



HAL
open science

Du mouvement brownien et ses généralisations

G. Malecot

► **To cite this version:**

G. Malecot. Du mouvement brownien et ses généralisations. Annales de l'ISUP, 1959, VIII (1), pp.187-195. hal-04094502

HAL Id: hal-04094502

<https://hal.science/hal-04094502>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

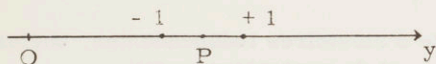
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE PROBLÈME DU MOUVEMENT BROWNIEN ET SES GÉNÉRALISATIONS

G. MALECOT

Le mouvement brownien et la théorie de la diffusion sont étudiés par beaucoup d'auteurs par passage à la limite à partir de la théorie de la "promenade au hasard" (théorie à laquelle est attachée le nom de Polya).

Si l'on imagine une particule se déplaçant sur un axe Oy et pouvant effectuer, à des dates déterminées constituant une suite dénombrable t_1, \dots, t_n, \dots des sauts d'amplitude unité, et si l'on suppose qu'il y a des probabilités données pour que ces sauts soient algébri-



ment égaux à $+1$ ou à -1 , il est facile d'obtenir la loi de probabilité de la position de la particule P à une date quelconque, et cette loi n'est

d'ailleurs autre que la loi de probabilité du gain total d'un joueur au bout de n parties d'un jeu de hasard simple tel que le jeu de pile ou face. Il est bien connu que la loi de probabilité réduite est, asymptotiquement, la loi de Laplace-Gauss.

Le schéma de la "promenade au hasard" peut être étendue à plusieurs dimensions, comme le fait Polya par exemple dans le cas d'un réseau de carrés qui schématise un réseau de rues.

Mais je ne m'étendrai pas aujourd'hui sur le cas multidimensionnel, car, ce que je voudrais signaler, ce sont différentes généralisations pour lesquelles les notations seront plus intuitives dans le cas d'une seule dimension (il est facile ensuite de les généraliser, ce que je ne ferai pas aujourd'hui).

Une première généralisation, qui ne présente aucune difficulté, consiste à supposer que les sauts possibles, au lieu d'être d'amplitude unité, admettent des valeurs algébriques α_i , avec des probabilités respectives π_i .

Une deuxième généralisation consiste à admettre que les dates de ces sauts, au lieu d'être de dates données $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ sont aléatoires. L'hypothèse la plus simple, celle qui est à la base des processus stochastiques se rattachant à la loi de Poisson, consiste à admettre que, dans chaque intervalle de temps $t, t + \Delta t$, différents sauts de valeurs algébriques α_i sont possibles avec des probabilités respectives $\pi_i = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, (le dernier terme désignant un infiniment petit par rapport à Δt). Dans le cas où les α_i et les μ_i sont des constantes données, on a affaire à un processus permanent à accroissements indépendants, processus qui est continu en probabilité (la probabilité pour que l'accroissement d'abscisse pendant Δt dépasse en valeur absolue un nombre donné ϵ tend vers zéro avec Δt) mais non presque sûrement continu (il y a une probabilité finie pour un saut fini pendant un intervalle de temps non infiniment petit).

La loi de probabilité de la position au bout d'un temps fini n'est d'ailleurs pas la loi de Laplace-Gauss (comme ce serait le cas si le processus était presque sûrement continu), mais une "loi discontinue" dans laquelle la loi de probabilité de l'abscisse y à la date t (quand l'on prend pour origine O l'abscisse à la date zéro) a pour deuxième fonction caractéristique (fonction génératrice des cumulants) :

$$(1) \quad \psi(s, t) = \sum_i \mu_i t (e^{\alpha_i s} - 1)$$

(loi de probabilité d'une somme d'aléatoires indépendantes, obéissant à des lois de Poisson de sauts α_i et de paramètres $\mu_i(t)$).

Ce n'est qu'asymptotiquement, quand $t \rightarrow \infty$, que l'on retrouve, comme loi réduite, la loi de Gauss. Je n'insiste pas sur ces résultats très classiques, car ils sont établis en supposant que les α_i et les μ_i sont des constantes, c'est-à-dire qu'il s'agit de processus à accroissements indépendants. Or le mécanisme même du mouvement brownien montre que ce n'est que par une approximation discutable que l'on peut l'assimiler à un processus à accroissements indépendants. En réalité, le mouvement d'une particule P soumise à des chocs moléculaires (rappelons que nous nous plaçons, pour simplifier, dans le cas unidimensionnel), se fait pour une suite de secousses qui ne peuvent pas être regardées comme ayant des amplitudes α_i données indépendantes du mouvement déjà acquis par la particule. Si l'on applique la théorie classique du choc, chaque choc moléculaire se traduit par un changement de vitesse de la particule P , changement qui dépend à la fois de la vitesse v_i de la molécule heurtante (vitesse dont on peut certes supposer donnée la loi de distribution) et de la vitesse x de la particule P au moment du choc, vitesse qui dépend, elle, des chocs précédents.

Ces remarques montrent :

1°) que le processus stochastique correspondant au mouvement brownien joue sur la vitesse de la particule P (que nous avons notée x) et non sur son abscisse (que nous avons notée y);

2°) que, si nous désignons par α_i les changements brusques de la vitesse de P qui correspondent aux chocs des différentes espèces possibles, les valeurs numériques des α_i dépendent de la vitesse x déjà acquise, et cela suivant la formule bien connue :

$$\alpha_i = \frac{(1 + l_i)m_i}{m + m_i} (v_i - x)$$

les molécules heurtantes étant supposées réparties en différentes "espèces" de vitesse v_i , de masse m_i , de coefficient de restitution l_i (m désignant la masse de la particule P).

Dans ce qui suit, nous poserons $\alpha_i = p_i(v_i - x)$, mais il y aura lieu de se souvenir que, dans le problème mécanique concret, $0 < p_i < 2$.

Il est évident que l'on n'a plus affaire à un processus stochastique à accroissements indépendants, puisque les α_i (accroissements possibles de la vitesse lors de chaque choc) dépendent de x . Et il en résulte que l'écart quadratique moyen σ de la vitesse x , au lieu d'augmenter indéfiniment avec le temps t (ce qui correspondrait au caractère asymptotiquement gaussien que l'on admet d'habitude) tend au contraire vers une limite finie quand $t \rightarrow \infty$. Nous allons, pour cela, étudier l'équation différentielle "stochastique" que vérifie la vitesse de P quand on la regarde comme une fonction aléatoire du temps t . Nous désignerons dorénavant cette vitesse - la vitesse acquise par la particule P à la date t - par $X(t)$. (les majuscules étant réservées pour les variables des fonctions aléatoires et les minuscules pour leurs valeurs numériques).

L'accroissement $\Delta X(t)$ de la fonction aléatoire $X(t)$ a par hypothèse des probabilités $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ de prendre les valeurs α_i et nous supposons que les parties principales $\mu_i \Delta t$ des probabilités de choc pendant l'intervalle $t, t + \Delta t$ avec les molécules des différentes espèces sont données, de telle sorte que seuls les α_i dépendent de l'état de la particule P, par l'intermédiaire de sa vitesse $X(t)$, en vertu de la formule $\alpha_i = p_i [v_i - X(t)]$.

On peut écrire aisément la moyenne, la variance, et plus généralement les moments, et les cumulants, de l'accroissement $\Delta X(t)$ quand la valeur numérique de $X(t)$ est connue et égale à x : nous appelons ces quantités les moments et cumulants conditionnés. Le moment conditionné d'ordre q , que nous noterons $\mathfrak{M}_c [(\Delta X)^q]$ sera

$$\mathfrak{M}_c [(\Delta X)^q] = \sum_i [\mu_i \Delta t + o(\Delta t)] [p_i (v_i - x)]^q$$

cette formule est valable, non seulement quand les différents sauts α_i possibles, dans un même intervalle, s'excluent, mais aussi quand ils sont stochastiquement indépendants⁽¹⁾.

Il est facile de voir que les cumulants conditionnés ont mêmes parties principales que les moments conditionnés. Le plus simple pour cela est de former la fonction caractéristique conditionnée de ΔX , qui est

$$\mathcal{M}_c(e^{s\Delta X}) = 1 + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{s^q}{q!} \mathcal{M}_c[(\Delta X)^q] = 1 + \sum_i [\mu_i \Delta t + o(\Delta t)] [e^{p_i(v_i - x)s} - 1]$$

On sait que le logarithme de cette fonction caractéristique conditionnée, qui est la fonction génératrice des cumulants conditionnés, admet même partie principale que la somme \sum_i , à savoir :

$$(2) \quad H(x, s) \Delta t = \sum_i \mu_i (e^{p_i(v_i - x)s} - 1) \Delta t$$

Le développement de cette fonction en séries de puissances de s montre que ses coefficients (les "cumulants") sont des polynômes entiers en x de degré égal à leur ordre (x est, rappelons-le, la valeur numérique acquise par la fonction aléatoire à la date t). Or, toutes les fois qu'une fonction aléatoire à accroissements non indépendants jouit de cette propriété, il est toujours possible de déterminer par la méthode des moments sa loi de probabilité à une date quelconque t . Posons en effet $M_r(t) = \mathcal{M}\{[X(t)]^r\}$ (il s'agit là des moyennes et moments a priori calculés sans connaître aucune des valeurs numériques, sinon la valeur à la date zéro que nous supposerons nulle pour simplifier).

L'ensemble des moments $M_r(t)$ sera fourni par la "fonction caractéristique a priori" que nous noterons $F(s, t)$ et qui sera par définition :

$$F(s, t) = \mathcal{M}[e^{sX(t)}] = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{s^r}{r!} M_r(t)$$

Et le théorème des moyennes conditionnées permet d'écrire :

$$\begin{aligned} F(s, t + \Delta t) &= \mathcal{M}[e^{sX(t)} \cdot e^{s\Delta X(t)}] = \mathcal{M}[e^{sX(t)} \mathcal{M}_c[e^{s\Delta X(t)}]] = \\ &= F(s, t) + \mathcal{M}[e^{sX(t)} H(X, s)] \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

D'où, par soustraction puis division par Δt que l'on fait ensuite

(1) Car la probabilité pour qu'il y en ait plusieurs dans l'intervalle Δt est alors infiniment petite par rapport à Δt .

tendre vers zéro :

$$(3) \quad \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} = \mathfrak{M} [H(X, s) e^{sX(t)}] \quad (\text{formule de Bartlett})$$

Cette formule, très générale, s'applique à bien d'autres problèmes que le mouvement brownien.

a) Remarquons incidemment que si H était indépendant de X, c'est-à-dire, dans le cas où la fonction aléatoire est à accroissements indépendants, on déduit immédiatement de (3) la formule (1), car alors $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial(\log F)}{\partial t} = H(s)$.

b) Remarquons aussi que, dans le cas où H serait une fonction linéaire de X, le deuxième membre serait une fonction linéaire de F et de $\frac{\partial F}{\partial s}$ (puisque $\mathfrak{M} [X e^{sX(t)}] = \frac{\partial F}{\partial s}$), la fonction caractéristique F(s, t) est alors solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. C'est ce qui se passe dans le processus de "multiplication" de Furry (la variable aléatoire étant alors le nombre de particules, et non l'abscisse d'une particule) dans le processus de "naissance et décès" de Feller et dans le processus de Arley pour les rayons cosmiques.

c) Dans le cas où H est une fonction du deuxième degré de s, c'est-à-dire où seuls les deux premiers cumulants de ΔX ne sont pas d'ordre supérieur à Δt (c'est le cas étudié par Kolmogoroff et généralisé par Feller), c'est-à-dire où $H \cdot \Delta t \equiv [sM + \frac{s^2}{2} v] \cdot \Delta t$ (M. Δt et v. Δt désignant les parties principales de la moyenne et de la variance conditionnée), un cas intéressant est celui où M et v sont respectivement du premier et du deuxième degré en x (comme dans un problème de génétique que j'ai traité par cette méthode, avec $v = v \cdot x(1-x)$ et $M = -k(x - \xi)$, x étant la fréquence d'un gène mendélien) l'équation aux dérivées partielles pour F est alors du deuxième ordre, mais les propriétés de la transformation de Laplace montrent que la densité de probabilité f(x, t) vérifie aussi une équation du deuxième ordre : $F(s, t) = \int e^{sx} f(x, t) dx$ est l'image de Laplace de l'originale f, donc, la dérivation par rapport à s est l'image de la multiplication par x, et la multiplication par s est l'image de la dérivation par rapport à x : dans ce cas l'équation de Bartlett pour la fonction caractéristique équivaut à l'équation de Kolmogoroff pour la densité de probabilité (dans le cas particulier que j'ai indiqué, l'équation de Bartlett est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -ks \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \xi F \right) + \frac{v}{2} s^2 \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right);$$

et l'équation de Kolmogoroff s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial x} (k(x - \xi)f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v x(1 - x)f)$$

La deuxième équation peut se résoudre par séries hypergéométriques ou polynômes de Gegenbauer. L'étude des singularités aux bornes a été faite par Feller et Goldberg mais on peut aussi, à partir de la première équation, calculer les moments par résolution d'équations différentielles ordinaires.

d) Revenons au mouvement brownien, l'équation (3) ainsi que l'équation associée (pour la distribution, non absolument continue) par la transformation de Laplace, seraient toutes deux des équations aux dérivées partielles d'ordre infini. Mais la méthode des moments convient très bien.

On a en effet, d'après (2) et (3) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \sum_i \mu_i e^{s_i p_i v_i} F[(1 - p_i)s, t] - \sum_i \mu_i F(s, t)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{dM_r}{dt} \frac{s^r}{r!} = \sum_i \mu_i \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(s p_i v_i)^q}{q!} \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} M_r \frac{(1 - p_i)^r s^r}{r!} \right) - \sum_i \mu_i \sum_{r=0}^{\infty} M_r \frac{s^r}{r!}$$

L'identification des termes pour lesquels $r = 1, 2, \dots$, conduit à des équations différentielles qui permettent de déterminer, par récurrence, les moments successifs. Ce sont des fonctions de t qui, quand $t \rightarrow +\infty$, tendent vers des limites caractérisant la loi de probabilité "stationnaire" de la vitesse de la particule. On trouve aisément, pour limite de la moyenne $M_1(t)$ de cette vitesse :

$$M_1 = \frac{\sum_i \mu_i p_i v_i}{\sum_i \mu_i p_i}$$

(si les coefficients p_i étaient les mêmes pour toutes les molécules heurtantes, on aurait là une moyenne pondérée par les probabilités de rencontre - des vitesses des molécules heurtantes).

Mais la vitesse à chaque instant t de la particule heurtée pourra, bien entendu, être très différente de sa moyenne M_1 . L'ordre de grandeur de l'écart aléatoire sera donné par l'écart quadratique moyen, racine carrée de la variance qui est, dans l'état stationnaire : $\sigma^2 = M_2 - (M_1)^2$ (M_2 désignant la limite du deuxième moment $M_2(t)$ quand

$t \rightarrow +\infty$. On trouve :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i \mu_i p_i^2 (v_i - M_1)^2}{\sum_i \mu_i p_i (2 - p_i)}$$

(qui diffère numériquement de la variance de la vitesse des molécules heurtantes, même dans le cas où les coefficients p_i sont les mêmes pour toutes).

Une fois que l'on a caractérisé la distribution de la vitesse de la particule l'on peut, par une intégrale stochastique, en déduire l'évolution au cours du temps de la distribution de la position. Mais il est tout indiqué de généraliser le problème et d'introduire, dans l'étude de la distribution de la vitesse X , la position (définie par Y) de la particule. Cela revient à étudier, au cours du temps, la distribution conjointe de X et Y (autrement dit, la distribution du "point aléatoire" que représente la particule dans l'espace des phases).

Cette étude peut naturellement être faite à différents points de vue, correspondant à des schémas différents. Je ne parlerai pas du schéma de Ornstein et Uhlenbeck, qui a été étudié par Doob. Je me bornerai à signaler que :

1°) On peut supposer que les circonstances des chocs, c'est-à-dire les μ_i , les p_i ou les v_i , dépendent de la position de la particule heurtée. Pour certaines lois simples de dépendance, l'étude numérique pourrait être faite, et étendue à plusieurs dimensions, ce qui fournirait quelques schémas stochastiques simples de la turbulence dans la "couche limite" comprise entre deux masses (solides ou fluides) de vitesses différentes.

2°) On peut aussi traiter le cas où la variation de la vitesse X de la particule pendant l'intervalle de temps Δt est due non seulement aux molécules heurtantes, mais aussi à un champ de forces dans lequel est placée la particule, champs de force qui se traduit par l'addition, à l'expression déjà écrite de ΔX , d'un deuxième terme traduisant l'impulsion $P \cdot \Delta t$ produite par ce champ de forces dans l'intervalle Δt . Nous nous bornerons au cas particulier de l'"oscillateur brownien" (dont la première étude remonte à Yule qui avait posé le problème du "pendule bombardé au hasard par des particules") et qui a fait l'objet de récents travaux de Moyal et d'Edwards.

La force P est alors une attraction proportionnelle à l'abscisse donc de la forme $-a^2 Y$, et le système régissant la vitesse et la position, c'est-à-dire, les fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$, est de la forme :

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta X(t) = -\omega Y(t) \Delta t + \sum_i \mu_i p_i [v_i - X(t)] \Delta t + o(\Delta t) + \eta_1(t, \Delta t) \\ \Delta Y(t) = X(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$\eta_1(t, \Delta t)$ étant une fonction aléatoire dont la moyenne conditionnée, (quand $X(t)$ et $Y(t)$ sont connus) est nulle, mais dont la variance conditionnée doit, en vertu de l'hypothèse faite sur les chocs, dépendre de la valeur déjà acquise par $X(t)$ (alors que Moyal et Edwards, comme leurs prédécesseurs, admettent que la loi conditionnée de $\eta_1(t, \Delta t)$ est indépendante de ce qui précède, c'est-à-dire, si l'on s'en tient au deuxième ordre, admet une variance constante). Nous devons prendre pour variance conditionnée de $\eta_1(t, \Delta t)$: $w_{11} \cdot \Delta t = \sum_i \mu_i \alpha_i^2 \cdot \Delta t$ (qui dépend, de façon quadratique, de $X(t)$).

Or c'est là un cas particulier du problème général des "processus de Markoff à moyennes linéaires", qui consiste à étudier le "vecteur aléatoire" défini (dans le cas de deux dimensions, cas qui d'ailleurs se généralise sans difficulté) par :

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta X(t) = A_1(t) + l_{11} X(t) \Delta t + l_{12} Y(t) \Delta t + \eta_1 \\ \Delta Y(t) = A_2(t) + l_{21} X(t) \Delta t + l_{22} Y(t) \Delta t + \eta_2 \end{cases}$$

(A_1 et A_2 fonctions certaines de t).

Les η ayant des moyennes conditionnées nulles et des covariances conditionnées $\mathcal{M}_c(\eta_i, \eta_j) = w_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ qui peuvent dépendre de $X(t)$ et de $Y(t)$ (processus de Markoff), et même des valeurs antérieures (processus non markovien).

Ce système permet d'étudier les variances a priori de X et Y en fonction de t , et leur évolution quand $t \rightarrow +\infty$. Il faut évidemment calculer d'abord leurs moyennes a priori, \bar{X} et \bar{Y} , qui sont données par le "système déterministe" déduit de (5) en remplaçant η_1 et η_2 par leurs moyennes a priori nulles. Ce système fournit :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{X}}{dt} = A_1(t) + l_{11} \bar{X}(t) + l_{12} \bar{Y}(t) \\ \frac{d\bar{Y}}{dt} = A_2(t) + l_{21} \bar{X}(t) + l_{22} \bar{Y}(t) \end{cases}$$

Quand A_1 et A_2 sont des constantes, ce système fournit pour \bar{X} et \bar{Y} , quand $t \rightarrow +\infty$, des limites bien déterminées à condition que le système

homogène associé soit amorti. Or c'est le cas quand les coefficients ont les valeurs numériques fournies par (4) puisqu'il s'agit alors du système déterministe bien connu régissant le "pendule en milieu résistant" (la résistance du milieu étant ici ramenée aux chocs moléculaires). La limite est alors, pour la vitesse : $\bar{X} = 0$, et pour la position $\bar{Y} = \frac{\sum_i \mu_i P_i V_i}{\omega^2}$. La vitesse de tendance vers ces limites est d'ail-

leurs caractérisée par les valeurs propres du système homogène associé à (6), valeurs qui sont les racines de :

$$\rho^2 + \left(\sum_i \mu_i p_i \right) \rho + \omega^2 = 0$$

Pour revenir aux variances (et covariances) a priori, $v_{ij}(t)$, il suffit de retrancher (5) et (6), de former les carrés et les produits, de prendre les moyennes conditionnées pour $X(t)$ et $Y(t)$ fixés - ce qui fait apparaître les w_j - puis de prendre les moyennes a priori; dans le problème des mouvements browniens, comme w_{11} - seule covariance conditionnée non nulle - ne dépend de $X(t)$ que de façon quadratique, w_{11} ne dépend que de $X_i(t)$ et de $v_{11}(t)$, ce qui permet d'écrire un système différentiel linéaire pour les variances (et covariances) a priori.

On peut montrer que ce système différentiel a encore des valeurs propres de parties réelles négatives et fournit pour limites quand $t \rightarrow +\infty$ des variances et covariances a priori (en posant $\lambda = \frac{1}{4} \sum_i \mu_i p_i (2 - p_i)$ les valeurs suivantes :

$$v_{11} = \frac{\sum_i \mu_i P_i v_i^2}{4\lambda}, \quad v_{12} = 0, \quad v_{22} = \frac{\sum_i \mu_i P_i v_i^2}{4\lambda \omega^2}$$

qui définissent le régime aléatoire stationnaire du pendule.

On peut également étudier les "covariances décalées" ("lag correlations"), qui sont les moyennes a priori des quantités $X(t) X(t')$, ($t \geq t'$), $X(t) Y(t')$, etc., si on les appelle $v_{ij}(t, t')$, on trouve aisément

que : $\frac{\partial v_{ij}(t, t')}{\partial t} = \sum_k l_{ik} v_{kj}(t, t')$. Leur loi de variation avec t est donc

fournie par les solutions du système homogène associé à (6); elles sont amorties et tendent donc vers zéro dans les mêmes conditions - elles sont exponentielles dans les mêmes conditions, avec mêmes pseudo-périodes et mêmes coefficients d'amortissement. Donc, pour tout système de Markoff à moyennes linéaires et à coefficients constants (même si les covariances conditionnées ne sont pas constantes) les formules de Walker-Moyal subsistent.

