HAL open science

Sur un aspect géométrique des analyses de variance

G. d'Herbemont

▶ To cite this version:

G. d'Herbemont. Sur un aspect géométrique des analyses de variance. Annales de l'ISUP, 1962, XI (3), pp.[195]-219. hal-04095046

HAL Id: hal-04095046

https://hal.science/hal-04095046v1

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR UN ASPECT GÉOMÉTRIQUE DES ANALYSES DE VARIANCE

G. D'HERBEMONT

La géométrie dans l'espace euclidien réel à N dimensions a été largement utilisée (1) pour faciliter certains raisonnements de statistique, notamment dans le domaine de la théorie des plans d'expérimentation et de l'analyse de variance.

Vus sous cet angle, les modèles linéaires, compte tenu de relations supplémentaires entre les paramètres représentent des sous espaces vectoriels d'un espace dont le nombre de dimensions est égal au nombre N des essais. Les résultats d'essais individuels sont les coordonnées d'un vecteur résultat X et poser un modèle linéaire A revient à avancer l'hypothèse que l'espérance de X :

$$M = E(X)$$

est un vecteur situé dans le sous-espace image de A.

L'estimation des moindre carrés de M dans le cadre du modèle A est la projection orthogonale de X sur A que nous noterons par X_A. Cette projection existe toujours et est toujours unique.

Le plus souvent on pose d'abord un modèle général de la forme :

$$X = H\beta + \varepsilon$$

dans lequel X et ε sont des vecteurs de l'espace des essais tandis que β est un vecteur d'un espace des paramètres et H une application linéaire de ce dernier espace dans le premier.

Des sous modèles sont alors obtenus en apportant certaines restrictions linéaires aux vecteurs β , c'est-à-dire que ces sous-

---

(1) cf. notamment les références (1) à (6)

modèles sont en premier lieu considérés comme des sous-espaces de l'espace des paramètres.

Ceci conduit donc à manier quatre espèces d'êtres différents : le vecteur X - des sous-espaces de l'espace des paramètres - l'opérateur H - des sous-espaces de l'espace des résultats.

Or l'analyse de variance ne fait intervenir que le vecteur X et les sous-espaces de l'espace des résultats. Pourvu que ces derniers restent invariants, tout changement correlatif de H et des paramètres ne change pas l'analyse.

Par ailleurs, cette analyse une fois terminée, on connaît le sous-espace à retenir et la définition des paramètres les plus judicieux est facilitée.

Tout ceci joue, semble-t-il en faveur d'une autre méthode qui a été utilisée dans certains cas particuliers et que nous généraliserons ici. Elle consiste à traiter le problème entièrement dans l'espace des essais.

Ceci nécessite évidemment de poser autant de modèles que d'hypothèses susceptibles d'être finalement retenues. Cet apparent désavantage est compensé par le fait que l'on peut choisir toute représentation paramétrique commode que l'on voudra pour chacun des modèles.

Ainsi, dans de nombreux cas, il est possible d'écrire immédiatement des modèles mettant en évidence un jeu de vecteurs orthogonaux deux à deux, d'autres modèles s'en déduisant par des opérations géométriques décrites plus loin. Dans le cas contraire (certaines hypothèses de régression) on pourra toujours appliquer la méthode d'orthogonalisation de Schmidt (1) - (Dans l'espace des essais, les polynômes orthogonaux sont des vecteurs de Schmidt particuliers, qu'il s'agisse des polynômes classiques ou de polynômes orthogonaux ne comportant pas de termes de certains degrés).

Au point de vue de la conduite des calculs, le problème consistera à déterminer comment, connaissant la projection de X sur les modèles pour lesquels le calcul est simple, on peut en déduire les projections de X sur les modèles qui en découlent par les diverses opérations géométriques.

---

(1) Réf. (8) ou (9)

Ainsi, au lieu de se préoccuper d'un modèle général :

$$m_{ij} = \mu + a_i + b_j \text{ avec } \sum a_i = 0 \text{ et } \sum b_j = 0,$$

et des hypothèses :

$$a_i = 0, b_j = 0 \ ;$$

on dira qu'il s'agit d'une analyse à deux modèles principaux :

$$A : m_{ij} = a_i \text{ et } B : m_{ij} = b_j$$

complétés par leur somme géométrique et leur intersection.

Il ne semble pas cependant que l'on trouve, dans la littérature (1) tous les outils géométriques nécessaires pour traiter le problème de cette façon. C'est pourquoi, le but du présent exposé est principalement de montrer que ces outils peuvent au besoin être créés et que leur emploi conduit à des notions peut-être plus simples et en tous cas plus imagées que certains textes basés sur le calcul matriciel.

On s'est borné ici au cas de l'analyse de variance avec effets fixes. Mais les notions évoquées paraissent également pouvoir s'appliquer aux analyses avec effets aléatoires. Les résultats individuels seront supposés non corrélés entre eux et affectés d'une même variance ce qui suffit à justifier l'utilisation de la méthode des moindre carrés non pondérés.

I - DECOMPOSITIONS ORTHOGONALES RELATIVES A DEUX SOUS ESPACES.

Nous utiliserons les notations suivantes

A, B, C,	.....	: sous espaces vectoriels
X,	.....	: vecteur
AnB	.....	: espace vectoriel intersection de A et B (peut être nul, jamais vide).
$\bar{A}$	.....	: complément orthogonal de A (sous espace des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A)

---

(1) réf (7) à (10), par exemple

$A + B$ ..... : somme géométrique (sous espace des vecteurs, somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B)

$A \subset B$ ..... : relation d'inclusion

$X_{A,B}$ ..... : projection orthogonale de X sur A puis sur B

$n(A)$ ..... : nombre de dimensions de A,

ainsi que les définitions suivantes :

- A et B sont orthogonaux (au sens strict) si $A \subset \overline{B}$

- A et B parallèles (au sens strict) si, pour $n(A) \leqslant n(B)$, tout vecteur de A appartient à B ($A \subset B$)

- A et B ($n(A) \leqslant n(B)$) sont obliques au sens strict si aucune direction de A n'est parallèle ni orthogonale à B (dans les cas d'inégalité il y a toujours au moins une direction de B orthogonale à A).

On peut montrer que

(1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $n(A + B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(3) Les quatre relations suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$A \subset B \qquad A = A \cap B$$

$$\overline{B} \subset \overline{A} \qquad B = A + \overline{A} \cap B$$

(4) $A \subset B$ et $C \subset D$ entraînent $A + C \subset B + D$

(5) $A \cap B + A \cap C \subset A \cap (B + C)$

(il n'y a donc pas généralement distributivité de l'intersection géométrique par rapport à la somme géométrique. Exemple : trois droites distinctes dans un même plan et passant par l'origine).

Si on pose :

(6) $\overline{S} = A \cap B + A \cap \overline{B} + \overline{A} \cap B + \overline{A} \cap \overline{B}$,

on obtient immédiatement une décomposition de l'espace entier E en cinq sous espaces orthogonaux deux à deux (au sens strict).

(7) $E = S + \bar{S} = A n \bar{B} + \bar{A} n B + \bar{A} n \bar{B} + A n B + S$

Certains de ces sous espaces peuvent être nuls (ne contenir que le vecteur nul ou espace origine noté 0).

Nous verrons plus loin que le sous espace S présente un grand intérêt car S = 0 entraîne l'orthogonalité du plan d'expérience destiné à tester A et B.

Puisque $\bar{A} n \bar{B} \subset \bar{S}$: $S \subset A + B$ (d'après (1) et (3)).

En ajoutant A au deux membres de 6 on a après regroupement

$$\bar{A} + \bar{S} = A n B + A n \bar{B} + \bar{A}$$

et en prenant le complément des deux membres :

$$S n A = A n \overline{(A n B + A n \bar{B})}$$

si bien que, puisque $(A n B + A n \bar{B}) \subset A$ on a d'après (3)

(8) $A = (A n B) + (A n \bar{B}) + S n A$

D'après (6) S ne change pas en changeant A en B, A en $\bar{A}$ ou B en $\bar{B}$ - Il résulte alors de (8) que l'on a :

(9) $B = A n B + \bar{A} n B + S n B$

(10) $\bar{A} = \bar{A} n B + \bar{A} n \bar{B} + S n \bar{A}$

(11) $\bar{B} = A n \bar{B} + \bar{A} n \bar{B} + S n \bar{B}$

Ajoutant (8 et 10) d'une part (9 et 11) d'autre part, on obtient deux décompositions de l'espace entier en 6 sous-espaces orthogonaux deux à deux au sens strict. :

(12) $E = A n B + \bar{A} n B + \bar{A} n \bar{B} + A n \bar{B} + S n A + S n \bar{A}$

(13) $E = A n B + A n \bar{B} + \bar{A} n B + \bar{A} n \bar{B} + S n B + S n \bar{B}$

Si S = 0 les deux décompositions se réduisent à une seule. Nous désignerons sous le nom de bases primaires les quatre sous-espaces communs aux deux décompositions et sous le nom de bases secondaires, les quatre autres sous-espaces.

En combinant convenablement les égalités (5) à (13), on trouve que les bases secondaires jouissent des propriétés suivantes :

(14) La somme géométrique de deux quelconques d'entre elles est égale à S.

(15) L'intersection de deux d'entre elles est nulle.

(16) Elles ont toutes même nombre de dimensions $\frac{n(S)}{2} = s$ (conséquence immédiate de (14) et (15).

(17) d'après 16, la nullité d'une base secondaire entraîne la nullité de toutes les autres et celle de S.

(18) si $S \neq 0$, les bases secondaires de (12) et les bases secondaires de (13) sont obliques entre elles (au sens strict), dans le cas contraire $S = 0$.

(19) $A \subset B$ entraîne $S = 0$ et $A \cap \overline{B} = 0$, et réciproquement.

Considérons maintenant l'ensemble ε des sous-espaces distincts que l'on peut obtenir en effectuant la somme géométrique d'un nombre quelconque de bases (primaires ou secondaires). (1)

La somme géométrique de deux tels sous-espaces est évidemment un sous-espace de ε . Le complément orthogonal d'un sous-espace ε est également un sous espace de ε : il suffit pour le voir d'utiliser selon le cas (7) (12) (13). Il résulte alors de (1) que l'intersection géométrique de deux sous-espaces de ε est un sous espace de ε .

A et B appartenant à ε d'après (8) et (9), on voit que ε est l'ensemble des sous-espaces que l'on peut déduire de A et B par des opérations de sommation géométrique d'intersection et de complémentation orthogonale effectuées en nombre et dans un ordre quelconque.

II - APPLICATION A L'ANALYSE DE VARIANCE.

Les conclusions auxquelles nous venons de parvenir ainsi paraissent particulièrement importantes en analyse de variance pour les raisons suivantes :

---

(1) On verrait facilement que ε contient au plus $2^4 \times 6 = 96$ sous espaces distincts en comptant 0 et E.

Soient parmi les modèles à tester dans une analyse de variance, deux modèles - A et B - on désirera généralement tester également le modèle AnB, intersection géométrique, qui correspond aussi à l'intersection logique : les deux hypothèses "Présence de M sur A" et "Présence de M sur B" sont affirmés simultanément.

Par ailleurs, la somme logique des deux hypothèses "M est sur A ou sur B" n'est pas un modèle linéaire et dans de nombreux problèmes, c'est une hypothèse qui n'a guère d'intérêt car son affirmation est celle d'un doute qu'il s'agit précisément de lever.

Par contre, cette somme logique entraîne que M est sur A + B, somme géométrique qui, elle, dans la plupart des problèmes, a un sens physique précis (additivité des effets).

Enfin, pour effectuer un test de présence de M sur un modèle, on devra généralement considérer l'écart d'un certain vecteur $\widehat{M}$ à ce modèle, c'est-à-dire faire intervenir le complément orthogonal du sous-espace correspondant au modèle considéré.

Soit, par exemple, un plan d'expérimentation dans lequel on désire tester deux modèles A et B, en supposant que A + B est vraie.

Il peut s'agir d'une étude comportant un facteur principal et un facteur bloc ou deux facteurs additifs, A et B pouvant être des modèles de régression ou des modèles factoriels.

On sait que le "carré résiduel" sera le carré de l'écart de X à A + B, c'est-à-dire le carré de la composante de X sur l'espace des normales à A + B :

$$\overline{A + B} = \overline{A} n \overline{B}$$

qui est une base primaire orthogonale à toutes les bases.

Le test des effets attribuables à A (ou test de B est vraie) utilise la composante de X située dans le sous-espace des normales à B, contenues dans A + B soit : $\overline{B} n (A+B)$

Mais ceci peut certainement s'exprimer sous forme d'une somme de bases. Ainsi, d'après (1) et en utilisant (9) et (13).

$$\overline{B} n (A+B) = \overline{B + \overline{A} n \overline{B}} = A n \overline{B} + S n \overline{B}$$

Si B est reconnu vrai, on désire généralement tester si $A \cap B$ est vraie, c'est-à-dire, si, dans B, M s'écarte de $A \cap B$; l'écart correspondant est donc dans l'espace :

$$B \cap \overline{A \cap B} = \overline{\bar{B} + A \cap B} = \bar{A} \cap B + S \cap B$$

$A \cap B$ permet, si jugé utile, de tester l'écart par rapport à l'espace nul.

On voit que l'analyse effectuée de cette façon correspond à la décomposition (13) - Effectuée dans un autre ordre, elle correspondrait à la décomposition (12).

En résumé, on peut dresser le tableau suivant.

Tableau 1

METHODE (a)	degrés de liberté	somme des carrés (a)	somme des carrés (b)	METHODE (b)
B Ignorant A				B compte tenu de A
1ère composante	s	$X^2_{S \cap B}$	$X^2_{S \cap \bar{A}}$	1ère composante
* 2ème composante	b-I-s	$X^2_{\bar{A} \cap B}$	$X^2_{\bar{A} \cap B}$	2ème composante
Sous-Total	b - I	$X^2_B - X^2_{A \cap B}$	$X^2_{A+B} - X^2_A$	Sous-Total
A compte tenu de B				A ignorant B
1ère composante	s	$X^2_{S \cap \bar{B}}$	$X^2_{S \cap A}$	1ère composante
* 2ème composante	a-I-s	$X^2_{A \cap \bar{B}}$	$X^2_{A \cap \bar{B}}$	2ème composante
Sous-Total	a - I	$X^2_{A+B} - X^2_B$	$X^2_A - X^2_{A \cap B}$	Sous-Total
RESIDU *	N-a-b+I	$X^2_{\bar{A} \cap \bar{B}}$	$X^2_{\bar{A} \cap \bar{B}}$	RESIDU
TOTAL GENERAL	N - I	$X^2 - X^2_{A \cap B}$	$X^2 - X^2_{A \cap B}$	

Ce tableau est valable pour les analyses de deux modèles additifs A et B quelconques.

En ce qui concerne les degrés de liberté, nombre de dimensions des sous espaces, on a posé :

$$n(A) = a, \; n(B) = b; \; n(A \cap B) = I, \; n(S) = 2\,s$$

qui compte tenu des diverses formules de décomposition données plus haut permettent de calculer les nombres de dimensions des bases.

Les analyses du tableau 1 comportent divers cas particuliers :

a) Plans d'expérimentation dits orthogonaux.

On sait que pour ces plans l'analyse est unique. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est S = 0. Seuls subsistent alors dans le tableau 1 les termes marqués d'une étoile, tous les autres sont identiquement nuls.

L'identité des deux analyses montre notamment que l'on a dans ce cas :

$$X^2_{A+B} = X^2_A + X^2_B - X^2_{A\cap B}$$

et que le résidu est :

$$X^2_{\bar{A}\cap\bar{B}} = X^2 - X^2_A - X^2_B + X^2_{A\cap B},$$

formule qui généralise, par exemple, l'expression du carré résiduel des plans d'expérimentation orthogonaux à deux facteurs additifs :

$$X^2_{\bar{A}\cap\bar{B}} = \sum x^2_{ij} - \sum x^2_{i.} - \sum x^2_{.j} + \sum x^2_{..}$$

b) Modèle hiérarchique.

Lorsque $A \subset B$ on peut raisonner directement de façon beaucoup plus simple. Mais il paraît intéressant de remarquer que d'après (19) il s'agit d'un cas particulier du précédent pour lequel :

$$S = 0 \text{ et } A\cap\bar{B} = 0$$

si bien que l'analyse du tableau 1 se réduit à la suivante :

$$(X^2 - X^2_{A\cap B}) = X^2_{\bar{A}\cap\bar{B}} + X^2_{\bar{A}\cap B}$$

Cette relation n'est autre que l'identité de Pythagore, écrite pour le triangle X, X_B, X_A, rectangle en X_B, d'après le théorème des trois perpendiculaires. On a en effet ici : A = AnB et A+B = B et en s'appuyant sur le fait que le triangle X, X_A, 0, est rectangle en X_A on retrouve :

$$(X - X_A)^2 = (X - X_B)^2 + (X_B - X_A)^2$$

c) Blocs incomplets équilibrés.

Nous verrons plus loin que dans le cas des blocs incomplets équilibrés on a :

$$S \neq 0 \qquad A \cap \overline{B} = 0$$

Si A est le modèle "influence des traitements ignorant les blocs", et B le modèle "influence des blocs ignorant les traitements".

On a donc : a - I - s = 0 et le terme correspondant du tableau 1 est identiquement nul.

Par ailleurs :

a = t (nombre de traitements,)

b = b (nombre de blocs.)

I = n (AnB) = 1 (Hypothèse "aucune influence")

s = t - 1 (car a - I - s = 0)

Ceci permet de calculer tous les termes de la colonne "degrés de liberté" de tableau 1.

Pour effectuer le calcul des diverses sommes de carrés on peut utiliser une méthode géométrique dont le principe est esquissé plus loin.

On constaterait alors que l'analyse de variance ainsi obtenue est identique à celle donnée par Yates, telle qu'elle est décrite par Kempthorne (1).

On peut montrer, en effet que les quantités V_j B_i Q_j W_j de l'analyse de Yates ne sont autres que les coordonnées des vecteurs: rX_A , kX_B , $rX_{S\cap\overline{B},A}$ et kr (t-1) $X_{S\cap\overline{A},B,A}$, et que :

$$X^2_{S\cap\overline{B},\ A} = X^2_{S\cap\overline{B}} \quad \sin^2\varphi$$

$$X^2_{S\cap\overline{A},\ B,A} = X^2_{S\cap\overline{A}} \quad \sin^2\varphi \ \cos^2\varphi$$

---

(1) réf (2) - Table 26. 3 - page 536 (toutefois cette table comporte une erreur typographique, se reporter à Fisher and Yates-Statistical Tables - page 26).

où l'angle φ a la valeur indiquée plus loin.

Il semble que l'on puisse conclure du présent paragraphe que l'idée de dresser des tableaux d'analyse de variance par voie purement géométrique et sans particulariser l'expression paramétrique des modèles, peut conduire à des résultats assez synthétiques concernant la structure des analyses de variance.

Dans le paragraphe suivant on s'efforcera de montrer, (toujours dans le cas de deux modèles additifs) qu'une analyse plus poussée de la position relative des sous-espaces représentatifs des modèles peut conduire à simplifier le calcul des sommes de carrés.

III - ANGLES DE DEUX SOUS-ESPACES - ISOCLINISME.

L'angle φ que forme une droite D portée par un vecteur X avec un sous-espace B est l'angle minimum que forme D avec toutes les directions de B. Si D n'est pas orthogonale à B ce minimum correspond à la direction de B définie par X_B. On peut déterminer l'angle φ à l'aide de l'une des égalités :

$$X^2 \cos^2 \varphi = X_B^2 = X.\ X_B$$

Soient deux sous-espaces A et B. Parmi les directions de A celles contenues dans $A \cap B$ forment un angle nul avec B et celles contenues dans $A \cap \overline{B}$, un angle droit. Ceci permet de déterminer l'angle formé avec B par toute direction de A contenue dans $A \cap B + A \cap \overline{B}$. Il reste à étudier les angles des directions contenues dans $S \cap A$.

Ces dernières étant contenues dans S sont orthogonales à $A \cap B$ et à $\overline{A} \cap B$, si bien que les angles qu'elles forment avec B ne sont autres que les angles qu'elles forment avec $S \cap B$. On est donc ramené à l'étude des angles mutuels entre $S \cap A$ et $S \cap B$.

Bien que la définition des angles mutuels entre deux sous espaces puisse être considérée comme classique (1), nous la rappellerons ici brièvement sous une forme directement utilisable en analyse de variance.

Soit X un vecteur de $S \cap A$ et Y un vecteur de $S \cap B$, l'angle formé par les deux droites ainsi définies est supérieur à zéro, les deux sous-espaces n'ayant pas de direction commune, il existe donc né-

---

(1) cf. notamment réf (7) page 45 paragraphe 15

cessairement une position X_1 de X et Y_1 de Y telle que l'angle ainsi formé soit minimum. Cet angle étant minimum aussi bien pour une variation de X_1 que pour une variation de Y_1 il en résulte que la droite portée par X_1 a pour projection orthogonale sur SnB la droite portée par Y_1 et qu'inversement, Y_1 a pour projection sur SnA un vecteur colinéaire à X_1 .

On définit ainsi un premier angle mutuel φ_1 .

Considérons maintenant le sous-espace de SnA orthogonal à X_1 et le sous espace de SnB orthogonal à Y_1 on peut en opérant comme ci-dessus déterminer deux directions X_2 et Y_2 et un angle φ_2 . Or X_2 est orthogonal au plan X_1 Y_1 puisqu'il est orthogonal à X_1 et à la direction de ce plan qui projette Y_1 en X_1 ; donc X_2 est orthogonal à Y_1 .

La projection de X_2 sur SnA, se fait donc selon Y_2 . De même Y_2 a pour projection orthogonale sur SnB un vecteur colinéaire à X_2 . φ_2 est un second angle mutuel.

En procédant ainsi, de proche en proche, on définirait s angles mutuels entre SnA et SnB par une suite de couples de directions X et Y.

Un cas qui semble important en analyse de variance est celui où les s angles ainsi définis ne sont pas tous inégaux mais ne prennent qu'un petit nombre de valeurs différentes.

Ainsi, si les s angles sont tous égaux, à une même valeur φ , tout vecteur de SnA projeté successivement sur B et sur A se trouve finalement multiplié simplement par le même scalaire $\cos^2\varphi$.

Lorsque deux sous-espaces présentent cette disposition nous dirons qu'ils sont <u>isoclines</u>.

Soient donc deux modèles isoclines A et B et considérons la décomposition résultant de (8) :

$$X_A = X_{A\cap B} + X_{A\cap \bar{B}} + X_{S\cap A}$$

projetons là sur B, on a :

$$X_{A,B} = X_{A\cap B} + X_{S\cap A,B}$$

C'est une décomposition orthogonale car le 1er vecteur du second membre est dans $\bar{S}$ et le second dans S.

On a donc :

$$X^2_{A,B} = X^2_{A\cap B} + X^2_{S\cap A,B}$$

Mais du fait de l'isoclinisme :

$$X^2_{S\cap A,B} = X^2_{S\cap A} \cos^2\varphi$$

On a donc calculé l'un des termes du tableau I

$$X^2_{S\cap A} = (X^2_{A,B} - X^2_{A\cap B}) : \mathrm{Cos}^2\,\varphi$$

en utilisant deux projections successives sur A et B. On verrait que tous les termes de ce tableau peuvent être calculés de façon analogue.

Il est à remarquer que cette opération de projection successives* est exactement celle que l'on utilise pour l'interprétation des plans en blocs équilibrés. On voit immédiatement en effet, que les "sommes des totaux des blocs où figure le traitement j" sont les coordonnées du vecteur : :

$$r\ k\ X_{B,A}$$

puisque l'ajustement à B consiste à identifier tous les résultats d'un bloc à la moyenne de bloc et que l'ajustement subséquent à A consiste à reprendre les résultats ainsi modifiés et à les remplacer par leur moyenne relative au traitement qui leur correspond.

Or, on peut montrer que les plans d'expérience en blocs incomplets équilibrés sont des plans dans lesquels les deux modèles A (traitements seuls) et B (blocs seuls) sont isoclines* .

Une démonstration élémentaire de cette propriété consiste à faire apparaître que pour tout vecteur X de A on a :

(22) $$(X_A - X_{A\cap B})_{BA} = (X_A - X_{A\cap B})\ \mathrm{Cos}^2\,\varphi$$

qui exprime que tout vecteur de A orthogonal à $A\cap B$ est une direction propre et, par conséquent aussi, que $A\cap\bar{B} = 0$.

---

* Voir aussi réf. 6 pour un cas d'utilisation de projections orthogonales successives dans un plan d'expérimentation non isocline.

* L'angle ainsi défini est distinct de l'angle de Schutzenberger, désigné également par φ dans la réf. 4, page 274.

La relation (22) étant linéaire il suffit de la montrer pour les vecteurs Y de A dont les coordonnées sont 1 pour le traitement j et 0 pour les autres.

Les calculs sont condensés dans le tableau 2. $Y_{A \cap B}$ correspond à la moyenne générale :

$$y_{..} = \frac{r}{N} = \frac{r}{tr} = \frac{1}{t}$$

Tableau 2

	COORDONNEES.	
	Pour les r essais relatifs au traitement j.	Pour les N-r autres essais
Y	1	0
$Y_{A \cap B}$	$1/t$	$1/t$
Y_{BA}	$\frac{1}{k}$	$\frac{\lambda}{kr}$
$Y - Y_{A \cap B}$	$\frac{t-1}{t}$	$\frac{-1}{t}$
$Y_{BA} - Y_{A \cap B}$	$\frac{t-k}{kt}$	$\frac{\lambda t - kr}{krt}$

Y_{BA} est obtenu en prenant les moyennes pour les blocs $\left(\frac{1}{k}\right.$ pour les blocs contenant le traitement j et zéro pour les autres$\left.\right)$, puis la moyenne relative aux divers traitements. Pour le traitement j on trouve r valeurs égales à $\frac{1}{k}$ et pour les autres λ valeurs égales à $\frac{1}{k}$ et $r - \lambda$ valeurs égales à zéro soit la moyenne $\frac{\lambda}{kr}$ indiquée.

En utilisant la relation bien connue :

$$\lambda (t-1) = r (k-1)$$

on constate qu'il y a proportionnalité entre les valeurs des deux dernières lignes :

$$\frac{t-k}{kt} : \frac{t-1}{t} = \frac{\lambda t - kr}{krt} : \frac{-1}{t} = \cos^2 \varphi$$

si bien que les deux vecteurs sont bien colinéaires et que l'angle φ est donné par :

$$\cos^2 \varphi = \frac{t-k}{k(t-1)} = \frac{r-\lambda}{kr}$$

ou

$$\mathrm{Sin}^2 \varphi = 1 - \mathrm{Cos}^2 \varphi = \frac{\lambda t}{rk}$$

qui n'est autre que "l'efficiency factor" (Kempthorne ouv. cit. page 533).

Une démonstration plus rapide résulterait d'un théorême plus général que nous ne pouvons établir ici :

"La condition nécessaire et suffisante d'isoclinisme pour les plans en blocs égaux et à répétitions égales de chaque traitement est :

(23) $$\sum_{i'j'} n_{ij'}\ n_{i'j}\ n_{i'j} = a\ n_{ij} + b$$

a et b étant deux constantes caractéristiques de plan et n_{ij} le nombre d'essais dans la case i,j- "

Cette formule montrerait par exemple que le plan en blocs incomplets partiellement compensé (à deux classes d'associés) constitué par les 6 blocs suivants :

(123) , (456) , (789) , (147) , (258) , (369).

est un plan isocline pour lequel a = 3 et b = 1.

IV - ORTHOPARALLELISME DE PLUSIEURS SOUS ESPACES.

Nous avons vu que la nullité du sous-espace S relatif à deux sous-espaces A et B entraînait l'identité entre les deux décompositions orthogonales (12) et (13).

Mais, d'après (16), la relation S = 0 est équivalente à la suivante :

(24) $A = A \cap B + A \cap \overline{B}$, obtenue en annulant $S \cap A$ dans (8).

Si, en outre, $A \cap \overline{B} = 0$ on a $A \subset B$ et les sous espaces sont strictement parallèles, tandis que si, $A \cap \overline{B} = 0$ on a $A \subset \overline{B}$ et les deux sous espaces sont strictement orthogonaux. Il apparaît donc naturel de dire, lorsque (24) est vraie que l'on a orthoparallélisme entendant par là que la composante oblique $S \cap A$ est nulle. Réciproquement (24) c'est-à-dire la nullité de $S \cap A$ entraîne celle de $S \cap B$ si bien que la relation est réciproque d'après (9).

Nous noterons cette relation par le signe $\sqcup$ qui s'énoncera : "orthoparallèle à".

Soient q sous-espaces B_i (i = 1 à q) nous dirons qu'un sous espace appartient au S I C des B_i s'il peut être obtenu en effectuant, sur les B_i des opérations de sommation géométrique, d'intersection ou de complémentation orthogonale, en nombre et dans un ordre quelconque.

Première propriété fondamentale.

Une première propriété fondamentale de l'orthoparallélisme est la suivante :

"Si un sous espace A est orthoparallèle à q sous espaces B_i, l'intersection par A est distributive par rapport à la somme géométrique des B_i. Autrement dit :

$$\text{(25)} \qquad \begin{array}{c} \text{si } A \sqcup B_i \text{ par tout } i \\ A \cap \sum B_i = \sum (A \cap B_i)\text{"} \end{array}$$

Pour le montrer, partons de l'identité :

$$(A \cap \sum B_i) = \sum (A \cap B_i) + (A \cap \sum B_i) \cap \overline{\sum (A \cap B_i)}$$

qui résulte de ce que le deuxième membre de (25) est inclus dans le premier. Or, d'après (1) on a l'identité :

$$\text{(26)} \quad A \cap \sum B_i \cap \overline{\sum A \cap B_i} = A \cap \sum B_i \cap \overline{A \cap B_i} \cap \overline{A \cap B_2} \cap \ldots \cap \overline{A \cap B_q}$$

mais si,

$$A \sqcup B_i \text{ on a : } A \cap \overline{A \cap B_i} = A \cap \overline{B_i}$$

si bien que le second membre de (26) s'écrit :

$$A \cap \sum B_i \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_q} = A \cap \sum B_i \cap \overline{\sum B_i} = 0,$$

Deuxième propriété fondamentale.

Une seconde propriété fondamentale est la suivante :

(27) "Si $A \perp\!\!\!\perp B_i$ pour tout i, A est orthoparallèle à tout S I C des B_i ".

Pour la démontrer, il suffit d'établir que, A, B, C, étant trois sous espaces, les deux relations :

$$A \perp\!\!\!\perp B \text{ et } A \perp\!\!\!\perp C$$

entraînent :

a) $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

b) $A \perp\!\!\!\perp (B + C)$

l'orthoparallélisme de A avec $B \cap C$, s'en déduisant par (1).

Or, $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$ résulte de ce que S ne change pas, par substitution de B à $\overline{B}$ dans (6) ; si bien que A et $\overline{A}$ sont orthoparallèles à B et à C. En s'appuyant sur (25) on a donc :

$$A \cap (B+C) + \overline{A} \cap (B+C) = A \cap B + A \cap C + \overline{A} \cap B + \overline{A} \cap C$$

et en s'appuyant sur (24) appliqué à A, B ou à A, C :

$$A \cap (B+C) + \overline{A} \cap (B+C) = B + C,$$

qui n'est autre que (24) écrite pour A et (B+C), et démontre donc la seconde propriété fondamentale.

Exemple :

Si dans un plan d'expérience à trois facteurs (1) avec répétitions en nombres quelconque ; ces nombres sont cependant tels que le modèle A :

$$A : m_{ijkr} = a_{ij}$$

---

(1) On supposera que le plan est simplement connexe par tout i, j, k au sens défini paragraphe 6.

est orthoparallèle aux deux modèles :

$$B : m_{ijkr} = b_{ik} \text{ et } C : m_{ijkr} = c_{jk}$$

A est aussi orthoparallèle au modèle BnC :

$$m_{ijkr} = d_k$$

ou même au modèle :

$$BnC + AnC + AnB : m_{ijkr} = f_i + g_j + h_k$$

ou encore au modèle B + C, qui correspond à l'absence d'interaction entre les deux premiers facteurs (d'indices i et j).

Indicateur d'obliquité.

De la même façon que dans le cas de deux sous espaces posons pour q sous espaces quelconques A_i :

$$\overline{S} = \sum_{\alpha\beta\lambda} A_1^{\alpha} \text{ n } A_2^{\beta} \text{ n} \ldots \text{ n } A_q^{\lambda} \tag{28}$$

Les indices $\alpha\beta\ldots\lambda$ prenant la valeur 0 pour signifier que le sous espace correspondant n'est pas modifié, ou la valeur 1 pour signifier qu'il est complémenté orthogonalement.

Tout espace A_i par exemple A_1 , est orthoparallèle à toute base primaire. En effet, une base primaire quelconque est soit dans A si $\alpha = 0$, soit dans $\overline{A}$, si $\alpha = 1$. Il en résulte que tout A_i est également orthoparallèle à S, puisque ce dernier appartient au S I C des bases primaires par définition.

On peut désigner S sous le nom d'indicateur d'obliquité relatif aux A_i , car sa nullité entraîne l'orthoparallélisme deux à deux de tous les A_i , et réciproquement, l'orthoparallélisme deux à deux de tous les A_i entraîne S = 0.

En effet, si les A_i sont orthoparallèles deux à deux, il y a distributivité de l'intersection par rapport à la somme géométrique pour tout le S I C des A_i . La formule (28) se réduit alors simplement a :

$$\overline{S} = E \quad \text{soit} \quad S = 0$$

Réciproquement, si S = 0 (28) s'écrit :

(29) $$E = \sum A_1^{\alpha} \text{ n} \ldots \text{ n} A_q^{\lambda}$$

Coupons les deux membres par A_1 ; on a distributivité de cette intersection puisque A_1 est orthoparallèle à toutes les bases ; on a donc :

$$A_1 = \sum_{\beta \ldots \lambda} A_1 \text{ n } A_2^{\beta} \text{ n} \ldots \text{ n } A_q^{\lambda}$$

si bien que A_1 et de la même façon tous les A_i , appartiennent au S I C des bases primaires - Donc, d'après (27) A_1 est orthoparallèle à tout A_i , ce qui démontre la réciproque.

On verrait facilement que la relation S = 0 est équivalente à la suivante :

(30) Il existe des sous espaces E_1 , $E_2 \ldots E_p$ orthogonaux deux à deux, au sens strict, et tels que tout A_i puisse s'exprimer sous forme de somme géométrique d'un certain nombre d'entre eux.

Démontrons enfin, le théorême suivant qui s'applique immédiatement au cas des carrés de Youden.

(31) Si l'indicateur d'obliquité est S, pour un ensemble de sous espaces A_i , le fait d'adjoindre un nouveau sous espace B de façon qu'il soit orthoparallèle à tous les A_i , ne modifie pas S.

En effet, chaque base primaire de (28) relativement aux A est alors orthoparallèle à B et peut donc se décomposer :

$$A_1^{\alpha} \text{ n } A_2^{\beta} \text{ n} \ldots A_q^{\lambda} = A_1^{\alpha} \text{ n} \ldots \text{n } A_q^{\lambda} \text{ nB} + A_1^{\alpha} \text{ n} \ldots \text{nA}_q^{\lambda} \text{ n}\overline{\text{B}}$$

ce qui montre que $\overline{S}$ reste inchangé.

V - APPLICATION A L'ANALYSE DE VARIANCE.

Dans le cas général de q modèles A_i , obliques deux à deux, de grandes difficultés se présentent. Or, dans le cas de plans d'expérience factoriels, il ne semble pas qu'il existe dans la littérature de plans effectivement utilisés, qui appartiennent à ce type. Il s'en présente par contre dans l'analyse des régressions multiples pour lesquels on peut dire que les complications qui résultent notamment du choix de divers ordres possibles (1) d'introduction des variables, sont la traduction exacte des difficultés géométriques.

---

(1) Cf. réf. (11)

Pour prendre un exemple simple d'obliquité, prenons celui des carrés de Youden.

Aux sous-espaces A et B (traitements et blocs) déjà définis à propos des blocs incomplets équilibrés, on ajoute un sous espace C correspondant à la classification alphabétique.

On voit immédiatement que :

$$C \sqcup A \quad \text{et} \quad C \sqcup B$$

si bien que, comme indiqué au paragraphe 4, S reste inchangé et C est orthoparallèle à toutes les bases (primaires ou secondaires) relatives à A et B.

On voit en outre que l'on a les relations suivantes :

$$AnB = AnC = BnC = AnBnC \tag{32}$$

car dans les quatre cas on obtient le modèle.

$$m_{ijk} = \text{constante.}$$

En coupant (32) par S, et puisque SnAnB = 0 on a :

$$SnAnC = 0$$

$$SnBnC = 0$$

d'où $$Cn(SnA) + Cn(SnB) = C \cap S = 0$$

si bien que C est strictement orthogonal à S, et ne fait donc intervenir, dans son expression, que les bases primaires soit :

$$C = AnB + \bar{A}n\bar{B}nC$$

car ici $$\bar{A}nB = An\bar{B} = 0 \text{ puisque } b = t$$

Les deux analyses sont alors :

$$E = AnB + \bar{A}n\bar{B}n\bar{C} + \bar{A}n\bar{B}nC + SnA + Sn\bar{A}$$

$$E = AnB + \bar{A}n\bar{B}n\bar{C} + \bar{A}n\bar{B}nC + SnB + Sn\bar{B}$$

Le terme $X^2_{\bar{A}n\bar{B}nC}$ est le terme "influence de la classification al-

phabétique". Il est simplement à soustraire de l'ancien résidu $X^2_{\bar{A}\cap\bar{B}}$; les autres termes restant les mêmes que pour l'analyse des blocs incomplets. On retrouve ainsi l'analyse classique mais on remarque en outre que les deux analyses épuisent la question car les bases mises en évidence permettant de décrire tout le S I C des A, B, C.

Analyse des plans factoriels orthogonaux.

Pour analyser les plans factoriels orthogonaux sans répétition comportant n facteurs on prendra comme modèles fondamentaux ceux qui comportent l'effet de tous les facteurs sauf l'un. Ainsi, dans un plan à trois facteurs on partira des trois modèles :

A_1 : $m_{ijk} = a_{jk}$ le 1er facteur ne joue pas de rôle

A_2 : $m_{ijk} = b_{ik}$ le 2ème facteur ne joue pas de rôle

A_3 : $m_{ijk} = c_{ij}$ le 3ème facteur ne joue pas de rôle.

De même un plan à n facteurs sans répétitions est un plan à n modèles fondamentaux.

Les 2^n termes de l'analyse sont alors simplement les carrés des projections de X sur les 2^n bases primaires.

Examinons par exemple le terme :

(33) $$X^2_{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3}$$

on voit immédiatement qu il s'agit d'une composante relative à un cas où le premier facteur n'a pas d'effet ; d'autre part,

$$\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \overline{A_2 + A_3}$$

si bien qu'il s'agit de l'écart par rapport à l'hypothèse additive relative aux autres facteurs. C'est donc le terme d'interaction du deuxième et du troisième facteur. D'une façon plus générale, toute composante sur une base représente l'interaction entre facteurs dont les indices correspondent à une complémentation orthogonale. Ainsi,

$$X^2_{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\cap\bar{A}_4\cap\bar{A}_5}$$

est le terme d'interaction entre les trois facteurs 2, 4 et 5.

Par ailleurs, lorsque deux espaces L et M sont orthoparallèles, toute projection orthogonale sur leur intersection, est égale à la

projection sur l'un suivie de la projection sur l'autre - donc :

$$X_{A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3} = X_{A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3}$$

Par ailleurs la projection sur un sous espace complémenté peut être obtenue par différence avec la projection sur l'espace non complémenté.

Il en résulte que :

$$X_{A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3} = X_{A_1} - X_{A_1 \cap A_2} - X_{A_1 \cap A_3} + X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3} \tag{34}$$

formule valable pour tous les cas où A_1 , A_2 et A_3 sont orthoparallèles deux à deux. Or ici il est immédiat que :

X_{A_1}	a pour coordonnées	$x_{.jk}$
$X_{A_1 \cap A_2}$	"	$x_{..k}$
$X_{A_1 \cap A_3}$	"	$x_{.j.}$
$X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$	"	$x_{...}$

la formule (34) comporte donc bien comme cas particulier celui du terme d'interaction usuel.

En outre, en effectuant le produit scalaire des deux membres de (34) par le vecteur X et en se basant sur le fait que le produit scalaire :

$$X.\ X_H = X_H^2$$

quel que soit H, on obtient encore une formule générale qui comporte comme cas particulier celui des plans factoriels orthogonaux.

VI - CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'ORTHOGONALITE DES PLANS D'EXPERIMENTATION.

Un plan d'expérimentation peut être défini comme orthogonal par rapport aux modèles à tester lorsque tous les modèles sont orthoparallèles deux à deux. Cette définition contient d'ailleurs celle donnée par Kempthorne (1) puisqu'elle exprime la condition pour que

---

(1) Ouvr cité Ch. 5 p. 49 et 50 - Cf aussi les nombreuses définitions équivalentes données dans la réf. 5.

moyennant un changement éventuel de paramètre, l'analyse prenne la forme indiquée par cet auteur.

Il n'en reste pas moins que la relation S = 0 doit être mise sous forme explicite pour être utilisable. Nous le ferons ici sur quelques exemples.

Examinons d'abord les plans d'expérimentation à deux facteurs comportant n(ij) répétitions pour la combinaison de la variante i du premier facteur avec la variante j du second.

On a d'abord, un modèle R, répétition, qui contient tous les autres et leur est donc toujours orthoparallèle ; restent les deux modèles fondamentaux A_1 (pas effet du premier facteur) et A_2 (pas effet du second).

On dira que le plan est simplement connexe si les cases i, j qui comportent au moins un résultat forment une région simplement connexe pour les déplacements d'une tour de jeu d'échecs susceptible de sauter les cases vides.

S'il en est ainsi la vérité simultanée de A_1 et A_2 implique bien que toutes les coordonnées de M sont égales entre elles (sinon il y aurait autant de constantes que de parties connexes).

Pour que A_1 soit orthoparallèle à A_2 il faut et il suffit que tout vecteur Y de A_1 se projette orthogonalement sur A_2 en $A_1 \cap A_2$. Cette condition étant linéaire il suffit qu'elle soit respectée pour $n(A_1)$ vecteurs de A_1 linéairement indépendants entre eux.

Il suffit donc d'écrire que les vecteurs Y de A_1 dont les coordonnées sont 1 pour les N.j essais de la colonne j et zéro autrement, satisfont à :

$$Y_{A_2} = Y_{A_1 \cap A_2}$$

Ceci se traduit immédiatement par :

(35) $$\frac{nij}{Ni.} = \frac{N.j}{N..}$$

qui montre que n(ij) est de la forme :

(36) $$n(ij) = f(i)\ g(j)$$

qui réciproquement satisfait à (35).

Cette condition se généralise à d'autres cas d'expériences du type factoriel. Prenons, par exemple, le cas des carrés latins. Soient A, B, C, les trois modèles exprimant respectivement que seul l'un des trois facteurs a une influence. On voit facilement que A, B et C sont orthoparallèles et que le sous espace $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ ne comporte qu'un degré de liberté.

Pour exprimer qu'il en est ainsi dans un plan d'expérimentation à trois facteurs comportant un nombre quelconque de variantes il suffit d'appliquer la relation (36) aux modèles pris deux à deux. On obtient donc :

$$N_{ij.} = f(i)\, g(j)\, h(.) \tag{37}$$

et deux relations analogues où interviennent trois fonctions arbitraires ($h(.)$ désignant une sommation).

Voici un plan d'expérimentation qui satisfait aux trois relations (37), A et B désignant les variantes du premier facteur :

Tableau 2

Variantes du deuxième facteur	Variantes du troisième facteur				
	1	2	3	4	5
1	A	BB	A	B	A
2	BB	AA AA	BB	AA	BB
3	A	BB	A	B	A

On trouvera enfin un exemple de régression sur deux variables dans la référence (12).

VII - CONCLUSIONS.

On s'est efforcé de montrer, dans la présente note que les modèles utilisés en analyse de variance peuvent être considérés comme des êtres géométriques, dans l'espace vectoriel Euclidien réel, représentables par des symboles sur lesquels des opérations utiles peuvent être effectuées.

Ces opérations permettent un traitement systématique des problèmes, conduisent à proposer des définitions générales de certaines propriétés des plans d'expérimentation, et rattachent le problème de la construction des plans à la recherche des solutions de systèmes d'équations.

REFERENCES

[1] - R. A. FISHER - Contributions to mathematical statistics (Wiley éd.).

[2] - O. KEMPTHORNE - The design and Analysis of Expériments (Wiley éd.).

[3] - H. SCHEFFE - The Analysis of Variance (Wiley éd.).

[4] - D. DUGUE - Traité de Statistique théorique et appliquée (Masson et Cie).

[5] - J. ULMO - Etude fondamentale de la régression linéaire multiple - Eléments de la théorie des plans d'Expérience (Institut de Statistique de l'Université de Paris).

[6] - S.H. JUSTESEN et H. KEULS - Note on the use of non orthogonal designs (ISI Bulletin - Vol 36. Part 3).

[7] - D.M.Y. SOMMERVILLE - An introduction to the geometry of N dimensions. (Dover Publ.).

[8] -G. JULIA - Introduction mathématique aux théories quantiques. (Gauthier Villars éd.).

[9] - A. LICHNEROWICZ - Algèbre et Analyse linéaires (Masson et Cie éd.).

[10] - P.R. HALMOS - Finite dimensional vector spaces (Princeton University Press).

[11] - H.C. HAMAKER - De l'analyse à régression multiple (Seminaire des Applications industrielles de la Statistique - Paris - 1961).

[12] - G. D'HERBEMONT - Considérations géométriques sur les plans d'expérimentation (Bulletin de l'Institut International de Statistique - 33ème Session - Paris - 1961).