



HAL
open science

La projection a long terme de Verdoorn

P. Thionet

► **To cite this version:**

P. Thionet. La projection a long terme de Verdoorn : Un modèle économétrique. Annales de l'ISUP, 1959, VIII (3), pp.233-246. hal-04094473

HAL Id: hal-04094473

<https://hal.science/hal-04094473>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN MODÈLE ÉCONOMÉTRIQUE

LA PROJECTION A LONG TERME DE VERDOORN

P. THIONET

1/- M. Verdoorn a dit dans un article assez récent d'Econometrica (1) comment le Bureau Central de Planification de La Haye s'y était pris pour effectuer une projection à long terme du revenu national des Pays-Bas ; cette projection s'étend de 1950 à 1970 ; mais les derniers résultats des calculs n'ont été publiés qu'en 1955 de sorte qu'il s'agit plutôt d'une projection à 15 ans qu'à 20 ans de distance. La méthode de Verdoorn semble avoir été décrite dans un travail en hollandais publié dès 1952. Le "modèle de Verdoorn" a fait l'objet en 1958-59 de discussions dans des réunions internationales.

On discutera ici exclusivement l'article paru dans Econometrica, lequel doit représenter l'aspect le plus élaboré de conceptions susceptibles d'une évolution notable. Il ne s'agit manifestement pas d'une oeuvre mûrie dans l'abstrait mais d'un travail qui s'est imposé par les besoins de la planification et qui ne se soucie guère d'esthétique mathématique.

2/- Son point de départ présente de sérieuses ressemblances avec les conceptions "globales" de nombreux économistes (français ou non) : on se donne comme but de déterminer le revenu national global en 1970.

Là-dessus se greffe bien une opération "Input-Output" ; c'est-à-dire que, l'économie étant supposée ventilée (disons) en onze branches (2) on calcule les taux d'expansion (1970/1950) auxquels chacune de ces

(1) P. J. Verdoorn - Complementarity and longrange projections Econometrica Oct. 1956, p. 429 à 450.

(2) Métaux, Chimie, Textiles et habillement, Alimentation, Services Publics, Mines, Bâtiment et Travaux Publics, Autres industries, Agriculture, Transports, Autres services.

branches arrive ; mais ce n'est pas du tout le Tableau d'échanges industriels qui a permis de dire que ces taux sont atteints en 1970, plutôt disons qu'en 1980.

3/- Nous allons donc étudier un modèle très global ; mais ce n'est pas en fait un vice : les Pays-Bas ne sont pas du tout en mesure de vivre en quasi autarcie (1).

Dès lors il est secondaire de se donner ou non des objectifs de consommation de chaque type de produits en 1970. L'essentiel est de produire des articles exportables ; et ce n'est justement pas là qu'on peut raffiner beaucoup le modèle.

Bref la planification ne demande pas du tout à être traitée par les mêmes moyens aux Pays-Bas, en France ou en U. R. S. S.

4/- Entrons plus avant dans l'étude du modèle (2). Pour Tinbergen, les équations du 1er degré étaient susceptibles de remplacer en première approximation à peu près toute autre équation, mais ce qui est bon pour des problèmes de statique ne vaut plus lorsqu'on étudie des évolutions portant sur 20 ans.

Ainsi Verdoorn a conservé partout les fonctions puissances et les exponentielles sans les "linéariser". Mais bien des relations (les identités comptables surtout) restent des relations linéaires ; ces deux types de relations combinés ne peuvent rien donner de simple.

En particulier et comme une sorte de seconde approximation, les courbes d'équation mal connue sont remplacées partout par des courbes à élasticité constante. Or la plupart du temps, on devra ajouter ou retrancher entre elles ces fonctions à exposants disparates.

(1) Voici l'importance relative de la production et des importations dans les Pays-Bas et en France.

(Vers 1952-1955)	Production	Importations non agricoles
	(Milliards de dollars)	
Pays-Bas	3,1	1,55
France	12,4	1,8

(2) Celui-ci est reproduit en annexe.

Il n'est donc pas surprenant que le modèle de Verdoorn, basé sur 17 relations très simples (beaucoup trop simples, même) entre 19 variables aboutisse à des équations résolventes (après élimination des variables intermédiaires) d'aspect peu engageant.

Analysons à présent les 3 parties du modèle : Capital, Travail, Balance extérieure.

5/- Le Capital : Sa loi de formation.

La partie du modèle concernant le Capital est assez subtile.

- une fraction déterminée du revenu national constitue l'épargne (dont une partie ad libitum peut être exportée suivant les besoins en devises ; le reste est investi).

- une fraction constante $(1 - \omega)$ de la dépréciation de l'équipement existant (20 % dans l'application numérique du modèle) vient s'ajouter à l'équipement neuf (qu'on appelle équipement "net") et représente le matériel amorti mais encore capable de servir.

Mais la seconde de ces fractions serait une vraie constante, alors que la première serait une variable instrument entre les mains des pouvoirs publics (on l'intitule à cet effet : propension à épargner).

Pour mieux comprendre le modèle du Capital nous allons imaginer que le pays vit en économie fermée et regarder ce que cela implique.

Le modèle comporte les deux concepts de Produit National Brut (PNB) v et de Revenu National y , qui diffèrent par une quantité appelée la Dépréciation (1) :

$$y = v - d$$

On écrit donc :

$$\text{Investissements nets : } i = \alpha y$$

$$\text{Investissements de Remplacement : } i' = \omega d; \quad d - i' = (1 - \omega)d$$

Si k est le stock de capital et \dot{k} la dérivée de k par rapport au temps, on écrit :

(1) "Depreciation" en anglais.

Formation d'équipements :

$$\begin{aligned}\dot{k} &= i + d - i' \\ &= \alpha(v - d) + d(1 - \omega)\end{aligned}$$

ou :

$$\dot{k} - \alpha v = (1 - \omega - \alpha) d$$

Ici il faut marquer un temps d'arrêt.

Avec le modèle Keynesien "naïf", où la dépréciation et les remplacements sont supposés identiques l'un à l'autre, on écrit couramment :

$$\dot{k} - \alpha v = 0$$

Verdoorn remplace au 2ème membre zéro par un terme non identiquement nul, mais qui en fait est petit.

La valeur numérique du paramètre ω finalement retenue par Verdoorn est 0,80, donc $1 - \omega = 0,20$. Ainsi $(1 - \omega - \alpha)$ est assez petit, car la propension à épargner α est assez voisine de 20 %.

Par rapport au modèle naïf, le modèle de Verdoorn apporte un certain freinage à la constitution d'équipements lorsque α devient trop fort supérieur à $(1 - \omega)$ et au contraire pousse à accroître le stock d'équipements lorsque α est trop faible, inférieur à $(1 - \omega)$.

6/- La demande d'équipements.

Tout modèle oppose la demande à l'offre ; et ce qu'on vient d'écrire est l'équation de l'offre. La demande d'équipements est imprimée par l'expansion du P.N.B. ; le phénomène physique est celui des goulots d'étranglement ; mais c'est la psychose de l'entrepreneur qui détermine les commandes d'équipements neufs, et il n'est pas absurde d'assimiler celui-ci à un consommateur d'équipements, et de supposer une certaine permanence à l'élasticité de la demande d'équipement ; soit χ cette élasticité qu'on choisit d'ailleurs ici égale à 80 %.

Si le P.N.B. est en train d'augmenter disons de 5 % l'an, le stock d'équipements tendra à augmenter de 4 % l'an.

(Ce qui surprend, c'est que la production puisse toujours physiquement augmenter ainsi de 5 %).

Il nous manque une équation : celle qui fixe l'importance des dépréciations. Là encore on admet qu'une loi psychologique nous condamne à une élasticité constante, et on prend cette fois l'élasticité (ν) égale à 120 % (par rapport au stock de capital).

On observera que l'élasticité des dépréciations (d) par rapport au P.N.B. est de ce fait :

$$1.20 \times 0,8 = 0.96 \text{ ou } 96 \%$$

$$\text{pratiquement..... } 100 \%$$

7/- L'équation différentielle.

Il est clair que cet ensemble de relations implique des conséquences mathématiques. En éliminant les d et k, il reste une équation différentielle en v de la forme :

$$\dot{v} = A v^n + B v^{n'}, \quad (V)$$

On trouve effectivement :

$$\begin{cases} d = d_0^* k^v \\ k = K v \end{cases} \begin{cases} A = \alpha / Kx \\ B = (1 - \alpha - \omega) d_0^* K^v / Kx \\ n = 2 - x \\ n' = x^v - x + 1 \end{cases}$$

Cette équation n'est pas en général élémentaire. Il est facile d'en faire une intégration approchée.

Pour cela remarquons qu'on aurait $n = n'$ pour $x^v = 1$; ce qui serait le cas avec :

$$x = 0,8 \text{ et } v = 1,25$$

Il nous a paru intéressant de savoir ce qui se passerait si l'on faisait :

$$v = 1,25 \text{ au lieu de } v = 1,20$$

dans le modèle de Verdoorn, sans rien changer au reste. Il vient :

$$v = (A + B) v^n \quad \left[\begin{array}{l} \text{avec } n = 2 - 0.80 = 1.20 \\ \text{donc } 1 - n < 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où :} \quad v_0^{1-n} - v^{1-n} = (A + B) (n - 1) t$$

Le P.N.B. devient infini au bout d'un temps fini T, donné par l'équation :

$$v_0^{1-n} = (A + B) (n - 1) T$$

Afin de nous assurer que T est très supérieur à 20 ou 30 ans, faisons (1) (avec Verdoorn) :

$$v_0 = 1; n - 1 = 0,2; K = 5; K^v = 7,477.$$

Essayons : $\alpha = 20\%$; il vient :

$$A = 0,05; B = 0; A + B = 0,05$$

d'où : $T = (0,05 \times 0,2)^{-1} = \boxed{100 \text{ ans}}$

Essayons : $\alpha = 8\%$; il vient :

$$A = 0,0200; B = 0,0029; A + B = 0,0229$$

d'où : $T = (0,023 \times 0,2)^{-1} = \boxed{220 \text{ ans}}$ environ

Concluons que le modèle ne serait plus valable à l'échelle séculaire.

L'allure des courbes trouvées est caractérisée par leur asymptote verticale.

Le produit national brut a une croissance plus rapide que la fonction exponentielle ; son taux de croissance annuel n'est pas fixe mais croissant.

Recherche des solutions à taux de croissance fixe.

L'équation (V) a une solution exponentielle si (et seulement si), en posant $v = \exp(wt)$:

a) Les exposants de \dot{v} , v^n et $v^{n'}$ coïncident, d'où $w = wn = wn'$

où : $w = w(2 - x) = w[1 + x(v - 1)]$

où : $\boxed{v - x = 1}$

b) En outre les coefficients des deux membres sont égaux, ce qui fait (avec $x = 1$) :

$$w = A + B$$

En prenant $d_0^* = 1, w = \frac{\alpha}{K} + 1 - \alpha - \omega$, avec $K = 5, (1) \dots$ il vient :

(1) Valeurs numériques empruntées à Verdoorn lui-même.

$$v = \exp(1 - \omega - 0,8\alpha)t$$

Nous nous étonnerons que le taux d'expansion de l'économie puisse être $(1 - \omega - 0,8\alpha)$, c'est-à-dire être d'autant plus faible que la propension à épargner est grande.

Rappelons le modèle naïf (avec $1 - \omega - \alpha = 0$)

$$\dot{k} - \alpha v = 0$$

pour lequel on aurait bien : $v = v_0 \exp wt$; $k = K \exp wt$; donc :

$$w = \frac{v_0 \alpha}{K}$$

avec : $K = 5$; $v_0 = 1$; $\alpha = 20\%$; $w = 4\%$.

Lorsqu'on n'a plus :

$$0 = 1 - \omega - \alpha$$

le terme $\lambda = 1 - \omega - \alpha$ n'est pas négligeable à côté de α/K .

Par ex.

$$\alpha = 18\% ; \quad \lambda = 2\% ; \quad \frac{\alpha}{K} = 3,6\% ; \quad w = 5,6\%$$

$$\alpha = 22\% ; \quad \lambda = 2\% ; \quad \frac{\alpha}{K} = 4,4\% ; \quad w = 2,4\%$$

$$\alpha = 25\% ; \quad \lambda = 2\% ; \quad \frac{\alpha}{K} = 5,0\% ; \quad w = 0\%$$

L'économie serait stagnante $\alpha = 25\%$ (parce que l'excès d'épargne entraînerait une dépréciation trop forte). A l'opposé, pour $\alpha = 0$, on aurait $w = 1 - \omega = 20\%$ (en l'absence de toute épargne).

On voit à quels paradoxes on aboutit.

8/- Observations importantes.

Le Modèle de Verdoorn comprend (on l'a dit) 3 éléments : Capital, Travail, Devises. On vient de voir comment à chaque valeur de α (propension à épargner) le premier fait correspondre une équation différentielle définissant la loi de croissance du produit national brut ; on a même une idée de la forme des courbes représentant v en fonction de

t en économie fermée : On a vu qu'elles n'étaient pas exponentielles, ayant une asymptote verticale et croissant plus vite qu'une exponentielle. Il est donc exclu que l'économie ait un taux de croissance uniforme (même à la limite au bout d'un temps assez long). Ceci paraît d'ailleurs naturel ; car nous savons combien sont irréalistes les modèles économiques (du genre de celui de Von Neumann) où chaque secteur a le même taux d'expansion que l'ensemble (lequel taux est également le taux d'intérêt). Les taux d'expansion de chaque secteur diffèrent entre eux et varieront dans le temps ; leur agrégat n'a nul besoin d'une croissance uniforme.

Cependant on va, avec la partie du modèle concernant le Travail, trouver de nouvelles conditions liant le temps, le Produit National Brut (v) et le Revenu National (y), ceci pour un taux d'émigration donné.

En fin de compte, les pouvoirs publics sont censés agir sur 2 variables instruments : (α) propension à épargner et (φ) taux d'émigration ; et s'il n'était pas procédé constamment à l'ajustement de l'un des instruments sur l'autre, il n'y aurait aucune raison pour que la valeur de (v) (calculée plus haut) soit identique (à tout instant) à la valeur de (v) qui va résulter des ressources en main d'oeuvre. La solution de l'équation différentielle donnée plus haut ne serait donc l'image des faits qu'autant qu'on ferait émigrer chaque année juste assez de hollandais pour maintenir constante la propension à épargner. (1).

9/- Le Modèle et le Travail.

L'offre de travail : (à population constante).

On suppose que l'offre de travail (en heures) et le revenu moyen par tête (revenu national divisé par l'effectif de la population) sont liés par une loi à élasticité constante ψ : élasticité prise égale à $-0,25$.

Cette offre est par ailleurs proportionnelle à la population N , dont les mouvements de longue durée sont symbolisés par une variation exponentielle du temps. :

- taux d'accroissement naturel π (1,2 % par an) ;
- moins : taux d'émigration φ (variable-instrument).

La demande de travail.

On suppose que la demande (bien entendu égale à l'offre) est liée

(1) Il est facile d'explicitier $v(t)$ pour φ constant si on le désire.

au P.N.B. (v) par une autre loi à élasticité constante ($0,275 = \rho$).

Remarques.

1/- Le travail et le capital, nos deux facteurs de production, sont supposés rigoureusement complémentaires. Aucune substitution du capital au travail n'est prévue. Ainsi l'expansion économique dans un pays à population constante serait bloquée dès le plein emploi atteint.

2/- Verdoorn admet (avec réticence) que dans certains cas, on doit introduire dans le modèle le phénomène : accroissement de la productivité, c'est-à-dire : progrès technique. Il conçoit celui-ci sous forme d'une exponentielle du temps corrigeant la loi de Demande de Travail. On manque d'applications numériques.

10/- Le Modèle et la Balance extérieure : Les variables.

Les 19 variables (15 endogènes et 4 instruments) liées par 17 équations, laissent deux degrés de liberté. Séparée du monde extérieur, l'économie aurait un degré de liberté, représenté par l'instrument α (propension à épargner) - et par l'instrument φ (taux d'émigration nette), entre qui existe une relation (du moment que l'économie est en équilibre).

Quand on réintroduit le Monde Extérieur dans le modèle, le gouvernement dispose de 2 autres instruments, qui sont désignés par γ et σ :

γ symbolise la politique d'exportations, c'est le taux de variation à long terme du rapport p/p'' des prix à l'exportation réels et des prix à l'exportation "compétitifs".

σ symbolise au contraire la politique d'importations, c'est le taux de variation à long terme de la demande d'importations.

En pratique Verdoorn a étudié des valeurs de σ nulles ou négatives (- 4 %) et au contraire des valeurs de γ de part et d'autre de 0, pour rechercher la politique optimale (voir § 12) et a d'ailleurs trouvé comme optimum pratiquement $\gamma = 0$.

A propos de cette même balance extérieure interviennent encore 3 variables exogènes (la quatrième étant l'accroissement démographique naturel de 1.2 % par an, mentionné plus haut).

a) Taux d'accroissement de la demande autonome importée :
 $\beta = 0,039$.

Pour les Pays-Bas, (vu leur faible superficie et leurs ressources

minérales réduites) l'expansion économique implique un développement permanent des importations.

b) Indice des prix à l'importation. $p'' = 1$ (à toute époque) :

Il s'agit manifestement d'une convention commode.

c) Taux de variation du ratio p''/p' : $\delta = -0.0025$

Les prix compétitifs à l'exportation p'' sont rapportés aux prix à l'importation p' . Il est admis qu'à long terme le prix des produits industriels (exportés) tend à baisser par rapport au prix des matières premières (importées).

11/- Le Modèle et la Balance extérieure : Les équations.

Sur les 17 équations du modèle, nous en comptons 7 dans cette partie. La demande d'importations est supposée obéir à une loi à élasticités partielles constantes : par rapport aux exportations et par rapport au P.N.B. Les exportations sont (de leur côté) élastiques par rapport au prix relatif (p/p'') ; mais on leur a appliqué cette fois une formule d'élasticité "à la Tinbergen", où :

$$1 + \varepsilon \left(\frac{p}{p''} - 1 \right) \text{ remplace } \left(\frac{p}{p''} \right)^\varepsilon \quad (\text{avec } \varepsilon = -2)$$

D'ailleurs les indices des prix des exportations ordinaires p et compétitives p'' ne seront jamais dans un rapport très supérieur à 1, ce qui justifie l'approximation faite.

Dans cette partie du modèle on ne compte pas moins de 5 fonctions exponentielles du temps. Des 5 taux : 2 sont des instruments et 2 des variables exogènes (déjà citées) ; le 5ème taux λ est le taux de décroissance du rapport q , valeur des importations sur valeur des exportations ; il est choisi de manière à ramener en 20 ans ce rapport q de la valeur initiale 1,07 à une valeur tenue pour raisonnable (et qui n'est pas précisée) ; λ est ce qui est appelé une variable-objectif ("target").

Lorsqu'on considère une économie réelle (non isolée du monde) cette partie du modèle conduit [pour le P.N.B. v] à une expression explicite du temps, combinaison d'exponentielles assez simple, que nous avons facilement calculée numériquement.

$$v = (3 - 2e^{\gamma t})^{0.83} \cdot e^{tB/0.89}$$

L'instrument γ symbolise la politique d'exportations à long terme.

Le terme $B = 0.0264 + \gamma - \sigma + \lambda$ représente la résultante de 2 instruments γ et σ , d'un objectif λ , et d'élasticités structurelles dont les valeurs supposées ont permis de calculer 0.0264 ; γ et σ sont négatives ou positifs, λ est négatif ; tous 3 sont nécessairement petits. Ainsi nous n'osons trop affirmer que B sera encore positif ; à coup sur il sera très petit.

a) Cas de γ négatif :

Des 2 facteurs composant v , le premier est nécessairement croissant : à supposer B nul, v tendra vers la limite $3^{0.83} = 2,5$ (sachant v égal à 1) lorsque le temps t deviendra infini.

Si B est positif, v sera croissant et tendra (exponentiellement) vers l'infini.

Si B est négatif, v cessera un jour de croître et prendra le chemin de tendre vers zéro ; tel serait le résultat d'une politique d'austérité trop rigoureuse, due aux difficultés de la balance en devises.

De toute façon, même si B est positif, ces fonctions $v(t)$ croissent beaucoup moins vite que celles trouvées pour le modèle en économie fermée (§ 7).

b) Cas de γ nul :

Si B était négatif, v serait constamment et irrémédiablement décroissant. Il est plus raisonnable d'admettre B positif et v croissant (exponentielle à faible exposant).

c) Cas de γ positif :

Pour la même raison on admettra que B est positif ; le P.N.B. v croît d'abord mais finira par décroître (et devrait même devenir négatif par la suite si le modèle avait encore un sens).

Là encore le contraste avec l'allure des courbes du § 7 est frappant. Ceci ne signifie pas que l'autarcie soit recommandable pour les Pays-Bas ; car il ne serait pas réaliste de supposer à ce pays des ressources naturelles illimitées de toutes les matières premières.

On arrive plutôt à concevoir la vraie trajectoire de $v(t)$ comme une suite d'arcs de courbe empruntés aux 2 systèmes de courbes : un arc très rapidement croissant correspondant à un déficit en devises alternant avec un arc stagnant correspondant à un effort du côté de la balance des comptes, vu qu'il est difficile d'agir simultanément et correctement sur ces 2 sortes de leviers de commande.

12/- Le modèle et La notion de croissance optimale.

Donnant à la variable-instrument σ diverses valeurs, Verdoorn a procédé (pour une gamme de valeurs de γ) au calcul en 1970 du Revenu National par tête ; le graphique des résultats montre qu'il existe une valeur de γ qui maximise ce Revenu. On peut considérer que chaque couple $\sigma(\gamma)$ ainsi obtenu représente une politique optimale (1).

Ce calcul numérique a été fait pour divers jeux d'hypothèses sur les exportations autonomes en 1970 ; c'est-à-dire qu'au lieu de se cantonner à la variable exogène $\beta = 0.039$ (voir 10, a) on a essayé une gamme de valeurs de β entre 0.032 et 0.046.

CONCLUSION

L'énorme mérite du modèle de Verdoorn, c'est de mettre en lumière la totalité des hypothèses que comporte la projection ; il est honnête d'explicitier tout, jusqu'aux formules mathématiques inclusivement, non seulement pour autrui mais bien pour soi-même. Malheureusement le résultat n'est pas très élégant ni très clair.

Puisse la présente note avoir aidé à faire connaître le modèle de Verdoorn, les modèles économiques et les problèmes de projection à long terme.

(1) Cet "optimum" coïncide heureusement dans le présent modèle avec le minimum d'émigration de hollandais. C'est certainement l'aspect le plus délicat du modèle.

ANNEXE

MODÈLE DE VERDOORN

Equations linéaires	(1)	$v = c + i + d + b - m$	$\left\{ \begin{array}{l} m : \text{importations} \\ b : \text{exportations} \\ c : \text{consommations} \end{array} \right.$
	(2)	$y = c + i + bp - m$	
	(5)	$i' = \omega d$	
	(7)	$i = \alpha y - b'$	
	(12)	$m = qb \, p/p'$	
	(13)	$b' = (1 - q) bp$	
Equation différentielle	(4)	$k + i' = i + d$	
Equations à élasticité constante	(3)	$k = K v^x$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{parmi les variables,} \\ a_1 \, b_1 \, m_1 \\ \text{ne sont pas comptés} \end{array} \right.$
	(6)	$d = d_0^* k^v$	
	(8)	$a = v^p$	
	(9.1)	$a_1 = a_0^* (y/N)^\psi$	
	(11.1)	$m_1 = m_0 b^\eta v^{\mu - \eta}$	
idem linéarisée	(15.1)	$b_1 = b_0 \left\{ 1 + \omega \left(\frac{p}{p''} - 1 \right) \right\}$	
Croissances exponentielles	(9.2)	$a = a_1 \exp(\pi - \varphi)t$	$\left. \begin{array}{l} (9.1) \text{ et } (9.2) \\ (11.1) \text{ et } (11.2) \\ (15.1) \text{ et } (15.2) \\ \text{comptent pour} \\ 3 \text{ équations} \\ \text{seulement} \end{array} \right\}$
	(10)	$N = \exp(\pi - \varphi)t$	
	(11.2)	$m = m_1 \exp \sigma t$	
	(14)	$q = q_0 \exp \lambda t$	
	(15.2)	$b = b_1 \exp \beta t$	
	(16)	$p = p'' \exp \gamma t$	
	(17)	$p'' = p' \exp \delta t$	

Résultantes de Verdoorn

- (I) $y = v - d - b(1 - p)$
- (Capital) (II) $\frac{v}{v} = \frac{1}{xk} \{ \alpha y + (1 - \omega) d_0^* k^v - b' \}$
- (Travail) (III) $v = v_0 y^{\psi/\rho} \exp \tau(\pi - \varphi)(1 - \psi)/\rho$
- (Balance extérieure) (IV) $v^{\mu-\eta} = [1 + \varepsilon(e^{\gamma t} - 1)]^{(\mu-\eta)} \exp t[\beta(1 - \eta) + \gamma - \sigma + \delta + \lambda]$
(avec $a_0^* = v_0^\rho$)

