



Les fonctions factorielles

Étienne Halphen

► To cite this version:

| Étienne Halphen. Les fonctions factorielles. Annales de l'ISUP, 1955, IV (1), pp.21-39. hal-04095180

HAL Id: hal-04095180

<https://hal.science/hal-04095180>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

LES FONCTIONS FACTORIELLES

par

ETIENNE HALPHEN

GÉNÉRALITÉS

A - DÉFINITIONS

Nous donnerons les noms de "cosinus factoriel" et "sinus factoriel" aux deux fonctions définies par les séries suivantes⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \text{cf}_\alpha(x) &= 1 + \alpha \frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha+1) \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \text{sf}_\alpha(x) &= x + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ces séries convergent pour toutes valeurs (réelles ou imaginaires) de x et de α , en sorte que les fonctions cf et sf sont fonctions entières de x - et aussi fonctions entières de α , comme on le voit en dérivant terme à terme en α .

En posant : $x = iz$, on est conduit aux fonctions suivantes (dans lesquelles nous préférons désigner par une autre lettre, λ par exemple, le "paramètre") :

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} \text{cg}_\lambda(z) &= 1 - \lambda \frac{z^2}{2!} + \lambda(\lambda+1) \frac{z^4}{4!} - \dots \\ \text{sg}_\lambda(z) &= z - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{z^3}{3!} + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda + \frac{3}{2}\right) \frac{z^5}{5!} - \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Nous donnons aux fonctions : cf , sf , et aux fonctions apparentées, le nom de "fonctions factorielles de première espèce"; et celui de "fonctions factorielles de seconde espèce" à celles qui s'apparentent à cg et sg .

On voit immédiatement que :

$$\begin{aligned} (5) \quad & \left\{ \begin{aligned} \text{cf}'_\alpha &= \alpha \text{sf}_{\alpha+\frac{1}{2}} \\ \text{sf}'_\alpha &= \text{cf}_{\alpha+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. & (7) \quad & \left\{ \begin{aligned} \text{cg}'_\lambda &= -\lambda \text{sg}_{\lambda+\frac{1}{2}} \\ \text{sg}'_\lambda &= \text{cg}_{\lambda+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

en notant, de façon abrégée, par cf' la dérivée de cf par rapport à la "variable" x , etc⁽²⁾

(1) Lire : "cf de x ", etc...

(2) De façon générale, nous faisons usage de pareilles abréviations, où nous entendons la "variable" ou le "paramètre", chaque fois qu'il n'y a pas risque d'équivoque.

La combinaison linéaire :

$$(9) \quad \text{ef}_\alpha(x) = \text{cf}_\alpha \cdot \Gamma(\alpha) + \text{sf}_\alpha \cdot \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

ou

$$(10) \quad \text{ef}_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) + \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x}{1!} + \Gamma(\alpha + 1) \cdot \frac{x^2}{2!} \dots$$

donne lieu à la formule de dérivation :

$$(11) \quad \text{ef}'_\alpha = \text{ef}_{\alpha + \frac{1}{2}},$$

ce qui nous conduit à la nommer : "exponentielle factorielle" de première espèce. Nous nommerons "exponentielle factorielle" de seconde espèce la combinaison linéaire :

$$(12) \quad \text{eg}_\lambda = \text{cg}_\lambda \cdot E(\lambda) + \text{sg}_\lambda \cdot E\left(\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

où $E(\lambda)$ désigne la fonction entière : $\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}$.

La raison de cette dénomination se trouve dans la formule de dérivation :

$$(13) \quad \text{eg}'_\lambda = \text{eg}_{\lambda + \frac{1}{2}}.$$

Notons encore :

$$(14) \quad \text{eg}_\lambda(x) = E(\lambda) + \frac{x}{1!} E\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \dots$$

ainsi que la formule :

$$(15) \quad \text{cf}_\alpha(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \left[\text{ef}_\alpha(x) + \text{ef}_\alpha(-x) \right]$$

qui, avec les formules similaires, ramène l'étude de cf et sf à celle de ef, etc...

Il est important de noter que, à la différence de ef, la fonction eg est fonction entière du paramètre :

nous avons des raisons de penser que ce détail, en apparence insignifiant, est ce qui donne une importance exceptionnelle.

L'équation fonctionnelle :

$$(F) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, r) = f(x, r+a)$$

semble en effet une "clé" de l'étude des fonctions analytiques, le développement en série entière d'une fonction analytique étant lié à cette particularité de la fonction monôme $\frac{x^r}{r!}$ de vérifier l'équation (F). Mais ce n'est

pas une fonction entière en r : d'où les singularités que l'on rencontre en

particulier dans l'intégration de $\frac{x^r}{r!}$ pour $r = -1$; à noter, plus généralement, que la fonction monôme n'est même pas une fonction uniforme en x pour r non entier, tandis que $\text{ef}_\alpha(x)$ est uniforme pour toute valeur de α pour laquelle elle existe, et que $\text{eg}_\lambda(x)$ est même, comme nous venons de le faire remarquer, fonction entière de x et de λ .

B - PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

De la formule (10), on tire la combinaison :

$$\text{ef}_{\alpha+1}(x) - \frac{x}{2} \cdot \text{ef}_{\alpha+\frac{1}{2}} = \Gamma(\alpha+1) + \frac{x}{1!} \left[\Gamma(\alpha+\frac{3}{2}) - \frac{1}{2} \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \right] + \dots$$

$$= \alpha \left[\Gamma(\alpha) + \frac{x}{1!} \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) + \dots \right]$$

ou

$$(16) \quad \text{ef}_{\alpha+1} = \frac{x}{2} \text{ef}_{\alpha+\frac{1}{2}} + \alpha \text{ef}_{\alpha}.$$

En vertu de (11), cette équation (16) montre que la fonction de $x : y = \text{ef}(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = \frac{x}{2} y' + \alpha y.$$

On reconnaît à un changement de variable près, l'équation classique vérifiée, lorsque 2α est entier négatif, par le polynôme de Hermite d'ordre -2α .

On trouvera de même que $u = \text{eg}_{\lambda}(z)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E') \quad u'' + \frac{z}{2} u' + \lambda u = 0.$$

La solution générale de (E) peut donc normalement s'écrire :

$$(17-18) \quad y = A \text{cf}_{\alpha} + B \text{sf}_{\alpha} = C \text{ef}_{\alpha}(x) + D \text{ef}_{\alpha}(-x)$$

et celle de (E') :

$$(19-20) \quad u = A \text{cg}_{\lambda} + B \text{sg}_{\lambda} = C \text{eg}_{\lambda}(z) + D \text{eg}_{\lambda}(-z).$$

Nous aurions pu définir les fonctions factorielles comme étant les solutions des équations (E) et (E') (1) ; en ce cas, cf serait par définition la solution vérifiant pour $x = 0$ les conditions initiales de Cauchy : $y = 1$, $y' = 0$, etc. Cette remarque donne immédiatement la démonstration des relations remarquables suivantes entre fonctions factorielles de première et de seconde espèce :

$$(21) \quad \text{cg}_{\lambda}(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \text{cf}_{-\lambda+\frac{1}{2}}(x),$$

$$(22) \quad \text{sg}_{\lambda}(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \text{sf}_{-\lambda+\frac{1}{2}}(x).$$

Pour démontrer ces formules, il suffit de vérifier que les seconds membres satisfont, en raison de (E), à l'équation (E') ; les conditions initiales de Cauchy pour $x = 0$ achèvent la démonstration.

On notera encore que :

$$(23) \quad \text{eg}_{\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda) \Gamma(1 - \lambda)} e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \text{ef}_{-\lambda+\frac{1}{2}}(x)$$

(même démonstration).

(1) Nous avons préféré suivre l'ordre précédent pour faire l'économie de discussions fastidieuses.

C - LES FONCTIONS FACTORIELLES HOMOGÈNES

Les équations différentielles (E), (E'), linéaires et homogènes du second ordre, peuvent être ramenées à des équations du premier ordre en prenant pour nouvelles fonctions les dérivées logarithmiques des y ou des u . Cela conduit à étudier spécialement ces dérivées logarithmiques, qui présentent, en raison des équations (5), (6), (7) et (8), un intérêt assez notable. Exposons les calculs dans le cas des fonctions de première espèce :

Il est commode de poser :

$$(24) \quad af_{\alpha}(x) = \frac{cf_{\alpha}}{sf_{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$$(25) \quad bf_{\alpha} = \frac{cf_{\alpha+\frac{1}{2}}}{sf_{\alpha}}$$

D'après (E), compte tenu de (5) et (6), on obtient immédiatement :

$$(26) \quad bf_{\alpha+\frac{1}{2}}(x) - af_{\alpha}(x) = \frac{x}{2}.$$

Mais, d'autre part, en prenant la dérivée logarithmique des deux membres de (24), on obtient :

$$\frac{af'_{\alpha}}{af_{\alpha}} = \frac{\alpha sf_{\alpha+\frac{1}{2}}}{cf_{\alpha}} - \frac{cf_{\alpha+1}}{sf_{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Où :

$$af'_{\alpha} + af_{\alpha} \cdot bf_{\alpha+\frac{1}{2}} = \alpha$$

qui donne, en tenant compte de (26) :

$$af'_{\alpha} + af_{\alpha} (af_{\alpha} + \frac{x}{2}) = \alpha.$$

Ainsi la fonction $af_{\alpha}(x)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$(R) \quad z' + z(z + \frac{x}{2}) = \alpha.$$

En posant : $bf_{\alpha}(x) = t$, on obtient, en tenant compte de (26) dans l'équation (R) :

$$(S) \quad t' + t(t - \frac{x}{2}) = \alpha$$

En outre, les fonctions :

$$uf_{\alpha} = \frac{\alpha}{af_{\alpha}} \quad \text{et} \quad vf_{\alpha} = \frac{\alpha}{bf_{\alpha}}$$

vérifient encore, respectivement, les équations :

$$(R) \text{ pour } : z = vf_{\alpha}(x) ; \quad \text{et} \quad (R') \text{ pour } : t = uf_{\alpha}(x).$$

On trouve sans difficulté que l'intégrale générale de (R) est : $\frac{\alpha y}{y'}$, y étant l'intégrale générale de (E) tandis que $\frac{y'}{y}$ est l'intégrale générale de l'équation (S).

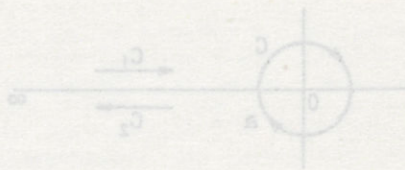
Si l'on part de l'équation de seconde espèce (E'), on obtient de la même façon les solutions des équations de Riccati :

$$(R') \quad z' - z \left(z + \frac{x}{2} \right) = \lambda$$

et

$$(S') \quad t' - t \left(t - \frac{x}{2} \right) = \lambda.$$

Nous donnerons aux fonctions : $af_\alpha \dots$; et $ag_\lambda \dots$: les noms de "fonctions factorielles homogènes" de première et de seconde espèce respectivement.



Pour α réel > 0 , lorsque $\alpha \rightarrow 0$, l'intégrale autour de l'origine tend vers zéro, puis on peut toujours prendre pour C un cercle de rayon α . Donc, l'intégrale prise sur le parcours : (C_1, C, C_2) et qui ne dépend pas de α , est égale à l'intégrale (33), au facteur $(A-1)$ près.

Comme on teste c'est une fonction monogène et uniforme de α pour toute valeur de α , elle définit dans tout le plan des α une fonction analytique uniforme, qui réalise donc le prolongement analytique de (33), et donne $af_\alpha(x)$ lorsque $A = 1 \neq 0$; pour $A = 1 = 0$, on retrouverait les pôles en α de af_0 (il suffit, pour le démontrer, de faire tendre α vers un tel pôle).

INTÉGRALES DÉFINIES

- A -

Nous groupons dans ce chapitre des expressions des fonctions factorielles par des intégrales ; et d'abord

$$(33) \quad \text{ef}_\alpha(x) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2 + xz} \cdot z^{2\alpha-1} \cdot dz, \quad (\alpha > 0).$$

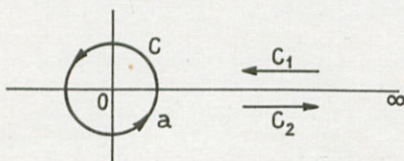
La formule (33) s'établit en développant e^{xz} en série entière, et intégrant terme à terme le produit par :

$$e^{-z^2} \cdot z^{2\alpha-1} \cdot dz.$$

La démonstration rigoureuse peut se faire de plusieurs façons ; par exemple en intégrant la série dans l'intervalle $(0, a)$, et prenant une majorante de l'intégrale $\int_a^\infty$

Nous aurons à détailler un autre mode de démonstration, pour obtenir un développement asymptotique de ef .

La formule (33) n'a de sens que pour $\alpha > 0$. Si α est négatif, ou s'il est imaginaire, on peut obtenir pour ef une intégrale de Cauchy de la façon suivante : $z^{2\alpha-1}$ envisagé comme fonction de la variable complexe Z a un point de ramification à l'origine : les déterminations qui s'échangent par un parcours simple fermé autour de O étant différentes, pourvu que $2\alpha - 1$ ne soit pas entier. Dès lors, pour 2α non entier, mais > 0 , les intégrales de Cauchy : $-\int_\infty^a$ et $\int_a^\infty$ prises sur l'axe réel sont différentes si, avant de passer de la première à la seconde, on décrit un circuit autour de O ; la seconde se déduit de la première en la multipliant par le facteur :



$$A = e^{4\pi i \alpha}.$$

Pour α réel > 0 , lorsque $a \rightarrow 0$, l'intégrale autour de l'origine tend vers zéro, puisqu'on peut toujours prendre pour C un cercle de rayon a . Donc, l'intégrale prise sur le parcours : (C_1, C, C_2) et qui ne dépend pas de a , est égale à l'intégrale (33), au facteur $(A-1)$ près.

Comme au reste c'est une fonction monogène et uniforme de α pour toute valeur de α , elle définit dans tout le plan des α une fonction analytique uniforme, qui réalise donc le prolongement analytique de (33), et donne $\text{ef}_\alpha(x)$ lorsque $A - 1 \neq 0$; pour $A - 1 = 0$, on retrouverait les pôles en α de ef_α (il suffit, pour le démontrer, de faire tendre α vers un tel pôle).

Ainsi nous pouvons, quel que soit α , écrire

$$(34) \quad \int_{(c_1, c, c_2)} e^{-z^2+xz} \cdot z^{2\alpha-1} \cdot dz = \frac{e^{4\pi i \alpha} - 1}{2} \text{ef}_\alpha(x).$$

On observera que pour $x = 0$, on retrouve l'intégrale de Cauchy pour la fonction Γ .

- B -

Ainsi l'unique fonction de deux variables $\text{ef}(x, \alpha)$ qui suffit, moyennant quelques précautions, à donner toutes les fonctions factorielles par des opérations élémentaires, fournit comme cas particuliers ou cas limites :

- la fonction exponentielle;
- les fonctions trigonométriques;
- la fonction eulérienne;
- les polynômes (et les fonctions) de Hermite;

tout cela (sauf les fonctions de Hermite) sans sortir, pour x et α , du domaine du réel.

On achèvera dans la suite, de se rendre compte que toutes les formules classiques relatives aux fonctions ci-dessus, se rattachent à des formules ou propriétés générales de la fonction ef .

On peut en dire autant de l'unique fonction de deux variables :

$$\text{eg}(x, \lambda)$$

étant entendu que les précautions à prendre ⁽¹⁾ pour $\lambda = -\frac{n}{2}$ (n entier > 0) sont un peu différentes de celles qui concernent $\text{ef}(x, \alpha)$ pour $\alpha = -\frac{n'}{2}$ (n' entier ≥ 0) : et nous avons déjà dit l'intérêt exceptionnel de la fonction eg qui est entière en x et en λ , et admet, quel que soit λ , une primitive en x et une seule qui soit une fonction eg .

C'est ici le lieu d'expliquer l'intérêt du domaine réel dans l'étude des fonctions factorielles :

L'extension au domaine complexe est un procédé (= prolongement analytique) pour substituer à l'étude d'une fonction d'une variable (mettons e^x) une fonction de deux variables (savoir : $e^x \cos y$ - puisqu'aussi bien, comme Emile Picard le soulignait, l'étude d'une fonction analytique est équivalente à celle d'une fonction harmonique ⁽²⁾). Et l'étude d'une fonction de deux variables est plus "harmonieuse" que celle d'une fonction d'une variable, parce que c'est l'étude d'une classe à un paramètre continu de fonctions d'une variable : nous sommes ici en présence d'un fait bien connu en théorie des groupes ⁽³⁾ et que nous pensons rendre plus clair ultérieurement par des remarques sur le calcul opérationnel. Dès maintenant relevons que l'intérêt de la classe ici étudiée se rattache au fait qu'elle se conçoit par l'opérateur $\frac{d}{dx}$ qui équivaut ici à un opérateur linéaire appliqué au paramètre.

(1) En vue d'obtenir toutes les fonctions factorielles, solutions de E' .

(2) Il serait bon, dans la définition des fonctions monogènes, de parler de fonction réelle ou imaginaire : $P(z) + i Q(z)$ d'une variable complexe - les conditions de Cauchy pouvant s'écrire $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}$ où il importe peu que f soit réelle ou imaginaire.

(3) Et en calcul fonctionnel.

En prenant les parties paire et impaire de (34), on obtient :

$$(35) \quad \int_{c_1 c c_2} e^{-z^2} \operatorname{ch}(xz) \cdot Z^{2\alpha-1} dz = \frac{e^{4\pi i \alpha} - 1}{2} \Gamma(\alpha) \operatorname{cf}_{\alpha}(x)$$

$$(36) \quad \int_{c_1 c c_2} e^{-z^2} \operatorname{sh}(xz) \cdot Z^{2\alpha-1} dz = \frac{e^{4\pi i \alpha} - 1}{2} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sf}_{\alpha}(x)$$

D'où, en changeant x en ix :

$$(37) \quad \int_{c_1 c c_2} e^{-z^2} \cos(xz) \cdot Z^{2\lambda-1} dz = \frac{e^{4\pi i \lambda} - 1}{2} \Gamma(\lambda) \operatorname{cg}_{\lambda}(x)$$

$$(38) \quad \int_{c_1 c c_2} e^{-z^2} \sin(xz) \cdot Z^{2\lambda-1} dz = \frac{e^{4\pi i \lambda} - 1}{2} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sg}_{\lambda}(x)$$

En multipliant (37) par $\frac{1}{\Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda)} = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi}$

et (38) par $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)} = \frac{\cos \pi \lambda}{\pi}$

on obtient

$$(39) \quad \int_{c_1 c c_2} e^{-z^2} \left[\cos xz \cdot \sin \pi \lambda + \sin xz \cdot \cos \pi \lambda \right] Z^{2\lambda-1} dz = \pi \frac{e^{4\pi i \lambda} - 1}{2} \operatorname{eg}_{\lambda}(x)$$

Les intégrales de Cauchy (35) à (39) donnent des intégrales de Riemann lorsque α ou λ sont réels > 0 . En particulier :

$$(40) \quad \operatorname{eg}_{\lambda}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \sin(xz + \lambda \pi) \cdot z^{2\lambda-1} dz$$

Lorsque $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, la relation (23) entre eg et ef permet leur expression par deux intégrales de Riemann différentes. Il en résulte une identité remarquable entre ces deux intégrales; la voici dans le cas particulièrement frappant où $\lambda = \alpha = \frac{1}{4}$ (1)

$$(41) \quad \int_0^{\infty} e^{-z^2} (\cos xz + \sin xz) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\infty} e^{-(z - \frac{x}{2})^2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

La formule de "réflexion" de Γ au point $\frac{1}{2}$ apparaît donc elle aussi comme un cas particulier d'une propriété des fonctions factorielles (mais les unités que nous avons adoptées (2) donnent à ce point l'affixe $\frac{1}{4}$).

(1) Une démonstration directe de cette identité particulière a été donnée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, séance du 23 novembre 1953.

(2) Ce n'est pas pour le plaisir de compliquer le raccordement avec les notations traditionnelles que nous avons adopté ces unités : c'est pour la simplicité des séries qui définissent les fonctions factorielles : (1) etc...

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Nous limiterons notre exposé aux cas où l'on peut exprimer les fonctions factorielles par intégrales de Riemann : cela nous suffira en pratique. La considération des intégrales de Cauchy présente des complications, mais ne donne pas lieu à grandes difficultés théoriques.

Nous supposons donc α ou λ réels > 0 ; nous étudierons ef_α et eg_λ pour x réel, et chercherons leurs comportements :

pour : $x \rightarrow +\infty$, et : $x \rightarrow -\infty$;

ainsi que pour : $\alpha \rightarrow +\infty$, et : $\lambda \rightarrow +\infty$

- A - $x \rightarrow \pm \infty$

1°) - Pour $x \rightarrow +\infty$, avec $\alpha > 0$, nous procéderons de la façon suivante : on a, d'après (33) :

$$ef_\alpha(x) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2+zx} z^{2\alpha-1} dz = 2 e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^\infty e^{-u^2} \left(u + \frac{x}{2}\right)^{2\alpha-1} du \sim$$

$$\sim 2e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha-1} \left[1 + \frac{(2\alpha-1)}{1!} \frac{2u}{x} + \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-2)}{2!} \left(\frac{2u}{x}\right)^2 + \dots \right] du$$

en vertu du comportement asymptotique de la courbe de Gauss.

Le second membre est une somme d'intégrales calculables : ce n'est pas une série convergente, mais la somme des p premiers termes pairs fournit un développement limité en au voisinage de $x \rightarrow +\infty$ (se voit en prenant une majorante du $(p+1)$ ème terme).

Donc :

$$(42) \quad ef_\alpha(x) \sim 2 \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha-1} \left[1 + (2\alpha-1)(2\alpha-2) \frac{1}{x^2} \dots \right]$$

Les termes suivants se calculent aisément; nous ne les explicitons pas, car nous n'en aurons guère besoin.

2°) - Pour $x \rightarrow -\infty$, (α étant toujours > 0) on obtient un développement asymptotique de ef en développant dans l'intégrale (33) le terme e^{-z^2} :

$$ef_\alpha(x) \sim 2 \int_0^\infty e^{xz} z^{2\alpha-1} \left(1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{4!} \dots \right) dz$$

(on le prouvera en prenant une majorante du reste).

Le second membre est une somme d'intégrales eulériennes, ce qui donne finalement :

$$(43) \quad ef_{\alpha}(x) \sim 2\Gamma(2\alpha) \cdot \frac{1}{|x|^{2\alpha}} \left[1 - \frac{2\alpha(2\alpha+1)}{1!} \frac{1}{x^2} + \dots \right]$$

3°) - α (ou λ) quelconque.

Nous avons obtenu des développements asymptotiques de ef_{α} au voisinage de $x = +\infty$ et de $x = -\infty$ lorsque α est positif. Un tel développement vérifie nécessairement une relation de récurrence entre trois valeurs de α décalées de $1/2$, en raison de la relation de récurrence (16) entre fonctions ef . Partant alors de deux valeurs positives de l'indice : $\alpha + 1$ et $\alpha + \frac{1}{2}$, on obtient les développements asymptotiques correspondant à α , et en remontant ainsi de $-\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$, on obtiendra les développements correspondant à n'importe quelle valeur négative de α .

Les formes analytiques des développements (42) et (43) donnent lieu à des identités dans la relation de récurrence (1) : donc elles subsistent sans modification pour $\alpha < 0$, pourvu que α ne soit pas multiple entier de $-\frac{1}{2}$, (auquel cas d'ailleurs ef n'existe pas).

Lorsque α est multiple entier de $-\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2} - \alpha$ est multiple entier de $\frac{1}{2}$, et eg_{λ} se réduit à un polynôme multiplié par $e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Récrivons les développements asymptotiques (42) et (43) sur la fonction eg :

$$(44) \quad eg_{\lambda} \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda) \Gamma(1 - \lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda} \left[1 + 2\lambda(2\lambda + 1) \frac{1}{x^2} + \dots \right]$$

pour $x \rightarrow +\infty$

$$(45) \quad eg_{\lambda} \sim \frac{2\Gamma(1 - 2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda) \Gamma(1 - \lambda)} e^{-\frac{x^2}{4}} (-x)^{2\lambda-1} \left[1 - \frac{(2\lambda-2)(2\lambda-1)}{1!} \frac{1}{x^2} + \dots \right]$$

pour $x \rightarrow -\infty$

Formules non valables pour $\lambda = \frac{k}{2}$ (k entier positif).

- B -

$\alpha \rightarrow +\infty$

L'idée de la méthode, valable pour d'autres types d'intégrales, réside dans le fait que, si $f(z)$ est une fonction unimodale, $f(z)^{\alpha}$ tend à prendre une forme gaussienne (à des dilatations près) lorsque $\alpha \rightarrow \infty$. Notre méthode permet par exemple une démonstration très simple de la formule de Stirling.

Pour alléger l'écriture, désignons par $\omega(x, \alpha)$ le mode de la fonction qui figure sous le signe $\int$ dans (33) :

$$\omega = \frac{x}{4} + \sqrt{\alpha - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}}$$

(1) Et la relation (16) permet de vérifier que le reste d'ordre n tend vers 0 avec $\frac{1}{|x|}$.

Posons alors :

$$z = \omega (x, \alpha) + v.$$

En faisant "sortir" le plus possible de l'intégrale (33) on peut écrire :

$$\text{ef}_\alpha(x) = 2\omega^{2\alpha-1}e^{\omega x - \omega^2} \int_{-\omega}^{+\infty} e^{-v^2 + (x-2\omega)v} \left(1 + \frac{v}{\omega}\right)^{2\alpha-1} dv.$$

En prenant $1 + \frac{v}{\omega}$ comme l'exponentielle de son logarithme, et développant ce dernier, on a :

$$\left(1 + \frac{v}{\omega}\right)^{2\alpha-1} = e^{(2\alpha-1)\left(\frac{v}{\omega} - \frac{v^2}{2\omega^2}\right) + \varepsilon}$$

ou ε tend vers 0 lorsque α et $\omega \rightarrow \infty$. La partie principale de l'intégrale est une intégrale de Gauss dont l'écart-type est infiniment petit lorsque α et $\omega \rightarrow \infty$; on peut donc confondre la borne inférieure d'intégration avec $-\infty$, et l'on trouve finalement

$$\text{ef}_\alpha(x) = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \omega^{2\alpha}}{\sqrt{\omega + \alpha - \frac{1}{2}}} \cdot e^{-\omega^2 + \omega x} [1 + O(\omega)]$$

où $O(\omega)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$.

Entenant compte de $\alpha - \frac{1}{2} = \omega^2 - \frac{\omega x}{2}$, on obtient l'harmonieuse formule :

$$(46) \quad \text{ef}_\alpha(x) \sim \frac{\left(\frac{\omega^2}{e}\right)^{\omega^2}}{\left(\frac{\omega}{e}\right)^{\omega x}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

Pour $x = 0$, on obtient un équivalent de la formule de Stirling ($\alpha = \omega^2 + \frac{1}{2}$).

Dans la pratique, nous aurons besoin d'expliciter la formule en α . On obtient, en posant $\beta^2 = \alpha - \frac{1}{2}$:

$$(47) \quad \text{ef}_\alpha(x) \sim \left(\frac{\beta^2}{e}\right)^{\beta^2} e^{\beta x + \frac{x^2}{8}} \sqrt{2\pi}$$

Il sera commode d'utiliser ce résultat sous la forme suivante, grâce à la formule (équivalente à celle de Stirling) qui s'obtient en faisant $x = 0$:

$$(48) \quad \text{ef}_\alpha(x) \sim \Gamma(\alpha) e^{\frac{x^2}{8} + x\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}}$$

Cette formule, exacte pour $x = 0$, est d'autant plus précise que x est petit devant α .

- C -

$$\lambda \longrightarrow +\infty$$

Le calcul est analogue, mais plus simple. On pose encore $z = \omega + v$, mais on laisse ω provisoirement indéterminé, et par la suite on est conduit à prendre, dans l'intégrale (40) :

$$\omega^2 = \lambda - \frac{1}{2}.$$

Le calcul donne séparément cg_λ et sg_λ ; pour eg_λ on trouve

$$(49) \quad eg_\lambda(x) \sim R(\lambda) \cdot \left(\frac{\omega^2}{e}\right)^{\omega^2}$$

avec

$$(50) \quad R(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}} \cos(x\omega + \pi\omega^2)$$

FORMULES DIVERSES

- A - LES FONCTIONS $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$

Nous désignerons par les notations $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ les dérivées de ef et e par rapport à l'indice :

$$(51) \quad \mathcal{L}f_{\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} ef_{\alpha}(x)$$

$$(52) \quad \mathcal{L}g_{\lambda}(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} eg_{\lambda}(x)$$

Le choix de la notation vient de ce que certaines primitives qui s'expriment ordinairement par fonctions factorielles présentent des cas d'exception ou les fonctions ci-dessus s'introduisent de la même manière que s'introduit le logarithme dans la primitive de x^K pour $K = -1$.

On vérifie sans peine que les séries et les intégrales définies qui représentent ef et eg donnent $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ par dérivation partielle en α et λ ; (pour $\mathcal{L}g$, on se rappellera que l'intégrale (40) n'a plus de sens lorsque $\lambda = \frac{n}{2}$; il faudrait alors dériver deux fois l'intégrale pour obtenir $\mathcal{L}g$).

Ces cas exceptés, on a pour α ou $\lambda > 0$:

$$(53) \quad \mathcal{L}f_{\alpha}(x) = 4 \int_0^{\infty} e^{-z^2+zx} \cdot z^{2\alpha-1} \cdot \mathcal{L}z dz$$

$$(54) \quad \mathcal{L}g_{\lambda}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{2\lambda-1} \left[2\mathcal{L}z \cdot \sin(xz + \pi\lambda) + \pi \cos(xz + \pi\lambda) \right] dz$$

De ces expressions on tire des développements asymptotiques par les mêmes méthodes que pour ef et eg . Nous aurons besoin de ceux qui se rapportent aux voisinages de $x = \pm \infty$ ils se calculent sur $\mathcal{L}f$, pour $\alpha > 0$ d'abord, puis pour α négatif par récurrence.

Il existe en effet une relation de récurrence pour $\mathcal{L}f$, que l'on obtient en dérivant (16) par rapport à α :

$$(55) \quad \mathcal{L}f_{\alpha+1}(x) = \frac{x}{2} \mathcal{L}f_{\alpha+\frac{1}{2}}(x) + \alpha \mathcal{L}f_{\alpha}(x) + ef_{\alpha}(x)$$

Et de même pour g :

$$(56) \quad \mathcal{L}g_{\lambda+1}(x) + \frac{x}{2} \mathcal{L}g_{\lambda+\frac{1}{2}}(x) + \lambda \mathcal{L}g_{\lambda}(x) + eg_{\lambda}(x) = 0.$$

On notera, en même temps, que $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ vérifient les équations différentielles en z ou t :

$$(57) \quad z'' = \frac{x}{2} z' + \alpha z + ef_{\alpha}(x)$$

$$(58) \quad t'' + \frac{x}{2} t' + \lambda t + eg_{\lambda}(x) = 0.$$

Ces équations s'intègrent facilement puisque (55) et (56) donnent une solution particulière avec second membre et que ef et eg vérifient respectivement les équations sans second membre.

On trouve ainsi

$$(59) \quad z = \mathcal{L}f_{\alpha}(x) + A ef_{\alpha}(x) + B ef_{\alpha}(-x)$$

$$(60) \quad t = \mathcal{L}g_{\lambda}(x) + C eg_{\lambda}(x) + D eg_{\lambda}(-x).$$

Donnons enfin les premiers termes des développements asymptotiques de $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ au voisinage de

$$x \rightarrow +\infty$$

$$(61) \quad \mathcal{L}f_{\alpha}(x) \sim 4\sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha-1} \left\{ \mathcal{L} \frac{x}{2} \cdot \left[1 + (2\alpha-1)(2\alpha-2) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + \left[(4\alpha-3) \frac{1}{x^2} + \dots\right] \right\}$$

$$(62) \quad \mathcal{L}g_{\lambda}(x) \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda} \left\{ \left[\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) + \psi(1-\lambda)\right] \left[1 + 2\lambda(2\lambda+1) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + \left[2(4\lambda+1) \frac{1}{x^2} + \dots\right] - 2\mathcal{L} \frac{x}{2} \left[1 + 2\lambda(2\lambda+1) \frac{1}{x^2} + \dots\right] \right\}.$$

$$(62bis) \quad \mathcal{L}g_{\frac{k}{2}}(x) \sim 4 \frac{(k-1)!}{(-x)^k} \left[1 + k(k+1) \frac{1}{x^2} + \dots\right],$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$(63) \quad \mathcal{L}f_{\alpha}(x) \sim 2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} \Gamma(2\alpha) \left\{ 2 \left[\psi(2\alpha) - 2\alpha(2\alpha-1) \phi(2\alpha+2) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + \left[2(3-4\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] - \mathcal{L} x^2 \left[1 - 2\alpha(2\alpha+1) \frac{1}{x^2} + \dots\right] \right\}.$$

$$(64) \quad \mathcal{L}g_{\lambda}(x) \sim \frac{e^{-\frac{x^2}{4}} \Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \left\{ \left[\psi(1-\lambda) + \psi\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - 2\psi(1-2\lambda)\right] \left[1 - (1-2\lambda)(2-2\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + \left[2(3-4\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + 2\mathcal{L} x^2 \left[1 - (1-2\lambda)(2-2\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] \right\}.$$

$$(64bis) \quad \mathcal{L}g_{\lambda}(x) \sim \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \left\{ \left[\psi(\lambda) + \psi(\lambda+\frac{1}{2}) - 2\psi(2\lambda)\right] \left[1 - \frac{(1-2\lambda)(2-2\lambda)}{x^2} + \dots\right] + \left[2(3-4\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] + 2\mathcal{L} x^2 \left[1 - (1-2\lambda)(2-2\lambda) \frac{1}{x^2} + \dots\right] \right\}.$$

- B - LES "FORMES QUADRATIQUES FACTORIELLES".

Nous désignerons ainsi les expressions de la forme

$$\sum A_i \text{ ef}_{\alpha_i} \text{ eg}_{\lambda_i}$$

dont certaines donnent lieu à des identités remarquables, qui font penser (et ce ne doit pas être une coïncidence) aux équations de la physique quantique ("crochets" de Dirac).

Soient u et v deux fonctions factorielles de première espèce, d'indices α et β ; on a

$$u'' = \frac{x}{2} u' + \alpha u$$

$$v'' = \frac{x}{2} v' + \beta v$$

On vérifiera alors sans peine l'identité suivante (en dérivant) :

$$(\alpha - \beta) \int^x u v e^{\frac{x^2}{4}} dx = (u'v - uv') e^{\frac{x^2}{4}} + cte$$

La constante se détermine aisément dans certains cas : si u et v sont des ef , la constante s'annule en prenant $-\infty$ pour borne inférieure d'intégration d'après (43). Si u et v sont toutes deux des cf ou toutes deux des sf , la constante s'annule en prenant 0 pour borne inférieure d'intégration (en raison de la parité).

L'identité (65) suppose $\alpha \neq \beta$; pour $\beta = \alpha$ on obtient une nouvelle identité par la règle de l'Hospital ; en désignant par u_1 la dérivée de u par rapport à l'indice α , on trouve :

$$(66) \quad \int^x u^2 e^{\frac{x^2}{4}} dx = (uu_1 - u_1u) e^{\frac{x^2}{4}} + cte$$

En particulier :

$$(67) \quad \int_{-\infty}^x \text{ef}_{\alpha}^2(x) e^{\frac{x^2}{4}} dx = (\text{ef}_{\alpha} \mathcal{L}f_{\alpha+\frac{1}{2}} - \text{ef}_{\alpha+\frac{1}{2}} \mathcal{L}f_{\alpha}) e^{\frac{x^2}{4}}$$

Ces derniers résultats expliquent, comme nous l'avions annoncé, la notation $\mathcal{L}f$.

L'EMPLOI DES FONCTIONS FACTORIELLES DANS LES LOIS DE PROBABILITÉ D'ÉTIENNE HALPHEN

(Note de M. P. LARCHER)

Les fonctions factorielles ont été étudiées à l'occasion de recherches sur les lois de probabilités dénommées : "Lois B. Halphen".

Ces lois ont pour densité de probabilité l'expression suivante :

$$f(z) = k e^{-z^2 + xz} \cdot z^{2\alpha - 1}$$

dépendant des deux paramètres x et α . L'intérêt de ces lois réside dans la grande diversité de formes des courbes de probabilités, suivant les valeurs données à ces paramètres. On obtient en effet des courbes en "J" (infinies à l'origine et décroissantes), des courbes en "S" (infinies à l'origine et présentant un maximum), des courbes de Gauss tronquées et enfin des courbes nulles à l'origine et présentant un maximum, dont les unes sont à l'origine tangentes à l'axe vertical, d'autres à l'axe horizontal, et d'autres enfin ont leurs tangentes à l'origine obliques.

La fonction de répartition pour ces lois est la suivante :

$$F(z) = K \int_0^z e^{-u^2 + xu} \cdot u^{2\alpha - 1} \cdot du$$

et comme on doit avoir $F(\infty) = 1$, la constante K a pour valeur :

$$K = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-u^2 + xu} \cdot u^{2\alpha - 1} \cdot du} = \frac{2}{e f_\alpha(x)} \text{ d'après (33)}$$

On voit immédiatement que les différents moments ont pour expression :

$$m_k = \frac{e f_{\alpha + k/2}(x)}{e f_\alpha(x)}.$$

En particulier, la moyenne désignée par la notation $k f_\alpha(x)$ est :

$$k f_\alpha(x) = \frac{e f_{\alpha + 1/2}(x)}{e f_\alpha(x)}.$$

C'est la dérivée logarithmique de $e f_\alpha(x)$ par rapport à x .

Sa dérivée par rapport à x est :

$$\frac{\partial k f_{\alpha}(x)}{\partial x} = \frac{ef_{\alpha+1}(x) ef_{\alpha}(x) - ef_{\alpha+1/2}^2(x)}{ef_{\alpha}^2(x)} = \frac{ef_{\alpha+1}(x)}{ef_{\alpha}(x)} - \left[\frac{ef_{\alpha+\frac{1}{2}}(x)}{ef_{\alpha}(x)} \right]^2$$

$$\frac{\partial k f_{\alpha}(x)}{\partial x} = m_2 - m_1^2 = \sigma^2.$$

La dérivée de la moyenne par rapport à x est égale à la variance.

Dérivons maintenant $k f_{\alpha}(x)$ par rapport à α :

$$\frac{\partial k f_{\alpha}(x)}{\partial \alpha} = \frac{\mathcal{L} f_{\alpha+1/2} ef_{\alpha} - ef_{\alpha+1/2} \mathcal{L} f_{\alpha}}{ef_{\alpha}^2}.$$

La relation (67) montre que cette dérivée est toujours positive. La moyenne est donc une fonction croissante de α .

La moyenne géométrique de ces lois s'exprime de la façon suivante, en la désignant par g :

$$\text{Log } g = \frac{2 \int_0^{\infty} e^{-u^2+xu} u^{2\alpha-1} \text{Log } u \, du}{ef_{\alpha}(x)} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L} f_{\alpha}(x)}{ef_{\alpha}(x)}$$

d'après (53). Son logarithme naturel est égal à la demi-dérivée logarithmique de $ef_{\alpha}(x)$ par rapport à α .

Moyenne, écart quadratique moyen et moyenne géométrique fournissent pour les lois B l'ajustement du maximum de densité ("maximum likelihood").

La dérivée par rapport à x est :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \right] = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+n} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \right] = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+n} \right]$$

La dérivée de la moyenne par rapport à x est égale à la variance.
Dérivons maintenant $K_1(x)$ par rapport à x :

$$\frac{d}{dx} K_1(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \right]$$

La relation (57) montre que cette dérivée est toujours positive. La moyenne est donc une fonction croissante de x .

La moyenne géométrique de ces lois s'exprime de la façon suivante, en la désignant par g :

$$\log g = \frac{1}{n} \log \left[\frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1) \Gamma(x+2) \dots \Gamma(x+n)}{\Gamma(x)^n} \right]$$

d'après (53). Son logarithme naturel est égal à la demi-dérivée logarithmique de $K_1(x)$ par rapport à x .

Moyenne, dérivée logarithmique, moyen et maximum de densité ("maximum likelihood") pour les lois H : "maximum likelihood".