



HAL
open science

Probabilité sur un treillis non modulaire (Calcul quantique des probabilités)

G. Bodiou

► **To cite this version:**

G. Bodiou. Probabilité sur un treillis non modulaire (Calcul quantique des probabilités). Annales de l'ISUP, 1957, VI (1), pp.11-25. hal-04094507

HAL Id: hal-04094507

<https://hal.science/hal-04094507>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

PROBABILITÉ SUR UN TREILLIS NON MODULAIRE

(Calcul quantique des probabilités)

par

G. BODIU

A. - BUTS ET RÉSULTATS DE CE MÉMOIRE

1°) Rappelons d'abord quelques caractères du formalisme quantique :

A tout vecteur unitaire, Ψ , d'un espace de Hilbert, H , correspond une pondération des multiplicités linéaires fermées ou m.l.f de H , telles que A , par :

$P(A/\Psi) = \| E(A)\Psi \|^2$, où $E(A)$ est l'opérateur de projection orthogonale sur A .

On prend aussi en considération une pondération conditionnée par la m.l.f. B et définie par :

$$P(A/B, \Psi) = P(A/E(B)\Psi) = \| E(A).E(B).\Psi \|^2 / \| E(B)\Psi \|^2$$

Ces définitions ne dépendent que de la multiplicité d'ordre 1 qui supporte Ψ et tout le formalisme se définit en termes du treillis des multiplicités linéaires fermées de H , ou treillis (m.l.f).

Cette pondération quantique n'est une probabilité classique que sur des sous treillis particuliers de (m.l.f). En effet :

a) $A \cap B = \emptyset$ n'implique pas $P(A \cup B/\Psi) = P(A/\Psi) + P(B/\Psi)$, c'est-à-dire que le principe des probabilités totales n'est pas vérifié par la pondération quantique.

b) Comme $E(A).E(B) \neq E(A \cap B)$ (sauf si $E(A)$ et $E(B)$ commutent) le principe des probabilités composées n'est pas vérifié par les pondérations conditionnées quantiques. On interprète, d'un point de vue classique cette non-vérification en considérant que le "conditionnement quantique" est, en réalité, un "changement de catégorie d'épreuves". Il faut cependant constater que, s'il en est ainsi, le formalisme quantique établit, entre catégories distinctes d'épreuves, par sa pondération conditionnée, un lien ignoré des classiques.

c) On peut montrer que l'impossibilité de définir sur (m.l.f) une probabilité classique est impliquée par la structure de ce treillis.

Ce treillis est non-modulaire : c'est-à-dire que, sur lui, on peut avoir, à la fois :

$$A \leq C \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C; \text{ (voir (1)).}$$

alors que, sur un treillis modulaire :

$$A \leq C \implies A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C ; (\implies \text{marque l'implication})$$

Cette dernière relation exprime une distributivité restreinte, la distributivité générale s'exprimant par :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Or, si un treillis supporte une probabilité classique, $P(A)$, cette probabilité satisfait à la "relation modulaire" :

$$P(x) + P(y) = P(x \cup y) + P(x \cap y),$$

d'où l'on déduit aisément : $P(A \cup (B \cap C)) = P((A \cup B) \cap C)$, quand $A \leq C$;

et comme, terme à terme : $A \cup (B \cap C) \leq (A \cup B) \cap C$, on a :

$$P((A \cup B) \cap C - A \cup (B \cap C)) = 0,$$

pour toute loi de probabilité classique sur ce treillis.

Si l'on impose, alors, à ce treillis, d'être tel qu'il n'y ait que le minuant universel, \emptyset , dont la probabilité soit nulle pour toute loi, ce qui est vérifié par la pondération quantique sur (m.l.f) et par les probabilités classiques, il suit de la relation précédente que :

$$(A \cup B) \cap C - A \cup (B \cap C) = \emptyset,$$

c'est-à-dire que le treillis est nécessairement modulaire. (m.l.f), qui n'est pas modulaire, ne peut donc supporter une telle probabilité.

2°) Notre but est d'affaiblir convenablement les conditions imposées au calcul classique des probabilités pour que le support du nouveau calcul puisse être un treillis non-modulaire, tout en sauvegardant les notions probabilistes fondamentales : probabilités totales, probabilités conditionnelles, variables aléatoires, fonctions de répartition, indépendance, lois des grands nombres ...

Le treillis que nous décrivons est plus général que le treillis (m.l.f). Son immersion dans ce dernier est rendue possible par des axiomes supplémentaires dont le plus caractéristique est que tout élément du treillis est l'union d'un ensemble d'atomes dont la puissance est, au plus, infinie dénombrable. Mais ces restrictions sont artificielles et le formalisme probabiliste quantique peut être effectivement généralisé.

La trace du calcul élargi sur les sous-treillis booléens du treillis total est un calcul classique.

L'une des interprétations possibles du formalisme ainsi construit est la suivante :

L'ensemble des propositions expérimentales relatives à un système matériel donné est réparti en systèmes hypothético-déductifs : ce sont les divers treillis de certitudes. L'ensemble, supposé complet, des axiomes de l'un de ces systèmes étant symbolisé par son atome de base.

L'affirmation de vérité de l'un de ces systèmes se traduit par l'attribution de la probabilité 1 à son atome de base, et, par suite à tous ses éléments.

Une telle affirmation de vérité détermine la probabilité de toutes les propositions expérimentales.

Le conditionnement s'interprète alors comme suit : L'affirmation de vérité d'une proposition expérimentale n'appartenant pas au système déductif qui fixe la loi de probabilité, implique le remplacement de ce système par

celui, parmi ceux auxquels appartient la proposition considérée, dont la base axiomatique est la plus probable dans la pondération initiale.

Le calcul des probabilités généralisé serait une théorie de la pondération relative des systèmes hypothético-déductifs les uns par les autres.

Conclusion : Quel que soit l'aboutissement des travaux actuellement en cours pour atteindre une réalité plus profonde que celle que décrit la statistique quantique, cette statistique restera valable à son niveau propre.

Nous sommes convaincus qu'elle implique une généralisation fructueuse de la notion même de probabilité.

B. - PROBABILITÉS SUR UN TREILLIS NON-MODULAIRE

La consistance des axiomes est assurée par leur vérification sur (m.l.f). Leur indépendance n'est pas démontrée.

Les preuves des théorèmes et quelques vérifications d'axiomes sur (m.l.f) ont été reportées à la fin du mémoire, afin de mieux dégager les caractères essentiels du formalisme.

Les axiomes sont notés : A ... , les définitions : D ... , les théorèmes : Th ... ; ceux d'entre eux dont la démonstration, ou quelque commentaire à leur sujet, figure en fin de mémoire, sont soulignés : A, D, Th.

I. TREILLIS ORTHOGONAL T.

T admet un élément nul, \emptyset , et un élément universel, u. Sur T est définie une complémentation, $A \rightarrow A'$, dite orthocomplémentation parce qu'on lui impose la propriété : $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$; cette orthocomplémentation définit sur T un isomorphisme dual involutif bien connu; on suppose aussi T relativement complété et si $A \leq B$, on note le complément relatif de A à B par B-A. Enfin T est complet, c'est-à-dire que tout ensemble d'éléments admet un minorant commun et un majorant commun.

II. VALUATION GENERALISEE SUR T ; ECART INDUIT SUR LES CHAINES PAR CETTE VALUATION.

DV1). Une valuation généralisée, $V(A)$, est une application des éléments du treillis sur le corps des complexes, satisfaisant à l'axiome :

AV1). $A \leq B \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$ ("valuations totales"); on en déduit que $V(\emptyset) = 0$.

ThV1). Sur une chaîne de T, les nombres : $e(A, B) = |V(B-A)|$ définissent un écart, qui est dit "induit par la valuation $V(A)$ ".

III. PROBABILITE (OU LOI DE PROBABILITE), P(A), sur T.

DP1. P(A) est une valuation réelle, positive, normée, sur T.

Commentaire : La probabilité quantique se définit en spécifiant une valuation sur un treillis orthogonalisé complet comme la probabilité classique se définit en spécifiant une mesure sur un corps de Borel d'ensembles.

On peut la décrire directement par les axiomes : P(A) réel, $P(A) \geq 0$, $P(u) = 1$, $A \leq B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Une P(A) est identique à l'écart qu'elle induit sur les chaînes.

Thp1) L'équivalence de l'axiome des probabilités totales quantiques à l'axiome classique est condition nécessaire et suffisante pour que T soit booléen.

Commentaire : Sur un treillis non-booléen l'axiome quantique des probabilités totales est plus faible que l'axiome classique dont l'hypothèse, $A \cap B = \emptyset$, est impliquée par $A \leq B'$, mais ne l'implique pas.

ThP2). $A_i \leq A_j'$, pour $i \neq j$, i et j appartenant à un ensemble fini d'indices $J \Rightarrow P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

AP1). ThP2 est vrai si J est un ensemble indéfini dénombrable: σ -additivité.

ThP3). $A \leq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$: $P(A)$ est non-décroissante.

IV. TREILLIS DE CERTITUDES D'UNE LOI DE PROBABILITE QUANTIQUE

ThTC1) L'ensemble des éléments, A , de T , tels que $P(A) = 1$, est fermé pour \cup .

ATC1) L'ensemble des éléments, A , de T , tels que $P(A) = 1$, est fermé pour \cap .

DTC1) Cet ensemble, qui est donc un sous-treillis de T , s'appelle "treillis de certitudes" de la loi $P(A)$. On le note : $TC(P)$.

ThTC2) $ATC1 \Leftrightarrow [(P(A) = 0 \text{ et } P(B) = 0) \Rightarrow (P(A \cup B) = 0)]$.

Commentaire : Sur un treillis de Boole, ATC1 est un théorème impliqué par la relation modulaire. Sur T , ATC1 est un axiome indépendant de ceux déjà admis.

ThTC3) Tout treillis de certitudes a un élément minimum, $z(P)$, dit "base de la loi $P(A)$ ". (car T est complet).

ThTC4) $TC(P)$ est identique au treillis des majorants de $z(P)$.

ATC2) Tout élément de T autre que \emptyset appartient à un treillis de certitudes.

ATC3) Tout treillis de certitudes est "déductivement complet", c'est-à-dire au sens où l'on dit qu'un système d'axiomes est complet : Un treillis de certitudes ne peut être sous-treillis d'un autre treillis de certitudes.

ThTC5) $z(P) \succ \emptyset$, ou : les bases de lois sont des atomes.

ThTC6) $z(P)$ définit une application univoque des lois sur les atomes; c'est-à-dire : $z(P)$ est unique.

ThTC7) T est atomique; c'est-à-dire : tout élément est minoré par un atome.

ThTC8) Les relations $Z \succ \emptyset$, $P(z) = 1$, définissent une application des atomes sur les lois.

ThTC9) Si A et B sont des unions d'atomes ; $P(A) = P(B)$, pour toute loi, implique : $A = B$.

DTC2) Si $z = z(P)$, on notera : $P(A) = P(A/z)$.

ThTC10) T satisfait à la loi de couverture : $(Z \succ \emptyset \text{ et } z \leq A) \Rightarrow z \cup A \succ A$.

ATC4) L'application des atomes sur les lois est univoque. C'est-à-dire que, z étant donné, il n'y a qu'une loi telle que : $P(z) = 1$.

ThTC11) Il y a correspondance biunivoque entre les lois et leurs treillis de certitudes (ou entre les lois et les atomes).

Commentaire : ThTC11 n'est pas vérifié par les P classiques.

L'interprétation logique de ThTC11 paraîtra satisfaisante à ceux qui pensent qu'une loi de probabilité doit être déterminée par un ensemble

de propositions constituant une donnée préalable.

On peut considérer que le "treillis de certitudes" formalise la notion classique de "catégorie d'épreuves" ou la notion quantique de "programmes de mesures".

V. PROBABILITES CONDITIONNELLES.

ThPC1) A étant un élément de T, sur le treillis orthogonal des B, minorants de A, pour lequel A est élément universel, et pour toute loi sur T, telle que $P(A/z) \neq 0$, la fonction :

$$P_1(B) = \frac{P(B/z)}{P(A/z)}$$

est une loi quantique; c'est-à-dire qu'elle satisfait à DP1.

DPC1) $P_1(B)$ est dite; trace de la loi $P(B/z)$ sur le treillis des minorants de A.

ThPC2) $z \not\leq A' \Rightarrow (z \cup A') \cap A$ est un atome.

DPC2) Pour tout atome z on pose : $(z \cup A') \cap A = E(A)z$ = projection orthogonale de l'atome z sur l'élément A. (c'est un atome pour $z \not\leq A'$; c'est \emptyset pour $z \leq A'$).

ThPC3) $z \not\leq A' \Rightarrow A = E(A)z \cup (z' \cap A)$.

ThPC4) Quelque soit l'atome z : $P(A/z) = P(E(A)z/z)$.

Commentaire : ThPC4 réduit la donnée de toutes les lois à celle d'une fonction, $P(x/y)$, des couples d'atomes.

ThPC5) Le treillis des certitudes de la loi $P_1(B)$ contient l'atome $E(A)z$.

APC1) $P_1(B)$ satisfait à ATC3.

ThPC6) $P_1(B)$ est (sur le treillis des minorants de A) la loi déterminée par l'atome $E(A)z$: $P_1(B) = P(B/E(A)z)$.

DPC3) Nous appelons "loi conditionnée par A", et notons $P(X/A, z)$, quand la loi initiale sur T est telle que $P(A/z) \neq 0$, l'extension, au treillis total T, de la trace de la loi initiale sur le treillis des minorants de A. On a donc : $P(X/A, z) = P(X/E(A)z)$.

Commentaire : Si l'on applique la définition DPC3 en calcul classique, en utilisant, pour tout élément X du corps de Borel (ou du treillis de Boole) la décomposition (impossible sur T) : $X = (X \cap A) \cup (X \cap A')$, on trouve l'expression classique des probabilités conditionnées : $P(X/A) = P(X \cap A/A) = P(X \cap A)/P(A)$.

Mais, par suite de la détermination des lois quantiques par leur treillis de certitudes, DPC3 définit la transformation de la loi pour certaines transformations de ce treillis (ou du point de vue de la physique quantique pour certaines transformations du "programme de mesures"). Il n'existerien d'analogue en calcul classique lors du changement de la catégorie d'épreuves.

Interprétation logique de ce qui précède

Nous interprétons l'ensemble des éléments de T comme un ensemble de propositions.

Les opérations \cup et \cap sur T seront interprétées comme étant respectivement la disjonction logique "ou" et la conjonction logique "et"; l'opération de complémentération sera interprétée comme étant l'opération logique de négation.

La relation d'ordre sur T doit être interprétée comme étant un prédicat de la logique (nous rappelons que l'implication logique, $a \supset b$, n'est pas un prédicat mais une opération, parfois définie par $a \supset b$). Le prédicat logique est un prédicat "unaire", c'est-à-dire à un seul argument, pour certains auteurs ($\vdash a$ signifiant que a peut être prouvé) mais il peut être un prédicat binaire pour d'autres (13, ChV), $a \vdash b$ s'interprétant alors par "b est déductible à partir de a", avec les propriétés :

$a \vdash a$, réflexivité, et : $(a \vdash b \text{ et } b \vdash c) \implies a \vdash c$, transitivité.

Ces propriétés sont celles de la relation d'ordre sur T : $a \leq b$.

On s'assure que les relations fondamentales sur T entre les opérations et l'ordre sont vérifiées par les opérations logiques et la déductivité :

$(a \leq c \text{ et } b \leq c) \implies a \cup b \leq c$, équivaut à : $(a \vdash c \text{ et } b \vdash c) \implies a \text{ ou } b \vdash c$

$(a \leq b \text{ et } a \leq c) \implies a \leq b \cap c$, équivaut à : $(a \vdash b \text{ et } a \vdash c) \implies a \vdash b \text{ et } c$.

Un treillis de certitudes est l'ensemble des propositions déductibles de la proposition atomique z qui joue le rôle de base axiomatique d'un système déductif.

ATC3 exprime que ces systèmes déductifs sont complets au sens habituel en axiomatique.

ThTC11 exprime que l'attribution, à la base de l'un des systèmes, de la probabilité 1, c'est-à-dire l'affirmation de sa vérité, détermine la probabilité de toute proposition de l'ensemble.

Le "conditionnement quantique", par l'affirmation de la vérité de A , s'exprime par le passage de la loi déterminée par la base z à la loi déterminée par la base $E(A)z$

Or $E(A)z \leq A$ et, pour la loi initiale : $P(E(A)z/z) = P(A/z)$.

$E(A)z$ étant le seul atome, parmi ceux qui minorent A , jouissant de cette propriété ; pour tout autre x , tel que $x \leq A$, on a : $P(x/z) < P(A/z)$ (inégalité stricte).

On peut donc dire que le conditionnement quantique, par A , consiste en un changement de base axiomatique, la nouvelle base étant, pour la loi initiale, la plus probable de celles desquelles on peut déduire A .

VI. RELATIONS ENTRE LA STRUCTURE DE T ET L'AXIOME DES PROBABILITES COMPOSEES

AC1) Tout élément de T est une union d'atomes.

ThC1) Pour que T soit Booléen (c'est-à-dire distributif) il faut et il suffit que les probabilités quantiques satisfassent à l'axiome des probabilités composées.

$$P(B/A, z) \cdot P(A/z) = P(A \cap B/z).$$

DC1) . Pour $z \not\leq A'$, nous poserons :

$$P(B/A, z) \cdot P(A/z) = PP(A, B/z) = \text{pseudo-probabilité du couple ordonné, ou séquence, } A, B. \text{ Pour } z \leq A', \text{ nous poserons: } PP(A, B/z) = 0.$$

Remarque : on peut énoncer ThC1 sous la forme : Pour que T soit booléen il faut et il suffit que les pseudo-probabilités de séquence soient des probabilités d'intersections : $PP(A, B/z) = P(A \cap B/z)$.

ThC2) Pour que T soit booléen il faut et il suffit que les PP satisfassent, pour tout couple, A, B , à la condition :

$$z \leq B \implies PP(A, B/z) + PP(A', B/z) = 1.$$

ThC3) Pour que T soit booléen, il faut et il suffit que les PP satisfassent à l'axiome quantique des probabilités totales quand le premier terme de la séquence décrit T. (D'après leur définition les PP satisfont à cet axiome quand le second terme de la séquence décrit T; la nécessité est immédiate, et ThC2 est un cas particulier de ThC3.

ThC4 Pour que T soit booléen il faut et il suffit que les PP soient fonctions symétriques des termes de la séquence : $PP(A.B/z) = PP(B.A/z)$.

Commentaire : Les PP qui sont, à la fois, une valuation et un écart sur les chaînes décrites par leur second terme gardent ce caractère sur les chaînes décrites par leur premier terme si, et seulement si, elles satisfont à l'axiome des probabilités composées. Le treillis T est alors booléen.

VII. AFFAIBLISSEMENT DE L'AXIOME DES PROBABILITES COMPOSEES

Commentaire : Si l'on veut préserver, pour T, la possibilité d'une structure plus faible que celle des treillis booléens, et si, cependant, on veut conserver un lien entre les pseudo-probabilités de séquences et la structure du treillis T, il faut "affaiblir" les caractères "valuation" et "écart" de ces PP sur les chaînes décrites par le premier terme de la séquence. Cet affaiblissement constitue un affaiblissement de l'axiome des probabilités composées. Quant au caractère "écart", on l'affaiblira en supposant seulement une relation bi-univoque entre les PP et un écart, par exemple par le postulat suivant :

A1) La racine carrée des pseudo-probabilités de séquences est un écart sur les chaînes décrites par le premier terme de la séquence : $A_1 \leq A' \implies \sqrt{PP(A_1, B/z)} = e((A_1 \cup A), A)$.

ThI) $A_1 \leq A' \implies |PP(A_1, B/z) + PP(A, B/z) - PP((A_1 \cup A), B/z)| \leq 2\sqrt{PP(A, B/z) \cdot PP(A_1, B/z)}$,

conséquence immédiate de la relation triangulaire, et qui, remplaçant la "relation des valuations totales", montre que AI implique un "affaiblissement" du caractère valuation des PP.

VIII. SPECIFICATION DU TREILLIS T EN VUE DE SON IMMERSION DANS (m.l.f).

AI1) L'écart dont il est question dans A1 est, quand le second terme de la séquence est un atome, induit par une valuation :

$$\sqrt{PP(A, x/y)} = |V(A, x/y)|$$

AI2) Pour trois atomes, on a : $V(y, x/z) = V(u, x/y) \cdot V(u, y/z)$. (AI2 est déjà assurée en module par DPC2 et DC1; il se réduit donc à une hypothèse sur les arguments).

AI3) $V(u, x/y) = \overline{V(u, y/x)}$. (Symétrie hermitienne de la valuation).

ThI1) $P(x/y) = P(y/x)$.
(symétrie de la fonction universelle des couples d'atomes envisagée dans le commentaire de ThPC4).

AI4) Tout élément de T est une union d'atomes en nombre fini ou en infinité dénombrable : $A = \bigcup_{i \in I} x_i$, I étant un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.



- ThI2) On peut supposer les atomes x_i de AI4 orthogonaux deux à deux; leur ensemble $\{x_i\}$ sera dit "constituer une base" de A.
- DI1) $\Psi(z)$ = application des atomes, z , de T, sur le vecteur, Ψ , de l'espace euclidien complexe, H, à nombre fini ou infinité dénombrable de dimensions, défini par ses coordonnées :
 $\Psi_i(z) = V(u.z_i/z)$, $\{z_i\}$ étant une base de u.
- ThI3) $|\Psi_i(z)|^2 = PP(u.z_i/z) = P(z_i/z)$. D'où : $|\Psi_i(z_j)| = \delta_{ij}$
- ThI4) $\sum_{i \in I} |\Psi_i(z)|^2 = P(u/z) = 1$. (Le vecteur $\Psi(z)$ est unitaire).
- ThI5) $|\langle \Psi(y), \Psi(z) \rangle|^2 = \left| \sum_{i \in I} \overline{V(u.z_i/y)} \cdot V(u.z_i/z) \right|^2 = P(y/z)$; (par AI3 et AI2).
- DI2) $a(\Psi)$ application de tout vecteur unitaire, Ψ , de H, sur la m.l.f de dimension 1, a, que Ψ détermine.
- DI3) Si $\{x_j\}$, pour $j \in J$, est une base de A, élément de T, on pose :
 $f(A) = \bigcup_{j \in J} f(x_j)$, qui définit l'application d'un élément quelconque, A, de T, dans (m.l.f); $f(z) = a(\Psi(z))$.
- ThI6) L'application $f(A)$ invarie l'ordre : $A \leq B \iff f(A) \leq f(B)$.
- ThI7) $f(A)$ est indépendante de la base choisie dans A pour appliquer DI3.
- ThI8) $f(A)$ invarie la complémentation : $f(A') = (f(A))'$.
- ThI9) $f(A)$ invarie l'union : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- ThI10) $f(A)$ invarie l'intersection.
- ThI11) $f(A)$ réalise l'immersion du treillis T dans le treillis (m.l.f) des multiplicités linéaires fermées d'un espace euclidien ayant, au plus, une infinité dénombrable de dimensions (Espace de Hilbert).

IX. VARIABLES ALEATOIRES ET FONCTIONS DE REPARTITION.

Les axiomes des VII et VIII ne jouent aucun rôle dans ce IX.

- DVA1) Une variable aléatoire, x , à unedimension, est une application de la chaîne des demi-droites $]-\infty, X[$ dans T, notée $x(]-\infty, X[)$, ou, abrégativement, $x(X)$, et satisfaisant aux axiomes :
- AVA1) Cette application invarie la structure de chaîne :
 $X_1 \leq X_2 \implies x(X_1) \leq x(X_2)$.
- AVA2) $x(-\infty) = \emptyset$ et $x(+\infty) = u$.
- AVA3) Cette application est continue à gauche, pour toute loi :
 $X' \uparrow X \implies P(x(X')/z) \uparrow P(x(X)/z)$
 pour tout atome z .
- DVA2) Fonction de répartition, $f(X)$, de la v.a. x pour une loi quantique donnée sur T, $P(A/z)$:
 $f(X) = P(x(X)/z)$.
- ThVA1) $f(X)$ est non-négative, non-décroissante, continue à gauche, $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$. C'est-à-dire $f(X)$ est une f.r. classique.

Commentaire : Les projecteurs sur les $x(X)$, que nous noterons $E(X)$, sont la généralisation des "décompositions de l'unité" de M.J. von Neumann (2) auxquelles ils se réduisent quand on prend pour T le treillis (m.l.f). Les opérateurs "hypermaximaux" que ces décom-

positions de l'unité permettent de définir, pourraient être dits, à bon droit, opérateurs "à variable aléatoire liée". Or ces opérateurs ont été introduits afin d'étendre le champ de résolubilité du problème du spectre et il est tout à fait remarquable que cette extension soit solidaire de la prise en considération, pour un but purement mathématique, en dehors de toute hypothèse physique, de variables aléatoires, notion essentielle au calcul des probabilités.

DVA3) La chaîne : $s(\]-\infty, X[$ ou $s(X)$, sera dite : "Chaîne spectrale",

DVA4) Application des segments $[X_1, X_2[$, sur les compléments relatifs d'une chaîne spectrale :

$$x([X_1, X_2[) = x(\]-\infty, X_2[) - x(\]-\infty, X_1[) = x(X_2) - x(X_1).$$

ThVA2) L'application $x([X_1, X_2[)$ invarie l'intersection :

$$x(([X_1, X_2[\cap ([X_3, X_4[)) = x([X_1, X_2[) \cap x([X_3, X_4[).$$

ThVA3) L'application $x([X_1, X_2[)$ invarie la complémentation :

$$x(([X_1, X_2[)') = (x([X_1, X_2[))'.$$

ThVA4) L'application $x([X_1, X_2[)$ invarie l'union.

ThVA4') La continuité à gauche permet d'étendre ThVA4 à l'union dénombrable.

DVA5) Le treillis booléen défini par l'application, déduite de ce qui précède, dans T , du treillis des ensembles mesurables sur la droite réelle, sera dit : "treillis spectral" de la v.a. x , et noté $S(x)$.

DVA6) Variables aléatoires "indépendantes".

$$A \in S(x) \text{ et } B \in S(y) \implies P(B/A, z) = P(B/z) \text{ et } P(A/B, z) = P(A/z), \text{ pour tout } z.$$

ThVA5) Si x et y sont des v.a indépendantes, le sous treillis de T constitué par l'ensemble des éléments obtenus par union et intersection à partir de ceux de $S(x)$ et de $S(y)$ est un treillis de Boole.

Commentaire : Il n'y a donc pas de théorie proprement quantique des variables indépendantes. Les résultats classiques qui leur sont relatifs sont incorporés dans la théorie quantique; il en est ainsi, en particulier, de la théorie des fréquences et des lois des grands nombres.

C. - DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES

- VÉRIFICATIONS D'AXIOMES SUR (m.l.f.)

Nous omettrons celles de ces démonstrations ou vérifications qui sont, soit immédiates, soit connues par une des théories utilisées (treillis, espace de Hilbert).

ThP1) Pour cette équivalence, il faut et suffit que l'on ait :

$A \cap B = \emptyset \implies A \leq B'$, (voir commentaire), pour tout couple A, B . Supposons cette condition satisfaite :

$$\text{Or : } A = (A \cap B) \cup (A - (A \cap B));$$

$$\text{Mais : } [A - (A \cap B) \leq A \text{ et } (A - (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \emptyset] \implies (A - (A \cap B)) \cap B = \emptyset$$

$$\text{donc : } (A - (A \cap B)) \leq B'; \text{ puis : } (A - (A \cap B)) \leq A \cap B'.$$

$$\text{d'où : } A \leq (A \cap B) \cup (A \cap B').$$

$$\text{Mais, terme à terme : } (A \cap B) \cup (A \cap B') \leq A;$$

$$\text{Donc : } A = (A \cap B) \cup (A \cap B'); \text{ et, par dualité : } A' = (A' \cup B') \cap (A' \cup B).$$

Ceci est un cas particulier de distributivité, qui implique la distributivité générale; En effet :

posons : $X = A \cap (B \cup C)$, et : $Y = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; terme à terme : $Y \leq X$.

Or : $X - Y \leq X$ et $X - Y \leq Y' = (A' \cup B') \cap (A' \cup C')$;

D'où : $X - Y \leq A \cap (B \cup C) \cap (A' \cup B') \cap (A' \cup C')$; si, donc : $A = (A \cup B) \cap (A \cup B')$, et $B' = (A \cup B') \cap (A' \cup B')$ il vient :

$X - Y \leq (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap B' \cap (A' \cup C') \leq B'$; et de même : $X - Y \leq C'$;

d'où : $X - Y \leq B' \cap C' = (B \cup C)'$; or $X - Y \leq B \cup C$; donc : $X - Y = \emptyset$.

C' est-à-dire : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

L'hypothèse d'équivalence des axiomes classique et quantique implique donc la distributivité de T ; T est alors distributif et complémenté, c'est-à-dire Booléen. Réciproquement, si T est booléen, sa distributivité implique immédiatement que $A \cap B = \emptyset \implies A \leq B'$, c'est-à-dire l'équivalence des axiomes.

ThTC6) $z_1 = z(P)$ et $z_2 = z(P)$ et $z_1 \neq z_2 \implies P(z_1) = 1$ et $P(z_2) = 1$

$\implies P(z_1 \cap z_2) = 1 \implies P(\emptyset) = 1$ ce qui est absurde. Donc : $z_1 = z_2$.

ThTC10) Démontrons que, si $z \succ \emptyset$ et $z \not\leq A$, l'existence d'une chaîne : $A < B < A \cup z$, est contradictoire (inégalités strictes).

On aurait alors : $A \cup z = A \cup (B - A) \cup ((A \cup z) - B)$, les trois termes de cette union étant, deux à deux, orthogonaux.

donc : $P(A \cup z) = P(A) + P(B - A) + P((A \cup z) - B) = P(A) + P((B - A) \cup ((A \cup z) - B))$.

Soit x un atome appartenant à $(B - A) \cup ((A \cup z) - B)$. Pour la loi déterminée par x le dernier terme des relations précédentes est égal à 1; il est donc impossible que $P(z/x) = 0$, sinon, par ThTC2 le premier terme serait nul. Donc, par ThTC7, on a :

$((B - A) \cup ((A \cup z) - B)) \cap z' = \emptyset$; donc : $((B - A) \cup ((A \cup z) - B)) \cup z' \succ z'$,

L'inégalité étant stricte. Mais $u \succ z'$; donc : $((B - A) \cup ((A \cup z) - B)) \cup z' = u$, et : $((B - A) \cup ((A \cup z) - B)) \cup z' \succ z'$; donc : $((B - A) \cup ((A \cup z) - B))$ est un atome, ce qui est contradictoire avec le fait qu'il est une union de deux termes orthogonaux.

ThPC2) $z \cup A' \succ A' \implies (z \cup A') \cap A \succ A' \cap A = \emptyset$.

ThPC3) La relation : $A = E(A)z \cup (z' \cap A)$ est immédiate si $E(A)z = A$.

Si $E(A)z \neq A$, posons $A - E(A)z = B$. On a : $B \propto A$. Mais, de $z \cup A' \succ A'$, on déduit $z' \cap A \propto A$. Donc : $B = z' \cap A$, ou bien $A = B \cup (z' \cap A)$. Or la seconde éventualité est exclue car : $B \leq (E(A)z)' = (z' \cap A) \cup A' \implies B \cup (z' \cap A) \leq (z' \cap A) \cup A'$, ce qui, si cette seconde éventualité était vraie, deviendrait : $A \leq (z' \cap A) \cup A' \iff (z' \cap A) \cup A' = ((z' \cap A) \cup A') \cup A = u \iff (z \cup A') \cap A = \emptyset$, ce qui est exclu. Donc c'est la première éventualité qui est vraie : $B = z' \cap A \implies A = E(A)z \cup (z' \cap A)$. ThPC3 reste vrai si $z \leq A'$.

ThC1) La condition est nécessaire : Sur un treillis booléen :

$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$. d'où : $P(B/A, z) = P(A \cap B/A, z) + P(A' \cap B/A, z) = P(A \cap B/E(A)z) + P(A' \cap B/E(A)z) = P(A \cap B/E(A)z)$, et, comme $A \cap B$ appartient au treillis des minorants de A , par ThPC6 : $P(A \cap B/E(A)z) = P_1(A \cap B) = P(A \cap B/z)/P(A/z)$, c.q.f.d.

La condition est suffisante :

si elle est satisfaite, on a ; pour tout couple A, B : $P((A \cap B) \cup (A \cap B')/z) = P(A \cap B/z) + P(A \cap B'/z) = (P(B/A, z) + P(B'/A, z))P(A/z) = P(A/z)$,

pour tout z . Donc, par AC1 et ThTC9 : $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$. Ce qui implique la distributivité, comme on l'a vu au ThP1.

ThC2) Si T est booléen, par ThC1 :

$$PP(A.B/z) + PP(A'.B/z) = P(A \cap B/z) + P(A' \cap B/z) = P(B/z) = 1, \text{ si } z \leq B.$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} z \leq B &\Rightarrow P(B/E(A)z)P(A/z) + P(B/E(A')z)P(A'/z) = 1 = P(A/z) + P(A'/z) \\ \Leftrightarrow P(B'/E(A)z)P(A/z) + P(B'/E(A')z)P(A'/z) &= 0 \\ \Leftrightarrow P(B'/E(A)z)P(A/z) = 0 \text{ et } P(B'/E(A')z)P(A'/z) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z \leq A' \text{ ou } E(A)z \leq B) \text{ et } (z \leq A \text{ ou } E(A')z \leq B) \\ \Leftrightarrow (z \leq A \text{ et } E(A)z \leq B) \text{ ou } (E(A')z \leq B \text{ et } z \leq A') \text{ ou } (E(A)z \leq B \text{ et } E(A')z \leq B) \\ \Rightarrow (z \leq A \cap B) \text{ ou } (z \leq A' \cap B) \text{ ou } ((E(A)z \cup E(A')z) \leq (A \cap B) \cup (A' \cap B)). \end{aligned}$$

Mais : $z \leq E(A)z \cup E(A')z$, par ThPC4. D'où l'on déduit que chacun des termes de la dernière disjonction triple implique :

$$z \leq (A \cap B) \cup (A' \cap B), \text{ pour tout } z \leq B; \text{ donc, par AC1 :}$$

$$B \leq (A \cap B) \cup (A' \cap B), \text{ d'où la distributivité suit comme plus haut (ThP1).}$$

ThC4) La condition : $PP(A.B/z) = PP(B.A/z)$, est nécessaire pour que T soit booléen, puisque, dans ce cas, d'après ThC1, chacun des termes est égal à $P(A \cap B/z)$.

Réciproquement, si $PP(A.B/z) = PP(B.A/z)$, le ThC2 s'applique immédiatement par le second membre.

ThI6) Si z est un atome de T , $f(z)$ est un atome de $(m.l.f)$ et l'on a :

$$P(A/z) = \sum_{j \in J} P(X_j/z) = \sum_{j \in J} P(f(x_j)/f(z)) = P(f(A)/f(z)).$$

$$D'où z \leq A \Leftrightarrow P(A/z) = 1 \Leftrightarrow f(z) \leq f(A).$$

$$\text{Or : } A \leq B \Leftrightarrow x_j \leq B, \text{ pour tout } j \Leftrightarrow f(x_j) \leq f(B) \Leftrightarrow f(A) \leq f(B).$$

ThI8) donc : $z \leq A' \Leftrightarrow f(z) \leq f(A')$.

$$\text{Mais d'autre part ; } z \leq A' \Leftrightarrow P(A/z) = 0 \Leftrightarrow f(z) \leq (f(A))'.$$

$$\text{d'où : } f(A') = (f(A))'.$$

ThI9) $f(z) \leq (f(A \cup B))' \Leftrightarrow f(z) \leq f((A \cup B)') \Leftrightarrow z \leq (A \cup B)' = A' \cap B'$

$$\Leftrightarrow z \leq A' \text{ et } z \leq B' \Leftrightarrow f(z) \leq f(A') \text{ et } f(z) \leq f(B')$$

$$\Leftrightarrow f(z) \leq (f(A))' \text{ et } f(z) \leq (f(B))' \Leftrightarrow f(z) \leq (f(A))' \cap (f(B))'$$

$$\Leftrightarrow f(z) \leq (f(A) \cup f(B))'.$$

$$D'où : (f(A \cup B))' = (f(A) \cup f(B))';$$

$$\Leftrightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

ThVA2) On a : $P(x([X_1, X_2])) = P(x(X_2)) - P(x(X_1)) = P[-\infty, X_2] - P[-\infty, X_1]$
 $= P([X_1, X_2])$ pour la loi qui admet $f(X)$ pour f. r. sur l'axe réel des X .

Nous noterons schématiquement la relation à démontrer :

$$x(12 \cap 34) = x(12) \cap x(34).$$

Supposons d'abord que : $12 \cap 34 \neq \emptyset$ (segments non disjoints).

$$z \leq x(12 \cap 34) \Leftrightarrow P(x(12 \cap 34)/z) = 1 \Leftrightarrow P(12 \cap 34) = 1 \Leftrightarrow P(12) = 1 \text{ et}$$

$P(34) = 1 \iff P(x(12)) = 1$ et $P(x(34)) = 1 \iff P(x(12) \cap x(34)) = 1$ (par ATC1) $\iff z \leq x(12) \cap x(34)$; d'où, par AC1 et ThTC9 :
 $x(12 \cap 34) = x(12) \cap x(34)$.

D'autre part : $12 \cap 34 = \emptyset \implies P(12 \cap 34) = 0$ pour toute loi \iff
 $P(x(12 \cap 34)/z) = 0$ pour tout $z \iff x(12 \cap 34) = \emptyset$ (par ATC2), ce qui complète la preuve.

ThVA5) DVA6 $\implies PP(A, B/z) + PP(A', B/z) = P(B/z) \implies$ (par ThC2).

$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ qui implique, comme en la preuve de ThP1, la distributivité générale.

Remarque sur A1)

Une forme générale de l'affaiblissement du caractère "valuation" des PP quand le premier terme de la séquence décrit une chaîne de T est :

$$A_1 \leq A' \implies \left| PP(A_1, B/z) + PP(A, B/z) - PP((A_1 \cup A), B/z) \right| \leq f(PP(A_1, B/z), PP(A, B/z)), (1)$$

Une forme générale de l'affaiblissement du caractère "écart" des PP dans les mêmes conditions est :

$$A_1 \leq A' \implies e((A_1 \cup A), A) = g(PP(A_1, B/z)).$$

qui, par la relation triangulaire implique :

$$\left| g^2(PP(A_1, B/z)) + g^2(PP(A, B/z)) - g^2(PP((A_1 \cup A), B/z)) \right| \leq 2 \sqrt{g^2(PP(A_1, B/z)) \cdot g^2(PP(A, B/z))}. (2)$$

Or (1) et (2) sont des conditions de même forme et la limitation imposée au choix des PP sera minimum si elles sont équivalentes. L'axiome A1 assure cette équivalence.

Vérification de l'axiome, A11 sur (m.l.f).

On sait qu'on pose : $P(A/z) = \| E(A) \cdot \Psi(z) \|^2$, où $\Psi(z)$ est un vecteur unitaire appartenant à la m.l.f de dimension un, z.

$$\text{Et ensuite : } P(B/A, z) = \| E(B) \cdot E(A) \cdot \Psi(z) \|^2 / \| E(B) \cdot \Psi(z) \|^2$$

$$\text{d'où : } PP(A, B/z) = \| E(B) \cdot E(A) \cdot \Psi(z) \|^2.$$

Par suite, pour deux atomes, x et y :

$$PP(A, x/y) = \| E(x) \cdot E(A) \cdot \Psi(y) \|^2 = (E(x) \cdot E(A) \cdot \Psi(y), E(A) \cdot \Psi(y))$$

$$\text{mais : } E(x) \cdot E(A) \cdot \Psi(y) = k \cdot \Psi(x);$$

$$\text{d'où : } k = (E(x) \cdot E(A) \cdot \Psi(y), \Psi(x)) = (E(A) \cdot \Psi(y), \Psi(x)).$$

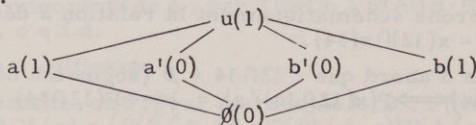
D'où :

$$PP(A, x/y) = (E(A) \cdot \Psi(y), \Psi(x)) \cdot (\Psi(x), E(A) \cdot \Psi(y)) = |(E(A) \cdot \Psi(y), \Psi(x))|^2$$

Or le produit scalaire $(E(A) \cdot \Psi(y), \Psi(x))$ satisfait à DV1 et à AV1 : donc A11 est vérifié ; A12 et A13 sont ensuite immédiatement vérifiés.

Indépendance de ATC1 et des axiomes qui le précèdent :

Sur le treillis ci-contre, supportant une P dont les valeurs sont données à côté de chaque élément, les axiomes précédant ATC1 sont vérifiés, mais ATC1 ne l'est pas.



RELATIONS ENTRE LE PRESENT MEMOIRE ET CERTAINS TRAVAUX ANTERIEURS :

La relation entre les pseudo-probabilités de séquences et les écarts sur les chaines de T peut s'écrire, quand $A_1 \leq A_2$:

$$e(A_1, A_2) = \sqrt{PP((A_2 - A_1).B/z)} = \| E(B).E(A_2 - A_1).\Psi(z) \|$$

Supposons que A_1 et A_2 soient deux éléments de la chaine spectrale d'une v.a particulière : la variable dynamique q (coordonnée généralisée) :

$$A_1 = q(-\infty, Q_1[) = q(Q_1), \text{ et, } A_2 = q(-\infty, Q_2[) = q(Q_2); \text{ avec } Q_1 \leq Q_2.$$

Des propriétés de l'application q découle immédiatement que $e(A_1, A_2)$ est aussi un écart sur l'axe réel des Q :

$$e(A_1, A_2) = e(Q_1, Q_2).$$

Supposons que B soit une m.l.f. spectrale de la v.a. particulière p, moment conjugué de q ; on sait que q et p ne commutent pas.

J'appelle "séquence immédiate" de propositions expérimentales la suite ordonnée : $(A_2 - A_1)$ puis $(B_2 - B_1)$, ou : "un corpuscule était sur $[(Q_1, Q_2[$ dont l'impulsion est sur $[P_1, P_2[$ ". L'expression séquence immédiate est destinée à rappeler que l'on suppose qu'il n'y a pas évolution temporelle de l'état $\Psi(z)$.

Laissant P_1 et P_2 fixés, considérons l'ensemble des séquences immédiates obtenues en faisant varier Q_1 et Q_2 , c'est-à-dire, l'ensemble des attributions a posteriori d'une position à un corpuscule d'impulsion connue.

Le formalisme fait correspondre à cet ensemble, pour un état $\Psi(z)$ donné, un écart sur l'axe des Q : $e(Q_1, Q_2)$. En ce sens il donne un contenu effectivement topologique aux propositions de localisation a posteriori. L'opinion, courante parmi les physiciens de l'école de Copenhague, que de telles propositions sont vides de sens, n'est pas fondée.

Dans une conférence que nous avons faite en 1953 au séminaire de M. le Professeur Darmois nous avons construit le formalisme quantique dans le cas particulier de deux variables dynamiques conjuguées en réglant axiomatiquement cette localisation a posteriori; le mémoire actuel englobe leur cas dans une théorie générale.

REMARQUES

REMARQUE sur l'identification des relations : $a \vdash b$ et $a \leq b$:

En calcul des propositions : $(a \vdash b) \Rightarrow (\vdash a \supset b)$; c'est un cas particulier du théorème de déduction (13, § 21);

et : $(\vdash a \supset b) \Leftrightarrow (\vdash a' \cup b) \Leftrightarrow P(a' \cup b) = 1$, pour toute loi de probabilité à deux valeurs : 0 et 1 (13, § 28, § 29); or sur un treillis ayant un élément universel, u, seul cet élément satisfait à la condition : $P(u) = 1$, pour toute loi; donc :

$$P(a' \cup b) \equiv 1 \Leftrightarrow a' \cup b = u.$$

Sur tout treillis : $(a \leq b) \Rightarrow (a' \cup b = u)$, la réciproque n'étant vraie que si ce treillis est booléen.

Sur un treillis booléen on a donc :

$$(a \vdash b) \Rightarrow (\vdash a \supset b) \Leftrightarrow (a \leq b),$$

et l'identification de $a \vdash b$ et $a \leq b$ constitue un affaiblissement de $a \vdash b$.

Mais, sur un treillis non distributif, $a \vdash b$ et $a \leq b$ sont, toutes deux, plus fortes que $\vdash a \supset b$; en ce sens, leur identification est plus "acceptable" sur un treillis non distributif tel que (m.l.f.) que sur un treillis de Boole.

REMARQUE

- Relations entre les postulats qui règlent un calcul des probabilités sur un treillis et la modularité ou la distributivité de ce treillis :

Nous voulons, en particulier, préciser les liens entre la "relation modulaire" :

$$P(x) + P(y) = P(x \vee y) + P(x \wedge y) \quad , \quad (RM)$$

d'une part, et la modularité : $A \leq C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, (M), ou la distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (D) d'autre part.

Dans le mémoire de von-Neumann et Birkhoff, on postule (RM), non pour une probabilité, mais pour une "fonction de dimension", $d(x)$, qui est, de plus, supposée strictement croissante :

$$x < y \Rightarrow d(x) < d(y).$$

Or : $A \cup (B \cap C) \leq (A \cup B) \cap C$ (terme à terme) ; mais :

$$(RM) \Rightarrow d(A \cup (B \cap C)) = d((A \cup B) \cap C),$$

qui exclut l'inégalité stricte ; d'où (M).

Une fonction de probabilité n'est pas strictement croissante, mais supposons qu'elle satisfasse à ATC2 (tout élément de T, autre que \emptyset , appartient à un treillis de certitudes) ; Si on lui impose (RM) on en déduit AVA1, puis :

$$p \left[(A \cup B) \cap C - (A \cup (B \cap C)) \right] = 0, \text{ d'où (M).}$$

Donc :

$$(ATC2 \text{ et } RM) \Rightarrow (M).$$

Supposons maintenant que l'on impose au calcul des probabilités, en plus de ATC2 et de RM, le postulat AC1 (tout élément de T est une union d'atomes). Alors, par RM :

$x \cap y = \emptyset \Rightarrow P(x) + P(y) = P(x \cup y)$; puis, par AVA1 (impliqué par RM) : $P(x) = P(x \cup y - y)$; puis, par AC1 et ThTC9 : $x = x \cup y - y$ ce qui implique : $x \leq y'$; en résumé : $x \cap y = \emptyset \Rightarrow x \leq y'$; il y a donc équivalence de l'axiome quantique et de l'axiome classique des probabilités totales ; d'où, par ThP1, la distributivité (D) : $(ATC2 \text{ et } RM \text{ et } AC1) \Rightarrow (D)$.

Donc, sur (m.l.f.), dans un espace de Hilbert de dimension finie, si l'on suppose ATC2 et AC1, il faut abandonner RM, puisque un tel treillis n'est pas distributif ; et, sur (m.l.f.), dans un espace de Hilbert de dimension infinie, si l'on suppose simplement ATC2, il faut abandonner RM, puisqu'un tel treillis n'est même pas modulaire.

RÉFÉRENCES

A) Sur l'objet de ce mémoire :

- (1) J. von Neumann et G. Birkhoff. The logic of quantum mechanics. Annals of math. 37. (1936).

- (2) J. von Neumann. Les fondements mathématiques de la mécanique quantique (Trad. Proca. 1946).
 - (3) L. de Broglie. La statistique des cas purs en mécanique ondulatoire et l'interférence des probabilités (Revue Scientifique 87. 1948).
 - 4). R. Fortet : Faut-il élargir les axiomes du calcul des probabilités? (Congrès intern. de philo. des Sc. 1949, Actualités Sc. Hermann n° 1146).
 - 5). Actes du 2ème colloque intern. de Logique math. (Collection de Log. math. A, V, Gauthier-Villars, 1954). (Mme P. Février, Mrs Reichenbach, J.L. Destouches, Bodiou ...).
 - 6). Mme P. Destouches-Février : La structure des Théories physiques (1951).
 - 7). G. Bodiou : Conférence au Séminaire de M. le Professeur G. Darmonis, 22/5/1953 (ronéotypée ; publiée dans : Annales de la Fac. des Sc. de Marseille, XXII, 2, 1953).
 - b). Recherches sur les fondements du calcul quantique des probabilités dans les cas purs (Thèse. Annales de Physique 1950).
 - c). Relations entre la seconde quantification, la mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration et les problèmes du second ordre en calcul des probabilités. (Journal de Phys. 15. 1954).
- B). Ouvrages généraux :
- 8). A.N. Kolmogoroff : Foundations of the theory of Probability (Transl. by N. Morrison, 2d ed. 1956).
 - 9). G. Birkhoff : Theory of lattices (1940-48).
 - 10). Mme M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot : Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées, et des treillis géométriques (1953).
 - 11). G. Julia : Introduct. math. aux théories quantiques. (II, 1938).
 - 12). F. Riesz et B. Sz. Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle (1953-55).
 - 13). S.C. Kleene : Introduction to metamathematics (1952).
 - 14). R. Carnap : Logical foundations of probability (1950).

- (2) J. von Neumann, Les fondements mathématiques de la mécanique quantique (Trad. E. Frenkel, 1946).
- (3) J. de Broglie, La statistique des cas pairs en mécanique ondulatoire et l'interférence des probabilités (Revue Scientifique 87, 1948).
- (4) R. Fortet : faut-il élargir les axiomes du calcul des probabilités? (Congrès Internat. de Philo. des Sc. 1949, Actuelles Sc. Hermann n° 1195).
- (5) Actes de 5ème colloque internat. de Logique math. (Collection de Log. math. A. V. Gauthier-Villars, 1954) (Mme P. Février, Mrs R. Schoenbach, J. J. Destouches, Bodion, ...).
- (6) Mme P. Destouches-Février : La structure des Théories physiques (1951).
- (7) G. Bodion : Conférence au Séminaire de M. le Professeur G. Darmon, 22/5/1953 (rondeotype ; publiée dans : Annales de la Fac. des Sc. de Marseille, XXII, 2, 1953).
- (8) Recherches sur les fondements du calcul quantique des probabilités dans les cas pairs (Thèse, Annales de Physique 1950).
- (9) Relations entre la seconde quantification, la mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration et les problèmes du second ordre au calcul des probabilités. (Journal de Phys. 15, 1954).
- B. Ouvrages généraux :
 - (1) A. N. Kolmogoroff : Foundations of the theory of Probability (Transl. by N. Morrison, 2d ed. 1955).
 - (2) G. Birkhoff : Theory of Lattices (1948-49).
 - (3) Mme M. L. Dubreil-Jacotin, J. Lesieur, R. Croitor : Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées, et des treillis géométriques (1951).
 - (4) G. Joliss : Introduction math. aux théories quantiques. (II, 1953).
 - (5) F. Riesz et B. Sz. Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle (1951-52).
 - (6) S. C. Kleene : Introduction to metamathematics (1952).
 - (7) R. Carnap : Logical foundations of probability (1950).