HAL open science

À l'intérieur du problème central

Michel Loeve

▶ **To cite this version:**

Michel Loeve. À l'intérieur du problème central. Annales de l'ISUP, 1957, VI (4), pp.313-325. hal-04094552

HAL Id: hal-04094552

https://hal.science/hal-04094552v1

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A L'INTÉRIEUR DU PROBLÈME CENTRAL

par

MICHEL LOÈVE

A mon maître
M. Paul Lévy
avec admiration et profond respect

1 - LE PROBLÈME

Soit $\mathcal{L}(X)$ la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Cette loi est déterminée par la fonction de distribution des probabilités $F(x) = P[X<x]$ ou par la fonction caractéristique (f.c.) $f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dF(x)$; si $f = e^{\psi}$ alors ψ est seconde caractéristique (s.c.) de la loi. Si X possède des indices, les mêmes indices seront attachés à F et à f, et à ψ si ψ existe.
Nous faisons les conventions suivantes. Les premières lettres minuscules de l'alphabet désignent des nombres réels (finis). Les bornes infinies d'intégration sont omises. Les limites sont prises pour $n \to \infty$. sauf indication contraire. Les fonctions non décroissantes sont rendues continues à gauche et dites fonctions de distribution lorsque leur variation est finie. La convergence d'une suite de telles fonctions, soit $H_n \to H$, est convergente sur l'ensemble de continuité C(H) de la fonction limite. Cette convergence est dite complète et nous écrivons $H_n \xrightarrow{c} H$ lorsque, de plus, Var $H_n \to$ Var H. Une suite de lois $\mathcal{L}(X_n)$ est convergente si elle converge vers la loi $\mathcal{L}(X)$ d'une variable aléatoire, soit $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire, $F_n \xrightarrow{c} F$.

Soient X_{nk} ($k = 1, \ldots, k_n$, $k_n \to \infty$) des variables aléatoires indépendantes pour tout n fixe et uniformément asymptotiquement négligeables, c'est-à-dire, telles que $\mathcal{L}(X_{nk}) \to \mathcal{L}(0)$ ou $f_{nk} \to 1$, uniformément en k. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre du problème limite central.

Il y a une vingtaine d'années, Raïkov a démontré le théorème suivant :

<u>Soient</u> $EX_{nk} = 0$, $\sum_k \sigma^2 X_{nk} = 1$. <u>Pour que</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{N}(0, 1)$ <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}^2) \to \mathcal{L}(1)$.

De son côté, P. LÉVY a montré que dans le cas du mouvement brownien, soit $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ avec $EX_t = 0$, $\sigma^2 X_t = t$, si $\{t_n\}$ est un ensemble dense dans $[0, 1]$ et $t_{n1} < \ldots < t_{nn}$ sont ses n premiers éléments ordonnés par ordre croissant alors, en posant $X_{nk} = X_{t_{n,k+1}} - X_{t_{n,k}}$,

$$\sum_k X_{nk}^2 \to 1 \text{ \underline{presque sûrement}.}$$

---

(1) Préparé avec l'assistance financière partielle de l'Office of Naval Research.

Ces résultats soulèvent des questions à l'intérieur du problème limite central. Ici, nous nous bornerons aux questions relatives aux lois de probabilité ; les questions correspondantes que soulève le résultat de P. LEVY seront examinées ailleurs.

Le résultat de RAÏKOV établit une relation entre la loi limite normale des suites $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ et la loi limite dégénérée des suites $\mathcal{L}(\sum_k y(X_{nk}))$ avec $y(x) = x^2$. Mais l'extension, par P. LÉVY, BAWLY, GNEDENKO et autres, du problème limite central dans le cas normal ou dégénéré à celui des lois infiniment décomposables (i.d.) générales, conduit au problème général des relations entre les lois limites des suites ci-dessus dans le cadre du problème central limite d'aujourd'hui. Bien entendu, il n'y a pas lieu de se borner à la fonction y ci-dessus. D'une façon plus générale, nous sommes conduit au problème asymptotique suivant.

PROBLEME. Soit y une fonction de Borel finie sur R et soit $Y_{nk} = y(X_{nk} - a_{nk})$. Trouver les relations entre les comportements asymptotiques des suites $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ et $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$.

Les Y_{nk} étant des fonctions de Borel finies de variables aléatoires X_{nk} sont des variables aléatoires ; elles sont indépendantes pour tout n fixe puisqu'il en est de même des X_{nk}. Mais pour demeurer dans le cadre du problème limite central, il faut de plus que les Y_{nk} soient uniformément asymptotiquement négligeables. Il en sera ainsi lorsque $\max_k a_{nk} \longrightarrow 0$ et $y(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. Car alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\max_k P[|Y_{nk}| < \varepsilon] \geqslant \max_k P[|X_{nk} - a_{nk}| < \delta] \longrightarrow 1.$$

Pour simplifier, nous supposons de plus que la fonction y est continue sur R et prenons $a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$ avec $\tau > 0$ fixe convenablement choisi ; le fait que les X_{nk} sont uniformément asymptotiquement négligeables entraîne que $\max_k a_{nk} \longrightarrow 0$. Nous sommes ainsi conduit à l'hypothèse fondamentale suivante.

HYPOTHESE FONDAMENTALE. Les variables aléatoires X sont indépendantes pour tout n fixe et uniformément asymptotiquement négligeables. Les variables aléatoires Y_{nk} sont $y(X_{nk} - a_{nk})$, où $a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$ et la fonction y est continue sur R avec $y(0) = 0$.

Dans tout ce qui suit, les symboles peuvent être interprétés de manière que les résultats soient valables dans le cas de vecteurs aléatoires (voir [1] (1) p. 84) ou bien l'on peut ramener au cas scalaire (idem, p. 85). Pour simplifier la présentation, nous utilisons le langage du cas scalaire (2).

(1) 1 Michel LOÈVE, Probability Theory, Van NOSTRAND (1955).

(2) Certains des résultats de ce mémoire ont été énoncés dans une note aux comptes rendus t.239, p. 1585-1587 (1954).

Signalons également que les mêmes méthodes s'appliquent dans des cas de dépendance qui seront étudiés par M. Hans BUHLMANN.

Introduisons des notations utilisées constamment dans la suite tout en rappelant le théorème central.

I.- <u>La classe de lois limites des suites</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} + a_n)$ <u>est la classe des lois i.d. Leurs s.c. sont de la forme</u> $\phi = (\alpha, \gamma^2, L)$ <u>c'est-à-dire</u>,

$$\phi(u) = iu\alpha - \frac{u^2}{2}\gamma^2 + \int_{|x|>0} h(u,x)dL(x)$$

<u>où sont mises en évidence leurs parties normale et Poisson-intégrale</u>.

La fonction L est une <u>fonction de P. LEVY</u> : elle est définie sur $R_0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, non décroissante sur $(-\infty, 0)$ et sur $(0, +\infty)$, $L(\pm\infty) = 0$, et $\int_{0<|x|<\tau} x^2 dL(x) < \infty$. La fonction h est définie sur $R \times R$ par

$$h(u,x) = e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}.$$

On peut également poser $\phi = (\alpha, \Psi)$ avec

$$\phi(u) = iu\alpha + \int k(u,x)d\Psi(x).$$

La fonction Ψ est une f.d. sur R avec $\Psi(-\infty) = 0$, $d\Psi(x) = \frac{1+x^2}{x^2} dL(x)$ pour $x \neq 0$, et $\Psi(+0) - \Psi(-0) = \gamma^2$.

La fonction k est définie sur $R \times R$ par $k(u,x) = h(u,x)\frac{1+x^2}{x^2}$ en posant, par continuité, $k(u,0) = -\frac{u^2}{2}$.

Posons $\overline{X}_{nk} = X_{nk} - a_{nk}$ de sorte que $\overline{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk})$ et soient

$$L_n(x) = \sum_k \overline{F}_{nk}(x) \text{ ou } \sum_k \{\overline{F}_{nk}(x) - 1\},\ L_n^o(x) = \sum_k F_{nk}(x) \text{ ou } \sum_k \{F_{nk}(x) - 1\}$$

selon que $x < 0$ ou $x > 0$, et posons

$$\Psi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t^2}{1+t^2} dL_n(t).$$

II.- <u>Pour que</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ <u>à s.c.</u> ϕ, <u>il faut et il suffit que</u>

(i) $\Psi_n \xrightarrow{c} \Psi$

ou

(i') L_n <u>ou</u> $L_n^o \longrightarrow L$ <u>sur</u> R_0 et $\gamma_n^2(\varepsilon) = \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dL_n(x) \longrightarrow \gamma^2$

<u>lorsque</u> $n \longrightarrow \infty$ <u>puis</u> $\varepsilon \longrightarrow 0$, <u>et</u>

(ii) $a_n = \sum_k a_{nk} + \int \frac{x}{1+x^2} dL_n(x) - \alpha + o(1)$.

2 - COMPARAISON DES SUITES DE LOIS INFINIMENT DÉCOMPOSABLES

Une famille de fonctions de distribution est compacte si elle l'est au sens de la convergence complète de sous-suites. Une famille de lois de variables aléatoires est compacte si la famille des fonctions de distribution correspondantes est compacte, c'est-à-dire, si la famille de lois est compacte au sens de la convergence de sous-suites vers des lois de variables aléatoires. Nous aurons besoin des lemmes élémentaires suivants.

LEMME 1. Pour qu'une famille de fonctions de distribution H à variations uniformément bornées soit compacte, il faut et il suffit que $\int_{|x| \geqslant a} dH(x) \longrightarrow 0$ lorsque $a \longrightarrow \infty$, uniformément en H.

En effet, en vertu du théorème de HELLY, l'hypothèse Var $H \leqslant c$ fixe entraîne la compacité de la famille au sens de convergence de sous-suites sur les ensembles de continuité des fonctions limites, soit $H_n(x) \longrightarrow H(x)$ pour $x \in C(H)$, et alors Var $H \left(\leqslant \liminf \text{Var } H_n \leqslant c\right)$ est finie.

Dans l'équalité

$$\text{Var } H_n - \text{Var } H = \int_{|x| \geqslant a} dH_n(x) - \int_{|x| \geqslant a} dH(x) + \left\{ \int_{|x| < a} dH_n(x) - \int_{|x| < a} dH(x) \right\}$$

prenons les a tels que $\pm a \in C(H)$.

La condition énoncée est suffisante car, si elle a lieu, Var $H_n \longrightarrow$ Var H lorsque $n \longrightarrow \infty$ puis $a \longrightarrow \infty$ dans l'égalité ci-dessus. Elle est nécessaire car, si elle n'a pas lieu, la famille contient une suite $H_{n'}$, avec $\int_{|x| \geqslant a} dH_{n'}(x) \geqslant \varepsilon > 0$ pour $a \longrightarrow \infty$. Lorsque la famille est compacte, cette suite contient une sous-suite $H_n \longrightarrow H$ avec Var $H_n \longrightarrow$ Var H et en laissant $n \longrightarrow \infty$ puis $a \longrightarrow \infty$ dans l'équalité ci-dessus nous aboutissons à la contradiction $0 \geqslant \varepsilon$.

LEMME 2. Pour qu'une famille de lois $\mathcal{L}(X)$ soit compacte, il faut et il suffit que la famille de f.c. f ou la famille de leurs parties réelles $\mathcal{R}f$ soit équicontinue à l'origine.

Le lemme résulte du théorème de continuité de P. LEVY par le théorème d'Ascoli et l'inéqualité $|f(u) - f(u+h)|^2 \leqslant 2\{1 - \mathcal{R}f(h)\}$.

A toute loi $\mathcal{L}(X)$ correspond la loi symétrisée $\mathcal{L}(X^s)$ où $X^s = X - X'$ avec X et X' indépendantes et identiquement distribuées à fonction de distribution F^s et à f.c. $|f|^2$. Les "translatées" de $\mathcal{L}(X)$ sont de la forme $\mathcal{L}(X-a)$, $a \in R$.

LEMME 3. Pour qu'une famille de lois soit compacte à des translations près, il faut et il suffit que la famille des lois symétrisées correspondantes soit compacte.

La condition est nécessaire en vertu du lemme 2. Elle est suffisante en vertu du lemme 1 et de l'inéqualité $P[|X - \mu X| \geqslant a] \leqslant 2P[|X^s| \geqslant a]$, car

les fonctions de distribution de variables aléatoires X sont uniformément bornées.

LEMME 4. Pour que les f.c. réelles $\prod_k h_{nk}$ soient équicontinues à l'origine, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des fonctions $\sum_k (h_{nk}-1)$ - s.c. de lois i.d.

Le lemme résulte de l'inéqualité $1 - e^{-\Sigma_k x_k} \leqslant 1 - \prod_k (1-x_k) \leqslant \sum_k x_k$ valable pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, en y remplaçant x_k par $1 - h_{nk}$.

LEMME 5. Pour qu'une suite de lois à s.c. φ_n soit compacte à des translations près, il faut et il suffit que les fonctions $\mathcal{R}\varphi_n$ soient équicontinues à l'origine.

En effet, par les lemmes 2 et 3, la compacité en question est équivalente à l'équicontinuité à l'origine des fonctions $e^{\mathcal{R}\varphi_n}$. Il en est donc de même pour les fonctions $\mathcal{R}\varphi_n$ en vertu de l'inéqualité $\frac{x}{1+x} \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant x$ valable pour $x \geqslant 0$.

LEMME 6. Si les suites $\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x)$ et $\int_{|x|<a} y^2(x)\,(x)dL_n(x)$ sont bornées, alors la suite $\int \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x)$ est bornée. Si la suite $\int \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dI_n(x)$ est bornée, alors la suite $\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$ est bornée pour tout $a > 0$; lorsque de plus $\liminf_{|x|\to\infty} |y(x)| > 0$, alors la suite $\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x)$ est bornée pour tout $a > a_0$ suffisamment grand.

Le lemme résulte des inéqualités.

$$\inf_{|x|\geqslant a} \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} \int_{|x|\geqslant a} dL_n(x) \leqslant \int_{|x|\geqslant a} \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x) \leqslant \int_{|x|\geqslant a} dL_n(x)$$

et

$$\frac{1}{1+\max_{|x|\leqslant a} y^2(x)} \int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x) \leqslant \int_{|x|<a} \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x) \leqslant \int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$$

Nous verrons que sous certaines conditions les lois $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$ se comportent asymptotiquement comme les lois à s.c. $\varphi = (\beta, \Phi)$ avec

$$\varphi(u) = iu\beta + \int k(u, y(x))d\Phi(x)$$

où les Φ sont des fonctions de distribution. Mais, d'abord, il y a lieu de montrer que toute φ est s.c. ; elle sera s.c. d'une loi indéfiniment décomposable, puisque $\frac{\varphi}{n}$ est de la même forme pour tout entier n (positif). Ceci résulte du théorème de continuité. En effet, il suffit de considérer l'intégrale qui figure dans φ. Or, cette intégrale définit une fonction continue (en u) et est limite de sommes de Riemann-Stieltjes qui sont des s.c. puisque leurs termes sont des s.c. du type de Poisson $(e^{iuy(x_k)} - 1)\Delta\Phi(x_k) + iub(x_k)$ pour $y(x_k) \neq 0$, ou du type normal $-\frac{u^2}{2}\Delta\Phi(x_k)$ pour $y(x_k) = 0$.

Lorsque $y(x) = x$ alors, en vertu de la formule d'inversion des s.c. de lois i.d., φ détermine Φ donc β. Mais il n'en est pas de même en général, car les valeurs de $d\Phi(x)$ correspondant à tous les x pour lesquels $y(x)$ prend la même valeur interviennent en bloc dans l'intégrale. D'une façon précise, soit Φ la mesure sur les ensembles de Borel dans R déterminée par la fonction de distribution Φ. Puisque la fonction y est continue, l'ensemble $A = y^{-1}[0]$ est fermé, son complèment consiste d'intervalles ouverts disjoints I_j en nombre fini ou dénombrable et nous pouvons écrire

$$\varphi(u) = iu\beta - \frac{u^2}{2}\Phi(A) + \sum_j \int_{I_j} k(u, y(x))d\Phi(x),$$

mettant ainsi en évidence les parties normales et Poisson-intégrale de la loi i.d. correspondante.

THEOREME I. Si la suite Φ_n est compacte et à variations uniformément bornées, alors la suite de lois i.d. à s.c. $\varphi_n = (\beta_n, \Phi_n)$ est compacte à des translations près.

Si la suite de ces lois est compacte à des translations près, alors la suite Φ_n est à variations uniformément bornées, et elle est compacte lorsque $|y(x)| \to \infty$ avec $|x| \to \infty$.

Démonstration. Si toute suite $\Phi_{n'}$, contient une sous-suite $\Phi_{n''} \xrightarrow{c} \Phi$ alors, par le théorème de HELLY-BRAY, toute sous-suite $\varphi_{n'}$ contient une suite $\varphi_{n''}$ telle que $\varphi_{n''} - iu\beta_{n''} \longrightarrow \varphi = (0, \Phi)$. Réciproquement, soit la suite compacte à des translations près de lois à s.c. φ_n. Alors, par le lemme 5, la suite $\mathcal{R}\varphi_n$ est équicontinue à l'origine, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $h = h(\varepsilon) > 0$ (indépendant de n) tel que $-\mathcal{R}\varphi_n(u) < \varepsilon$ pour $|u| < h$, donc

$$\varepsilon > -\frac{1}{h}\int_0^h \mathcal{R}\varphi_n(u)du = \int \left(1 - \frac{\sinh y}{hy(x)}\right)\frac{1+y^2(x)}{y^2(x)}d\Phi_n(x).$$

Puisque l'intégrande du membre droit est bornée inférieurement par $c(h) > 0$, il en résulte que les Var Φ_n sont uniformément bornées par $\varepsilon/c(h) < \infty$.

Lorsque $|y(x)| \to \infty$ avec $|x| \to \infty$ alors, pour ε donc h donné, l'intégrande est bornée par $1-\varepsilon$ pour $|x| \geqslant a \geqslant a(\varepsilon)$, donc $\int_{|x| \geqslant a} d\Phi_n(x) < \varepsilon/(1-\varepsilon)$. En vertu du lemme 1, la suite Φ_n est compacte, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE I. Pour qu'une suite de lois i.d. à s.c. $\varphi_n = (\beta_n, \Phi_n)$ soit compacte (les s.c. φ_n soient équicontinues à l'origine), il suffit et, lorsque $|y(x)| \to \infty$ avec $|x| \to \infty$, il faut que la suite Φ soit compacte et à variations uniformément bornées et la suite β_n soit compacte.

Dans la cas $y(x) = x$ et "compacte" réduite à "convergente", l'on retrouve les conditions de convergence de lois i.d., en observant qu'alors les φ_n déterminent les Φ_n et les β_n.

COROLLAIRE 2. Pour que la suite de lois $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ soit compacte à des translations près, il faut et il suffit que la suite Ψ_n soit compacte et à variations uniformément bornées.

En effet, soit $\Psi_n^s(x) = \sum_k \int_{\infty}^{x} \frac{t^2}{1+t^2} dF_{nk}^s(t)$. D'après les lemmes 3 et 4, il faut et il suffit que les $\sum_k (|f_{nk}(u)|^2-1) = \int (\cos ux-1) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi_n^s(x)$ soient équicontinues à l'origine donc, d'après le lemme 5 et le théorème 1, que les Ψ_n^s forment une suite compacte et à variations uniformément bornées. En utilisant le lemme 6 et les inéqualités de symmétrisation ([1], p. 245), l'on passe aux Ψ_n (comme dans [1] p. 306) et l'on revient aux Ψ^s par des calculs élémentaires.

<u>COROLLAIRE 3. Si la suite</u> $\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$ <u>est bornée ou</u> $|y(x)| \leqslant c|x|$ <u>pour</u> $|x| < a$, <u>alors compacité à des translations près de la suite de lois à s.c.</u> $\varphi_n = (\alpha_n, \Psi_n)$ <u>entraîne celle de la suite de lois à s.c.</u> $\varphi_n = (\beta_n, \Phi_n)$ <u>avec</u>

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} dL_n(t)$$

<u>Si la suite</u> $\int_{|x|<a} x^2 dL_n(x)$ <u>est bornée ou</u> $|x| \leqslant c|y(x)|$ <u>pour</u> $|x| < a$, <u>alors l'inverse a lieu pourvu que</u> $y(x) \neq 0$ <u>pour</u> $x \neq 0$, <u>et</u> $|y(x)| \longrightarrow 0$ <u>pour</u> $|x| \longrightarrow \infty$.

<u>En particulier, soit</u> $y^2(x)/x^2 \longrightarrow c^2 > 0$, $y(x) \neq 0$ <u>pour</u> $x \neq 0$ <u>et</u> $|y(x)| \to \infty$ <u>pour</u> $|x| \to \infty$. <u>Alors la suite des lois à s.c.</u> φ_n <u>est compacte si et seulement et seulement si celle à s.c.</u> Φ <u>l'est</u>.

Il suffit d'observer que d'après le théorème, les compacités en question sont équivalentes, respectivement, aux suites Φ et Ψ_n étant compactes et à variations uniformément bornées, et appliquer les lemmes 1 et 6.

La première partie de ce Corollaire contient divers résultats énoncés par S. BOCHNER (3).

3 - RÉDUCTION A DES LOIS INFINIMENT DÉCOMPOSABLES

Nous venons d'établir des relations entre les lois limites de lois i.d. liées étroitement aux $\mathcal{L}(\sum X_{nk})$ et $\mathcal{L}(\sum Y_{nk})$ mais alors que celles à s.c. Φ_n sont asymptotiquement équivalentes aux $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ donc peuvent les remplacer, il n'en est pas nécessairement de même de celles à s.c. φ_n. Bien entendu, l'on pourrait procéder comme pour les Φ_n en centrant les Y_{nk} aux espérances mathématiques tronquées $b_{nk} = \int_{|y|<\tau} y dG_{nk}$ mais alors $d\Phi_n(x)$ est remplacé par $\sum \frac{(y(x)-b_{nk})^2}{1+(y(x)-b_{nk})} d\overline{F}_{nk}(x)$. Malheureusement, il ne semble pas possible d'éviter une condition qui ne soit pas exprimée en termes de L_n, mais l'on peut la faire dépendre du comportement de $y(x)$ dans le voisinage de l'origine tout en gardant Φ_n comme suit.

Posons $\beta_{nk}(a) = \int_{|x|<a} y(x)d\overline{F}_{nk}(x)$ et observons que $\max_k \beta_{nk}(a) \longrightarrow 0$. car, en posant $m(h) = \max_{|x| \leqslant h} y(x) = y(\theta h)$, $|\theta| \leqslant 1$, l'on a $|\beta_{nk}(a)| \leqslant m(\varepsilon) +$

(3) S. BOCHNER, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 40, 1954, p. 699-703.

$$\left|\int_{\varepsilon\leqslant x<a} y(x)d\overline{F}_{nk}(x)\right| \leqslant m(\varepsilon) + m(\tau)\int_{|x|\geqslant\varepsilon} d\overline{F}_{nk}(x) \longrightarrow 0$$ uniformément en n, lorsque $n\longrightarrow\infty$ puis $\varepsilon\longrightarrow 0$.

<u>LEMME 7</u>. <u>Si les suites</u> $\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x)$, $\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$, $\sum_k |\beta_{nk}(a)|$, <u>sont bornées, alors la suite</u> $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$ <u>est asymptotiquement équivalente à celle de lois à s.c.</u> $\varphi_n = (\beta_n, \Phi_n)$ <u>avec</u> $\beta_n = \int \frac{y(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x)$ <u>et</u> $d\Phi_n(x) = \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x)$.

<u>Démonstration</u>. Puisque

$$g_{nk}(u) = Ee^{iuy(\overline{X}_{nk})} = \int e^{iuy(x)} d\overline{F}_{nk}(x),$$

en portant les expressions de β_n et de $k(u, y(x))$ dans $\varphi_n(u)$, celle-ci devient

$$\varphi_n(u) = \int (e^{iuy(x)} - 1)dL_n(x) = \sum_k \left[g_{nk}(u) - 1\right]$$

Puisque $y(x)\longrightarrow 0$ lorsque $x\longrightarrow 0$ et les $\overline{X}_{nk}$ sont uniformément asymptotiquement négligeables, il en est de même des Y_{nk}, donc $\max_k |g_{nk}(u) - 1| \longrightarrow 0$ et $\log g_{nk}(u)$ existent et sont finis pour n suffisamment grand. Alors

$$\sum_k \left\{(\log g_{nk}(u) - \left[g_{nk}(u) - 1\right]\right\}$$
$$\leqslant \sum_k |g_{nk}(u) - 1|^2 \leqslant \max_k |g_{nk}(u) - 1| \sum_k |g_{nk}(u) - 1| \longrightarrow 0$$

puisque, par hypothèse et l'inégalité

$$|g_{nk}(u) - 1| \leqslant \left|\int_{|x|\geqslant a} (e^{iuy(x)} - 1)d\overline{F}_{nk}(x)\right|$$
$$+ \left|\int_{|x|<a} (e^{iuy(x)} - 1 - iuy(x))d\overline{F}_{nk}(x)\right| + |u\beta_{nk}(a)|,$$

la suite

$$\sum_k |g_{nk}(u) - 1| \leqslant 2\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x) + \frac{u^2}{2}\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x) + |u| \sum_k |\beta_{nk}(a)|$$

est bornée.

Dans ce qui suit nous posons $\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} dL_n(t)$, de sorte que L_n (donc Ψ_n) détermine Φ_n. Lorsque $y(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$, alors inversement, Φ_n détermine L_n (donc Ψ_n) par $dL_n(x) = \frac{1+y^2(x)}{y^2(x)} d\Phi_n(x)$ pour $x \neq 0$ et $L_n(\pm\infty) = 0$.

<u>THEOREME 2</u>. <u>Soit une suite bornée</u> $\sum_k |\beta_{nk}(a)|$ <u>et une suite bornée</u> $\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$.

<u>Si la suite</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ <u>est compacte à des translations près, il en est de même de la suite</u> $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$ <u>asymptotiquement équivalente à des lois à s.c.</u> $\varphi_n = (\beta_n, \Phi_n)$ <u>avec</u>

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} dL_n(t), \quad \beta_n = \int \frac{y(t)}{1+y^2(t)} dL_n(t).$$

En effet, par le Corollaire 2 du théorème 1, la suite Ψ_n est compacte et à variations uniformément bornées. Donc, d'après les lemmes 1 et 6, toutes les suites $\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x)$ sont bornées et $\int_{|x|\geqslant a} dL_n(x) \longrightarrow 0$ uniformément en n lorsque $a \longrightarrow \infty$.

Puisque les suites $\int_{|x|<a} y^2(x)dL_n(x)$ et $\sum_k |\beta_{nk}(a)|$ sont bornées, le lemme 7 s'applique et, en vertu du lemme 6, le théorème résulte du théorème 1.

Supposons la suite $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ compacte à des translations près. Les conditions du théorème précédent [sous lesquelles il en sera de même de la suite $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$] ne dépendent que du comportement de la fonction y et de la suite L_n dans un voisinage de l'origine ; sans perte de généralité, nous pouvons choisir τ dans $a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$ de manière que $\pm\tau$ soit dans ce voisinage. Or, l'hypothèse faite au sujet des $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ entraîne que la suite $\int_{|x|<\tau} x^2 dL_n(x)$ est bornée et la suite $\sum_k \left| \int_{|x|<\tau} x d\overline{F}_{nk}(x) \right|$ se comporte asymptotiquement comme $\underline{\max_k} \left| a_{nk} \right| \int_{|x|\geqslant\tau} dL_n(x)$ donc converge vers zéro. Par conséquent:

<u>COROLLAIRE 1</u>. <u>Soit</u> $cx + 0(x^2) \leqslant y(x) \leqslant c'x + 0'(x^2)$ <u>pour</u> $x \longrightarrow 0$.

<u>Si la suite</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ <u>est compacte à des translations</u> <u>près, il en est de même de la suite</u> $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$.

Supposons que $n \longrightarrow \infty$ le long d'une sous-suite d'entiers telle que $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. (α, γ^2, L), de sorte que $L_n \longrightarrow L$ sur R_0 et $\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dL_n(x) \longrightarrow \gamma^2$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ puis $\varepsilon \longrightarrow 0$. Mais alors, pour $x < 0$

$$\Phi_n(x) \longrightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} dL(t),$$

et, pour $x > 0$

$$\text{Var } \Phi_n - \Phi_n(x) \longrightarrow \int_x^{\infty} \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} dL(t)$$

Donc, pour que $\Phi_n \xrightarrow{c} \Phi$ il y a lieu d'assurer la convergence de

$$\Phi_n(\varepsilon) - \Phi_n(-\varepsilon) = \int_{|x|<\varepsilon} \frac{y^2(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x) \sim \int_{|x|<\varepsilon} y^2(x) dL_n(x)$$

pour $n \longrightarrow \infty$ puis $\varepsilon \longrightarrow 0$. Il en est ainsi si $y^2(x)/x^2 \longrightarrow c^2$ pour $x \longrightarrow 0$. Lorsque de plus

$$\left| \int_{|x|<\tau} y(x) dL_n(x) \right| \leqslant \sum_k \left| \int_{|x|<\tau} y(x) d\overline{F}_{nk}(x) \right| \longrightarrow 0$$

alors, en choisissant $\pm\tau \in C(L)$,

$$\beta_n = \int \frac{y(x)}{1+y^2(x)} dL_n(x) \longrightarrow \int_{|x|\geq\tau} \frac{y(x)}{1+y^2(x)} dL(x) - \int_{0<|x|<\tau} \frac{y^3(x)}{1+y^2(x)} dL(x).$$

Par conséquent, en vertu du Corollaire 1, nous avons :

<u>COROLLAIRE 2</u>. <u>Soit</u> $(x) = cx + 0(x^2)$ <u>pour</u> $x \longrightarrow 0$.

<u>Si</u> $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ <u>à s.c.</u> (α, γ^2, L) <u>alors</u> $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ <u>à s.c.</u>

$$\varphi(u) = iu\beta - \frac{u^2}{2} c^2\gamma^2 + \int_{|x|>0} h(u, y(x)) dL(x);$$

<u>lorsque</u> $y(x) = dx^2 + o(x^2)$ <u>alors</u> $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ <u>à s.c.</u>

$$\varphi(u) = iud\gamma^2 + \int (e^{iuy(x)} - 1) dL(x).$$

4 - FONCTIONS DE P. LÉVY LIMITES

Nous venons d'examiner le comportement limite des suites $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk})$, en fonction de celui des suites $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$, en ne tenant compte que du comportement de la fonction y au voisinage de l'origine. Les s.c. des lois limites ainsi obtenues ne sont pas sous la forme habituelle $\varphi = (\beta, \delta^2, M)$ avec

$$\varphi(u) = iu\beta - \frac{u^2}{2}\delta^2 + \int_{|y|>0} h(u, y) dM(y),$$

sauf pour la partie normale. Bien entendu, une fois φ connu sous la forme de la section précédente, en principe l'on peut trouver M (voir [1], p.300). Mais l'on peut procéder directement, comme suit :

Soit $M_n(y) = \sum_k P[Y_{nk} < y]$ ou $-\sum_k P[Y_{nk} \geq y]$ selon que $x < 0$ ou $x > 0$,

et soit

$$\delta_n^2(\varepsilon) = \int_{|y|<\varepsilon} y^2 dM_n(y) - \sum_k \left(\int_{|y|<\varepsilon} y\, dM_n(y)\right)^2.$$

Puisque $y(x)$ est continue, l'image réciproque de tout intervalle (a, b), fini ou non, peut s'écrire $y^{-1}(a, b) = \bigcup_j (a_j, b_j)$ où le nombre $m(a, b)$ des intervalles disjoints (a_j, b_j), finis ou non, peut varier avec (a, b) et peut être infini. Puisque

$$P[y(\overline{X}_{nk}) \in (a, b)] = P\bigcup_j [\overline{X}_{nk} \in (a_j, b_j)] = \sum_j P[\overline{X}_{nk} \in (a_j, b_j)]$$

la fonction M_n est déterminée par

$$M_n(a, b) = \sum_j L_n(a_j, b_j), \qquad M_n(\pm\infty) = 0.$$

De plus $ab > 0$ entraîne $a_j b_j > 0$, puisqu'alors les zéros de $y(x)$ n'appartiennent pas à $y^{-1}(a, b)$ tandis que $y(0) = 0$. Ainsi, lorsque $L_n \longrightarrow L$ sur R_o, nous pouvons définir une fonction M sur R_o par

$$M(a, b) = \sum_j L(a_j, b_j), \qquad M(\pm\infty) = 0.$$

LEMME 8. Si pour tous les $ab > 0$, les $m(a,b)$ sont uniformément bornés ou il existe une fonction L^* de P. LEVY telle que $L_n(a,b) \leqslant L^*(a,b)$, alors $L_n \longrightarrow L$ sur R_o entraîne $M_n \longrightarrow M$ sur R_o.

En effet, lorsque a ou $b \in C(M)$ et $a' \longrightarrow a$ ou $b' \longrightarrow b$ soit par valeurs croissantes soit par valeurs décroissantes, les différences $M(a,b) - M(a',b)$ ou $M(a,b) - M(a,b')$ sont sommes de termes (en L) tous de même signe, et convergent vers zéro ; par conséquent, chaque terme converge vers zéro et les a_j, $b_j \in C(L)$. Mais alors $L_n(a_j, b_j) \longrightarrow L(a_j, b_j)$ donc, en vertu de l'hypothèse, $M_n(a,b) \longrightarrow M(a,b)$. En particulier, si $y \in C(M)$ alors $M_n(y) = M_n(-\infty, y) \longrightarrow M(-\infty, y) = M(y)$ pour $y < 0$, et de même pour $y > 0$.

REMARQUE. Signalons sans la démontrer la proposition suivante.

Pour que $L_n \longrightarrow L$ sur R_o entraîne $M_n \longrightarrow M$ sur R_o, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(\min_k X_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(\overset{*}{X})$ et $\mathcal{L}(\max_k X_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(X^*)$ entraîne $\mathcal{L}(\min_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(^*Y)$ et $\mathcal{L}(\max_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y^*)$.

Les symboles à astérisque ne sont pas nécessairement des variables finies.

La fonction limite M n'est pas nécessairement une fonction de P. LEVY. Mais puisque $\int_{0<|y|<\varepsilon} y^2 dM(y) \leqslant \liminf \int_{|y|<\varepsilon} y^2 dM_n(y)$, il suffira que cette borne soit finie pour un $\varepsilon > 0$. Or,

$$\int_{|y|<\varepsilon} y^2\, dM_n(y) = \int_{y^{-1}(-\varepsilon,+\varepsilon)} y^2(x)\, dL_n(x)$$

et aussi

$$\delta_n^2(\varepsilon) = \int_{y^{-1}(-\varepsilon,+\varepsilon)} y^2(x)\, dL_n(x) - \sum_k \left(\int_{y^{-1}(-\varepsilon,+\varepsilon)} y(x)\, d\overline{F}_{nk}(x)\right)^2$$

de sorte qu'il reste à examiner le comportement de $y(x)$ au voisinage de ses zéros. Si $z \neq 0$ est un zéro (réel) isolé, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ sa contribution au premier terme de la différence ci-dessus converge vers $z^2\{L(z+0) - L(z-0)\}$ et celle au second terme converge vers zéro. Donc, lorsque par exemple les zéros sont isolés et en nombre fini et $\liminf_{|x|\to\infty} |y(x)| > 0$, le comportement de $y(x)$ au voisinage de $x = 0$ sera décisif. Nous sommes ainsi ramenés aux considérations de la section précédente et conduits sans difficulté au théorème et corollaires suivants.

THEOREME 3. Soit une fonction y à zéros isolés $z_o = 0$ et $z_1, \ldots, z_m \neq 0$ avec $\liminf_{|x|\to\infty} |y(x)| > 0$, $y(x) = cx + 0(|x|^r)$, $r > 1$, pour $x \longrightarrow 0$, et telle que pour tous les $ab > 0$, les $m(a,b)$ sont uniformément bornés.

Si $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. (α, γ^2, L), alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c. (β, δ^2, M) avec $M(a,b) = \sum_j L(a_j, b_j)$ et $\delta^2 = c^2\gamma^2 + \sum_{i=1}^{m} z_i^2\{L(z_i + 0) - L(z_i - 0)\}$.

Par comparaison avec le Corollaire 2 du théorème 2, nous avons affaibli légèrement l'hypothèse $y(x) = cx + 0(x^2)$ mais au prix coûteux d'hypothèses supplémentaires sur le comportement de la fonction y sur R_0.

COROLLAIRE 1. Soit la fonction y croissante sur R avec $y(x) = cx + 0(|x|^r)$, $r > 0$, pour $x \longrightarrow 0$.

Si $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. (α, γ^2, L) alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c. (β, δ^2, M) avec $M(x) = L(y^{-1}(x))$ et $\delta^2 = c^2\gamma^2$.

COROLLAIRE 2. Soit la fonction y décroissante sur $(-\infty, 0)$ (fonction inverse y_1^{-1}) et croissante sur $(0, +\infty)$ (fonction inverse y_2^{-1}) avec $y(x) = 0(|x|^r)$, $r > 1$, pour $x \longrightarrow 0$.

Si $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. (α, γ^2, L), alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c. (β, δ^2, M) avec $M(x) = 0$ ou $L(y_2^{-1}(x)) - L(y_1^{-1}(x))$ selon que $x < 0$ ou $x > 0$, et $\gamma^2 = 0$

Lorsque $y(x) = dx^2 + o(x^2)$ alors $b_n = 0$ avec

$$\beta = d\gamma^2 + \int_{|x|>0} \frac{y(x)}{1+y^2(x)}\, dL(x).$$

A titre d'exemple, nous nous contenterons d'énoncer des applications des propositions générales à quelques fonctions y et au cas limite normal.

Fonctions particulières. Soit $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. (α, γ^2, L).

Si $y(x) = \sin x$, alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c.

$$\varphi(u) = \frac{u^2}{2}\gamma^2 + \int_{|x|>0} h(u, \sin x)\, dL(x).$$

Si $y(x) = e^x - 1$, alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c.

$$\varphi(u) = -\frac{u^2}{2}\gamma^2 + \int_{x>-1} h(u, x)\, dL(\log(1+x)).$$

Si $y(x) = x^3$, alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c.

$$\varphi(u) = \int (e^{iux} - 1)\, dL(x^{1/3}).$$

Si $y(x) = x^2$, alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c.

$$\varphi(u) = iu\gamma^2 + \int_{x>0} (e^{iux} - 1)\, d\{L(x^{1/2}) - L(-x^{1/2})\}.$$

Si $y(x) = x^+$ ou $|x|$ et $\int_{|x|<\varepsilon} |x|\, dL_n(x) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ puis $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c.

$$\varphi(u) = \int_{x>0} h(u, x)\, dL(x) \text{ ou } \int_{x>0} h(u, x)\, d\{L(x) - L(-x)\}.$$

<u>Cas normal</u>. Soit $h(x) = cx + 0(x^2)$ pour $x \longrightarrow 0$. Alors $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ à s.c. $iu\alpha - \frac{u^2}{2}\gamma^2$ entraîne $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ à s.c. $iu\beta - \frac{u^2}{2}c^2\gamma^2$.

Soit $y(x) = |x|^r$, $r > 1$. Alors pour que $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ normale, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk} - b_n) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ dégénérée.

Soit $y(x) = x^2$. Alors pour que $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ normale à variance γ^2, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ dégénérée en γ^2. L'on retrouve la généralisation du théorème de RAIKOV due à GNEDENKO.

Plus généralement, soit la fonction $y \neq 0$ sur R_0 avec $y(x) = dx^2 + o(x^2)$ pour $x \longrightarrow 0$. Alors pour que $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ normale à variance γ^2, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(\sum_k Y_{nk}) \longrightarrow \mathcal{L}(Y)$ normale à s.c. $iud\gamma^2$.