



HAL
open science

Les valeurs médianes et la théorie de la mesure

Carlo Bonferroni

► **To cite this version:**

Carlo Bonferroni. Les valeurs médianes et la théorie de la mesure. Annales de l'ISUP, 1957, VI (1), pp.53-67. hal-04094520

HAL Id: hal-04094520

<https://hal.science/hal-04094520>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

LES VALEURS MÉDIANES ET LA THÉORIE DE LA MESURE

par

Carlo BONFERRONI

SOMMAIRE :

Moyennes et médianes pour des valeurs discontinues; médiane d'une série et convergence "en médiane". Fonction déterminée dans un intervalle fini; ses "permutations" définies moyennant les "mesures" de certains ensembles; permutations "au sens étroit". Définition de la "fonctionnelle symétrique"; l'intégrale et la moyenne arithmétique sont des fonctionnelles symétriques. La permutation croissante et la permutation décroissante; détermination de la médiane, des terciles, quartiles, etc... Propriété de minimum de la médiane. Moyenne pondérée de la fonction; pondération à attribuer à la permutation croissante - Une moyenne pondérée est une fonctionnelle symétrique. Permutation croissante et valeurs médianes pour une fonction de deux variables ou plus.

1 - Beaucoup de valeurs moyennes de n observations x_1, \dots, x_n sont exprimées par une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ qui est une fonction analytique et qui pour cette raison se prête facilement à des transformations mathématiques. Ceci n'a pas lieu pour les valeurs "médianes" (médiane, terciles, quartiles, etc...) bien qu'elles aient de remarquables applications en statistique et ceci dépend évidemment du fait qu'elles sont déterminées après une opération préliminaire de rangement (par ordre croissant ou décroissant) qui ne correspond pas à une fonction analytique, et même, ne se prête pas à une représentation symbolique systématique dans notre construction mathématique actuelle. Il s'ensuit que les problèmes relatifs aux valeurs médianes présentent des difficultés particulières et exigent des procédés qui s'écartent souvent notablement des procédés courants.

Je m'occuperai, en particulier, de la détermination des valeurs médianes quand le nombre des éléments x_1, \dots, x_n augmente indéfiniment. Ce problème déjà résolu pour de nombreux types de moyennes, mérite aussi d'être étudié pour les valeurs médianes non seulement à cause des applications pratiques, mais aussi en raison des tendances naturelles de l'esprit mathématique.

2 - Les moyennes les plus importantes acquièrent une signification statistique parce qu'elles résolvent le problème de l'égalité de répartition (équirépartition d'une certaine grandeur) entre n sujets. La formule mathé-

(1) Traduction de la Conférence "I valori e la teoria della misura" parue dans la revue "Giornale di Matematica finanziaria" anno XXXVII - Vol I - 1955 - pp 89-153.

matique générale de ce concept (1) conduit à établir que si la grandeur a respectivement les valeurs x_1, \dots, x_n pour chacun des sujets considérés et la valeur $f(x_1, \dots, x_n)$ pour l'ensemble qu'ils constituent, la moyenne et la valeur commune μ_n qui conduit à la même valeur collective, c'est-à-dire qui satisfait à la condition :

$$(1) \quad f(\mu_n, \dots, \mu_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

dont on pourra tirer (sous certaines conditions concernant la fonction f)

$$(2) \quad \mu_n = g(x_1, \dots, x_n).$$

Si f est symétrique par rapport aux x_s , g le sera aussi et l'on pourra dire que μ_n est la moyenne symétrique des x_s . Dans les cas plus courants et importants f a la même forme.

$$(3) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n) :$$

les x_s sont soumis à la même opération φ et les résultats sont additionnés. Les moyennes qui en dérivent peuvent être dites de type arithmétique; elles sont évidemment symétriques.

La médiane ne résout pas un problème d'équirépartition; elle aussi pourtant est une moyenne symétrique, parce que, quel que soit l'ordre suivant lequel les x_s sont donnés, elle est déterminée à la suite d'un rangement par valeurs croissantes (ou décroissantes).

3 - Considérons d'abord une suite infinie x_1, x_2, \dots par la moyenne de tous les x_s on est amené à définir la limite (si elle existe).

$$\mu = \lim_{n, \infty} \mu_n$$

μ_n étant calculé au moyen des n premiers éléments x_1, \dots, x_n . Si en changeant l'ordre des x_s ne varie pas, celle-ci est une moyenne symétrique de l'infinité des valeurs x_s dépendant de leur ensemble et non de leur ordre de succession. Si μ_n est calculée au moyen de la formule (3) on aura

$$\lim \varphi(\mu_n) = \lim \frac{\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n)}{n} = \lim \varphi(x_n) \quad \text{d'où}$$

Si $\lim x_n$ existe et si φ est une fonction continue.

$$\lim \mu_n = \lim x_n.$$

Dans ces hypothèses la moyenne est donc symétrique car un ordre différent des x_s ne change pas $\lim x_n$. Il se peut toutefois que $\lim \mu_n$ existe sans qu'existe $\lim x_n$; on a alors la limite de x_n en moyenne (de type arithmétique sur la base de φ); en particulier en moyenne arithmétique, quadratique, harmonique, géométrique, etc ...

4 - On peut donner une définition analogue pour la médiane en prenant la $\lim \mu_n$, avec μ_n médiane des premières valeurs x_1, \dots, x_n . Si $\lim x_n = x$ existe on aura $\lim \mu_n = x$: en effet étant donné $\varepsilon > 0$ pour n plus grand qu'une certaine valeur x_0 , on aura $|x_n - x| < \varepsilon$ et par suite, pour $n > 2n_0$ on aura $|\mu_n - x| < \varepsilon$. Dans ce cas la médiane est une fonction symétrique de l'infinité des x_s . Mais il peut arriver aussi que la médiane μ_n tende vers une limite alors que x_n ne tend pas vers une limite: $\lim \mu_n$ est alors la limite en médiane de x_n . Par exemple la série indéterminée

$$0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$$

(1) J'ai exposé cette idée en 1923 cf ma note: A proposito di espressioni generali per le medie, *Giornale degli Economisti* - Mai 1937.

a la limite 1 en moyenne et la limite 0 en médiane. En supprimant le premier zéro, la nouvelle série garde la limite 1 en moyenne mais n'a pas de limite, en médiane. Par contre, la série indéterminée

$$0, 0, 2, 0, -2, 0, 6, 0, -6, 0, 10, 0, -10, 0, 14, 0, -14, \dots$$

n'a pas de limite en moyenne mais la limite 0 en médiane; si on supprime le zéro initial elle n'a pas de limite ni en moyenne ni en médiane.

5 - Le nombre des x_s devient infini en posant aussi sa fonction x fonction de la variable t dans l'intervalle $a - b$: la fonction f , qui définit la moyenne devient fonction de la ligne $y = x(t)$, c'est-à-dire une fonctionnelle $F x(t)$. La moyenne correspondante s'obtiendra en posant

$$(4) \quad F\mu = F x(t) \quad (\mu = \text{constante})$$

Par exemple, si F est l'intégrale de $x(t)$ dans l'intervalle $a - b$, on aura

$$\int_a^b \mu dt = \int_a^b x(t) dt, \quad \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$$

c'est-à-dire la moyenne arithmétique des valeurs prises par $x(t)$. Si F est l'intégrale de $x(t) p(t)$ on obtiendra la moyenne arithmétique pondérée de $x(t)$ avec un poids $p(t)dt$ (élémentaire). En général on pourra de la formule (4) déduire comme fonctionnelle de $x(t)$. Nous nous proposons avant tout d'étendre à ce cas la définition de moyenne symétrique.

6 - Permutation d'une fonction -

Puisque la moyenne est une fonctionnelle de $x(t)$ nous devons déterminer quand une fonctionnelle est symétrique par rapport à la fonction $x(t)$, c'est-à-dire ne varie pas si on substitue à $x(t)$ une fonction $x_1(t)$ représentant un simple changement dans l'ordre de l'infinité des valeurs prises par $x(t)$ dans l'intervalle $a - b$, c'est-à-dire en somme qui soit une permutation de $x(t)$. Pour une série x_1, x_2, \dots , modifier l'ordre des termes signifie considérer une nouvelle série contenant les mêmes termes répétés le même nombre de fois (fini ou infini) cependant, cette condition simple ne peut pas s'appliquer à une fonction $x(t)$ parce qu'une certaine valeur y peut être prise par $x(t)$ en tous les points, par exemple, d'un plurintervalle (intervalle composé d'un nombre fini ou infini d'intervalles disjoints). Il est toutefois naturel dans ce cas de considérer la longueur du plurintervalle (obtenue par l'addition, finie ou en série, des longueurs des intervalles partiels). Seulement, le recours aux plurintervalles n'est pas toujours suffisant, car il existe des ensembles qui ne sont pas des plurintervalles.

Un concept plus général est donc nécessaire : il nous est offert par la mesure d'un ensemble, selon la fameuse définition de Lebesgue.

En indiquant par $\text{mes } I(x \leq y)$ la mesure (supposée existante) de l'ensemble occupé par les points t qui font $x(t) \leq y$, et de façon analogue $x_1(t)$, il est nécessaire d'établir que $x_1(t)$ est une permutation de $x(t)$ si l'on a quel que soit y

$$(5) \quad \text{mes } I(x \leq y) = \text{mes } I(x_1 \leq y)$$

Il en découle aussitôt

$$(6) \quad \text{mes } I(x = y) = \text{mes } I(x_1 = y)$$

En effet ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned} \text{mes } I(x \leq y) - \lim \text{mes } I(x \leq z) &= \\ \text{mes } I(x_1 \leq y) - \lim \text{mes } I(x_1 \leq z) &= \end{aligned}$$

où les limites sont calculées pour z croissant et tendant vers y et où elles existent parce que mes $I(x \leq y)$ et mes $I(x_1 \leq z)$ sont fonctions des monotones (non décroissantes) de z .

Il est utile d'observer que l'égalité (6) ne suffit pas à définir une permutation (comme on pourrait au premier moment le supposer) parce qu'elle n'entraîne pas l'égalité (5) pourtant nécessaire : on peut en donner un exemple avec les deux fonctions $x(t)$, $x_1(t)$ croissantes dans l'intervalle $a - b$ de A à B de façon que par exemple $x(t) > x_1(t)$ - c'est pourquoi nous prendrons l'égalité (5) pour définir les variations de $x(t)$. L'égalité (5) n'oublie pourtant pas $x_1(t)$ à prendre les mêmes valeurs que $x(t)$. Si en effet on transforme arbitrairement $x(t)$ en un ensemble de mesure nulle, la nouvelle fonction $x_1(t)$ vérifie l'égalité (5). Si on ajoute alors la condition que $x_1(t)$ et $x(t)$ aient les mêmes valeurs et plus précisément que $I(x = y)$ et $I(x_1 = y)$ aient la même mesure (ou "puissance", c'est-à-dire peuvent être mis en relation biunivoque), on obtiendra une permutation au sens étroit. Pourtant par la suite, les propriétés établies seront valables pour n'importe quelle permutation.

7 - Fonctionnelle symétrique -

De même qu'une fonction de x_1, \dots, x_n est symétrique si elle ne varie pas quand on change l'ordre des variables, de même, par extension naturelle, je dirais qu'une fonctionnelle de $x(t)$ est symétrique si elle reste invariée quand on substitue à $x(t)$ une de ses permutations. Et la fonctionnelle sera seulement symétrique au sens étroit si elle ne varie pas pour une permutation au sens étroit (mais peut varier pour d'autres permutations). Par exemple les extrêmes de $x(t)$ en $a - b$ sont fonctionnelles symétriques au sens étroit parce qu'une permutation générique peut prendre des valeurs non comprises entre des extrêmes de $x(t)$.

La symétrie ainsi définie se ramène à une fonctionnelle d'une seule fonction - Pour une fonctionnelle F de n fonctions on pourra revenir au concept ordinaire de symétrie c'est-à-dire à l'invariabilité de F pour un changement d'ordre dans les fonctions; mais si le nombre des fonctions devient infini, on pourra considérer la symétrie par rapport à ces fonctions infinies; et ceci ramènera à des problèmes du type précédemment traité.

8 - La somme de n nombres est une fonction symétrique de ceux-ci; à cette propriété correspond la suivante : l'intégrale de $x(t)$ est une fonctionnelle symétrique. Il faut naturellement considérer les intégrales dans le sens de Lebesgue, parce qu'une permutation de $x(t)$, et $x(t)$ même pourraient ne pas être intégrables au sens classique.

La démonstration se déduit immédiatement du processus même de la construction de l'intégrale de Lebesgue. En effet si on introduit les mesures

$$\begin{aligned} m(y) &= \text{mes } I(x \leq y) \quad , \quad M(y) = \text{mes } I(x > y) \\ \bar{m}(y) &= \text{mes } I(x = y) \quad m(y) + M(y) = b - a \end{aligned}$$

et si on indique respectivement par A et B les limites extrêmes inférieure et supérieure de $x(t)$ dans l'intervalle $a - b$, l'intégrale de Lebesgue est définie, en substance, par une intégrale de Stieljes : plus précisément

$$(7) \quad \int_a^b x(t) dt = \int_{A-\varepsilon}^B y dm(y) \quad [\varepsilon > 0 \text{ arbitraires}]$$

Cette intégrale existe, parce que $m(y)$ est monotone. Il résulte de là qu'une permutation au sens étroit ne modifie pas l'intégrale, parce qu'elle ne modifie ni $m(y)$, ni A ni B . Pour démontrer, ensuite, que la propriété demeure valable pour n'importe quelle permutation il faut remplacer A, B

par deux autres quantités. Notons à cet effet que si les valeurs $x(t) > B_0$; se trouvent sur un ensemble de mesure nulle, pour $y > B_0$ on a $M(y) = 0$, $m(y) = b - a$ et par conséquent $dm(y) = 0$; de même si on a $x(t) < A_0$ pour les points t d'un ensemble de mesure nulle, pour $y < A_0$, on a $m(y) = 0$ et $dm(y) = 0$: il suffit pour cela d'intégrer de $A_0 - \varepsilon$ jusqu'à B_0 . Considérons alors la plus petite valeur B_1 de B_0 et la plus grande valeur A_1 de A_0 , et appelons les respectivement extrême supérieure et extrême inférieure de $x(t)$ dans l'intervalle $a - b$: on aura évidemment

$$A \leq A_1 \leq B_1 \leq B$$

et on pourra retenir dans le calcul de l'intégrale par la formule (7) le fait que A et B représentent les extrêmes de $x(t)$ au lieu des extrêmes (1). Il est clair que $x(t)$ et une de ses commutations $x_1(t)$ ont les mêmes extrêmes (sinon les mêmes extrêmes); donc, en vertu de la formule (7) elles ont la même intégrale.

9 - Il est bon d'établir, pour ce qui suit, que l'intégrale de $x(t)$ est aussi une fonctionnelle symétrique. Il suffit de remarquer qu'évidemment les extrêmes de $|x(t)|$ et de $|x_1(t)|$ coïncident;

$$\begin{aligned} \text{mes } I(|x| \leq y) &= \text{mes } I(-y \leq x \leq y) = m(y) - \\ &\quad - m(-g) + \bar{m}(-y) \end{aligned}$$

et que le dernier membre n'est pas modifié en passant de $x(t)$ à $x_1(t)$.

10 - Nous devons ajouter et nous en tirerons parti plus loin que la fonction $m(y)$ est continue à droite et discontinue à gauche seulement si $\bar{m}(y) > 0$, avec un écart égal à $\bar{m}(y)$. En effet si on désigne par $m(y+)$, et $m(y-)$ les limites à droite et à gauche de y , il résulte de fait que $m(y)$ tient compte aussi des points t qui rendent $x(t) = y$:

$$m(y+) - m(y) = 0, \quad m(y) - m(y-) = \bar{m}(y)$$

Puisque $M(y) = b - a - m(y)$, $M(y)$ aussi se comporte comme $m(y)$.

11 - La permutation croissante -

Si $x(t)$ est monotone (croissante ou décroissante) la médiane est évidemment la valeur de $x(t)$ au point moyen de l'intervalle $a - b$; les terciles, quartiles, etc... s'obtiennent de la même manière, en divisant l'intervalle en 3, 4, ..., parties égales. Quand $x(t)$ n'est pas monotone il faudra la transformer en une fonction monotone c'est-à-dire construire la permutation croissante $x_c(t)$, ou bien décroissante $x_d(t) = c$ est sur elles ensuite qu'on déterminera les valeurs médianes.

Pour avoir $x_c(t)$ nous donnerons la valeur y à tous les points de l'intervalle ayant pour extrêmes

$$(8) \quad t_y = a + m(y), \quad t_y - \bar{m}(y),$$

intervalle contenu dans celui $a - b$ et de longueur $\bar{m}(y)$. Si $\bar{m}(y) = 0$, les ordonnées du diagramme de $x(t)$ égales à y se rencontrent toutes sur le point t_y , donc, si elles sont deux ou plus, le $x_c(t)$ ne donne pas une permutation au sens étroit le point t_y sera comme $m(y)$ fonction monotone de y , continue à droite; et discontinue à gauche avec l'écart $\bar{m}(y)$ seulement si $\bar{m}(y) = 0$ (voir n° 10) - Le diagramme de $x_c(t)$ vient coïncider en correspondance avec l'intervalle dit plus haut, avec un segment parallèle à l'axe t de longueur $\bar{m}(y)$.

(1) Cette simple opération peut souvent être utile (par exemple dans l'application du théorème de la moyenne).

Si on écrit à la place de t_y et si on résout par rapport à y l'équation (9)

$$t = a + m(y)$$

on aura l'équation $y = x_c(t)$ de la permutation croissante, en tenant compte du fait que, lorsque $\bar{m}(y) > 0$, $x_c(t)$ reste constante et $= y$ sur tout l'intervalle (8). Ceci entraîne $x_c(t)$, fonction monotone croissante à être aussi une fonction continue. Il faut encore observer que si mes $I(y < x < x + h)$ $m(y)$ reste constante quand y parcourt l'intervalle $y - y + h$; la courbe de $x_c(t)$ acquiert alors un règlement parallèle à l'axe y et par suite sur le point t correspondant, la fonction $x_c(t)$ devient plurivalente. Ce fait, comme nous le verrons, a de l'importance pour la détermination de la médiane.

On définit de façon analogue la permutation décroissante $x_d(t)$. Son diagramme évidemment, est le symétrique de celui de la $x_c(t)$, par rapport à l'axe du segment $a - b$.

Un problème d'hydrostatique - et précisément l'équilibre d'un liquide à couches horizontales de diverses densités, qui s'obtient quand les densités se disposent par ordre croissant vers le bas a amené C. SOMIGLIANA (Sulle funzioni reali di una variabile (1); sulle funzioni ordinate*) à construire (au moyen de considérations sur les limites) la permutation croissante d'une fonction continue $f(x)$, appelée par lui "fonction ordonnée" de $f(x)$. Dans une lettre à C. SOMIGLIANA, V. VOLTERRA (voir la seconde note citée) étendit le procédé à des fonctions discontinues. L'étude fut reprise par F. SIBIRANI (sulle funzioni ordinatrici (2) qui utilisa le concept de mesure toujours pour des fonctions continues, et indiqua les difficultés que présentent les fonctions discontinues. Dans la présente étude on considère toutes les permutations et en particulier la permutation croissante, sans exclure la possibilité qu'elle soit plurivalente. La statistique examine souvent des fonctions plurivalentes: par exemple une table à double entrée est l'expression au sens mathématique formel, d'une fonction plurivalente, et de son inverse.

12 - Puisque la mesure jusqu'à y , c'est-à-dire $m(y)$, et la mesure pour y , c'est-à-dire $\bar{m}(y)$, sont les mêmes pour $x(t)$ et pour une permutation $x_1(t)$ il est clair que $x(t)$ et $x_1(t)$ conduisent à la même permutation croissante. Soit alors une fonctionnelle $F x(t)$ et $F x(t) = F x_c(t)$ quel que soit $x(t)$: on aura aussi $F x_1(t) = F x_c(t)$, d'où $F x(t) = F x_1(t)$ et la fonctionnelle sera symétrique. Donc: pour qu'une fonctionnelle soit symétrique, il est nécessaire et suffisant qu'elle ne varie pas lorsqu'on substitue à $x(t)$ sa permutation croissante.

13 - Médiane

Puisque $x_c(t)$ représente $x(t)$ rangé suivant les valeurs croissantes, la médiane est la valeur de $x_c(t)$ située au milieu de l'intervalle $a - b$. En se reportant au diagramme, on peut dire que les ordonnées qui précèdent l'ordonnée médiane et celles qui la suivent portent sur des ensembles de mesure égale (la moitié de l'intervalle $a - b$).

Si l'axe du segment $a - b$ rencontre le diagramme en un seul point, il y a une seule valeur médiane; s'il contient un segment parallèle à l'axe y et faisant partie du diagramme (V n° 11) il y aura tout un intervalle de

(1) SOMIGLIANA - Sulle funzioni reali di una variabile, R. Accademia dei Lincei, 1899, 1° sem.

Sulle funzioni ordinate, id - 2° sem.

(2) SIBIRANI - Sulle funzioni ordinatrici, R. Accademia dei Lincei, 1911, 2° sem; Acc. d. Sc. di Bologna, Mem, 1948.

valeurs médianes. Cependant $x(t)$ ne prend pas toutes ces valeurs, car les ordonnées $x(t)$ comprises dans l'intervalle médian portent le plus souvent sur un ensemble de mesure nulle (souvenons-nous que $m(y)$ reste constante quand y varie dans l'intervalle médian).

Un nombre fini d'éléments peut aussi conduire à un intervalle médian, comme il est bien connu : ce sont pourtant seulement les deux limites extrêmes, de cet intervalle qui appartiennent au groupe d'éléments donné. Si on divise l'intervalle $a - b$ en trois, quatre, ..., parties égales, les ordonnées aux points de division donneront les deux terciles, les trois quartiles, ... ; et un intervalle tercile, un intervalle-quartile, ..., pourront être formés. Si on construit aussi le diagramme de $x_d(t)$; la médiane (unique ou intervalle) constitue l'intersection des deux courbes de $x_c(t)$ et de $x_d(t)$.

14 - Propriété de minimum. Dans le cas discontinu, il est pour ainsi dire évident que la médiane rend minimale la somme des écarts absolus. S'il y a un intervalle médian, ceci a lieu pour tous ses points (1). Comme on peut le prévoir, cette propriété se vérifie aussi dans le cas continu.

Soit en effet,

$$S(z) = \int_a^b |x(t) - z| dt$$

la somme (intégrale) des écarts absolus de $x(t)$ pour z ; puisqu'une permutation de $x(t)$ ne change pas l'intégrale de $x(t) - z$ ni même celle de $|x(t) - z|$ (v. n° 9), nous pouvons substituer $x_c(t)$ à $x(t)$.

Comme $x_c(t)$ est monotone, croissante, nous aurons :

$$S(z) = \int_A^z m(y) dy + \int_z^B M(y) dy$$

Les dérivées droite et gauche de $S(z)$ sont (2), étant donné $H(z) = m(z) - M(z)$ (fonction monotone croissante).

$$S'(z+) = H(z) \quad , \quad S'(z-) = H(z-)$$

Si z précède la médiane (ou les médianes) on a $H(z) < 0$; et aussi $H(z-) < 0$ parce que $H(z-) \leq H(z)$. Si z est supérieur à la médiane, il résulte au contraire $H(z) > 0$; et aussi $H(z-) > 0$ parce que, pour y compris entre z et la médiane, on a $H(y) > 0$ et croissant. Les dérivées droite et gauche étant négatives avant la médiane, positives après et nulles dans l'intervalle médian (s'il existe, dans cet intervalle : $m = M$) on conclut que $S(z)$ diminue quand z croît jusqu'à la médiane, que Sz reste constant quand z parcourt l'intervalle médian (s'il y en a un) et ensuite croît avec z .

15 - Fonction pondérée :

Supposons que l'on attribue à $x(t)$ un poids (élémentaire) $p(t)dt$ et formons la moyenne pondérée

$$M_p = \frac{\int_a^b x(t) p(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} :$$

(1) - $x_1 \dots x_n$ étant donnés par ordre croissant, la somme des deux écarts absolus de z pour x_1 et x_n est minimale quand $x_1 < z < x_n$; de même, quand $x_2 < z < x_{n-1}$ la somme des écarts entre x_2 et x_{n-1} , etc ... est minimale. Ceci conduit à placer z sur la médiane ou bien sur l'intervalle médian.

(2) On démontre facilement que si $F(z)$ a une limite droite (gauche) en z , cette limite est la dérivée droite (gauche) en z de l'intégrale de F en a à z . On se souviendra aussi que $m(y)$ et $M(y)$ sont continues à droite (n° 10).

nous nous proposons de vérifier qu'une permutation de $x(t)$ laisse M_p inchangée. Cette propriété, évidente pour le cas discontinu - parce que toutes les valeurs x_s portent avec elles, dans un déplacement, leur propre pondération p_s , on peut faire ensuite la somme des coefficients de pondération de valeurs successives égales - n'est pas évidente dans le cas continu, car il est nécessaire avant tout d'établir quelle est la pondération $p_c(t)dt$ à donner à la permutation $x_1(t)$.

Nous commencerons par étudier la permutation croissante $x_c(t)$ en déterminant le poids $p_c(t)dt$ qui lui est attaché. Sur le segment a^-t , $x_c(s)$ absorbe l'ensemble $I(x < y)$, car $y = x_c(t)$: c'est-à-dire dans l'hypothèse $\bar{m}(y) = 0$. Mais si $\bar{m}(y) > 0$, il en résulte que $x_c(t)$ est constante = y dans un intervalle $\alpha - \beta$ de longueur $\bar{m}(y)$; le segment $a^- \alpha$ contient l'ensemble $I(x < y)$ et le segment $a^- \beta$, ce même ensemble et en plus $I(x = y)$. C'est pourquoi, pour $\alpha < t < \beta$ nous attribuerons au segment $a^- t$ le poids total de $I(x < y)$ plus une partie du poids de $I(x = y)$, proportionnelle à $t - \alpha$ ⁽¹⁾ = c'est-à-dire nous poserons :

$$(10) \quad \int_a^t p_c(s) ds = \int_{x < y} p(s) ds + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot \int_{x=y} p(s) ds \quad [y = x_c(t)]$$

Pour $t = b$, on a évidemment (B représentant l'extrême supérieure de $x(t)$ dans l'intervalle $a^- b$)

$$(11) \quad \int_a^b p_c(s) ds = \int_{x < B} p(s) ds + \int_{x=B} p(s) ds = \int_a^b p(s) ds$$

c'est-à-dire que le poids total n'a pas varié. Si $\bar{m}(y) = 0$, le dernier terme du deuxième membre de l'équation (10) disparaît.

16 - Pour déterminer $p_c(t)$ il est essentiel de noter que le deuxième membre de l'équation (10) est une fonction $\varphi(t)$ absolument continue du moins dans l'hypothèse - où nous nous plaçons - que $p(t)$ est fonction limitée en $a^- b$ c'est-à-dire que l'on a $p(t) < P$, P étant indépendant de t . Je montrerai précisément que le rapport d'accroissement de $\varphi(t)$ dans n'importe quel intervalle de $a^- b$ est inférieur à P ; et ceci - comme il est bien connu - suffira pour qu'on affirme que $\varphi(t)$ est absolument continue. L'intervalle $t^- t+h$ ($h > 0$) étant fixé, supposons pour nous placer dans des conditions générales que t porte sur un segment $\alpha_1 - \beta_1$, dans lequel, $x_c(t) =$ constante = y_1 et $t+h$ dans $\alpha_2 - \beta_2$ où $x_c(t) =$ constante = y_2 ; et posons :

$$h_1 = \beta_1 - t, \quad h_2 = \alpha_2 - \beta_2, \quad h_3 = t+h - \alpha_2.$$

Si t ne se trouve pas sur un segment $\alpha_1 - \beta_1$, $h_1 = 0$; et si $t+h$ n'appartient pas à $\alpha_2 - \beta_2$, $h_3 = 0$, puisque quant t varie dans $\alpha_i \beta_i$, seul le deuxième terme de $\varphi(t)$ varie, nous aurons :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\beta_1) - \varphi(t) = \frac{h_1}{\beta_1 - \alpha_1} \int_{x=y_1} p(s) ds = h_1 p_1 \\ \varphi(\alpha_2) - \varphi(\beta_1) = \int_{x < y_2} p(s) ds - \int_{x < y_1} p(s) ds = \int_{y_1 < x < y_2} p(s) ds = h_2 p_2 \\ \varphi(t+h) - \varphi(\alpha_2) = \frac{h_3}{\beta_2 - \alpha_2} \int_{x=y_2} p(s) ds = h_3 p_3 \end{array} \right.$$

Posons :

$$p_1 = \text{valeur moyenne de } p(s) \text{ en } I(x=y_1)$$

(1) On pourrait bien entendu faire une autre convention.

$$(12) \quad \begin{aligned} p_2 &= \text{valeur moyenne de } p(s) \text{ en } I(y_1 < x < y_2) \\ p_3 &= \text{valeur moyenne de } p(s) \text{ en } I(x=y_2) \end{aligned}$$

Puisque $\varphi(t)$ est évidemment fonction croissante de t , les accroissements (12) expriment les variations. En ajoutant les expressions (12), on obtient :

$$(13) \quad \varphi(t+h) - \varphi(t) = h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 = h \bar{p} < h P$$

\bar{p} étant la moyenne de p_1, p_2, p_3 , et par conséquent, moyenne de $p(t)$ en $I(y_1 \leq x \leq y_2)$. Ceci démontre la continuité absolue de $\varphi(t)$.

Par suite, la dérivée $\varphi'(t)$ existe dans l'intervalle a^-b , sauf à la rigueur pour un ensemble de mesure nulle; et l'intégrale de $\varphi'(t)$ est égale à $\varphi(b) - \varphi(a)$, c'est-à-dire dans notre cas, $\varphi(b)$, puisque $\varphi(a) = 0$. Nous poserons alors $p_c(t) = \varphi'(t)$ dans les points de dérivabilité. Quelle que soit la valeur que l'on donne à $p_c(t)$ sur les points qui restent, on aura toujours

$$\int_a^t p_c(s) ds = \int_a^t \varphi'(s) ds = \varphi(t)$$

et l'équation (10) sera satisfaite. Ayant ainsi obtenu une solution pour $p_c(t)$ on pourra en déduire d'autres en alternant $p_c(t)$ dans un ensemble de mesure nulle.

17 - Quant t est intérieur à un intervalle $\alpha - \beta$ où $x_c(t)$ est constante et égale y , la dérivée $\varphi'(t)$ se détermine immédiatement, en notant que $\varphi(t)$ dans $\alpha - \beta$ est une fonction linéaire, représentée par le deuxième terme du second membre de l'équation (10). On a ainsi :

$$(14) \quad p_c(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{x=y} p(s) ds = \text{constante} = \bar{p}$$

avec \bar{p} moyenne arithmétique de $p(s)$ dans l'ensemble $I(x = y)$ qui a pour mesure $\bar{m}(y) = \beta - \alpha$

La coïncidence de $\varphi'(t)$ coïncide avec une valeur moyenne de $p(s)$ subsiste même si t est en dehors d'un segment $\alpha - \beta$, dans l'hypothèse où $p(t)$ est une fonction continue. En effet, l'équation (13) donne :

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \bar{p},$$

\bar{p} = valeur moyenne de $p(s)$ dans l'intervalle $I_h(y \leq x \leq y)$ avec $y = x_c(t)$, $y_h = x_c(t+h)$. Quand h tend vers 0, y_h tend vers y , et l'ensemble I_h tend vers l'ensemble $I(x=y)$ complété par son dérivé (1). Si $p(t)$ est fonction continue, il est clair que p moyenne dans I_h , tend vers une valeur moyenne dans l'ensemble limite de I_h , formé, comme on l'a dit, de $I(x = y)$ et de son dérivé. Mais la valeur $p(t_0)$ en un point d'accumulation de t , quand t varie dans un ensemble I , est elle aussi - en raison de la continuité de $p(t)$ - une valeur moyenne entre celles que $p(t)$ assume dans I = c'est pourquoi la limite de \bar{p} , c'est-à-dire $\varphi'(t)$, est une moyenne de $p(t)$ dans l'ensemble $I(x = y)$.

(1) J'applique ici, la définition de limite et de continuité d'un ensemble variable que j'ai exposé récemment (Alcune proprietà generali di un insieme variabile, Boll. Unione matem. Ital. 1954, Mars). Si $I(t)$ est un ensemble (par exemple numérique), fonction de t , le point x_0 sera "interlimite" de $I(t)$ pour t tendant vers t_0 , si, étant donné $\epsilon > 0$ tout autour de t_0 , on trouve au moins un point t pour lequel $I(t)$ possède des éléments compris entre $x_0 - \epsilon$ et $x_0 + \epsilon$. Si on trouve un intervalle entourant t_0 tel qu'en chacun de ses points t , cette limitation soit valable, x_0 sera "interlimite stable". Les interlimites forment la classe "limite" en t_0 , toujours existante et fermée. Si elle contient seulement des interlimites stables, elle est la "limite" de $I(t)$ et on peut dire que $I(t)$ tend vers elle. $I(t)$ est fonction continue de t en t_0 si, elle tend vers l'ensemble formé par $I(t_0)$, et par son dérivé.

On a supposé que $\varphi'(t)$ existait en t . Mais quand elle n'existe pas on peut attribuer à $p_c(t)$, comme on l'a déjà dit (n° 16), une valeur arbitraire : nous donnerons encore à $p_c(t)$ une valeur moyenne entre celles que $p(t)$ assume en $I(x = y)$ (par exemple la demi-somme des extrêmes); que nous pouvons donc, conclure en général que si la densité de pondération $p(t)$ est fonction continue de t , on peut satisfaire à la condition (10) avec une densité $p_c(t)$ qui est une moyenne des densités $p(s)$ sur les points qui rendent $x(s) = x_c(t)$.

Si, en particulier, $p(t) = \text{constant} = 1$, on pourra aussi poser $p_c(t) = 1$.

18 - La structure de la moyenne $p_c(t)$ peut être précisée dans les cas plus courants, correspondant aux hypothèses que nous allons maintenant indiquer.

Supposons que $x(t)$ aussi soit fonction continue : y une fois fixé, si en un point on a $x(s) < y$, il existera tout autour de s un intervalle dans lequel $x(s)$ est encore $< y$, et de ce fait, l'intervalle $I(x < y)$ se composera d'intervalles (en nombre même infini) disjoints, qui pourront être disposés en série $t_1 \text{---} t_2, t_3 \text{---} t_4, \dots$

Si $\bar{m}(y) > 0$, un segment $\alpha - \beta$ est formé dans lequel $x_c(t)$ est constant = y et comme on l'a vu (n° 17) $p_c(t)$ est la moyenne arithmétique simple de $p(s)$ en $I(x = y)$.

Si, en revanche, $\bar{m}(y) = 0$, le point t où $x_c(t) = y$ est (comme on l'a vu au n° 11).

$$(15) \quad t = a + \text{mes } I(x < y) = a + \sum_i (t_{2i} - t_{2i-1})$$

Faisons, maintenant, varier t dans un intervalle qui l'entoure σ , et supposons - comme il advient généralement - que l'on ait toujours $\bar{m}(y) = 0$: les points t_i varieront en conséquence, et en particulier t_{2i} croîtra avec t , tandis que t_{2i-1} décroîtra. Notons que si y représente un maximum (relatif) de $x(s)$, deux points t_{2i-1}, t_{2i} coïncident et cessent d'exister si t augmente: il faudra, alors, prendre une marge σ seulement à gauche; et, de la façon analogue, seulement à droite si y est un minimum de $x(t)$. Si on prend σ par le côté opposé on pourra avoir un résultat différent (comme l'exemple au n° 22 le confirmera).

En supposant que $x(t)$ soit une fonction dérivable, on aura $y = x(t_i)$, fonction dérivable de t_i ; donc, dans σ , t_i sera aussi dérivable par rapport à y ; par conséquent, en vertu de l'équation (15), t sera une fonction dérivable de y (en supposant que si la somme devient une série, elle sera dérivable terme par terme); et enfin, y sera dérivable par rapport à t . Mais alors, t_i aussi sera une fonction dérivable de t ; et l'expression (15) pourra donc être dérivée par rapport à y comme par rapport à t . En général, nous pouvons écrire (en remarquant que t_{2i} croît et que t_{2i-1} décroît quand t croît)

$$(16) \quad dt = \sum (dt_{2i} - dt_{2i-1}) = \sum |dt_i|$$

Si on divise par dt et si on indique par t'_i la dérivée par rapport à t , on a :

$$(17) \quad 1 = \sum |t'_i|$$

Si, au contraire, on divise par dy , on obtient la relation :

$$(18) \quad \frac{1}{x'_c(t)} = \sum \frac{1}{|x'(t_i)|}$$

qui relie la dérivée en t de la permutation aux dérivées de $x(s)$ aux points t_i correspondant à t . D'après ce qui a été dit, si $y = x_c(t)$ est un maximum ou un minimum de $x(s)$, les relations (17) et (18) seront valables à droite de t pour un certain groupe de t_i , et à gauche pour un autre groupe : et si t_j appartient à deux groupes à la fois, la fonction $t_j(t)$ variera (en général) en passant d'un groupe à l'autre. (V. l'exemple au n° 22).

19 - Venons-en à la détermination de $p_c(t)$. L'équation (10) devient, en remarquant que le deuxième terme du deuxième membre manque parce que $\bar{m}(y) = 0$ en σ et que $I(x < y)$ est plurintervalle :

$$(19) \quad \int_a^t p_c(s) ds = \sum_i \int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} p(s) ds$$

On trouve en la différenciant :

$$(20) \quad p_c(t) dt = \sum_i [p(t_{2i}) dt_{2i} - p(t_{2i-1}) dt_{2i-1}] = \sum p(t_i) |dt_i|$$

c'est-à-dire le poids (élémentaire) pour $x_c(t)$ est la somme des poids aux points t_i où $x(t_i) = x_c(t)$.

Ainsi, dans le cas continu, une propriété évidente pour les distributions discontinues (v. n° 15) reste valable. En divisant ensuite l'expression (20) par dt on obtient la solution continue

$$(21) \quad p_c(t) = \sum p(t_i) |t'_i| ;$$

celle-ci, compte tenu de la relation (17), exprime que la densité (continue) de pondération à attribuer à $x_c(t)$ est moyenne pondérée de la densité aux points t_i correspondant à t , avec comme poids $|t'_i|$ pour $p(t_i)$. La nature de la moyenne $p_c(t)$ se trouve ainsi précisée dans les hypothèses considérées.

20 - Montrons maintenant que l'intégrale de $x(s) p(s)$ coïncide avec celle de $x_c(t) p_c(t)$ dans l'intervalle $a^- - b$.

Commençons par considérer l'ensemble U des segments $\alpha_i - \beta_i$, dans lesquels $x_c(t) = \text{constante} = y_i$. Dans $\alpha_i - \beta_i =$

$$p_c(t) = \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} \cdot \int_{x=y_i} p(s) ds \quad [\bar{m}(y_i) = \beta_i - \alpha_i]$$

Comme $x_c(t) = x(s) = \text{constante} = y_i$ quel que soit s dans $I_i(x = y_i)$, si on multiplie le premier membre par $x_c(t)$ et le deuxième par $x(s)$ à l'intérieur de l'intégrale, nous aurons :

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} x_c(t) p(t) dt = \int_{x=y_i} x(s) p(s) ds$$

et, en faisant la somme :

$$(22) \quad \int_U x_c(t) p_c(t) dt = \int_I x(s) p(s) ds$$

où I est la "somme" des ensembles disjoints I_i .

Soit, alors, t extérieur à U , c'est-à-dire situé dans son complément V . Puisque $x_c(t) = x(t_i)$ quelle que soit la valeur correspondante de t_i , si on multiplie par $x_c(t)$ le premier membre de l'équation (20) et par $x(t_i)$ le terme du deuxième membre contenant $p(t_i)$, en intégrant ensuite sur V , on aura :

$$\int_V x_c(t) p_c(t) dt = \sum_i \int_{\gamma_i} x(t_i) p(t_i) dt_i$$

où γ_i est l'ensemble parcouru par t_i quand t varie dans V . Puisque t_i est fonction continue de t , croissante ou décroissante, γ_i est un intervalle dont les extrémités sont des points τ pour lesquels $y = x(\tau)$ est maximum ou minimum, ou bien $\bar{m}(y) > 0$.

De tels intervalles γ_i (disjoints) complètent évidemment le complément J de I dans $a \overline{b}$: donc :

$$(23) \quad \int_V x_c(t) p_c(t) dt = \int_J x(t) p(t) dt$$

En additionnant (22) et (23) on obtient en définitive, comme on le désirait :

$$(24) \quad \int_a^b x_c(t) p_c(t) dt = \int_a^b x(t) p(t) dt$$

21 - Des égalités (24) et (11), il résulte donc, que la moyenne pondérée M_p ne varie pas quand on calcule sur la permutation $x_c(t)$ avec la pondération $p_c(t)$ définie précédemment.

Passons, maintenant, à une autre permutation $x_1(t)$ de $x(t)$. Le poids $p_1(t)dt$ à assigner à $x_1(t)$ devra être tel que, selon les critères habituels, on ait pour résultat, quel que soit y

$$\int_{x \leq y} p(s) ds = \int_{x_1 \leq y} p(s) ds$$

De là, par un raisonnement analogue à celui employé au n° 6 pour $I(x \leq y)$, on déduit :

$$(25) \quad \int_{x=y} p(s) ds = \int_{x_1=y} p_1(s) ds, \quad \int_{x < y} p(s) ds = \int_{x_1 < y} p_1(s) ds$$

Ceci posé, construisons la permutation croissante $x_{1c}(t)$ de $x_1(t)$, et déterminons le poids $p_c(t)dt$ à lui assigner. Nous savons déjà (n° 12) que $x_{1c}(t)$ est : $x_c(t)$; de plus, en vertu de la relation (25), le deuxième membre de l'équation (10) ne varie pas quand on substitue $p_1(s)$ à $p(s)$, d'où l'on peut admettre que $p_{1c}(t) = p_c(t)$. Donc, $s(t)$ et $x_1(t)$ ont la même permutation croissante et avec le même poids. Comme les moyennes pondérées de $x(t)$ et $x_1(t)$ coïncident avec les moyennes pondérées de leurs permutations croissantes, et que, celles-ci sont égales, on conclut que les deux moyennes de $x(t)$ et $x_1(t)$ seront aussi égales. En résumé, on peut dire qu'une moyenne pondérée est une fonctionnelle symétrique. Ce résultat ne pouvait se déduire directement de l'observation formulée dans le paragraphe 12, parce que la moyenne pondérée de $x(t)$ n'est pas seulement une fonctionnelle de $x(t)$ mais aussi de $p(t)$ et cette fonction est modifiée quand on passe à une permutation $x_1(t)$.

22 - Exemple :

Appliquons à un exemple - tout-à-fait simple pour éviter des complications de nature exclusivement technique - les procédés exposés. Soit $x(t)$ dans l'intervalle $2 \overline{2}$, défini comme suit :

Intervalles	$-2 \overline{-1}$	$-1 \overline{0}$	$0 \overline{1}$	$1 \overline{2}$
$x(t)$	$-1-t$	$1+t$	$\frac{2-t}{2}$	$\frac{t}{2}$

La courbe de $x(t)$ est la ligne brisée, ayant pour sommets $(-2, 1)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 1/2)$ $(2, 1)$.

Pour $y < 1/2$ on a seulement 2 points t_1, t_2 ; et pour $y > 1/2$ on introduit aussi t_3, t_4 (coincident pour $y = 1/2$). Précisément :

$$y < 1/2, t < -1$$

$$t_1 = -1 - y, t_2 = -1 + y, t_2 - t_1 = 2y \quad t_1 + t_2 = -2$$

$$t = -2 + t_2 - t_1 = -2 + 2y, y = x_c(t) = \frac{2+t}{2} \quad x_c(t) = 1/2$$

$$t_1 = -2 - t/2 \quad t_2 = t/2, t'_1 = t'_2 = 1/2$$

$$y \geq 1/2, t \geq -1$$

$$t_1 = -1 - y, t_2 = -1 + y \quad t_3 = 2 - 2y, t_4 = 2y$$

$$t_2 - t_1 = 2y, t_1 + t_2 = -2; t_4 - t_3 = 2 + 4y, t_3 + t_4 = 2$$

$$t = -2 + t_2 - t_1 + t_4 - t_3 = -4 + 6y, y = x_c(t) = \frac{4+t}{6} \quad x'_c(t) = 1/6$$

$$t_1 = \frac{-10-t}{6}, t_2 = \frac{-2+t}{6}, t_3 = \frac{2-t}{3}, t_4 = \frac{4+t}{3}$$

$$|t'_1| = t'_2 = 1/6 \quad |t'_3| = t'_4 = 1/4$$

La médiane est $x_c(0) = 4/6$; les quartiles sont $x_c(-1), x_c(0), x_c(1)$ c'est-à-dire $3/6, 4/6, 5/6$. On vérifie que $\sum |t'_i| = 1$. A gauche et à droite de $t = -1$ on a, pour t_1 et t_2 deux expressions différentes en fonction de t ; la dérivée de $x_c(t)$ à gauche est $1/2$, à droite $1/6$ et ceci parce que pour $t = -1, x(t)$ passe par un minimum.

La moyenne (simple) peut être calculée au moyen de $x(t)$ ou bien de $x_c(t)$. En effet :

$$\int_{-2}^{+2} x(t) dt = \int_{-2}^{-1} (-1-t) dt + \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 \frac{(2-t) dt}{2} + \int_1^2 \frac{t dt}{2} =$$

$$= 1/2 + 1/2 + 3/4 + 3/4 = 5/2$$

$$\int_{-2}^2 x_c(t) dt = \int_{-2}^{-1} \frac{2+t}{2} dt + \int_{-1}^2 \frac{4+t}{6} dt = 1/4 + 9/4 = 5/2$$

Donc, la moyenne est $\frac{5/2}{4} = 5/8$

Passons aux moyennes pondérées, en supposant $p(t) = 2 + t$ et en calculant $p_c(t)$

$$-2 \quad -1$$

$$p_c(t) = p(t_1) |t'_1| + p(t_2) t'_2 = \frac{2+t_1+2+t_2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$p_c(t) = p(t_1) |t'_1| + p(t_2) t'_2 + p(t_3) |t'_3| + p(t_4) t'_4 =$$

$$= \frac{2+t_1+2+t_2}{6} + \frac{2+t_3+2+t_4}{3} = \frac{4-2}{6} + \frac{4+2}{3} = 7/3$$

Pour $t = -1$ la densité de pondération est 1 à gauche et $7/3$ à droite. Vérifions l'invariance du poids total

$$\int_{-2}^2 p(t) dt = \int_{-2}^2 (2+t) dt = 8$$

$$\int_{-2}^2 p_c(t) dt = \int_{-2}^{-1} dt + \int_{-1}^2 \frac{7}{3} dt = 1 + 7 = 8$$

Il en résulte en outre :

$$\int_{-2}^2 x(t) p(t) dt = \int_{-2}^{-1} (-1-t)(2+t) dt + \int_{-1}^0 (1+t)(2+t) dt + \int_0^1 \frac{4-t^2}{2} dt +$$

$$+ \int_1^2 \frac{t}{2}(2+t) dt = 1/6 + 5/6 + 11/6 + 16/6 = 11/2$$

$$\int_{-2}^2 x_c(t) p_c(t) dt = \int_{-2}^{-1} \frac{2+t}{2} dt + \int_{-1}^2 \frac{4+t}{6} \frac{7}{3} dt = 1/4 + 21/4 = 11/2$$

L'une ou l'autre intégrale, divisée par le poids total, donne :

$$M_p = \frac{11/2}{8} = 11/16.$$

23 - Pour avoir la médiane, les terciles, les quartiles, etc ... de $x(t)$ avec pour poids $p(t)$, il suffira de diviser la surface du diagramme de $y = p_c(t)$ en 2, 3, 4, ... parties égales : si les ordonnées à diviser portent sur les points τ_1, τ_2, \dots , les valeurs correspondantes de $x_c(t)$ donnent le résultat cherché. Dans l'exemple précédent, si on a $p_c(t) = \text{constante} = 1$, dans l'intervalle -2 et $p_c(t) = \text{constante} = 7/3$ dans l'intervalle -1 à 2 , la détermination est très facile. Pour la médiane pondérée, c'est par exemple :

$$T_1 = 2/7 \quad M_{ep} = \frac{4 + 2/7}{6} = 5/7$$

valeur un peu supérieure à la moyenne pondérée.

24 - Fonction de deux variables.

On peut immédiatement étendre les concepts et les définitions précédentes à une fonction mesurable $x(u, v)$ de deux variables, définie sur les points d'une région plane (R) de mesure (de surface) R. Sur la base de la mesure $m(y)$ de $I(x \leq y)$ on définit les permutations $x_1(u, v)$ et en particulier celle que j'appellerai encore permutation croissante et qui sera une fonction $x_c(t)$ de la seule variable t , construite sur l'intervalle 0 à R par le procédé employé pour $x(t)$, c'est-à-dire en posant $x(t) = y$ pour les points de l'intervalle qui a pour extrémités :

$$m(y) \quad , \quad m(y) - \overline{m}(y) \quad \left[\overline{m}(y) = \text{mes } I(x=y) \right]$$

Il est intéressant de remarquer que de cette façon les ordonnées infinies de la courbe de $x(u, v)$ dans un champ à deux dimensions, sont transférées, dans un champ à une seule dimension, et disposées par ordre de grandeur. La gradation de ces ordonnées, toujours possible quand leur nombre est fini même si elles dépendent de deux indices entiers, peut donc s'effectuer aussi pour une distribution continue à deux variables.

Les permutations auront la même intégrale (de Lebesgue) ; en particulier

$$\iint_{(R)} x(u, v) du dv = \int_0^R x_c(t) dt,$$

égalité qui peut servir de définition de l'intégrale de Lebesgue et qui constitue en substance, une formule de réduction d'une intégrale double à une intégrale simple.

$x_c(t)$ une fois construite, sa valeur pour $R/2$ sera la médiane de la double distribution de valeurs $x(u,v)$. Au moyen de $x_c(t)$ on pourra aussi calculer la moyenne de $x(u,v)$ en (R) . Pour les moyennes pondérées il faudra déterminer le poids $p_c(t)$ dt pour $x_c(t)$, le poids $p(u,v)$ dudv pour $x(u,v)$, étant connu, en posant une condition analogue à l'équation (10).

Enfin, on peut étendre ce qui précède à des fonctions de trois variables ou plus.

$x(t)$ une valeur constante, on voit aisément que la double distribution de valeurs $x(u,v)$. Au moyen de $x(t)$ on peut alors calculer la moyenne $\bar{x}(v)$ en (R). Pour les moyennes pondérées il faut déterminer le poids $p_x(t)$ de pour $x(t)$, le poids $p_y(v)$ de pour $y(v)$. étant connu, on pose une condition analogue à l'équation (10)

$$\int_{c_1}^{c_2} x(t) p_x(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} \frac{2x}{2} dt + \int_{c_1}^{c_2} \frac{4x}{2} \frac{1}{2} dt = 4/12 + 2/4 = 2/11$$

Enfin, on peut étendre ce qui précède à des fonctions de trois variables et ainsi, par exemple, on a :

$$M_x = \frac{11/2}{2} = 11/10$$

23 - Pour avoir la médiane, les terciles, les quartiles, etc... de $x(t)$ avec pour poids $p_x(t)$, il suffit de diviser la surface du diagramme de $y = p_x(t)$ en 2, 3, 4, ... parties égales et les ordonnées correspondantes sur les points t_1, t_2, \dots les valeurs correspondantes donnent le résultat cherché. Dans l'exemple précédent, si on a $p_x(t) = \text{constante} = 1/2$ dans l'intervalle $-2 < t < 2$ et $p_x(t) = \text{constante} = 2/3$ dans l'intervalle $2 < t < 4$, la détermination est très facile. Pour le graphique, voir par exemple :

$$T_1 = 2/3 = M_{2/3} = \frac{4 + 2/3}{5} = 5/7$$

valent un peu supérieures à la moyenne pondérée.

24 - Fonction de deux variables

On peut immédiatement étendre les concepts et les résultats précédents à une fonction mesurable $x(u,v)$ de deux variables, définie sur les points d'une région plane (R) de mesure (de sa surface) S. Sur la base de la mesure $m(y)$ de $\{x \leq y\}$ on définit les permutations $x(u,v)$ et qui sera une fonction $x(t)$ de la seule variable t , constante sur l'intervalle $0 < t < 1$ par le procédé employé pour $x(t)$, c'est-à-dire on pose $x(t) = y$ pour les points de l'intervalle qui a pour extrémités :

$$m(y) \quad m(y) - m(y) \quad [m(y) = \text{mes } \{x \leq y\}]$$

Il est intéressant de remarquer que de cette façon les ordonnées infimes de la courbe de $x(u,v)$ dans un champ à deux dimensions, sont transférées, dans un champ à une seule dimension, et disposées sur ordre de grandeur. La graduation de ces ordonnées, toujours possible quand leur nombre est fini même si elles dépendent de deux lettres entières, peut donc s'effectuer aussi pour une distribution continue à deux variables.

Les permutations auront la même intégrale (de Lebesgue), en particulier :

$$\iint_{(R)} x(u,v) d\mu = \int_0^1 x(t) dt$$

égalité qui peut servir de définition de l'intégrale de Lebesgue et qui constitue en substance, une formule de transfert de la double à une intégrale simple.