



HAL
open science

Sur l'inégalité de Slutsky

A. Fuchs

► **To cite this version:**

| A. Fuchs. Sur l'inégalité de Slutsky. Annales de l'ISUP, 1959, VIII (2), pp.161-168. hal-04094534

HAL Id: hal-04094534

<https://hal.science/hal-04094534>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'INÉGALITÉ DE SLUTSKY

A. FUCHS

L'objet de la présente note est de donner une démonstration très simple de l'inégalité entre moments connue sous le nom d'inégalité de Slutsky [1] et de la comparer à d'autres inégalités analogues.

Lemme 1.

Pour $x, y > 0$; $p, q > 0$, $p + q = 1$ on a :

$$x^p y^q \leq p^p q^q (x + y) \quad (1)$$

On remarque que (1) peut s'écrire :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^p \left(\frac{y}{x+y}\right)^q \leq p^p q^q ;$$

il en résulte qu'il suffit de démontrer (1) pour $x + y = 1$, c'est-à-dire, en définitive, de démontrer $x^p y^q < p^p q^q$ pour $x, y > 0$, $x + y = 1$; $p, q > 0$, $p + q = 1$. Mais cette dernière inégalité est évidente puisque :

$$x^p y^q = x^p (1-x)^q \leq \underset{x \in [0,1]}{\text{Max}} x^p (1-x)^q = p^p q^q$$

Inégalité de Slutsky.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur une même catégorie d'épreuves. Pour $r, s > 0$ et si $E\{|X|^{r+s}\} < \infty$, $E\{|Y|^{r+s}\} < \infty$ on a :

$$E\{|X|^r |Y|^s\} \leq \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{r}{r+s}} \left(\frac{s}{r+s}\right)^{\frac{s}{r+s}} (E\{|X|^{r+s}\} + E\{|Y|^{r+s}\}) \quad (2)$$

Appliquons en effet (1) à $|X|$ et $|Y|$; pour chaque épreuve il vient :

$$|X|^p |Y|^q \leq p^p q^q (|X| + |Y|)$$

d'où, en supposant $E\{|X|\} < \infty$, $E\{|Y|\} < \infty$:

$$E\{|X|^p |Y|^q\} \leq p^p q^q (E\{|X|\} + E\{|Y|\}) \quad (2')$$

Remplaçons alors $|X|$ par $|X|^{r+s}$, $|Y|$ par $|Y|^{r+s}$, posons $p = \frac{r}{r+s}$, $q = \frac{s}{r+s}$ et supposons $E\{|X|^{r+s}\} < \infty$, $E\{|Y|^{r+s}\} < \infty$, (2') est transformé en (2) qui se trouve ainsi établie.

Lemme 2

Pour $x, y > 0$; $p, q > 0$, $p + q = 1$, on a :

$$x^p y^q \leq px + qy \quad (3)$$

C'est l'inégalité classique entre moyennes arithmétique et géométrique. Remarquons que si l'on essaie de majorer le second membre de (3) par une quantité faisant intervenir la somme $x + y$ on obtient $px + qy \leq \text{Max}(p, q)(x + y)$. Mais comme $p^p q^q \leq \text{Max}(p, q)$, l'inégalité ainsi obtenue serait en général plus faible que (1); aussi nous tiendrons-nous à l'inégalité (3).

En opérant comme ci-dessus et en supposant toujours, $E\{|X|^{r+s}\} < \infty$, $E\{|Y|^{r+s}\} < \infty$, pour $r, s > 0$ on en déduit l'inégalité :

$$E\{|X|^r |Y|^s\} \leq \frac{r}{r+s} E\{|X|^{r+s}\} + \frac{s}{r+s} E\{|Y|^{r+s}\} \quad (4)$$

analogue à (2) et qui s'y réduit pour $r = s$.

Comparaison des inégalités (2) et (4).

Essayons de comparer les inégalités (2) et (4) ou, ce qui revient au même, les inégalités (1) et (3). A cet effet il suffira de comparer les deux quantités $p^p q^q$ et $px + qy$ pour $x + y = 1$, c'est-à-dire les deux quantités $p^p q^q$ et $px + q(1-x) = q + (p-q)x$ pour $x \in [0, 1]$.

Nous excluons le cas $p = q$, pour lequel les inégalités (1) et (3) coïncident. Lorsque $p \neq q$ nous pouvons toujours, sans perte de généralité, supposer $p > q$; il suffirait, le cas échéant, d'échanger les rôles de x et de y .

Une simple étude de la fonction (de p) $y = p^p (1-p)^{1-p}$, $p \in]0, 1[$ montre que $\text{Min}(p, q) \leq \frac{1}{2} \leq p^p q^q \leq \text{Max}(p, q)$, c'est-à-dire, dans notre cas, $q \leq \frac{1}{2} \leq p^p q^q \leq p$. Ceci entraîne que la parallèle $y = p^p q^q$ à Ox

coupe le segment de droite $y = q + (p-q)x$, $x \in [0, 1]$ en un point d'abscisse $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$q + (p-q)\alpha = p^p q^q \Rightarrow \alpha = \frac{p^p q^q - q}{p - q}$$

Puisque $\frac{1}{2} \leq p^p q^q \leq 1$, on a d'ailleurs $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Nous avons alors $q + (p-q)x \leq p^p q^q$ pour $0 \leq x \leq \alpha$. Il en résulte, toujours dans l'hypothèse $p > q$, que (3) est plus stricte que (1) lorsque $x < \alpha$ ($x + y$) et que c'est le contraire lorsque $x > \alpha$ ($x + y$).

On en déduit immédiatement :

THEOREME -

Supposons $r > s$ et posons :

$$\alpha = \frac{r \frac{r}{r+s} s \frac{s}{r+s} - s}{r - s}$$

Alors (4) est plus stricte que (2) lorsque $E\{|X|^{r+s}\} < \alpha E\{|X|^{r+s} + |Y|^{r+s}\}$; c'est le contraire lorsque $E\{|X|^{r+s}\} > \alpha E\{|X|^{r+s} + |Y|^{r+s}\}$.

REFERENCE

- (1) - M. FRECHET - Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités ; t. I. (1950) Gauthiers-Villars ; p. 66. Signalons en passant une erreur dans le texte ; la quantité désignée à la p. 66 par $k(r, s)$ n'est pas $\leq \frac{1}{2}$, mais on a $\frac{1}{2} \leq k(r, s) \leq 1$.