



HAL
open science

Descendance d'un élément de population

Louis Henry

► **To cite this version:**

Louis Henry. Descendance d'un élément de population. Annales de l'ISUP, 1952, 1 (3), pp.17-21.
hal-04094457

HAL Id: hal-04094457

<https://hal.science/hal-04094457>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DESCENDANCE D'UN ELEMENT DE POPULATION

par Louis HENRY

Dans sa "Théorie analytique des associations biologiques", deuxième partie, A.J. LOTKA a étudié comment évolue une population soumise à des lois de fécondité et de mortalité par âge indépendantes du temps. Il a montré qu'à la limite la croissance de la population est exponentielle et que son taux d'accroissement ρ est la racine réelle de l'équation :

$$(I) \quad \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da = 1$$

dans laquelle $p(a)$ est le taux de survie féminin à l'âge a , $m(a)$ la probabilité pour une femme d'âge a de mettre au monde une fille entre a et $a + da$.

LOTKA a obtenu ce résultat en partant de l'équation intégrale

$$(2) \quad B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) m(a) da$$

où $B(t)$ désigne les naissances féminines à l'instant t .

Nous nous proposons ici de montrer comment on peut arriver au même résultat par une voie directe en étudiant la descendance d'un élément de population.

Désignons par B_0 les naissances féminines à l'instant initial; B_0 est l'effectif initial de l'élément de population dont nous allons étudier la descendance de génération en génération.

Appelons $f(a)$ la fonction $\frac{p(a) m(a)}{R}$

où R est le taux net de reproduction, on a :

$$(3) \quad R = \int_0^{\infty} p(a) m(a) da$$

La fonction $f(a)$ est la densité de probabilité de l'âge des mères à la naissance de leur fille; c'est aussi la densité de probabilité de la date de naissance des filles de l'élément de population B_0 , ou densité de probabilité de la date des naissances de la première génération.

La répartition des dates de naissance θ des descendances de la n ème génération s'obtient en remarquant que θ est la somme de n variables aléatoires de même loi, l'âge à la naissance de leurs filles des n mères successives.

Si on désigne par $f_n(\theta)$ la densité de probabilité des dates de naissance de la n ème génération, on a :

$$(4) \quad f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} [\varphi(t)]^n e^{-it\theta} dt$$

où $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique de $f(a)$.



En désignant alors par $B(\theta)$ le total des naissances féminines de toutes les générations à la date θ on peut écrire :

$$(5) \quad B(\theta) = \frac{B_0}{2\pi} \sum_{n_1}^{n_2} R^n \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} [\varphi(t)]^n e^{-it\theta} dt$$

dans laquelle n_1 et n_2 sont les générations extrêmes auxquelles appartiennent les filles nées à la date θ . En introduisant la deuxième fonction caractéristique de $f(a)$, $\psi(t)$ il vient,

$$(6) \quad B(\theta) = \frac{B_0}{2\pi} \sum_{n_1}^{n_2} R^n \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} [\varphi(t)]^n e^{-it\theta} dt$$

Introduisons la racine ρ réelle de l'équation (1), on a :

$$(1^{bis}) \quad \text{Log}_e R = -\psi(i\rho)$$

et l'on peut écrire :

$$(7) \quad B(\theta) = \frac{B_0 e^{\rho\theta}}{2\pi} \sum_{n_1}^{n_2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} e^{-i\theta(t-i\rho) + n[\psi(t) - \psi(i\rho)]} dt$$

D'après l'équation (1) on a en posant

$$(8) \quad h(a) = e^{-\rho a} p(a) m(a)$$

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} h(a) da = 1$$

$h(a)$ peut donc être considérée comme une densité de probabilité de l'âge a .

Sa deuxième fonction caractéristique $\psi_1(t_1)$ est telle que

$$(10) \quad e^{\psi_1(t_1)} = R \int_0^{\infty} e^{it_1 a - \rho a} f(a) da$$

$$= e^{-\psi(i\rho)} \int_0^{\infty} e^{i(t_1 + i\rho)a} f(a) da$$

$$= e^{-\psi(i\rho) + \psi(t_1 + i\rho)}$$

on en tire

$$(11) \quad e^{\psi(t) - \psi(i\rho)} = e^{\psi_1(t - i\rho)}$$

et l'on a à considérer l'intégrale

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} e^{-i\theta(t-i\rho) + n\psi_1(t - i\rho)} dt$$

ou en posant

$$(13) \quad z = t - i\rho$$

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T-i\rho}^{T-i\rho} e^{-i\theta z} e^{n\psi_1(z)} dz$$

c'est-à-dire l'intégrale le long d'une parallèle à l'axe des z réels de

$$e^{-i\theta z} [\psi_1(z)]^n$$

Mais la loi limite de la somme normée de n variables aléatoires de même loi est une loi de Laplace Gauss

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1 \left[\frac{z}{\sqrt{n}} \right]^n e^{-iz\sqrt{n}\mu} \quad \text{tend vers} \quad e^{-\frac{\mu_2 z^2}{2}}$$

Et en vertu du théorème sur les fonctions caractéristiques la loi limite de

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\mu \quad \text{sera} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\mu_2}}$$

μ_1 et μ_2 étant la moyenne et la variance de la distribution $h(a)$.

En d'autres termes, les naissances de la n ème génération sont distribuées suivant une loi de Gauss (pourvu que n soit suffisamment grand) dont la moyenne et la variance sont égales à n fois la moyenne et la variance de la distribution $h(a)$ [et non $f(a)$]

La formule - (6) peut donc s'écrire :

$$(16) \quad B(\theta) = B_0 e^{\rho\theta} \sum_{n1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{(\theta - n\mu_1)^2}{2n\mu_2}} = B_0 e^{\rho\theta} A$$

le facteur A se présente comme la somme des ordonnées, correspondant à une même abscisse, d'une famille, de courbes de Laplace-Gauss - fig.1 -

Mais on pourrait aussi calculer A en relevant les ordonnées de la courbe représentative de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{\mu_2}}$ aux points d'abscisse $x = \frac{n\mu_1 - \theta}{\sqrt{n\mu_2}}$

et en faisant la somme de ces ordonnées pondérées par les coefficients

$$\frac{1}{\sqrt{n\mu_2}}$$

Appelons n_0 le nombre entier le plus voisin de θ et posons

$$(17) \quad \theta = n_0\mu_1 + \varepsilon$$

Si nous appelons x_i et $x_i + 1$ les abscisses correspondant aux générations $n_0 + i$ et $n_0 + i + 1$ on a :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} x_i &= \frac{(n_0 + i)\mu_1 - n_0\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i)\mu_2}} = \frac{i\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i)\mu_2}} \\ x_{i+1} &= \frac{(n_0 + i + 1)\mu_1 - n_0\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i + 1)\mu_2}} = \frac{(i + 1)\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i + 1)\mu_2}} \end{aligned} \right.$$

La différence entre ces deux valeurs x_{i+1} et x_i est égale à :

$$(19) \quad \frac{(i+1)\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i + 1)\mu_2}} - \frac{i\mu_1 - \varepsilon}{\sqrt{(n_0 + i)\mu_2}}$$

qui si θ , donc n_0 , est grand peut s'écrire

$$(20) \quad \frac{\mu_1}{\sqrt{(n_0 + i)\mu_2}}$$

il en résulte que $\sum_{n_1}^{n_2} \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi n \mu_2}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}$

qui est égal à $\mu_1 A$

tend vers la surface comprise entre l'axe des x et la courbe de Laplace-Gauss, soit 1.

A tend donc $\frac{1}{\mu_1}$ quand n augmente indéfiniment, et nous avons à la limite

$$(21) \quad B(\theta) = \frac{B_1}{\mu_1} e^{\rho\theta}$$

La descendance d'un élément de population, à mortalité et fécondité par âge, indépendante du temps, suit, à la limite, une loi exponentielle; le taux d'accroissement est indépendant de l'effectif de l'élément initial.

Considérons maintenant une population féminine initiale quelconque que nous supposons soumise à partir de l'instant initial à des lois de mortalité et fécondité par âge indépendantes du temps.

Pour tout intervalle de temps compris entre l'instant initial et la date à laquelle les éléments les plus jeunes de la population initiale auront atteint l'âge limite de procréation, nous pouvons déterminer le nombre de filles (de la première génération) nées de cette population initiale. Ces filles constituent autant d'éléments de population auxquels s'applique l'analyse précédente.

Si $B_1(t) dt$ est l'effectif de l'élément né entre les dates t et t+dt on a en désignant par $B(\theta)$ l'ensemble des naissances à la date θ

$$(22) \quad B(\theta) = \frac{e^{\rho\theta}}{\mu_1} \int_0^{a_2} B_1(t) e^{-\rho t} dt$$

a_2 étant l'âge limite de procréation des femmes.

L'on retrouve ainsi le résultat principal obtenu par Lotka. A la limite, la descendance d'une population initiale quelconque soumise à des lois de mortalité et de fécondité par âge indépendantes du temps a une croissance exponentielle. Le taux d'accroissement et par conséquent, la composition par âge de la population limite stable, sont indépendants de la composition par âge de la population initiale.



