\pi \eta r + 6r^2 \pi \sqrt{\pi \eta \rho} \sqrt{2i\nu}$$

(avec la même détermination de la racine carrée).

COEFFICIENT DE DIFFUSION

Pour voir ce que devient la formule d'EINSTEIN, nous avons à calculer la limite de $\frac{E(x^2)}{t}$ lorsque t augmente indéfiniment. On a :

$$x = \int_0^t U(\tau) d\tau$$

et, d'après un calcul classique tenant compte de la stationnarité de U :

$$E(x^2) = t \int_t^{+t} \left(1 - \frac{|\tau|}{t} \right) \Gamma_U(\tau) d\tau$$

$\Gamma_U(u)$ étant la fonction de corrélation de $U(t)$. D'où

$$\limite \frac{E(x^2)}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_U(\tau) d\tau = f_U(0) = |G(0)|^2 f_F(0)$$

si $f_U(\nu)$ et $f_F(\nu)$ sont les densités de répartition spectrale de U et F , soit :

$$(10) \quad \limite \frac{E(x^2)}{t} = \frac{f_F(0)}{(6\pi \eta r)^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_F(\tau) d\tau}{(6\pi \eta r)^2}$$

Si l'on admet, d'après l'analyse des phénomènes qui a été faite plus haut, que la fonction aléatoire $F(t)$ est indépendante du mouvement de la particule, autrement dit qu'elle représente le même processus que les fluctuations de pression subies par une particule identique maintenue im-

mobile, il en résulte que $f_F(0)$ et par suite le coefficient de diffusion sont indépendants de la masse spécifique de la particule. La démonstration de LANGEVIN, valable quand la masse spécifique du fluide est négligeable devant celle de la particule, aboutit donc à une forme (la formule d'Einstein) exacte dans le cas général (sous les hypothèses énoncées plus haut).

VITESSE QUADRATIQUE MOYENNE

La fonction de corrélation de la fonction aléatoire $U(t)$ se déduit de façon simple de celle de $F(t)$ et du gain $G(v)$. Ce qui nous intéresse spécialement au point de vue physique, c'est la valeur de $E(U^2)$. On sait (11) que l'on a :

$$(11) \quad E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) \cdot \overline{G(v)} f_F(v) dv$$

Mais nous avons dit que $F(t)$ est à corrélation microscopique par rapport à $U(t)$, autrement dit à spectre uniforme dans la zone des fréquences où le gain $G(v)$ n'est pas pratiquement nul. Par suite :

$$(12) \quad E(U^2) = f_F(0) \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) \overline{G(v)} dv$$

$\overline{G(v)}$ est la quantité imaginaire conjuguée de $G(v)$, en fait égale à $G(-v)$. A partir de (9), on calculera aisément l'intégrale indiquée, car il s'agit d'une fraction rationnelle en \sqrt{v} (dénominateur du 4° degré dont on peut préciser les racines, puis les associer par valeurs conjuguées) et il suffira de faire le changement de variable $\sqrt{v} = z$ puis la décomposition en éléments simples.

On pourra d'autre part exprimer $f_F(v)$ en fonction de $\lim_{\frac{x^2}{t}} d'$ après (10). La relation ainsi obtenue entre $\frac{x^2}{t}$ et $\frac{x^2}{t}$ suppose uniquement de $F(t)$ qu'elle est à corrélation microscopique. Le résultat de ces calculs est le suivant :

$$(13) \quad \lim_{\frac{x^2}{t}} = \frac{mU^2}{3\pi\eta r} \cdot f(\alpha)$$

($\alpha = \frac{\rho}{\rho_0}$, ρ_0 masse spécifique de la particule)

$$(14) \quad f(\alpha) = \frac{(1 + \frac{\alpha}{2}) \sin \varphi \cos \varphi}{2(1 + \cos \varphi) \frac{\varphi}{\pi} - \sin \varphi} \quad \text{avec} \quad \cos \varphi = \frac{7\alpha - 4}{2\alpha + 4} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

pour $0 < \alpha < \frac{8}{5}$

$$(15) \quad f(\alpha) = \frac{(1 + \frac{\alpha}{2}) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi}{2(1 + \operatorname{ch} \varphi) \frac{\varphi}{\pi} - \operatorname{sh} \varphi} \quad \text{avec} \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{7\alpha - 4}{2\alpha + 4} \quad \text{pour} \quad \alpha > \frac{8}{5}$$

Voici quelques valeurs numériques de la fonction $f(\alpha)$

α	0	0,04	0,08	0,25	1	1,6	2	4	8
$f(\alpha)$	1	1,48	1,72	2,44	4,84	6,59	7,72	13,3	24,2

Si on admet en outre que la limite de $\frac{\bar{x}^2}{t}$ satisfait bien à la formule d'Einstein (hypothèse supplémentaire sur $f_F(\alpha)$), on voit aisément que l'on a :

$$(16) \quad m \bar{U}^2 = \frac{RT}{N} \frac{1}{f(\alpha)}$$

Ainsi $f(\alpha)$ apparaît comme le facteur dont est réduit l'énergie cinétique moyenne de translation selon une direction, par rapport à la valeur d'équipartition, si on tient compte de l'inertie du fluide. A titre de vérification, il est possible, en utilisant la solution de VILLAT (voir le paragraphe suivant) de calculer l'énergie hydrodynamique moyenne contenue dans le fluide ; on l'ajoutant à celle de la particule, on constate bien que l'on retrouve dans tous les cas la valeur d'équipartition.

RÉPONSE PERCUSSIONNELLE

On peut aussi déduire de l'équation (8) la réponse percuSSIONNELLE $R(t)$ du filtre étudié (c'est-à-dire la fonction $U(t)$ obtenue lorsque $F(t)$ est une "fonction impulsion" ou "fonction de Dirac"). La connaissance de $R(t)$, par laquelle on définit généralement les filtres, permet de déduire les diverses propriétés du filtre.

On peut obtenir $R(t)$ à partir du gain par la formule :

$$(17) \quad R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu t} G(\nu) d\nu$$

On peut aussi l'obtenir par résolution directe de l'équation (8). VILLAT (9) étudie en détail la solution de cette équation, lorsque $F(t)$ est la "fonction saut" égale à 0 pour $t < 0$ et 1 pour $t > 0$. Cette solution semble due à BOGGIO (12) Par dérivation de cette solution on obtient la réponse percuSSIONNELLE, qu'on peut mettre sous la forme :

$$(18) \quad U(t) = R(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$= \frac{3}{\pi r^3 \sqrt{\pi(\rho + 2\rho_0)(5\rho - 8\rho_0)}} \begin{cases} \sqrt{\alpha} e^{\alpha Pt} \int_{\sqrt{\alpha Pt}}^{+\infty} e^{-u^2} du - \sqrt{\beta} e^{\beta Pt} \int_{\sqrt{\beta Pt}}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

où α et β sont les racines réelles ou imaginaires de :

$$(19) \quad x^2 + \frac{4\rho_0 - 7\rho}{2\rho_0 + \rho} x + 1 = 0$$

et où

$$P = \frac{6\pi\eta r}{4\pi r^3(\rho_0 + \frac{\rho}{2})}$$

(et en adaptant la détermination de α et β à celle de la racine de $5\rho - 8\rho_0$)

les grandeurs moléculaires telles que le libre parcours moyen et le temps de relaxation moléculaire, serait encore linéaire. Par suite l'étude faite serait encore valable à condition de modifier l'expression du gain $G(v)$. Mais l'expression de ce gain resterait la même pour v assez petit. L'intégrale (12) serait modifiée de ce fait. Or $\frac{G(v)}{G(0)}$ décroît comme $\frac{1}{r^2}$ de sorte que la valeur de $|v|$ à partir de laquelle la quantité $G(v)G(v)$ a une contribution négligeable dans l'intégrale (12) décroît comme $\frac{1}{r^2}$. Donc à ce point de vue encore les conditions pour la validité des formules sont d'autant mieux remplies que r est plus grand.

LA DÉMONSTRATION D'EINSTEIN

Il est intéressant d'examiner la démonstration initiale d'Einstein (voir (1) et (2)) à la lumière des considérations qui précèdent. Rappelons qu'Einstein introduit un champ de forces uniforme auxiliaire (n'affectant que les particules et non le fluide) et considère un système en équilibre, comprenant un grand nombre de particules dans un fluide, mais dans un volume assez grand pour qu'il n'y ait pas d'interaction entre les particules (ou mieux encore on peut considérer une probabilité de présence d'une particule unique).

Le théorème de BOLTZMANN (14) donne la loi de répartition spatiale des particules (loi de probabilité) par la considération de leur énergie potentielle ; il suffit alors d'écrire que les mouvements de diffusion compensent le déplacement d'ensemble sous l'influence du champ de forces, pour déterminer le coefficient de diffusion brownienne, qui se relie aisément à $E(x^2)/t$. (On évite ainsi de passer par la détermination de $E(U^2)$).

Cette démonstration échappe aux deux objections physiques que nous avons retenues. D'autre part l'énergie potentielle des particules est indépendante de l'énergie cinétique des molécules qu'elle heurte et le théorème de Boltzmann doit être valable. D'autre part on peut appliquer la loi de Stokes pour évaluer le déplacement uniforme dû au champ.

Cependant il faut remarquer que le raisonnement suppose l'indépendance du mouvement dû au champ et du mouvement brownien, ce qui revient à admettre implicitement la validité de la linéarisation des équations hydrodynamiques. Telle est donc finalement la limitation de validité de la formule d'Einstein.

CONCLUSION

Nous avons étudié l'effet de l'inertie du fluide sur le mouvement brownien d'une particule qui se trouve plongée dans ce fluide et nous avons montré, moyennant certaines hypothèses,

1°) que la formule d'Einstein reste valable (comme le laissait supposer la démonstration initiale d'Einstein).

2°) que la vitesse quadratique moyenne de la particule est en fait plus petite que celle qu'on calcule par l'application du principe d'équipartition de l'énergie. Le coefficient de réduction ne dépend que du rapport des masses spécifiques du fluide et de la particule et croît avec ce rapport.

3°) que les hypothèses formulées (et par suite les conclusions obtenues) sont d'autant plus valables que la particule est plus grosse, (Evidemment, l'autre cas limite est celui du mouvement brownien d'une molécule de fluide, qui, en particulier, satisfait au principe d'équipartition).

L'intérêt pratique de ces résultats est limité par l'inaccessibilité expérimentale actuelle de la vitesse quadratique moyenne (l'élargissement par effet Doppler-Fizeau d'une raie lumineuse émise ou réfléchi par une particule en mouvement brownien est trop faible pour être mesurable). Il reste cependant à étudier la valeur du coefficient de diffusion pour les petits rayons (en dessous du dixième de micron).

L'intérêt théorique nous paraît résider dans la nécessité qui se dégage de ces résultats d'établir dans quelles conditions exactes s'applique le principe d'équipartition de l'énergie. En effet les coordonnées et les composantes de la vitesse des molécules et de la particule appartiennent bien à une représentation canonique du système physique considéré et pourtant le principe d'équipartition ne s'applique pas. Ce fait remet en cause le choix de la densité de probabilité dans l'espace d'extension en phase.

7. E. BOREL, Mécanique statistique classique - Gauthier-Villars (1938)

8. BOUSSINESQ, C. R. Acad. Sc. p. 915 (1882)

9. H. VILLAT, Leçons sur les fluides visqueux Gauthier-Villars (1924)

10. J. WEYSSENHOFF, Betrachtungen über den GEBIRGSKörper der

Stokesschen und der Stokes-Grenzschicht

Formel, Ann. Der Phys. 82, 1 (1926)

11. FORTET ET BLANC-LAPIERRE, Théorie des fonctions aléatoires

Masson (1953)

12. T. BOGGIO, Rend. Acc. Lincei, 6, p. 613 et 730 (1907)

13. RIGAUD, L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz Gauthier

Villars (1932)

14. BOLTZMANN, Leçons sur la théorie des gaz I et II Gauthier-Villars

(1902 et 1905)

15. Les références (1), (2) et (4) sont réunies traduites en anglais

dans :

A. EINSTEIN, Investigations on the theory of the brownian movement

London Methuen and Co., 1926



BIBLIOGRAPHIE

- 1 A. EINSTEIN, Ann. Der Phys. 17, 549 (1905)
- 2 A. EINSTEIN, Ann. Der Phys. 19, 371 (1906)
- 3 SMOLUCHOWSKI, Bull. Acad. Cracovie (1906), 577
- 4 A. EINSTEIN, Zeit. f. Elektrochemie 13, 41 (1907)
- 5 LANGEVIN, C.R. Ac. Sc., 146, 530 (1908)
- 6 TCHEN CHAN-MOU, Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. The Hague, Martinus Nijhoff (1947)
- 7 E. BOREL, Mécanique statistique classique -- Gauthier-Villars (1925)
- 8 BOUSSINESQ, C.R. Ac. Sc. p, 935 (1885)
- 9 H. VILLAT, Leçons sur les fluides visqueux. Gauthier-Villars (1943)
- 10 J. WEYSSENHOFF, Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel, Ann. Der Phys. 62, 1 (1920)
- 11 FORTET ET BLANC-LAPIERRE, Théorie des fonctions aléatoire, Masson (1953)
- 12 T. BOGGIO, Rend. Acc. Lincei 16, p. 613 et 730 (1907)
- 13 ROCARD, L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz. Gauthier-Villars (1932)
- 14 BOLTZMANN, Leçons sur la théorie des gaz I et II. Gauthier-Villars (1902 et 1905)

Les références (1), (2) et (4) sont réunies (traduites en anglais) dans :

A. EINSTEIN, Investigations on the theory of the brownian movement : London Methuen and C°, 1926.

