



HAL
open science

Quelques remarques sur l'estimation des variations saisonnères

Claude Fourgeaud, Robert Féron

► **To cite this version:**

Claude Fourgeaud, Robert Féron. Quelques remarques sur l'estimation des variations saisonnières. Annales de l'ISUP, 1952, 1 (3), pp.21-25. hal-04094466

HAL Id: hal-04094466

<https://hal.science/hal-04094466>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR L'ESTIMATION DES VARIATIONS SAISONNIERES

Par Claude FOURGEAUD et Robert FERON

I. Introduction et Sommaire.

Soit une suite d'observations temporelles $x(t)$

$t = 1, 2 \dots n$ que l'on sait a priori être représentables par la somme d'une fonction discontinue de période T , d'une tendance linéaire at , et d'une perturbation aléatoire ξ_t :

$$X(t) = y(t) + at + \xi_t \quad \text{où} \quad E(\xi_t) = 0, \quad E(\xi_t \xi_{t'}) = \sigma^2 \delta_{tt'}$$

Il n'est fait aucune autre hypothèse sur la distribution des ξ .

On peut représenter la série obtenue par un tableau à double entrée appelé table de Buys-Ballot :

$$\begin{array}{|cc|l} x(1) & x(T) & l1 \\ & x[(i-1)T + j] & li \\ x[(S-1)T + 1] & x(ST) & ls \\ \hline c_1 & c_j & c_T \end{array}$$

ce qui donne une représentation de la série sous la forme :

$$x_{ij} = x[(i-1)T + j] = y_j + a[(i-1)T + j] + \xi_{ij}$$

Les coefficients saisonniers y_j et la pente a peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés, et l'on sait que ce procédé est équivalent à celui de filtrer la série observée à l'aide de la table de Buys-Ballot.

Soient :

\hat{a} et \hat{y}_j les estimations de ces paramètres.

Nous proposons :

- 1°) d'en rechercher la variance
- 2°) d'étudier l'effet d'un groupement des observations par exemple, dans le cas où l'on considère des bilans mensuels au lieu de bilans hebdomadaires.
- 3°) de chiffrer la perte d'information due au fait que plusieurs observations sont absentes. Cette circonstance se rencontre fréquemment dans les séries économiques.

Les résultats qui vont être énoncés n'ont d'autre utilité ni ambition que celle de mettre en garde les utilisateurs éventuels contre la valeur universelle de certains procédés d'estimation et de préciser dans quels cas ces procédés donnent des

résultats satisfaisants.

1°) Table de Buys-Ballot complète à S lignes et T colonnes.

$$\hat{a} = \frac{12}{T^3 S(S^2 - 1)} \sum_i (i - \frac{S+1}{2}) l_i$$

$$\hat{y}_j = c_j - \hat{a} (j + \frac{S-1}{2} T)$$

où $l_i = \frac{1}{T} \sum_j x_{ij}$

$$c_j = \frac{1}{S} \sum_i x_{ij}$$

Ces estimations sont des estimations "sans biais" dont les variances sont:

$$\sigma^2 \hat{a} = \frac{12}{T^3 S(S^2 - 1)} \sigma^2$$

$$\sigma^2 \hat{y}_j = \frac{\sigma^2}{S} + \frac{12}{T^3 S(S^2 - 1)} (j + \frac{S-1}{2} T)^2$$

Exemple numérique.

Remarquons tout d'abord que la variance de \hat{y}_j n'est pas indépendante de j. Nous prendrons comme exemples le cas le plus favorable où j = 1 et le cas le plus défavorable j = T

exemple : T = 52 S = 5

$$\sigma_{\hat{a}} = 0,2666 \cdot 10^{-4} \sigma$$

$$\sigma_{\hat{y}_1} = 0,447222 \sigma$$

$$\sigma_{\hat{y}_T} = 0,447235 \sigma$$

les coefficients saisonniers étant assez imprécis, on peut se demander combien d'années il faudrait pour les observer avec une précision égale 0,1 σ: il faudrait sensiblement 100 ans; pour avoir 0,01 σ il faudrait 10.000 ans.

2°) Effet d'un groupement des observations.

On peut se demander si le fait d'effectuer des groupements (par exemple des bilans mensuels au lieu d'hebdomadaires) permet de dégager la notion de saisonnalité avec plus de précision.

Soit, d'une façon générale avec T = m p

$$X' (1) = \sum_1^p X_i$$

$$X' (2) = \sum_{p+1}^{2p} X_i$$

soit avec les notations précédentes :

$$X'_{ik} = y'_k + A \left[(i-1)m + k \right] + \xi'_{ik}$$

avec : $\sigma^2 = p \sigma^2_{\hat{a}}$
 ξ'_{ik}

et $A = a \cdot p^2$

$$\sigma^2_{\hat{A}} = p^4 \sigma^2_{\hat{a}}$$

$$\sigma^2_{\hat{y}'_k} = p \frac{\sigma^2}{S} + p^2 \sigma^2_{\hat{A}} \left(k + \frac{S-1}{2} m \right)^2$$

On peut chiffrer l'influence de l'effet de groupement au moyen du coefficient :

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_1^T \sigma^2_{\hat{y}'_j} - \sum_1^m \sigma^2_{\hat{y}'_k} \\ &= m p \sigma^2_{\hat{a}} \left[m^2 p^2 (1-p) \frac{3S^2 + 1}{12} + m p (1-p^2) \frac{S}{2} + \frac{1}{6} (1-p^3) \right] \end{aligned}$$

δ étant négatif, le fait d'effectuer des groupements ne permet pas de déterminer le facteur saisonnier avec une précision accrue.

3°) Cas où des observations successives sont absentes.

Ce cas est particulièrement important dans l'étude des séries économiques qui sont perturbées par des éléments accidentels (grèves, etc...). Nous examinerons d'abord le cas où une seule observation x_{rk} manque et généraliserons ensuite les résultats au cas de p observations :

a) Une observation manquante $x_{rk} = m$

La méthode des moindres carrés conduit à adopter pour estimation de la valeur manquante m précisément l'expression :

$$m = \hat{y}'_k + \hat{a} \left[(r-1)T + k \right]$$

et pour les coefficients saisonniers y_j et la pente a

$$\hat{y}'_j = c_j - \hat{a} \left[j + \frac{S-1}{2} T \right] \quad \text{pour } j \neq k$$

$$\hat{y}'_k = \frac{1}{S-1} \sum_{i \neq r} X_{ik} - \hat{a} \left[\left(\frac{S}{2} - \frac{r-1}{S-1} \right) T + k \right]$$

$$\hat{a} = \frac{1}{K_1 - \left[r - \frac{S+1}{2} \right]^2 \frac{S}{S-1}} \sum_i \left[i - \frac{S+1}{2} \right] l'_i$$

où $l'_i = \frac{1}{T} \sum_j x_{ij}$ pour $i \neq r$

$l'_r = \frac{1}{T} \left[\sum_{j \neq k} x_{rj} + \frac{1}{S-1} \sum_{i=r} x_{ik} \right]$

et où : $K_1 = \frac{ST(S^2 - 1)}{12}$

La variance des estimations précédentes est :

$\sigma_{\hat{y}_j}^2 = \frac{\sigma^2}{S} + \left[j + \frac{S-1}{2} T \right]^2 \sigma_{\hat{a}}^2$

$\sigma_{\hat{y}_k}^2 = \frac{\sigma^2}{S-1} + \left[k + \left(\frac{S}{2} - \frac{r-1}{S-1} \right) T \right]^2 \sigma_{\hat{a}}^2$

$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{H_1^2} \left[\frac{K_1}{T^2} - \frac{1}{T^2} \left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{S-1} - \frac{1}{(S-1)^2} \right) \right]$

où $H_1 = K_1 - \left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2 \frac{S}{S-1}$

ou en posant :

On remarque que $\frac{1}{T^2 K_1}$ est la variance de \hat{a} lorsqu'il ne manque pas d'observations.

b) Généralisation.

Si les observations $x_{r,k}, x_{r,k+1} \dots x_{r,k+p-1}$ manquent,

alors :

$\hat{y}_j = c_j - \hat{a} \left(j + \frac{S-1}{2} T \right)$ si $j < k$ ou $j > k + p - 1$

$\hat{y}_j = \frac{1}{S-1} \sum x_{ij} - \hat{a} \left[j + \left(\frac{S}{2} - \frac{r-1}{S-1} \right) T \right]$ si $k < j \leq k + p - 1$

$\hat{a} = \frac{1}{K_1 - p \frac{S}{S-1} \left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2} \sum_i \left(i - \frac{S+1}{2} \right) l'_i$

où l'_i a la définition du paragraphe précédent. Les variances sont :

$\sigma_{\hat{y}_j}^2 = \frac{\sigma^2}{S} + \left(j + \frac{S-1}{2} T \right)^2 \sigma_{\hat{a}}^2$ pour $j < k$ ou $j > k + p - 1$

$\sigma_{\hat{y}_j}^2 = \frac{\sigma^2}{S-1} + \left[j + \left(\frac{S}{2} - \frac{r-1}{S-1} \right) T \right]^2 \sigma_{\hat{a}}^2$ pour $k \leq j \leq k + p - 1$

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma^2}{H_2^2} \left[\frac{K_1}{T^2} - \frac{p}{T^2} \left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{S-1} - \frac{1}{(S-1)^2} \right) \right]$$

où $H_2 = K_1 - p \left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2 \frac{S}{S-1}$

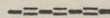
On peut faire une approximation analogue à la précédente en posant toujours :

$$\left(r - \frac{S+1}{2} \right)^2 \frac{S}{S-1} \frac{1}{K_1} = \xi$$

on a :

$$\sigma_{\hat{a}}^2 \approx \frac{1}{K_1 T^2} \left[1 + p \xi \left(1 - \frac{1}{S} + \frac{1}{S(S-1)} \right) \right]$$

On voit donc que l'influence de p observations manquantes est proportionnel à p lui même - pour $p = 0$ on vérifie que $\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{K_1 T^2}$ variance de la pente initiale.



(1) Références G. Th. Guilbaud.- Etude statistique des oscillations économiques. Cahiers du séminaire d'Econométrie 1950 - Librairie de Médicis - Paris.

