



Quelques propriétés caractéristiques de la loi de Laplace-Gauss

R. Féron, C. Fourgeaud

► To cite this version:

R. Féron, C. Fourgeaud. Quelques propriétés caractéristiques de la loi de Laplace-Gauss. Annales de l'ISUP, 1952, 1 (2), pp.44-49. hal-04094433

HAL Id: hal-04094433

<https://hal.science/hal-04094433>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES PROPRIETES CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS.

par R. FERON et C. FOURGEAUD

Soit un couple aléatoire $X Y$, de fonction de répartition $F(x,y)$. On se propose de rechercher l'ensemble des couples satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1°) X et Y sont mutuellement en corrélation dure - (par extension de la définition de Serge Bernstein, X et Y seront dits en corrélation dure si :

$$F_x(y) = \mathcal{F} [y - \gamma(x)]$$

où $F_x(Y)$ est la fonction de répartition de Y liée par x et $\gamma(x)$ la ligne de régression).

- 2°) les lignes de régression de X en y et de Y en x sont des droites.

Le problème a été étudié par Serge Bernstein en supposant l'existence de la densité de probabilité et des dérivées partielles des 4 premiers ordres.

Cette question est reprise ici dans sa généralité, l'outil mathématique employé étant la fonction caractéristique.

Soit $\varphi_x(v)$ la fonction caractéristique liée de Y par x :

$$\varphi_x(v) = \int e^{iv y} d F_x(y) \quad (1)$$

où $F_x(y)$ est la fonction de répartition liée.

On sait que :

$$\varphi(0,v) = \int \varphi_x(v) d F(x) \quad (2)$$

$$\varphi(u,v) = \int \varphi_x(v) e^{i u x} d F(x) \quad (3)$$

Soient $y = ax$ et $x = by$ les lignes de régression de Y en x et de X en y .

Les hypothèses 1°) et 2°) s'expriment par :

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_x(v) = e^{iaxv} \Phi_1(v) \\ \varphi_y(u) = e^{ibyu} \Phi_2(u) \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \Phi_1(v) \varphi(u + av, 0) \\ &= \Phi_2(u) \varphi(0, v + bu) \end{aligned}$$

avec :

$$\Phi_1(v) = \frac{\varphi(0, v)}{\varphi(v, 0)}$$

$$\Phi_2(u) = \frac{\varphi(u, 0)}{\varphi(0, bu)}$$

Rechercher les couples satisfaisant aux hypothèses précédentes revient à résoudre l'équation :

$$\varphi(u, v) = \frac{\varphi(u+av, 0) \varphi(0, v)}{\varphi(av, 0)} = \frac{\varphi(0, v+bu) \varphi(u, 0)}{\varphi(0, bu)} \quad (5)$$

Théorème auxiliaire . La fonction caractéristique $\varphi(u, v)$ ne peut s'annuler en aucun point du plan des u, v .

Démonstration.

Posons :

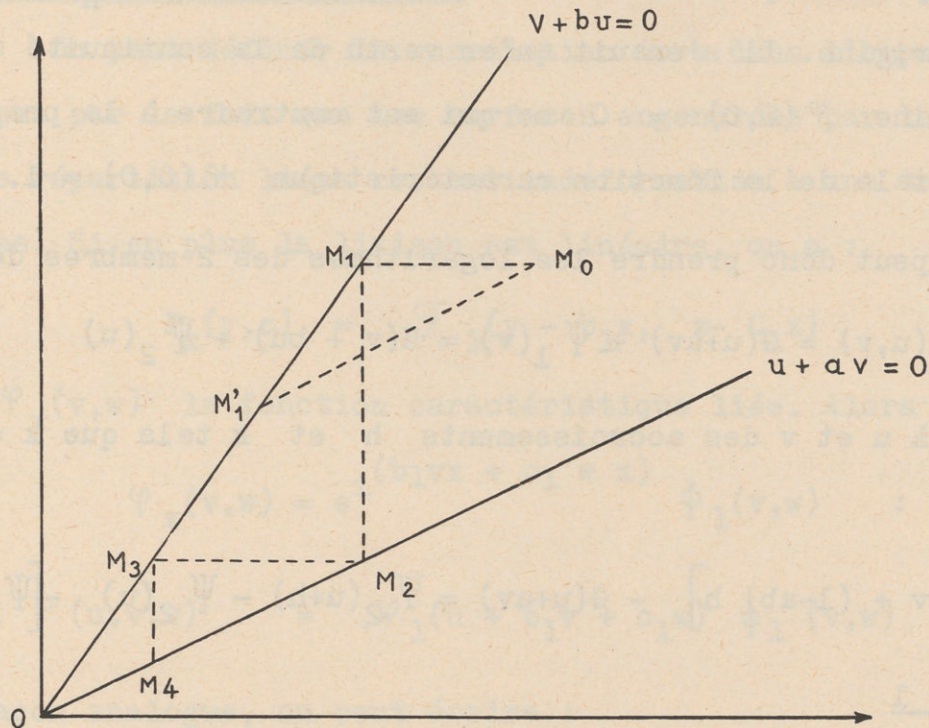
$$\varphi(u, 0) = g(u)$$

et :

$$\varphi(0, v) = h(v)$$

l'équation devient :

$$\varphi(u, v) = g(u + av) \Phi_1(v) = h(v + bu) \Phi_2(u) \quad (6)$$



Supposons que $\varphi(u, v)$ s'annule en un point $M_0(u_0, v_0)$.

D'après le premier membre de (6) $\varphi(u, v)$ doit s'annuler
soit sur la droite $u + av = u_0 + av_0$

soit sur la droite $v = v_0$

donc en un point M_1 (ou M'_1) de la droite $v + bu = 0$

Le second membre de l'équation -(6) montre que si $\varphi(u, v)$
s'annule, par exemple en $M_1(u_1, v_0)$, il est nécessaire, ou bien
qu'il soit nul sur la droite $v + bu = 0$

ou bien sur la droite $u = u_1$ donc en $M_2(u_1, v_2)$.

Le premier cas est impossible car il entraînerait la nullité
de $\varphi(u, v)$ à l'origine.

Le second cas peut donc être considéré comme seul possible.

Il entraîne le fait que $\varphi(u,v)$ est nul en M_3 . En renouvelant l'opération, on détermine une suite de points M_n qui tend vers l'origine. Il s'ensuit qu'en vertu de la continuité de $\varphi(u,v)$ à l'origine $\varphi(0,0) = 0$ ce qui est contraire à la propriété fondamentale de la fonction caractéristique $\varphi(0,0) = 1$.

On peut donc prendre les logarithmes des 2 membres de (6):

$$\Psi(u,v) = G(u+av) + \Psi_1(v) = H(v+bu) + \Psi_2(u) \quad (7)$$

Donnons à u et v des accroissements h et k tels que $k = -b h$ il vient :

$$G[u + av + (1-ab) h] - G(u+av) = \Psi_2(u+h) - \Psi_2(u) - [\Psi_1(v+k) - \Psi_1(v)]$$

si $ab \neq 1$

$$\Delta G(u + av) = \Delta \Psi_2(u) + \Delta \Psi_1(v)$$

donc ΔG est une fonction linéaire de $u + av$

et G est un polynôme du second degré.

Il s'ensuit que $\Psi(u,v)$ est un polynôme du second degré, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Th. La loi de Laplace-Gauss est la seule loi à corrélation dure dont les lignes de régression sont des droites.

Généralisation.

- Cas de l'espace à 3 dimensions.

On peut définir la corrélation dure dans l'espace à 3 dimensions par le fait que les surfaces engendrées par les fonctions de répartition liées restent indéformables à une translation près. Si en plus la liaison est linéaire, on a :

$$F_x(y, z) = F_1(y - b_1 x, z - c_1 x)$$

Soit $\varphi_x(v, w)$ la fonction caractéristique liée. Alors on a :

$$\varphi_x(v, w) = e^{i(b_1 v x + c_1 w x)} \phi_1(v, w)$$

$$\varphi(u, v, w) = \varphi_1(u + b_1 v + c_1 w) \phi_1(v, w)$$

D'une façon analogue, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_1(u + b_1 v + c_1 w) \phi(v, w) &= \varphi_2(a_2 u + v + c_2 w) \phi_2(u, w) \\ &= \varphi_3(a_3 u + b_3 v + w) \phi_3(u, v) \end{aligned} \quad (8)$$

1°) $\varphi(u, v, w)$ ne peut s'annuler en aucun point de l'espace.

En effet, si φ s'annulait en un point $M_0(u_0, v_0, w_0)$ le premier membre de (8) devrait s'annuler. φ serait nul, soit dans le plan $u + b_1 v + c_1 w = \text{Cte}$

soit sur la droite définie par :

$$v = v_0$$

$$w = w_0$$

donc en un point $M_1(v_1, w_1)$ du plan $u = 0$. Les deux dernières des équations (8) où l'on fait $u = 0$ prennent la forme (6) et on voit comme précédemment que φ ne peut s'annuler.

2°) Prenons les logarithmes de (8) :

$$\begin{aligned}\Psi_1(u+b_1v+c_1w) + \Psi_1(v,w) &= \Psi_2(a_2u + v + b_2w) + \Psi_2(u,w) \\ &= \Psi_3(a_3u + b_3v + w) + \Psi_3(u,v) \quad (9)\end{aligned}$$

Considérant w comme constant dans la première égalité, on obtient des expressions analogues à (7).

Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sont donc des polynômes du 2ème degré et $\Psi_1(v,w)$ un polynôme de la forme :

$$\Psi_1(v,w) = v^2 \lambda_1(w) + v \mu_1(w) + \nu_1(w) \quad (10)$$

De même :

$$\Psi_2(u,w) = u^2 \lambda_2(w) + u \mu_2(w) + \nu_2(w)$$

en portant ces valeurs dans la première des égalités (9), on trouve que :

$$\Psi_1(v,w) = P_2(v,w) + \nu'_1(w)$$

La comparaison entre la 1ère et la 3ème égalité (9) montre que $\nu'_1(w)$ est aussi un polynôme du second degré. Donc les 3 variables X, Y, Z obéissent à une loi de Laplace Gauss.