



**HAL**  
open science

## Sur les agrégats de distributions statistiques d'une même famille

P. Thionet

► **To cite this version:**

P. Thionet. Sur les agrégats de distributions statistiques d'une même famille. Annales de l'ISUP, 1957, VI (1), pp.27-52. hal-04094514

**HAL Id: hal-04094514**

**<https://hal.science/hal-04094514>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# SUR LES AGRÉGATS DE DISTRIBUTIONS STATISTIQUES D'UNE MÊME FAMILLE

par

P. THIONET

## PRÉAMBULE

1 - La notion de distribution statistique est bien connue. Par exemple la distribution des revenus (des habitants d'un pays donné) s'obtient en comptant combien d'habitants ont des revenus supérieurs à 5 millions, compris entre 4 et 5 millions, entre 3 et 4 millions, etc ... "Distribution des habitants suivant leurs revenus" serait plus correct.

Distribution et répartition sont synonymes.

On peut envisager encore la distribution des exploitations agricoles suivant leur superficie, la distribution des établissements industriels et commerciaux suivant leur chiffre d'affaires, la distribution des mêmes établissements suivant le nombre de leurs salariés, etc ...

2 - On définit par ailleurs des lois théoriques de distribution :

Loi de Gauss (pour une variable pouvant être négative),  
Loi de Galton,  
Loi de Pareto,  
etc ...

Les distributions statistiques courantes ont souvent une ressemblance marquée avec telle ou telle loi théorique de distribution : par exemple certaines distributions de revenus impossibles sont assez exactement superposables à une loi de Pareto ("ajustée" convenablement).

3 - Quand on réunit 2 populations dont les distributions (de revenus, pour fixer les idées) suivent chacune une certaine loi théorique, il est bien connu que la distribution résultante n'a pas en général la même allure que les distributions composantes. Par exemple si les composantes sont unimodales (et de modes différents) la résultante présente très souvent 2 modes, dont chacun est voisin du mode des composantes.

En langage plus familier, la réunion de 2 distributions à une bosse donne le plus fréquemment une distribution à 2 bosses.

4 - Nous conviendrons d'employer ici les termes suivants :

- les distributions composantes seront des distributions de base;
- en réunissant deux populations de base, on obtient un agrégat.

Ainsi par exemple si l'on mélange 2 distributions de Galton, l'agrégat n'est plus une distribution de Galton quand les modes des distributions de base sont distincts. Lorsque les modes sont confondus, on peut encore a-



avoir des doutes; et le calcul montre bien que l'agrégat n'est pas une distribution de Galton (même s'il existe une certaine ressemblance graphique entre les deux).

Le calcul montre de même que des distributions de base de Pareto ne donnent pas d'agrégat qui suive une loi de Pareto.

5 - On s'est donc posé la question suivante : Existe-t-il des types de distribution assez généraux (ou assez particuliers) pour qu'ils puissent représenter à la fois :

- certaines populations de base,
- les agrégats de celles-ci ?

C'est un problème de mathématiques pures.

6 - Pourtant les origines de ce problème sont d'ordre statistique. Par exemple, M. Fonsagrive, notre collègue à l'I.N.S.E.E., s'est posé cette question, à propos d'une étude de M. Marchand, publiée au Bulletin de la Statistique Générale de la France de Janvier-Mars 1945 et intitulée : La concentration du personnel dans les entreprises en France entre les deux guerres. On expose dans cette étude les résultats d'un ajustement de lois de Galton sur les distributions des entreprises suivant leur nombre de salariés (à l'intérieur des grandes branches d'activités collectives). Beaucoup plus tard M. Fonsagrive a attiré notre attention sur ce problème. Des problèmes d'agrégation se posent constamment en économétrie (théorie des choix, courbes d'Engel, élasticité de la demande, etc.) et ont fait l'objet de travaux récents de MM. Nataf, Malinvaud, en France.

7 - Nous avons eu l'idée d'appliquer au problème de l'agrégation des distributions statistiques la méthode de la courbe de concentration de C. Gini dont nous avons déjà fait usage pour résoudre en 1954 un problème de sondage, à nous posé par la Direction Générale des Impôts (1).

Une première étape des recherches, très brève et presque d'ordre expérimental, n'a porté que sur quelques courbes de concentration particulières, rencontrées au cours du travail sur les sondages. L'énoncé du problème et les résultats fragmentaires alors trouvés (3 exemples traités) (qui formaient une première note de mai 1955) constitueront la 1ère partie du présent exposé, avec quelques rappels de résultats concernant la Courbe de Concentration de C. Gini et Lorenz.

8 - En décembre 1955, M. Fréchet, nous fit savoir (comme suite à notre note) qu'il avait établi un théorème, d'après lequel n'importe quelle courbe de concentration possède la propriété que nous avons constatée sur le premier de nos 3 exemples.

Par la suite, nous avons donné du théorème de M. Fréchet une démonstration un peu nouvelle puis (encouragé par M. Fréchet à poursuivre ces recherches) nous avons étendu cette démonstration à des cas beaucoup plus généraux, correspondant à nos Exemples 2 et 3, car le théorème initial concernait seulement une famille de distributions ne différant entre elles que par les deux paramètres : effectif de la population et valeur moyenne de la variable.

Nous sommes arrivé à l'énoncé suivant :  
(Etant donné une famille quelconque de distributions, d'une variable  $x$  ( $-\infty < a \leq x \leq b$ ), à un nombre quelconque de paramètres; pour que l'agrégat (de telles distributions de base fasse lui-même partie de la famille, il faut (que les moyennes arithmétiques des distributions de base soient égales (entre elles).

(1) Voir Journ. Sté Stat. Paris. Juillet-Sept. 1955, page 192.



La condition n'est pas suffisante; mais nous donnerons la forme générale des familles de distributions possédant cette propriété (elles dépendent de n fonctions arbitraires et n-1 paramètres, outre la moyenne commune des distributions).

9 - Ainsi il n'existe pas, par exemple, de loi unimodale telle qu'une famille de distributions ayant même mode (et des moyennes différentes) puisse comprendre en son sein ses propres agrégats.

10 - Les démonstrations du théorème de M. Fréchet et de son extension font l'objet de la seconde partie du présent exposé.

Nous tenons à exprimer ici notre gratitude à M. Fréchet et à M. Malinvaud pour le concours décisif qu'ils nous ont apporté dans cette étude.

## PREMIÈRE PARTIE

### POINT DE DÉPART ET PREMIÈRES RECHERCHES

#### I. - DÉFINITION DES LOIS DE DISTRIBUTION PAR LEUR COURBE DE CONCENTRATION

##### 1 - LA COURBE DE CONCENTRATION DE LORENZ GINI

Rappelons la définition de la courbe de concentration (qu'on rencontre chez les auteurs italiens, plus que chez les auteurs anglo-saxons ou français) :

Considérons la distribution d'une variable positive  $x$  (par exemple le chiffre d'affaires d'un établissement industriel et commercial); on introduit 2 variables  $p$  et  $q$  comprises entre 0 et 1; à savoir :

$p$ , proportion des redevables dont le C.A. est inférieur à  $x$  ;

$q$ , proportion du total des C.A. correspondant aux redevables dont le C.A. est inférieur à  $x$ .

Par définition, le lieu du point de coordonnées cartésiennes  $(p, q)$  est la courbe de concentration; soit :

$$g(p, q) = 0$$

l'équation de cette courbe (1). On a évidemment :

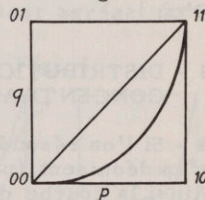
$$g(00) = g(11) = 0$$

ainsi qu'une condition de croissance  $\frac{dq}{dp} > 0$

c'est-à-dire  $g'_p, g'_q < 0$

et une condition de convexité  $\frac{d^2q}{dp^2} > 0$

Fig. 1



Remarque : La notion de courbe de concentration s'étend à une variable pouvant présenter des valeurs négatives, par exemple les bénéfices des entreprises (industrielles et commerciales), le total des bénéfices restant positif.



(Voir Fig. 2 la forme de la courbe de concentration).

En pareil cas la condition de croissance ci-dessus disparaît; celle de convexité subsiste.

Nous ne ferons guère usage de cette extension; mais nous admettrons une fois pour toutes que la variable  $x$  est comprise entre  $a$  et  $b$ , avec  $(-\alpha < a)$

2 - LOI DE PROBABILITE ET COURBE DE CONCENTRATION

On passe de la loi de probabilité à la courbe de concentration par les formules suivantes :

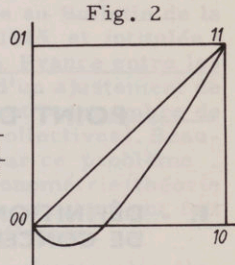
Soit :  $f(x)$  : la densité de probabilité (dont on suppose l'existence);

:  $m$  : l'effectif total de la population (d'ailleurs infini);

:  $m\bar{x}$  : ( $x$ ) le C.A. total de la dite population.

On voit facilement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} mf(x) = m \frac{dp}{dx} \\ x = \bar{x} \frac{dq}{dp} \end{array} \right\} \text{ d'où } f(x) = \frac{1}{\bar{x}} \cdot \frac{1}{\frac{d^2q}{dp^2}}$$



3 - EXEMPLE : LOI DE PARETO :  $p = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha$

où  $a$  désigne le C.A. minimum et où  $1,6 < \alpha < 1,9$ . Il vient d'une part :

$$mf(x) = \alpha \frac{m}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}$$

d'autre part :

$$dq = \frac{1}{\bar{x}} \frac{x f(x)}{m} dx = \frac{\alpha}{x} \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha dx$$

d'où  $q = \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{a}{\bar{x}} \left[ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha-1} \right]$  (avec  $\alpha > 1$ )

Mais  $\bar{x} = \int_a^{+\infty} x f(x) dx = \frac{\alpha}{\alpha-1} a$

d'où :  $q = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha-1}$

D'où  $g(p, q) = (1-p)^{\alpha-1} - (1-q)^\alpha = 0$

4 - DISTRIBUTIONS DEFINIES PAR L'EQUATION DE LEUR COURBE DE CONCENTRATION  $g(p, q) = 0$

a - Si l'on résoud en  $q$  l'équation de la courbe de concentration,  $x$  et  $f(x)$  s'en déduisent (par 2 dérivations), en fonction du paramètre arbitraire  $\bar{x}$ . Ainsi la courbe de concentration définit une certaine famille de distributions statistiques "semblables entre elles"; la valeur moyenne de la variable caractérise chacune des courbes de cette famille.

Il est remarquable que les courbes de concentration les plus simples et les plus naturelles ne correspondent pas à des distributions d'usage courant. En voici quelques exemples.



b - Nous nous sommes attardé sur le cas où cette courbe serait assimilable à un arc de conique, c'est-à-dire :

$$g(p, q) = ap(1-p) + bq(1-q) + cp(1-q) + dq(1-p) \\ = (a+c)p + (b+d)q - [ap^2 + (c+d)pq + bq^2]$$

Et nous avons trouvé que cet arc présentait la forme voulue, à condition d'avoir simultanément :

$$(a+c)(b+d) < 0 \\ (b+c)(a+b+c+d) < 0 \\ (b+d)(ab-cd)(a+b+c+d) > 0$$

c - La courbe ainsi définie s'est révélée trop lourde pour la pratique. Nous sommes passé de 3 à 1 paramètre, en faisant usage de l'hyperbole équilatère d'équation :

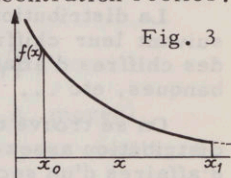
$$pq + \epsilon p - (1 + \epsilon)q = 0 \quad (\epsilon > 0)$$

qui présente d'ailleurs le grave défaut d'être symétrique par rapport à la droite d'équation

$$p + q = 1$$

ce qui n'est pas le cas de beaucoup de courbes de concentration réelles. On obtient :

$$x = \frac{\bar{x} \epsilon (1 + \epsilon)}{(1 + \epsilon - p)^2} \\ f(x) = \left[ \frac{m}{2} \sqrt{\bar{x} \epsilon (1 + \epsilon)} \right] \frac{1}{x^{3/2}}$$



## II. - LE PROBLÈME DE L'AGRÉGATION DES LOIS DE DISTRIBUTION

### 1 - AGREGATION DE PLUSIEURS DISTRIBUTIONS

a) Considérons par exemple la distribution des C.A. des épiciers, agrégat des deux distributions relatives aux épiciers détaillants et aux épiciers en gros. Soit

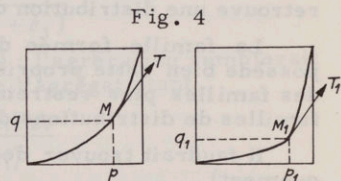
$$(1) \quad g(p, q) = 0, \quad g_1(p_1, q_1) = 0,$$

les équations des 2 courbes de concentration correspondantes. On admet que les C.A. des deux distributions sont exprimés dans la même monnaie; la variable x est donc commune aux 2 distributions et à leur agrégat; et il vient :

$$(2) \quad \bar{x} \frac{dq}{dp} = \bar{x}_1 \frac{dq_1}{dp_1}$$

ou encore

$$(2)' \quad \frac{1}{m} \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial g}{\partial p} \\ \frac{1}{(x)} \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{1}{(x_1)} \frac{\partial g}{\partial q}$$



Cette relation entre les pentes des 2 courbes de concentration définit une correspondance entre points homologues M et M<sub>1</sub> correspondant à une même valeur de la variable x.



b - Soit P, Q les coordonnées d'un point de la courbe de concentration de l'agrégat. On a les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{entre les effectifs} \quad : m + m_1 = M \\ \text{entre les C.A. totaux} : (x) + (x_1) = (X) \end{array} \right\} (3) \quad \left. \begin{array}{l} : m p + m_1 p_1 = M P \\ : (x) q + (x_1) q_1 = (X) Q \end{array} \right\} (4)$$

L'équation de la courbe de concentration de l'agrégat s'obtiendra en éliminant les 4 quantités  $p, q, p_1, q_1$  entre les 5 relations (1) (2) et (4).

c - On étend immédiatement cet énoncé au cas d'un agrégat de plus de 2 distributions.

## 2 - SUR LES FAMILLES DE DISTRIBUTIONS SUSCEPTIBLES D'AGREGATION.

Divers auteurs ont proposé des expressions (dépendant de certains paramètres) susceptibles de représenter (plus ou moins heureusement) la distribution des revenus ou des salaires, des effectifs, des chiffres d'affaires, etc ... d'un pays donné (lois de Pareto, de Galton, etc ...). Ils ne semblent pas s'être posé la question suivante : la distribution statistique (de revenus, de salaires, etc ...) ainsi considérée résulte de la juxtaposition de distributions analogues concernant des sous-populations. Par exemple :

La distribution des établissements industriels et commerciaux français suivant leur chiffre d'affaires résulte de la juxtaposition des distributions des chiffres d'affaires des boucheries, des épiceries, des fonderies, des banques, etc ...

On se trouve donc devant le problème suivant : existe-t-il des lois de distribution assez générales pour représenter la distribution des chiffres d'affaires d'un secteur économique ?

- étant entendu qu'en agrégeant les distributions de plusieurs secteurs économiques, comme on le fait en pratique statistique, on devrait retrouver une loi de distribution du même type.

Par exemple : la loi de distribution des chiffres d'affaires (C.A.) des épiciers devrait s'obtenir en agrégeant celles des épiciers en gros et des épiciers détaillants.

La loi de distribution des C.A. des commerces de l'alimentation devrait s'obtenir en agrégeant celles des épiciers, des bouchers, des boulangers, etc ...

Il est bien clair que le type de distribution cherché ne peut être qu'extrêmement général.

La question est de savoir s'il n'existe pas de famille de distributions telle qu'en "agrégant" deux d'entre elles (de la façon décrite au n° 1) on retrouve une distribution de la même famille.

La famille formée de toutes les distributions de variable positive possède bien cette propriété ; mais on aimerait être sûr qu'il n'existe pas des familles plus restreintes à l'intérieur de celle-ci ; c'est-à-dire des familles de distributions dépendant d'un nombre donné de paramètres.

Il faudrait trouver des fonctions  $G(P, Q)$  telles que l'on ait (symboliquement)

$$(5) \quad \frac{\frac{1}{m} \frac{\partial G}{\partial p}}{\frac{1}{(x)} \frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{\frac{1}{m_1} \frac{\partial G}{\partial p_1}}{\frac{1}{(x_1)} \frac{\partial G}{\partial q_1}} = \frac{\frac{1}{M} \frac{\partial G}{\partial P}}{\frac{1}{(X)} \frac{\partial G}{\partial Q}}$$



3 - ETUDE EXPERIMENTALE -

Renonçant à aborder directement un problème aussi difficile, on peut chercher des fonctions  $\mathcal{G}$  de forme déterminée, en supposant qu'il existe des relations remarquables entre  $(x)$ ,  $(x_1)$ ,  $m$ ,  $m_1$ .

Exemple 1 :  $\mathcal{G} = \mathcal{P}^2 + Q^2 - 2 Q = 0$  : a-t-on la relation (5)?

(5) s'écrit :

$$\frac{\frac{p}{m}}{\frac{q-1}{(x)}} = \frac{\frac{p_1}{m_1}}{\frac{q_1-1}{(x_1)}} = \frac{\frac{mp + m_1 p_1}{(m + m_1)^2}}{\frac{(x)q + (x_1)q_1 - (x) - (x_1)}{(x)^2 + (x_1)^2}}$$

On a en réalité l'identité ci-dessous :

$$\frac{\frac{p}{m}}{\frac{q-1}{(x)}} = \frac{\frac{p_1}{m_1}}{\frac{q_1-1}{(x_1)}} = \frac{\alpha \frac{p}{m} + \beta \frac{p_1}{m_1}}{\alpha \frac{q-1}{(x)} + \beta \frac{q_1-1}{m_1}}$$

On ne parvient donc au résultat voulu que si

$$\sqrt{\alpha} = \frac{m}{m + m_1} = \frac{(x)}{(x) + (x_1)} \quad (\text{et analogue pour } \sqrt{\beta})$$

autrement dit :  $\bar{x} = \bar{x}_1$  (agrégation de groupes de même C.A. moyen).

Cette dernière relation est nécessaire et suffisante pour que l'agrégation conserve la forme de la loi de distribution.

Exemple 2 :  $\mathcal{G} = (a + c) \mathcal{P} + (b + d) Q - [a \mathcal{P}^2 + (c + d) \mathcal{P}Q + b Q^2] = 0$

Il vient pour (2')

$$\bar{x} \frac{(a + c) - 2 ap - (c + d) q}{(b + d) - (c + d) p - 2 bq} = \bar{x}_1 \frac{(a_1 + c_1) - 2 a_1 p_1 - (c_1 + d_1) q_1}{(b_1 + d_1) - (c_1 + d_1) p_1 - 2 b_1 q_1}$$

En général, il est bien clair qu'on ne peut déduire (5) de (2').

Et a priori on n'a pas pensé qu'il suffisait, pour y parvenir, de faire :

$$\bar{x} = \bar{x}_1$$

Exemple 3 :  $\mathcal{G} = \mathcal{P}Q + \varepsilon \mathcal{P} - (1 + \varepsilon) Q = 0$

La relation (2') s'écrit :

$$\bar{x} \frac{q + \varepsilon}{p - (1 + \varepsilon)} = \bar{x}_1 \frac{q_1 + \varepsilon_1}{p_1 - (1 + \varepsilon_1)}$$

et, pour  $\bar{x} = \bar{x}_1$ , on peut en déduire la relation (5) ; l'agrégation semblerait donc possible, le paramètre de la distribution de l'agrégat étant

$$E = \frac{m \varepsilon + m_1 \varepsilon_1}{m + m_1} = \frac{(x) \varepsilon + (x_1) \varepsilon_1}{(x) + (x_1)}$$

Ainsi  $\bar{x} = \bar{x}_1$  serait une condition suffisante pour que l'agrégation conserve la loi de distribution. Il n'est pas évident que cette condition soit nécessaire; on établira pourtant dans la 2e Partie qu'elle est nécessaire et non suffisante.



## DEUXIÈME PARTIE

### THÉORIE DE L'AGRÉGATION DES LOIS DE DISTRIBUTION

#### I. - PRÉLIMINAIRES

1°) - DISTRIBUTION, LOI DE DISTRIBUTION, COURBE DE CONCENTRATION.

Il sera utile pour la suite de noter les faits suivants :

Il revient au même de se donner :

- une distribution particulière,
- la loi de distribution correspondante, plus l'effectif de la distribution,
- la courbe de concentration correspondante, plus la moyenne de la loi de distribution, plus l'effectif de la distribution.

Il revient au même de se donner :

- (a) une loi de distribution particulière,
- (b) la courbe de concentration correspondante, plus la moyenne de la loi de distribution.

Remarquons que ce dernier énoncé découle directement des formules déjà trouvées :

Soit  $x$  et  $y$  les coordonnées de la courbe représentant la loi de distribution,  $p$  et  $q$  les coordonnées de la courbe de concentration,

on a :

$$\text{Passage de (b) à (a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{x} \frac{dq}{dp} \\ y = \left( \bar{x} \frac{d^2q}{dp^2} \right)^{-1} = f(x) \end{array} \right.$$

$$\text{Passage de (a) à (b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} dp = f(x) dx \\ dq = \frac{x}{\bar{x}} f(x) dx \end{array} \right.$$

Conséquence : l'agrégation concerne des distributions elles-mêmes (d'effectif  $m, m_1$ ; de moyenne  $\bar{x}, \bar{x}_1$ ).

Une distribution-agrégat correspond de façon univoque :

- à une certaine loi de distribution,
- à une certaine courbe de concentration.

Réciproquement :

- une courbe de concentration donnée;
- plus une moyenne donnée :  $\bar{X} = (m \bar{x} + m_1 \bar{x}_1) / (m + m_1)$ ,
- plus un effectif donné :  $M = m + m_1$ ,

déterminent une distribution (agrégat ou non).

2°) - NOTATIONS ET SYMBOLES :

- a) On désignera par  $m, m_1$  les effectifs } des distributions ;
- $\bar{x}, \bar{x}_1$  les moyennes }



par d une distribution,  
 $\ell$  une loi de distribution,  
 c une courbe de distribution,  
 g une courbe de concentration (de Gini),  
 par  $\alpha \beta \dots \theta$  des paramètres.

Aux lettres minuscules concernant les distributions de base correspondent des majuscules concernant les agrégats.

b) L'agrégat de 2 distributions de même moyenne sera symbolisé par

$$D(\bar{x}, m + m_1) = d(\bar{x}, m) + d(\bar{x}, m_1)$$

Mais on peut désigner la distribution d'effectif m, de moyenne  $\bar{x}$  et admettant g comme courbe de concentration, par

$$(g, \bar{x})_m$$

Posons alors :

$$(g, \bar{x})_m + (g, \bar{x})_{m_1} = (G, \bar{X})_M$$

avec

$$M = m + m_1$$

$$\bar{X} = \bar{x}$$

autrement dit :

$$(g, \bar{x})_m + (g, \bar{x})_{m_1} = (G, \bar{x})_{m+m_1}$$

c) Le théorème de M. Fréchet (qu'on va établir plus loin) s'énonce comme suit :

1) Condition suffisante : quel que soit g, on a

$$(G, \bar{x})_{m+m_1} = (g, \bar{x})_{m+m_1}$$

2) Condition nécessaire : il n'existe aucun g tel que

$$(g, \bar{X})_{m+m_1} = (g, \bar{x})_m + (g, \bar{x}_1)_{m_1}$$

du moment que  $\bar{x}$  et  $\bar{x}_1$  sont distincts.

d) La distribution particulière ...  $(g, \bar{x})_m$

appartient à la loi de distribution ...  $(g, \bar{x}) = \ell(g, \bar{x})$

qui appartient elle-même à la famille de lois de distributions admettant la courbe g comme courbe de concentration, qu'on peut noter :

$$(g, \theta)$$

e) Le problème qu'on va étudier (après celui de M. Fréchet) concerne une famille de courbes de concentration  $g(\alpha, \beta)$  ou  $g_{\alpha\beta}$  ou  $g \dots$  [à n paramètres].

On va rechercher à quelles conditions peut être réalisée une égalité de la forme :

$$(g_{AB}, \bar{X})_M = (g_{\alpha\beta}, \bar{x})_m + (g_{\alpha_1\beta_1}, \bar{x}_1)_{m_1}$$

avec

$$\begin{cases} M = m + m_1 \\ \bar{X} = \frac{m\bar{x} + m_1\bar{x}_1}{m + m_1} \end{cases}$$

On peut toujours poser

$$(g_{\alpha\beta}, \bar{x})_m + (g_{\alpha_1\beta_1}, \bar{x}_1)_{m_1} = (G, \bar{X})_M$$

G étant une courbe de concentration déterminée par les deux distributions de base, c'est-à-dire



- dépendant de la fonction  $g$  choisie,
- dépendant des valeurs  $\alpha, \beta, \dots$  et aussi  $\alpha_1, \beta_1, \dots$ ,
- dépendant de  $\bar{x}, \bar{x}_1, m, m_1$ ,  
 ou plus précisément de  $\frac{m}{m_1}$  et de  $\frac{\bar{x}}{\bar{x}_1}$ ,  
 ou (ce qui revient au même) de  $\bar{X}$  et de  $M$ .

Le problème en vue est finalement de savoir si l'on peut trouver  $A, B, \dots$  tels que

$$G = g_{AB}$$

### 3°) METHODE DE CALCUL

a) Outre les notations de la 1ère Partie, on va poser :

$$\lambda = \frac{m_1}{m} \quad ; \quad \mu = \frac{(x_1)}{(\bar{x})} = \frac{m_1 \cdot \bar{x}_1}{m \bar{x}} \quad ; \quad (1)$$

donc

$$P = \frac{p + \lambda p_1}{1 + \lambda} \quad , \quad Q = \frac{q + \mu q_1}{1 + \mu} .$$

On utilisera également :

$$k = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_1} = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \quad h = \frac{\bar{x}}{\bar{X}} = \frac{1 + \lambda}{1 + \mu}$$

b) Cas où l'on considère une distribution donnée :

L'idée (essentielle) prise à M. Fréchet est de choisir comme paramètre la pente de la tangente au point courant de la courbe de concentration (2), soit :

$$t = \frac{dq}{dp}$$

Les équations paramétriques de cette courbe sont donc

$$\begin{aligned} p &= \varphi(t) \\ q &= \int_a^p t \, dp = \int_a^t \varphi'(t) \, dt \end{aligned}$$

On remarquera (comme conséquence de la convexité de la courbe de concentration) que la fonction  $\varphi(t)$  doit croître de 0 à 1 lorsque  $t$  croît de  $a$  à  $b$ .

Rappelons que la limite inférieure ( $a$ ) de  $t$  peut être négative mais existe (n'est pas  $-\infty$ ) ; sa limite supérieure ( $b$ ) peut ne pas exister ( $b : +\infty$ )

$\varphi(t)$  est encore soumis à une condition essentielle, à propos de  $q$  : Alors que, pour  $t = a$ , on a forcément  $q = 0$ , il faut s'assurer que, pour  $t = b$ , on a bien  $q = 1$ . En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} q(t) &= \left[ t \varphi(t) \right]_a^t - \int_a^t \varphi(t) \, dt \\ q(b) &= b \varphi(b) - \int_a^b \varphi(t) \, dt \end{aligned}$$

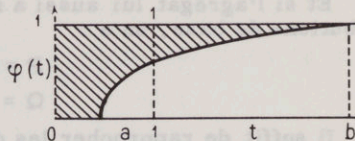
avec  $a \varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 1.$

(1) Les effectifs  $m$  et  $m_1$  sont en fait infiniment grands, mais  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres finis.

(2) Cette courbe est donc supposée avoir des tangentes et (plus généralement) ne présenter aucune anomalie.

D'où la condition :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = b - 1,$$



ce qui revient à dire que l'aire hachurée doit être égale à 1 (figure 5). Remarquons enfin qu'il revient au même de se donner la courbe de concentration  $g$  ou au contraire la fonction  $\varphi(t)$  satisfaisant aux conditions précédentes.

Plus généralement, on peut remplacer la lettre  $g$  par la lettre  $\varphi$  dans le paragraphe 2 ci-dessus, pourvu que la fonction  $\varphi(t)$  soit soumise aux conditions énoncées, qu'on appellera conditions normales (ou N) et qu'on résumera comme suit :

$$\text{Conditions N pour } \varphi(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{croissance de } \varphi(t) \text{ de } t = a \text{ à } t = b ; \\ \text{limites } \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 1 ; \\ \int_a^b \varphi(t) dt = b - 1. \end{array} \right.$$

c) Cas où l'on considère 2 distributions de base et leur agrégat :

On réservera alors les lettres  $(p, q, t, \varphi)$  à la première distribution de base ;  $(p_1, q_1, t_1, \varphi_1)$  correspondront à la seconde et  $(P, Q, T, \Phi)$  à l'agrégat.

Le théorème de M. Fréchet correspond au cas où  $\varphi, \varphi_1, \Phi$  sont identiques.

La relation  $x = \bar{x} \frac{dq}{dp}$  entraîne, lorsqu'on agrège les distributions :

$$\bar{x} \frac{dq}{dp} = \bar{x}_1 \frac{dq_1}{dp_1} = \bar{X} \frac{dQ}{dP}.$$

Mais on pose

$$\frac{dq}{dp} = t,$$

donc

$$\frac{dq_1}{dp_1} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_1} \frac{dq}{dp},$$

ou

$$t_1 = \frac{\lambda}{\mu} t = k t.$$

De même

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{\bar{x}}{\bar{X}} \frac{dq}{dp},$$

ou

$$T = \frac{1 + \lambda}{1 + \mu} t = h t.$$

d) Cas particulier

Si les 2 distributions de base ont même courbe de concentration, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \varphi(kt) \\ q_1 = \int_a^{kt} \varphi(kt) k dt \end{array} \right.$$



Et si l'agrégat lui aussi a même courbe de concentration que les distributions de base, on a :

$$P = \varphi(ht)$$

$$Q = \int ht \varphi(ht) h dt$$

Il suffit de rapprocher les deux expressions de P, pour avoir la relation :

$$\varphi(ht) = \frac{P + \lambda P_1}{1 + \lambda}$$

$$\varphi(ht) = \frac{\varphi(t) + \lambda \varphi(kt)}{1 + \lambda} \quad (D)$$

qui peut s'écrire :

$$h(1-k) \varphi(ht) - k(1-h) \varphi(kt) = (h-k) \varphi(t) \quad (E)$$

Cette équation fonctionnelle (E) va jouer un rôle essentiel dans toute la théorie.

#### e) Cas général.

Lorsque les courbes de concentration sont distinctes, leurs équations paramétriques sont analogues, mais avec  $\varphi$ ,  $\Phi$  et  $\Phi_1$  au lieu de  $\varphi(t)$ ,  $\varphi(kt)$ ,  $\varphi(ht)$ .

De

$$P = \frac{P + \lambda P_1}{1 + \lambda}$$

on tire donc :

$$\Phi(ht) = \frac{\varphi(t) + \lambda \varphi_1(kt)}{1 + \lambda} \quad (D')$$

ce qui peut s'écrire :

$$h(1-k) \Phi(ht) = k(1-h) \varphi_1(kt) + (h-k) \varphi(t) \quad (E')$$

Cette relation définit la fonction  $\Phi$  à l'aide des fonctions  $\varphi$  et  $\varphi_1$ , et des paramètres k et h.

En particulier si  $\varphi(t) = \varphi(\alpha, \beta; t)$

$$\varphi_1(kt) = \varphi(\alpha, \beta; kt)$$

la fonction  $\Phi$  dépend de la fonction  $\varphi$  et des paramètres  $(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \dots, k, h)$ . Et notre problème conduit à l'équation fonctionnelle (E'').

$$h(1-k) \varphi(A, B; ht) - k(1-h) \varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) = (h-k) \varphi(\alpha, \beta; t) \quad (E'')$$

qui fait pendant à la formule D''

$$\varphi(A, B; ht) = \frac{\varphi(\alpha, \beta; t) + \lambda \varphi(\alpha_1, \beta_1; kt)}{1 + \lambda} \quad (D'')$$

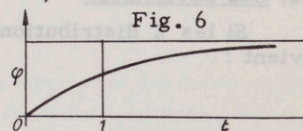
#### f) Conditions supplémentaires ou conditions S :

On désignera par "conditions S" imposées à  $\varphi(t)$ , les conditions :  
 $a = 0$ ,  $b = +\infty$ , autrement dit (fig. 6)

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(+\infty) = 1$$

Ces conditions jouent un rôle essentiel.

D'ores et déjà, on voit que, puisque





$$t = \frac{dq}{dp} = \frac{x}{\bar{x}}$$

les "conditions S" signifient que la variable  $x$  a comme intervalle de variation  $(0, +\infty)$ .

**II. - CAS DE DISTRIBUTIONS ADMETTANT LA MÊME COURBE DE CONCENTRATION**

1°) - RESUME DES CALCULS QUI SUIVENT

Le problème qui se pose est la résolution de l'équation fonctionnelle E;

$$h(1-k) \varphi(ht) - k(1-h) \varphi(kt) = (h-k) \varphi(t) \tag{E}$$

où  $\varphi(t)$  doit déjà remplir les conditions N.

On va d'abord supposer  $h$  et  $k$  différents de 1 ; et on va montrer qu'aucune fonction  $\varphi(t)$  n'existe; on sera ramené alors au cas où

$$k = 1$$

ce qui entraîne  $k = h$ ; et alors (E) est manifestement satisfaite quelque soit  $\varphi(t)$ . De même que (D).

Tel est le théorème de M. Fréchet.

Supposons donc  $k \neq h \neq 1$ .

2°) - LES CONDITIONS S SONT EN REALITE DES CONDITIONS NECESSAIRES -

On voit facilement qu'aucune fonction  $\varphi$  n'existe si  $t$  n'est pas une variable prenant toutes les valeurs de  $0 \text{ à } +\infty$ .

En effet, si  $0 \leq a \leq t \leq b$ , ceci veut dire que  $x$  varie entre

$$a\bar{x} \text{ et } b\bar{x} \text{ pour la 1ère distribution}$$

$$a\bar{x}_1 \text{ et } b\bar{x}_1 \text{ pour la 2e distribution}$$

$$a\bar{X} \text{ et } b\bar{X} \text{ pour leur agrégat.}$$

Supposons  $\bar{x}_1 < \bar{x}$  (donc  $k > 1$  et  $h > 1$ )

donc  $a\bar{x}_1 < a\bar{X} < a\bar{x}$  et  $b\bar{x}_1 < b\bar{X} < b\bar{x}$ .

Il existerait ainsi des unités de la 2e population pour lesquelles  $x$  prendrait une valeur comprise entre  $a\bar{x}_1$  et  $a\bar{X}$ ; alors que, dans l'agrégat des deux populations, il n'existerait plus de telles unités. Ceci oblige à prendre  $a = 0$ .

De même les unités de la 1ère population, pour lesquelles  $x$  serait compris entre  $b\bar{X}$  et  $b\bar{x}$ , disparaîtraient quand on envisage l'agrégat des deux populations. Ceci ne peut s'expliquer que si  $b$  est infini.

Ainsi  $\varphi(t)$  devra remplir à la fois les conditions N et S.

3°) - RESOLUTION DE (E)

a) Première méthode.

On remarque que

$$\varphi(t) = 1$$

et

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}$$

sont 2 solutions particulières de l'équation (E); mais celle-ci est "linéaire" de sorte que



$$\varphi(t) = \varphi_0(t) = \lambda + \frac{\mu}{t}$$

(où  $\lambda$  et  $\mu$  sont 2 paramètres arbitraires) est aussi une solution de (E); mais (E) est une équation aux différences finies du 2e ordre, la variable étant  $\mathcal{L}t$ . Ainsi  $\varphi_0(t)$  est l'intégrale générale de (E).

b) Seconde méthode.

En supposant que les fonctions  $\varphi(t)$  sont dérivables, on peut résoudre directement l'équation (E), ce qui nous servira par la suite.

Dérivons les 2 membres de (E) par rapport à  $h$ , puis par rapport à  $k$ . Il vient :

$$\begin{aligned} (1-k)\varphi(ht) + h(1-k)t\varphi'(ht) + k\varphi(kt) &= \varphi(t) \\ -\varphi(ht) - ht\varphi'(ht) + \varphi(kt) + kt\varphi'(kt) &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\varphi(ht) + ht\varphi'(ht) = \varphi(kt) + kt\varphi'(kt).$$

Et, comme ( $k \neq h$ ) par hypothèse, il vient

$$\varphi(ht) + ht\varphi'(ht) = \text{constante}$$

équation de la forme

$$\varphi(u) + u\varphi'(u) = \lambda$$

dont l'intégrale générale est

$$\varphi(u) = \lambda + \frac{\mu}{u}$$

4°) - CONCLUSION

Avec  $k \neq 1$ , il n'existe d'autres fonctions dérivables  $\varphi(t)$ , solutions de (E), que celles de la forme

$$\lambda + \frac{\mu}{t} = \lambda - \frac{|\mu|}{t}$$

croissantes pour  $\mu < 0$ , mais qu'on vérifie être incompatibles avec les conditions (S); car  $\varphi$  tend vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers 0.

On est donc ramené au cas où  $k = 1 = h$ , c'est-à-dire  $\bar{x} = \bar{x}_1 = \bar{X}$ ; alors tout  $\varphi$  convient.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$(g, \bar{X})_{m+m_1} = (g, \bar{x})_m + (g, \bar{x}_1)_{m_1}$$

est que

$$\bar{x} = \bar{x}_1 (= \bar{X})$$

Ce théorème de M. Fréchet s'étend tout de suite à un nombre quelconque de distributions de base, possédant toutes la même courbe de concentration.

5°) - PORTEE DU RESULTAT -

a) On aurait pu imaginer que la courbe  $G$  pouvait (pour certaines courbes  $g$ ) venir coïncider avec  $g$  pour quelque combinaison privilégiée de  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_1$ ,  $m$  et  $m_1$ . Ainsi il n'en est rien.

b) On aurait pu penser qu'il existait peut-être des courbes de concentration  $g$ , telles que les courbes de distribution  $C_\theta$  des lois de distributions



$$(g, \theta)$$

formaient un faisceau, c'est-à-dire se coupaient en un nombre fini de points fixes. Car il est clair que la courbe de distribution de

$$(G, \bar{X})$$

passé par les points de rencontre des courbes de distribution de

$$(g, \bar{x}) \text{ et } (g, \bar{x}_1)$$

et (lorsque  $m$  et  $m_1$  varient) forme un véritable faisceau.

Autrement dit, l'équation de  $C_\theta$  étant de la forme

$$y - \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) = 0$$

on pouvait se demander s'il n'était jamais possible d'écrire (avec une forme adéquate de fonction  $f$ )

$$\frac{1}{\bar{x}} f\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) - \frac{1}{\bar{x}_1} f\left(\frac{x}{\bar{x}_1}\right) \equiv \xi(x) \cdot \eta(\bar{x}, \bar{x}_1)$$

On vient donc d'établir que cela n'était jamais possible.

Remarque : Dans la 1<sup>re</sup> Partie, la condition nécessaire et suffisante  $\bar{x} = \bar{x}_1$  avait bien été trouvée avec la courbe particulière  $g$ , d'équation :

$$p^2 + q^2 - 2q = 0.$$

### III. - CAS D'UNE FAMILLE DE COURBES DE CONCENTRATION

1°) - FAMILLES  $G$  CONSTRUITES A PARTIR DE  $g$  ET  $g_1$  :

a) Partons de 2 courbes de concentration  $g$  et  $g_1$  distinctes et fixes, d'ailleurs quelconques. La relation (E')

$$h(1-k)\Phi(ht) = k(1-h)\varphi_1(kt) + (h-k)\varphi(t) \quad (E')$$

définit  $\Phi$ , donc  $G$ . Lorsque  $h$  et  $k$  varient, on engendre ainsi toute une famille de courbes de concentration  $G$  à 2 paramètres  $(h, k)$ .

On voit que si  $h \rightarrow 1$ , (E') donne à la limite

$$\Phi(t) = \varphi(t)$$

tandis que si  $h \rightarrow k$ , (E') donne

$$\Phi(kt) = \varphi_1(kt)$$

Dans le 1<sup>er</sup> cas :  $G$  tend vers  $g$ , et dans le 2<sup>nd</sup>  $G$  tend vers  $g_1$  : de sorte que la famille  $G_{hk}$  renferme bien  $g$  et  $g_1$ .

b) Par exemple : laissons fixes  $\bar{x}$  et  $\bar{x}_1$ , c'est-à-dire  $k$ , mais faisons varier  $m$  et  $m_1$

C'est-à-dire  $\lambda = \frac{m_1}{m}$

ou  $h = \frac{1 + \lambda}{1 + \frac{\lambda}{k}}$

On a une famille  $G_\lambda$  à 1 paramètre qui renferme  $g$  et  $g_1$ .

c) Lien avec le problème étudié ici :

Malheureusement la famille  $G_{kh}$  ne constitue pas nécessairement une solution au problème posé ici, lequel est de trouver une famille  $g_{\lambda\mu}$  com-



prenant ses propres agrégats G. On a seulement déplacé le problème; car il faudrait à présent se demander si l'agrégat de  $G_{kh}$  et  $G_{k'h}$  appartient ou non à la famille

$$G_{\alpha\beta}$$

C'est pourquoi on n'abordera pas ainsi la question; on supposera au contraire le problème résolu, c'est-à-dire qu'on admettra l'existence d'une famille de courbes  $g_{\alpha\beta}$ , autrement dit de fonctions

$$\varphi(\alpha, \beta; t)$$

satisfaisant à l'équation fonctionnelle ( $E''$ ) et aux conditions annexes avec  $k \neq 1$ . Et on essayera de trouver l'expression de  $\varphi$ , ce qui conduira à établir que  $\varphi$  ne peut exister. On retombera alors sur  $k = 1$ , d'où  $k = h$  et ( $E''$ ) vérifiée quel que soit  $\varphi$

Mais (à la différence du II ci-dessus), le fait que ( $E''$ ) soit vérifiée n'implique pas du tout que  $D''$  le soit (MM. Fréchet et Malinvaud nous ont donné des exemples simples où ( $E''$ ) n'entraîne pas l'agrégation, c'est aussi le cas pour nos exemples n° 2 et 3). On en conclura que :

- a)  $h=k=1$  (c'est-à-dire  $\bar{x} = \bar{x}_1$ ) est une condition nécessaire à l'agrégation;
- b) ( $D''$ ) donne la forme générale des courbes de concentration qui se prêtent à l'agrégation.

## 2°) - CONDITIONS IMPOSEES AUX SOLUTIONS $\varphi$ DE L'EQUATION FONCTIONNELLE ( $E''$ )

$$h(1-k) \varphi(A, B; ht) - k(1-h) \varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) = (h-k) \varphi(\alpha, \beta; t) \quad (E'')$$

Conditions N : sans changement.

La fonction  $\varphi$  doit être croissante, de  $\varphi(a) = 0$  à  $\varphi(b) = 1$ . En outre on doit avoir

$$b - \int_a^b \varphi(t) dt = 1$$

Conditions S :

L'intervalle de variation de  $x$  doit être le même pour les lois de distribution  $(g, \bar{x})$ ,  $(g_1, \bar{x}_1)$  et  $(G, \bar{X})$ ; d'où les conditions :

$$(\min. x) = a \bar{x} = a_1 \bar{x}_1 = A \bar{X}$$

$$(\max. x) = b \bar{x} = b_1 \bar{x}_1 = B \bar{X}$$

D'où 2 grands cas possibles :

- 1) Ou bien  $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{X}$  sont arbitraires, mais on a  $\begin{cases} a = 0 \\ b = \infty \end{cases}$
- 2) Ou bien  $a$  n'est pas nul et  $b$  est fini; mais  $\bar{x}_1$  et  $\bar{X}$  sont liés à  $\bar{x}$ .

Ainsi, à côté du 1er cas, analogue à celui étudié au II, s'ouvre un 2ème cas où se restreignent les exigences du problème.

## 3°) - RESOLUTION DE ( $E''$ ) - PREMIERE METHODE -

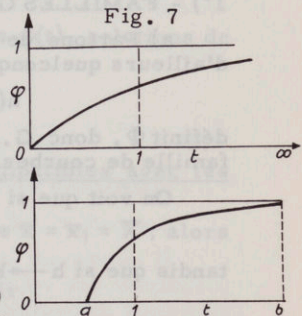
Comme pour ( $E$ ), il est clair que  $\varphi = \lambda$  et  $\varphi = \mu/t$  sont des solutions particulières de ( $E''$ ), - à condition cette fois que  $\lambda$  et  $\mu$  soient des fonctions convenables de  $\alpha, \beta$  :

C'est-à-dire si on a :

$$h(1-k) \lambda(A, B) = k(1-h) \lambda(\alpha_1, \beta_1) + (h-k) \lambda(\alpha, \beta) \dots \quad (R_1)$$

et aussi :

$$(1-k) \mu(A, B) = (1-h) \mu(\alpha_1, \beta_1) + (h-k) \mu(\alpha, \beta) \dots \quad (R_2)$$





pour des expressions A, B, convenables de  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, k$  et h. Alors

$$\varphi(t) = \lambda + \frac{\mu}{t} = \lambda - \frac{|\mu|}{t} \quad (\text{si } \mu < 0)$$

est la solution générale (décroissante) de (E'').

1er cas. Cette solution ne convient évidemment pas dans le 1er cas (où les conditions S sont exigées); car, quels que soient par ailleurs  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\varphi(t)$  tend vers  $-\alpha$  (et non pas vers 0) quand t tend vers zéro.

Il en résulte qu'il n'existe aucune solution pour  $k \neq 1$ .

En revanche, lorsque  $k = 1$ , c'est-à-dire  $\bar{x} = \bar{x}_1$ , on a

$$h = 1$$

et l'équation (E'') est identiquement vérifiée, sans entraîner pourtant (D''):

Il n'y a aucune raison, en effet, pour qu'on ait identiquement :

$$\varphi(A, B; t) = \frac{\varphi(\alpha, \beta; t) + \lambda \varphi(\alpha_1, \beta_1; t)}{1 + \lambda}, \quad (\text{avec } \lambda = \frac{m_1}{m})$$

pour un système convenable de paramètres A, B (lorsque  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  sont donnés).

On retrouve donc le théorème de M. Fréchet, mais amputé : la condition nécessaire pour avoir :

$$(g_{AB}, \bar{X})_{m+m_1} = (g_{\alpha\beta}, \bar{x})_m + (g_{\alpha_1\beta_1}, \bar{x}_1)_{m_1}$$

lorsque la variable x prend toutes valeurs positives, est que

$$\bar{x} = \bar{x}_1$$

(résultat qui s'étend à un agrégat de n distributions).

2° cas. En revanche la solution de (E'')

$$\varphi(t) = \lambda - \frac{|\mu|}{t}$$

paraît pouvoir convenir dans le 2ème cas. Il vient :

$$\left. \begin{array}{l} t = a \quad ; \quad \lambda - \frac{|\mu|}{a} = 0 \\ t = b \quad ; \quad \lambda - \frac{|\mu|}{b} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\mu| = \frac{ab}{b-a} \\ \lambda = \frac{b}{b-a} \end{array}$$

d'où :

$$\varphi(t) = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a}{t}\right)$$

On peut considérer que  $a = \alpha$  est le paramètre de la courbe g.

La relation entre les distributions associées  $(g, \bar{x})_m$  et  $(g, \bar{x}_1)_{m_1}$  est

$$\alpha \bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1$$

donc

$$\alpha_1 = k\alpha \quad \text{ou} \quad \bar{x}_1 = \bar{x} \frac{\alpha}{\alpha_1}.$$

Pour avoir la relation analogue avec la limite inférieure b, il faut que

$$b = r\alpha$$

$$b_1 = r\alpha_1$$

r étant une constante, indépendante de la courbe g choisie.



L'expression  $\varphi(t)$  s'écrit alors

$$\varphi(t) = \frac{t}{r-1} \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right)$$

Assurons nous que  $(R_1)$  et  $(R_2)$  sont bien vérifiées : On a

$$\lambda(\alpha, \beta) = \frac{r}{r-1} \quad (\text{constante absolue}); \text{ donc } (R_1) \text{ est vérifiée}$$

$$\mu(\alpha, \beta) = -\frac{r\alpha}{r-1} \quad (R_2) \text{ fixe la valeur du paramètre de } G$$

$$\text{lorsque } \alpha \text{ et } \alpha_1 \text{ sont donnés.}$$

$$(1-k)A = (1-h)\alpha_1 + (h-k)\alpha$$

$$\text{Mais } \frac{\bar{x}}{\bar{x}} = k = \frac{\alpha_1}{\alpha} \quad \text{d'où } A = \alpha h$$

Reste la condition N des aires :

$$1 = b - \int_a^b \varphi(t) dt,$$

C'est-à-dire :

$$1 = r\alpha - \frac{r}{r-1} \int_a^{r\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) dt,$$

d'où :

$$\alpha = \frac{r-1}{r \mathcal{L} r}$$

**Conclusions** : Nous obtenons une distribution unique et non pas une famille  $G_\alpha$ , puisque  $r$  doit rester le même (afin d'assurer une limite supérieure commune de la variable  $x$  à toutes les distributions) tandis que  $\alpha$  doit varier.

Il est impossible d'ailleurs de faire tendre  $r$  vers l'infini, comme on le voit bien sur les équations

$$\begin{cases} \text{de la courbe de concentration} & \left\{ \begin{array}{l} p = \varphi(t) = \frac{r}{r-1} - \frac{t}{t \mathcal{L} r} \\ q = \frac{1}{\mathcal{L} r} \mathcal{L}(-) = \frac{1}{\mathcal{L} r} \mathcal{L} \left[ \frac{r \mathcal{L} r}{r-1} t \right] \end{array} \right. \\ \text{ou de la courbe de fréquences} & \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{x} t \\ y = 1/\bar{x} t^2 \mathcal{L} r \end{array} \right. \end{cases}$$

d'où

$$y = \left( \frac{\bar{x}}{\mathcal{L} r} \right) \frac{1}{x^2}$$

Il s'agit d'une loi du type de Pareto, mais tronquée car l'exposant de  $x$  ( $x^{-2}$ ) est trop petit pour assurer la convergence de l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} x y dx$$

Le 2<sup>ème</sup> cas n'aboutit donc pas plus que le 1<sup>er</sup> cas (en dehors du cas  $h = k = 1$ ).

#### 4°) - RESOLUTION DE (E''). - SECONDE METHODE -

Partons encore de (E'') où par hypothèse on a  $k \neq 1$ .

$$h(1-k) \varphi(A, B; ht) = k(1-h) \varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) + (h-k) \varphi(\alpha, \beta; t) \quad (E'')$$

avec

$$A = A(\alpha, \beta; \alpha_1, \beta_1; h, k)$$

$$B = B(\alpha, \beta; \alpha_1, \beta_1; h, k)$$



La relation (E'') est supposée vérifiée pour toute valeur de t, lorsque  $(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1; h, k)$  sont donnés par ailleurs.

Retranchons terme à terme de (E'') l'expression suivante :

$$h(1-k) \varphi(\alpha, \beta; t) \equiv k(1-h) \varphi(\alpha, \beta; t) + (h-k) \varphi(\alpha, \beta; t)$$

Il vient :

$$h(1-k) [\varphi(A, B; ht) - \varphi(\alpha, \beta; t)] = k(1-h) [\varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) - \varphi(\alpha, \beta; t)]$$

Cette identité en t n'est possible que si :

$$\varphi(A, B; ht) - \varphi(\alpha, \beta; t) = \psi(t) \theta(A, B; \alpha, \beta; h)$$

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) - \varphi(\alpha, \beta; t) = \psi(t) \theta(\alpha_1, \beta_1; \alpha, \beta; h)$$

avec

$$h(k-1) \theta(A, B; \alpha, \beta; h) = k(h-1) \theta(\alpha_1, \beta_1; \alpha, \beta; k)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{h}{h-1} \theta(A, B; \alpha, \beta; h) = \frac{k}{k-1} \theta(\alpha_1, \beta_1; \alpha, \beta; k)$$

Cette expression doit donc être une constante "absolue"  $\lambda(\alpha, \beta)$  quelle que soit la distribution variable considérée ( $d_1$ , ou D); ainsi on doit avoir

$$\theta(\alpha_1, \beta_1, \alpha, \beta; k) = \left(\frac{k-1}{k}\right) \lambda(\alpha, \beta)$$

d'où

$$\boxed{\varphi(\alpha_1, \beta_1; kt) - \varphi(\alpha, \beta; t) = \frac{k-1}{k} \lambda(\alpha, \beta) \psi(t)} \quad (H)$$

On est ramené à une distribution à un seul paramètre, à savoir  $k = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_1}$  (où  $\bar{x}_1$  varie et  $\bar{x}$  reste constant); car le paramètre  $\lambda$  lié à la courbe  $g(\alpha, \beta)$  est déterminé par la condition N des aires; si  $a \leq t \leq b$ , on a

$$\int_a^b \varphi(t) dt = b - a$$

$$\int_{ka}^{kb} \varphi(kt) k dt = kb - ka$$

En intégrant les 2 membres de (H) entre a et b, il vient :

$$\frac{kb - a}{k} - (b - a) = \frac{k-1}{k} \cdot \lambda \cdot [\Psi(b) - \Psi(a)]$$

où l'on a posé

$$\Psi(t) = \int \varphi(t) dt$$

On peut mettre en facteur  $(1 - 1/k)$ ; et il reste simplement l'expression de  $\lambda$  :

$$\lambda^{-1} = \Psi(b) - \Psi(a)$$

expression qui ne dépend donc plus que des bornes (a, b) de l'intervalle de variation de t.



Ainsi lorsqu'on possède une solution  $\varphi(t)$  de l'équation (E''), on a [Voir note (1)]:

$$\varphi(kt) = \varphi(t) + \frac{k-1}{k} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(b) - \Psi(a)}$$

Dérivons par rapport à  $k$ ; il vient :

$$t \varphi'(kt) = \frac{1}{k^2} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(b) - \Psi(a)},$$

d'où l'équation fonctionnelle en  $\varphi$

$$\varphi(kt) - \varphi(t) = k(k-1) t \varphi'(kt)$$

Dérivons une seconde fois par rapport à  $k$ ; il vient :

$$t \varphi'(kt) = (2k-1) t \varphi'(kt) + k(k-1) t^2 \varphi''(kt)$$

d'où, si  $(k-1) \neq 0$ , et en simplifiant :

$$2 \varphi'(kt) + kt \varphi''(kt) = 0$$

c'est-à-dire

$$2 \varphi'(u) + u \varphi''(u) = 0$$

équation dont l'intégrale générale est

$$\varphi(u) = \lambda + \frac{\mu}{u}$$

Conditions S :

On a vu (au II) qu'avec  $a = 0$  et  $b = \infty$ , cette solution ne convenait pas au problème (1er cas).

Mais on n'a aucune raison d'imposer cette condition; en adoptant (2e cas)

$$a = \alpha, \quad b = r\alpha$$

on retrouvera la distribution donnée au paragraphe 3; laquelle est à rejeter puisqu'il s'agit d'une distribution isolée et non pas d'une famille de distributions.

Alors  $\Psi(b) - \Psi(a) = \mathcal{L}(r\alpha) - \mathcal{L}\alpha = \mathcal{L}r$ , ne dépend plus de  $\alpha$ .

Seul subsiste donc le cas où  $k = 1$ , c'est-à-dire  $\bar{x} = \bar{x}_1$ , où (E'') est vérifiée d'emblée, sans que cela implique que (D'') le soit.

Concluons donc que seule la condition nécessaire de M. Fréchet s'étend, sans aucune restriction, aux familles de distribution à un nombre quelconque de paramètres.

(1) Note : En particulier, avec

$$\varphi(t) = \frac{r}{r-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{t} \right) = \frac{r}{r-1} - \frac{1}{Lr.t}$$

on a

$$\varphi(kt) = \frac{r}{r-1} - \frac{1}{Lr.kt}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi(kt) &= \varphi(t) + \frac{1}{Lr.t} \left( \frac{-1}{k} + 1 \right) \\ &= \varphi(t) + \frac{k-1}{k} \frac{(Lt)'}{L(\alpha r) - L\alpha} \end{aligned}$$



5°)- REMARQUE :

La possibilité de courbes de concentration confondues avec les segments

$$\begin{aligned} 0 \leq p < 1 & \quad q = 0 \\ p = 1 & \quad 0 < q \leq 1 \end{aligned}$$

n'a pas été non plus envisagée; c'est un cas limite acceptable de  $\varphi(t) = \lambda - \frac{|\mu|}{t}$

6°)- THEOREME :

S'il existe une famille de courbes de concentration qui se prêtent à l'agrégation, elles sont nécessairement tangentes entre elles aux deux extrémités de leur arc ( $p = q = 0$ ;  $p = q = 1$ ).

Démonstration : On a établi au n° 2 qu'on avait

$$a\bar{x} = a_1 \bar{x}_1 = A\bar{X} \quad b\bar{x} = b_1 \bar{x}_1 = B\bar{X}$$

et on vient de démontrer que  $\bar{x} = \bar{x}_1 = \bar{X}$ ; d'où il suit que

$$a = a_1 = A \quad b = b_1 = B$$

Une conséquence : la famille de distributions de l'exemple 3 (voir à la fin de la 1ère partie ci-dessus) ne se prête pas à l'agrégation, puisque a et b dépendent de  $\alpha$ .

Effectivement on a :  $pq + \epsilon p (1+\epsilon) q = 0$

et en dérivant :  $pq' + q + \epsilon - (1+\epsilon) q' = 0$

$$d'où \text{ pour } \begin{cases} p = q = 0 & a = q' = \epsilon / (1+\epsilon) \\ p = q = 1 & b = q' = (1+\epsilon) / \epsilon \end{cases}$$

7°)- CONSTRUCTION DES FAMILLES DE DISTRIBUTIONS QUI SE PRESENTENT A L'AGREGATION - Familles à 1 paramètre -

Reprenons le procédé du n° 1ab ci-dessus, avec 2 courbes fixes de concentration g et g<sub>1</sub> ayant un contact aux 2 extrémités (d'après le 6°), en supposant  $\bar{x}$  et  $\bar{x}_1$  fixes et en outre égaux (d'après les 3° et 4°), et en faisant varier le rapport des effectifs :

$$\lambda = m_1 / m$$

La relation (D'') détermine une fonction  $\Phi$  de t, variant de 0 à 1 :

$$P = \Phi = \frac{\varphi + \lambda \varphi_1}{1 + \lambda} \tag{D''}$$

et il est immédiat que, sur l'autre axe des coordonnées, on a de même

$$Q = \Psi = \frac{\psi + \lambda \psi_1}{1 + \lambda}$$

( $\lambda$  au lieu du  $\mu$  figurant dans Q en I-3°). Autrement dit, à chaque  $\lambda$  correspond une courbe de concentration  $G_\lambda$  et une seule, définie géométriquement comme suit :

- a) On mène la tangente à g et celle à g<sub>1</sub>, de pente t;
- b) On joint les 2 points de contact c et c<sub>1</sub>;
- c) On prend sur la droite cc<sub>1</sub>, le point C tel que  $\frac{\overline{cC}}{\overline{Cc_1}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$ ;
- d) On fait varier t (de a jusqu'à b) de façon que c décrive g, c<sub>1</sub> décrive g<sub>1</sub> et C décrive G<sub>λ</sub>.

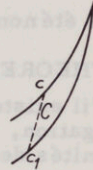


En particulier  $G_0$  est  $g$  et  $G_1$  est  $g_1$ .

Il reste cependant à démontrer que la famille  $G_\lambda$  se prête bien à l'agrégation.

Ceci résulte du seul fait que, quelque soit  $\lambda$ , la tangente à  $G_\lambda$  en  $C$  a la même pente  $t$  (indépendante de  $\lambda$ ), comme on va l'établir.

En effet  $\vec{c}_1 = \vec{c} + \vec{u}\rho$  ;  
 donc  $d\vec{c}_1 = d\vec{c} + d(\vec{u}\rho)$  avec  $d\vec{c}_1 = d\vec{c}$  ,  
 c'est-à-dire  $d(\vec{u}\rho) = 0$  .  
 Mais  $\vec{C} = \vec{c} + \vec{u}\rho (\lambda/1 + \lambda)$  ,  
 donc  $d\vec{C} = d\vec{c} + d(\vec{u}\rho) (\lambda/1 + \lambda)$  ,  
 donc  $d\vec{C} = d\vec{c}$  .



Ce point établi, il est immédiat que l'agrégation portant sur  $G_{\lambda_0}$  et  $G_{\lambda_1}$  avec des effectifs  $M_0$  et  $M_1$  redonnera une courbe de la famille  $G$  (en supposant toujours les moyennes identiques).

**Conclusion** : Etant donné deux courbes de concentration arbitraires  $g$  et  $g_1$  mais en contact aux extrémités, la famille  $G_\lambda$  définie par les conditions

$$\vec{c}\vec{C} = \vec{c}\vec{c}_1 (\lambda/1 + \lambda) \text{ avec } d\vec{c} = d\vec{c}_1 ,$$

se prête à l'agrégation à moyennes égales.

**Réciproquement** s'il existe une famille de distributions se prêtant à l'agrégation :

les moyennes des distributions sont égales entre elles,

les courbes de concentration ont un contact entre elles aux 2 extrémités,

toute courbe de concentration de la famille peut se déduire de 2 certaines d'entre elles par le procédé décrit précédemment.

**Exemple** : Avec notre exemple 3, on avait :

$$q = (1+\varepsilon)t - \varepsilon - pt ,$$

$$q(p-1-\varepsilon) + \varepsilon p = 0 ,$$

d'où 
$$p = 1 + \varepsilon - \sqrt{\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{t}} = \varphi_1(t) ;$$

posons 
$$1 + \varepsilon_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)}{t}} = \varphi_1(t) ,$$

$$E = \frac{\varepsilon + \lambda\varepsilon_1}{1 + \lambda} ;$$

il vient 
$$1 + E + \sqrt{\frac{A}{t}} = \frac{\varphi + \lambda\varphi_1}{1 + \lambda} ,$$

avec 
$$\frac{\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} + \lambda \sqrt{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)}}{1 + \lambda} = \sqrt{A} .$$

Il n'y a aucune raison pour que cette dernière expression soit identique à

$$\frac{\sqrt{(\varepsilon + \lambda\varepsilon_1) [(1+\varepsilon) + \lambda(1+\varepsilon_1)]}}{1 + \lambda} = \sqrt{E(1+E)} .$$



Autre exemple (dû à M. MALINVAUD) : Avec une loi de Pareto, on a :

$$p = 1 - [\alpha/(\alpha-1) t]^\alpha = \varphi(t)$$

Si l'on prend une 2ème loi, de paramètre il est clair qu'on a

$$\frac{\varphi + \lambda \varphi_1}{1 + \lambda} = 1 - \left( \frac{B}{t^\alpha} + \frac{C}{t^{\alpha_1}} \right)$$

et qu'on ne peut trouver A tel que la parenthèse soit de la forme

$$\frac{D}{t^A}$$

8°)- PROBLEME

Reconnaitre si une famille de courbes de concentration (à 1 paramètre  $\alpha$ ) correspond à des distributions qu'on peut agréger (sous réserve que les moyennes soient égales).

Solution : On éliminera le paramètre  $\alpha$  entre les équations

$$\begin{aligned} g(\alpha ; p, q) &= 0 \\ g'_p(\alpha ; p, q) + t g'_q(\alpha ; p, q) &= 0 \end{aligned}$$

Le résultat de cette élimination doit représenter (entre autres) une droite (pour chaque valeur de  $t = dq/dp$ ).

Exemple : Faisceau de coniques bitangentes en ( $p=q=0$ ), ( $p=q=1$ ).

$$g(p, q) = q(1-p) + \alpha (q-p)^2 = 0$$

Ces coniques ont un arc ( $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ ) qui satisfait à la condition nécessaire de contact aux extrémités. Les distributions correspondantes seraient-elles susceptibles de s'agréger ?

La 2ème équation s'écrit :

$$[t(1-p)-q] + 2\alpha(q-p)(t-1) = 0$$

L'élimination de  $\alpha$  donne :

(1)  $q - p = 0$

équation d'une droite qui ne convient pas :

(2)  $2(t-1)q(1-p) - (q-p)[t(1-p)-q] = 0$ ,

équation d'une conique qui se décompose si elle a un point double :

(A)	$-2(t-1)q + t(1-p) - q + (q-p)t = 0$	}	Equations du point double
(B)	$2(t-1)(1-p) - t(1-p) + q + q - p = 0$		
(C)	$2(t-1)q - t(q-p) = 0$		

(A) et (C) donnent (U)  $t(1-p) - q = 0$

(B) et (U) donnent (V)  $2(t-1)(1-p) + (q-p) = 0$

(V) et (C) donnent  $\left. \begin{aligned} \frac{q-p}{2(t-1)} = \frac{q}{t} = p-1 \end{aligned} \right\} p = 1, q = 0, p = q$

alors que (U) donne  $\frac{q}{t} = 1 - p$

Conclusion : Il n'y a pas point double; le faisceau de coniques ne représente donc pas des distributions qui peuvent s'agréger.



9°) CONSTRUCTION DES FAMILLES DE DISTRIBUTION QUI SE PRESENTENT A L'AGREGATION - Familles à plusieurs paramètres.

Le procédé n° 7 s'étend à un nombre quelconque de paramètres. Par exemple, si  $g_2$  est une 3° courbe de concentration ayant un contact en ses extrémités avec  $g$  et  $g_1$ , et n'appartenant pas à la famille  $G_\lambda$ , on peut construire une famille de courbes de concentration  $G_{\lambda\mu}$  à 2 paramètres en posant maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \frac{P + \mu \varphi_2}{1 + \mu} \\ \mathcal{Q} = \frac{Q + \mu \psi_2}{1 + \mu} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\varphi + \lambda \varphi_1}{1 + \lambda} \\ Q = \frac{\psi + \lambda \psi_1}{1 + \lambda} \end{array} \right. ;$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \alpha \varphi + \beta \varphi_1 + \gamma \varphi_2 \\ \mathcal{Q} = \alpha \psi + \beta \psi_1 + \gamma \psi_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 1, \end{array} \right.$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)}, \quad \beta = \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}, \quad \gamma = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

On démontre de même que :

L'agrégat des distributions  $(G_{\lambda\mu}, \bar{x})_M$  et  $(G_{\lambda'\mu'}, \bar{x}')_{M'}$  est de la forme  $(G_{\lambda''\mu''}, \bar{x}'')_{M+M'}$ . Il est plus commode d'employer les 3 paramètres  $\alpha\beta\gamma$  que les 2 paramètres  $\lambda\mu$ ; en posant

$M'/M = \rho$ , les 3 paramètres de l'agrégat sont  $(\frac{\alpha + \rho\alpha'}{1 + \rho}, \frac{\beta + \rho\beta'}{1 + \rho}, \frac{\gamma + \rho\gamma'}{1 + \rho})$  de somme 1.

10°) RETOUR A LA LOI DE DISTRIBUTION :  $p = \varphi(x) = \varphi(\frac{x}{\bar{x}})$

Etant donné les lois de distribution  $p(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , on retrouve un résultat très banal :

$$\mathcal{P} = \alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 \quad (\text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1)$$

On retrouve en même temps un théorème, essentiel pour d'autres problèmes d'agrégation :

Pour qu'on ait une identité de la forme

$$F(x, r) + \lambda F(x, r_1) \equiv (1 + \lambda) F[x, R(r, r_1)]$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$F(x, r) \equiv F_1(x) + G(r)F_2(x)$$

Ce théorème s'établit en dérivant l'identité par rapport au paramètre  $r$  et en constatant que  $(\log F'_r - \log F'_1)$  est indépendant de  $x$ . C'est à M. BAUDIER que nous devons de faire ce rapprochement entre les 2 théories et de pouvoir énoncer finalement que :

Se prêtent seules à l'agrégation les combinaisons linéaires de distributions ayant même moyenne et même intervalle de variation (en nombre quelconque d'ailleurs).



## NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

## 1) - LA COURBE DE CONCENTRATION -

C. GINI - *Intorno alle curve di concentrazione* - *Metron* IX. n° 3/4. 1932.

GALVANI - *Sulle curve di concentrazione* *Metron* X. n° 3, 1932.

Ce dernier donne à son tour les références suivantes :

M. O. LORENZ - *Methods of measuring the concentration of wealth*  
Publication of Amer. Stat. Assoc. n° 70, 1905).

E. CHATELAIN - *Les successions déclarées en 1905* (*Revue Politique et parlementaire*, 1907).

J. SEAILLES - *La répartition des fortunes en France* (Alcan. 1910).

C. GINI - *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri* (*Atti del R. Inst. Ven. di S.I.A*) 1913-1914.

M. HUBER - *Eléments de technique statistique* - 1943 - pp. 66-68.

M. G. KENDALL - *The advanced theory of statistics* - tome I. pp. 43-44. 3e édition 1947).

Voir aussi :

P. THIONET - *L'école Moderne des statisticiens italiens* (2p) *Journal de la Société de Statistique de Paris* - Janvier-Mars 1946 - p. 23-24.

## 2) - LES PROBLEMES D'AGREGATION EN ECONOMETRIE

Citons les plus récents travaux seulement après L. KLEIN, THEIL, etc

E. MALINVAUD - *L'agrégation dans les modèles économétriques* (cahiers du séminaire d'Econométrie 1955).

*Aggregations problems in input output models* (Proceedings of an international conference on input output analysis, Varenna, 1954).

A. NATAF - *Sur des questions d'agrégation en économétrie* (Thèse pour le Doctorat es-Sciences - Pub. de l'Institut de Statistique - Volume II; Fasc. 4. 1953).

Voir aussi :

PRAIS et HOUTHAKKER - *The analysis of family budget* - Cambridge 1955, page 13.

## 3) - LES LOIS DE DISTRIBUTIONS ECONOMIQUES

G. DARMOIS - *Statistique et applications* (1934) - p. 114.

M. FRECHET - *Sur les formules de répartition des revenus*. *Revue de l'Inst. Int. Stat.* (7.1) 1939.

R. GIBRAT - *Une loi des répartitions économiques*. *Bull. Stat. générale de la France*. 1930.

- *Les inégalités économiques* - Paris édit. Sirey - 1931.

M. HUBER - *Eléments de technique statistique* - 1943 - (p. 122-137-139).

M. CRAMER - *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton 1946 - p. 220-248.



#### 4) - REFERENCES CONCERNANT L'AGREGATION DES LOIS DE DISTRIBUTION

Le théorème de M. FRECHET dont il est ici question était encore inédit ; M. Fréchet nous avait confié ses notes manuscrites. Il emploie l'expression "mélange de populations" (qui est synonyme d'agrégation). De même M. FONSGRIVE n'a encore rien publié sur ses recherches.

M. HUBER - Eléments de Technique Statistique, 1943 - parle du problème du mélange des populations (page 134). Il cite à ce propos des travaux très anciens :

Alphonse BERTILLON et sa courbe à 2 sommets pour la distribution des tailles des conscrits du Doubs en 1951-1859, décomposée en 2 courbes.

Karl PEARSON et la courbe des décès par âge décomposée en 5 courbes normales.

La question du mélange des populations est mentionnée dans tous les traités de statistique antérieurs à 1940.

Par exemple :

Udny YULE - An introduction to the theory of statistics (11e ed. 1937). p. 103, Complex distributions.

RISSER et TRAYNARD - Les principes de la statistique mathématique (traité de calcul des probabilités de M.E. BOREL, 1933, le partie, chapitre V - Partage des courbes de fréquence.

En revanche KENDALL (1947) la passe sous silence. Et CRAMER (Mathematical methods of statistics, 1946) mentionne seulement (page 56) le cas où on mélange deux distributions, l'une continue, l'autre discontinue. Ce problème de statistique n'est donc redevenu actuel que comme cas le plus simple d'un problème général d'économétrie.<sup>(1)</sup>

Nota Bene : Il y a lieu de ne pas confondre le mélange des populations avec le produit de plusieurs lois de probabilité, c'est-à-dire l'addition de plusieurs variables aléatoires, question passée au contraire au premier plan du calcul des probabilités.

(1) Exemple d'article récent où il est question de mélange de population : H. MILLER. Elements of symmetry in the skewed income curve (J. Am. Stat. Assoc. March 1955-p. 55)