



**HAL**  
open science

# Sur un test d'indépendance des moyennes et des écarts types d'échantillons extraits d'une population normale

P. Choudhury

► **To cite this version:**

P. Choudhury. Sur un test d'indépendance des moyennes et des écarts types d'échantillons extraits d'une population normale. Annales de l'ISUP, 1952, 1 (2), pp.41-43. hal-04094429

**HAL Id: hal-04094429**

**<https://hal.science/hal-04094429>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR UN TEST D'INDEPENDANCE DES MOYENNES ET DES ECARTS TYPES  
D'ECHANTILLONS EXTRAITS D'UNE POPULATION NORMALE

par P. CHOUDHURY

----oOo----

Considérons k échantillons tirés au hasard de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  éléments pris dans une population normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma$ . Soit  $\bar{x}_r, s_r$  la moyenne et l'écart-type du  $r$  ième échantillon dont le nombre d'éléments est  $n_r$ .

Nous savons que  $\bar{x}_r, s_r$  seront distribués suivant la loi:

$$dF \propto e^{-\frac{n_r \bar{x}_r^2}{2\sigma^2}} d\bar{x}_r e^{-\frac{n_r s_r^2}{2\sigma^2}} s_r^{n_r-2} ds_r$$

D'où la fonction caractéristique d'une quantité telle que  $u_r = \frac{n_r \bar{x}_r s_r}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned} \Phi_r(t) &= \int e^{it \frac{n_r \bar{x}_r s_r}{\sigma^2}} dF \\ &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{it \frac{n_r \bar{x}_r s_r}{\sigma^2} - \frac{n_r \bar{x}_r^2}{2\sigma^2}} d\bar{x}_r e^{-\frac{n_r s_r^2}{2\sigma^2}} s_r^{n_r-2} ds_r \end{aligned}$$

En utilisant le fait que l'on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2+ibu} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Phi_r(t) &\propto \sigma \sqrt{\frac{2\pi}{n_r}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{n_r s_r^2}{2\sigma^2} (t^2+1)} s_r^{n_r-2} ds_r \\ &\propto \int_0^{+\infty} e^{-n s_r^2} s_r^{n_r-2} ds_r \quad \text{ou } M = \frac{n_r}{2\sigma^2} (1+t^2) \\ &\propto \frac{1}{(M) \frac{n_r-1}{2}} \end{aligned}$$

Nous devons donc avoir :

$$\phi_r(t) = \frac{C}{\left(\frac{n_r}{2\sigma^2}\right) \frac{n_r-1}{2}} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{n_r-1}{2}}}$$

où C est une constante

Comme  $\phi_r(0) = 1$  nous devons avoir :

$$\frac{C}{\left(\frac{n_r}{2\sigma^2}\right) \frac{n_r-1}{2}} = 1$$

et par conséquent

$$\phi_r(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{n_r-1}{2}}}$$

Donc la fonction caractéristique de la quantité :

$$Z = \sum_1^k \frac{n_r X_r \Delta_r}{\sigma^2} \quad \text{sera}$$

$$\phi_1 \phi_2 \dots \phi_k = \frac{1}{(1+t^2)^{\sum_1^k \frac{n_r-1}{2}}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{N-K}{2}}} \quad \text{ou } N = \sum_1^k n_r$$

La distribution de Z sera donnée par :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i z t}}{(1+t^2)^{\frac{N-K}{2}}} dt$$

qui est la fonction de distribution de Bessel :

$$\frac{z^{\frac{N-K-1}{2}}}{2^{\frac{N-K-1}{2}} \Gamma\left(\frac{N-K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} K_{\frac{N-K-1}{2}}(z)$$

du second ordre et d'argument imaginaire.

Si les paramètres de la population (moyenne et écart-type) parente sont connus (ou estimés dans le cas d'échantillons de grande dimension) la statistique Z fournit un test d'indépendance des moyennes et écart-types ce qui est un test suffisant de normalité de la population parente. La statistique Z est distri-

buée selon une fonction de Bessel et son espérance mathématique est nulle.

Référence :

- I Kendall - The advanced Theory of Statistics Vol. 1
- II K. Pearson - Biometrika 24 - 293