LES FONCTIONS FACTORIELLES

par

ETIENNE HALPHEN

AVANT-PROPOS

L'Académie des Sciences a décerné en 1954 à Etienne HALPHEN le prix Montyon de Statistique "pour ses travaux en hydrologie statistique". De notre grand ami disparu, les publications de l'I.S.U.P. accueillent aujourd'hui deux mémoires : l'un porte sur les fondements de la Théorie des Probabilités ("La notion de vraisemblance") - le second, malheureusement inachevé, contient l'étude d'une remarquable famille de fonctions, qu'Etienne HALPHEN avait rebaptisées "fonctions factorielles". Entre ces deux mémoires et l'hydrologie, le lien n'est ni direct ni très apparent. C'est pourtant à cette science attachante qu'Etienne HALPHEN était redevable des travaux publiés dans ce fascicule.

Ses conceptions sur la notion de "vraisemblance", comme il aimait à le faire observer, étaient liées étroitement à ceci; la chance d'avoir travaillé, en statistique, sur un matériel très pauvre et très imparfait (les observations hydrologiques et météorologiques). Et sans doute, le statisticien qui travaille dans un domaine où l'expérimentation est possible et bon marché, n'éprouvera pas la nécessité d'approfondir les bases logiques de ses méthodes : c'est qu'il peut se borner à utiliser une "information" soigneusement triée, de telle sorte que l'adéquation du calcul des probabilités ne pose même pas de question. Mais l'hydrologue qui voudrait se borner aussi à une telle information se retrouverait très pauvre - et même impuissant à résoudre aucun problème. Etienne HALPHEN n'accordait à des expressions telles que "méthode de cuisine", aucun sens péjoratif... au contraire : la bonne cuisine étant l'art de "corriger" la théorie probabiliste pour améliorer son adéquation aux choses concrètes.

Quant au mémoire qu'on va lire, il faut dire comment s'était imposée l'étude des fonctions "factorielles". Ayant constaté que dans l'arsenal des lois de probabilité couramment utilisées, depuis Pearson, par les statisticiens, l'hydrologue ne trouve pas toujours... chaussure à son pied, Etienne HALPHEN avait introduit de nouvelles familles, les types A et B, dont les densités s'expriment par les formules suivantes :

$$\text{type A} : \; f(x) = \frac{\mu^{\gamma}}{2K_{\gamma}(\alpha)} \, e^{-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{x}{\mu}+\frac{\mu}{x}\right)} \, x^{\gamma-1} \; ,$$

$$\text{type B} : \; f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta,\gamma)} \, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}-\beta x} \, x^{\gamma-1} \; ,$$

Elles définissent deux familles de lois à trois paramètres, dont les formes sont suffisamment variées pour s'adapter aux besoins de l'hydrologie, de la météorologie, et peut-être aussi (il est permis de l'espérer) de quelques autres domaines. Les premiers résultats concernant l'application de ces lois à l'étude des débits ont été publiés dès 1949 ("Les lois de débits des rivières françaises", La Houille Blanche, numéro spécial B. 1949). Mais leur utilisation se trouvait très limitée parce que ces lois n'étaient pas tabulées (mises à part quelques formes particulières : lois de Pearson des types III et V, loi harmonique de Halphen, loi de χ^2 et loi de Gauss notamment).

La tabulation complète des lois A et B de Halphen exigeait l'emploi, pour les lois A des fonctions de Bessel-Hankel, pour les lois B des fonctions de Hermite; sur ces dernières, il semble que peu de travaux numériques aient été exécutés. Ce sont elles qu'Etienne HALPHEN étudie sous le nom nouveau de "fonctions factorielles".

Mais, comme on va le voir dans les pages suivantes, ce n'est pas le seul nom qui est nouveau. C'est aussi l'état d'esprit avec lequel Etienne HALPHEN aborde cette étude, et l'exposé fort élégant qu'il en donne. C'est encore plusieurs résultats assez remarquables.

Il ne parait pas qu'on ait vu avant lui une foule de liens qui font des "factorielles" un "carrefour important de la Théorie des fonctions ...".

Leur étude amène fort naturellement Etienne HALPHEN à l'identité :

$$\int_0^\infty e^{-z^2} (\cos xz + \sin xz) \frac{dz}{\sqrt{z}} \equiv \int_0^\infty e^{-(z-\frac{x}{2})^2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

qui semble nouvelle.

Et ajoutons, pour clore cet avant-propos, que la tabulation complète des lois A et B est aujourdh'ui en cours d'achèvement.

G. MORLAT