



HAL
open science

Sur le théorème de Levy-Cramer

M. D. Dugué

► **To cite this version:**

| M. D. Dugué. Sur le théorème de Levy-Cramer. Annales de l'ISUP, 1957, VI (3), pp.213-225. <hal-04093690>

HAL Id: hal-04093690

<https://hal.science/hal-04093690v1>

Submitted on 10 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

SUR LE THÉORÈME DE LEVY-CRAMER

par

M. D. DUGUÉ

(Faculté des Sciences de Paris - Ecole Polytechnique)

Il arrive parfois que l'énoncé d'un théorème soit donné par un mathématicien et sa démonstration par un autre. L'histoire mathématique comporte quelques exemples de ce genre dont un des plus récents est le théorème donné par M. Denjoy en 1904 et établi par M. Ahlfors en 1926. Ces résultats sont en général des faits mathématiques d'une grande profondeur et d'une grande difficulté. Ils sont la source d'autres recherches mathématiques. Tel est le cas du célèbre théorème de Lévy-Cramér que M. Paul Lévy avait donné comme très vraisemblable longtemps avant que M. Cramér l'établisse en 1936.

Il nous est agréable d'apporter en hommage à M. Paul Lévy les résultats qui suivent dont je précise que l'idée m'est venue à la suite d'une conversation de M. Lukacs me rapportant un exposé de M. Linnick à un Séminaire de l'Institut Indien de Statistique. Malgré des lettres envoyées à Léningrad pour connaître le point où en étaient les recherches de M. Linnick je n'ai pu obtenir de réponse. Une lettre de M. Lukacs m'a informé que M. Linnick comptait publier dans le n° 11 du Vestrik Leningradskogv Universitate un théorème établissant que si l'on a :

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n} = \varphi$$

φ étant la fonction caractéristique d'une variable normale, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant des nombres réels et positifs et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des fonctions caractéristiques, il en résultait nécessairement que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ étaient les fonctions caractéristiques de variables normales. M. Lukacs m'a en même temps communiqué la démonstration oralement donnée par M. Linnick qui ne paraît pas utiliser le préambule que je donne sur les fonctions absolument monotones et qui ne paraît pas pouvoir être étendue directement à la loi de Poisson. Je citerai dans le cours de ce mémoire les résultats qui appartiennent à M. Linnick en regrettant de ne pouvoir être plus précis sur ce point.

Le théorème de Lévy-Cramér est le suivant :

Si l'on a $e^{-\frac{z^2}{2}} = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ étant des fonctions caractéristiques il en résulte que $\varphi_1 = e^{-\sigma_1^2 \frac{z^2}{2} + im_1 z}$ et $\varphi_2 = e^{-\sigma_2^2 \frac{z^2}{2} - im_2 z}$ (σ_1, σ_2 et m étant réels).

Raikoff a ensuite donné le théorème suivant :

Si l'on a $e^{\lambda(e^{iz}-1)} = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ étant des fonctions caractéristiques il en résulte que :

$$\varphi_1 = e^{\lambda_1(e^{iz}-1) + im_1 z}, \varphi_2 = e^{\lambda_2(e^{iz}-1) - im_2 z} \quad (m \text{ réel ; } \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \text{ réels positifs}).$$

On voit aisément que ces deux théorèmes entraînent immédiatement les conséquences suivantes :

1° si $e^{-\frac{z^2}{2}} = \varphi_1^{q_1} \dots \varphi_n^{q_n}$ avec $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ entiers positifs, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ étant caractéristiques il en résulte encore que :

$$\varphi_k = e^{-\sigma_k^2 \frac{z^2}{2} + im_k z}$$

2° si $e^{\lambda(e^{iz}-1)} = \varphi_1^{p_1} \varphi_2^{p_2} \dots \varphi_n^{p_n}$, $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ étant entiers positifs et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ caractéristiques, il en résulte que :

$$\varphi_k = e^{\lambda_k(e^{iz}-1) + im_k z}$$

Le but de ce mémoire est d'étendre ces deux résultats au cas où les exposants sont des nombres positifs quelconques rationnels ou irrationnels. Je rappelle que celui qui concerne les variables de Laplace-Gauss est dû à M. Linnick avec une démonstration qui me paraît différente; je crois inédit celui qui concerne les variables de Poisson.

1 - UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS A DÉRIVÉES TOUTES POSITIVES

On appellera série de Taylor associée en 0 à la fonction f la série :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME I, 1 :

Si l'on a $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n} = g$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant réels et positifs, f_1, f_2, \dots, f_n étant des fonctions de x positives à l'origine, ayant à l'origine des dérivées de tout ordre positives ou nulles les séries de Taylor associées en 0 à f_1, f_2, \dots, f_n convergent au moins dans le cercle de convergence de la série associée à g .

On appellera F les fonctions analytiques définies par les séries de Taylor associées aux fonctions f , G la fonction analytique définie par la série associée à la fonction g et \mathcal{F} la fonction dont la série de Taylor a

pour coefficients les valeurs absolues des coefficients de celle de $\frac{G'}{G}$.

Puisque g n'est pas nulle en 1, on peut écrire :

$$\sum_i \alpha_i f_1' f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n = \frac{g'}{g} f_1 \dots f_n$$

Les dérivées en 0 de $\frac{g'}{g} f_1 \dots f_n$ sont inférieures en module aux dérivées en 0 de $\sum_i \alpha_i F_1 \dots F_n$. Les α_i étant tous positifs et les dérivées en 0 de $f_1 \dots f_n$ (qui sont celles de $F_1 \dots F_n$) étant toutes positives ou nulles il s'en suit que les dérivées en 0 de $f_1' f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n$ sont toutes inférieures ou égales à celles de $\frac{1}{\alpha_i} \sum_i \alpha_i F_1 \dots F_n$. Donc, on a pour tout i :

$$F_1' F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_n \leq \frac{1}{\alpha_i} \sum_i \alpha_i F_1 \dots F_n$$

le signe \leq signifiant comme d'habitude que la série écrite à droite majore la série écrite à gauche. On a donc :

$$\sum_i F_1' F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_n \leq \left[\sum_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_i \alpha_i \right] F_1 \dots F_n$$

Ou en posant $\sum_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_i \alpha_i = A$ et $F_1 \dots F_n = X$ $X' \leq AX$

A est par hypothèse une fonction analytique à coefficients tous positifs dont le cercle de convergence est celui de $\frac{G'}{G}$. Le rayon de ce cercle est le plus petit des deux modules suivants : module de la singularité de G le plus proche de l'origine, module du zéro de G le plus proche de l'origine.

Considérons l'équation différentielle :

$$Y' = A Y$$

et une intégrale Y_1 telle que $Y_1(0) > X(0) = f_1(0) \dots f_n(0)$.

On voit en calculant de proche en proche les coefficients de Y par identification que ces coefficients sont supérieurs à ceux de X (les coefficients de A sont tous positifs). Donc

$$X \leq Y_1$$

Comme $Y_1 = Y_1(0) e^{\int_0^x A du}$, Y_1 est holomorphe au moins dans le cercle de convergence de A et il en est de même de X .

D'autre part, $F_1 F_2 \dots F_n = X$. $F_1(0), \dots, F_n(0)$ et $X(0)$ sont différents de 0 par hypothèse. On pourra prendre toutes ces quantités égales à 1 et on en déduit très aisément que $F_i \leq X$ et par suite que F_i converge au moins dans le cercle de convergence de X , donc dans celui de A .

Montrons maintenant que le cercle de convergence de F_i est au moins celui de G (et non pas seulement celui de A , c'est-à-dire celui passant

par le zéro de G le plus proche de l'origine, si G a un zéro intérieur à son cercle de convergence, ce qui n'est pas exclu par ce que nous venons d'établir). Considérons la fonction analytique G ; supposons tout d'abord qu'elle n'a pas de zéro sur l'axe réel positif à l'intérieur de son cercle de convergence en 0. Soit R le rayon de convergence de G en 0. Dans un cercle de centre 0 et de rayon $R-\varepsilon$, il y a un nombre fini de 0 de G . Soit h la plus petite valeur absolue des parties imaginaires de ceux de ces zéros dont la partie réelle est positive. Par hypothèse on a $h > 0$ puisque G n'a pas de zéros sur l'axe réel positif. On a $F_1^{\alpha_1} \dots F_n^{\alpha_n} = G$. Partant de 0 on pourra prolonger analytiquement sur l'axe réel positif les fonctions F_i jusqu'en $R-\varepsilon$, puisqu'en un point quelconque de l'axe réel positif intérieur au cercle de convergence de F_i , F_i a toutes ses dérivées positives et que la démonstration précédente utilise uniquement le fait que les dérivées soient positives, le cercle de convergence de $\frac{G'}{G}$ autour de tout point de l'axe réel positif intérieur au cercle de convergence en 0, ayant au moins comme rayon h (à moins qu'il ne rencontre le cercle de convergence de G en 0). La fonction F_i est donc analytique de 0 à $R-\varepsilon$ sur l'axe réel positif, quel que petit que soit ε . Mais F_i a toutes ses dérivées positives à l'origine. Donc en vertu du théorème de Pringsheim la série de Taylor de F_i en 0 converge dans le cercle passant par la première singularité atteinte sur l'axe réel positif. Donc la série de Taylor de F_i en 0 converge au moins dans le cercle où G converge : ceci dans le cas où G n'a pas de zéro sur l'axe réel positif à l'intérieur de son cercle de convergence en 0. Montrons maintenant que G ne peut avoir de zéro positif à l'intérieur de son cercle de convergence en 0. En effet, appelons ρ le module du zéro de G situé sur l'axe réel positif à l'intérieur du cercle de convergence en 0, le plus voisin de 0. Ce que nous venons d'établir montre que F_i est quel que soit i analytique dans un cercle de centre 0 et de rayon ρ . Quand z tend vers ρ sur l'axe réel positif $F_i(z)$ étant non décroissant doit tendre vers une limite non nulle ($F_i(0) \neq 0$). Donc $F_1(z)^{\alpha_1} \dots F_n(z)^{\alpha_n}$ doit tendre vers une limite non nulle ce qui est incompatible avec le fait que le produit $G(z)$ doit tendre vers 0.

Le théorème I,1 est donc établi dans sa généralité.

Montrons le théorème suivant que nous utiliserons pour généraliser le résultat de Raikoff.

THÉORÈME I,2 :

Si l'on pose $f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n} = e^x$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant tous positifs et f_1, f_2, \dots, f_n à dérivées toutes positives ou nulles à l'origine la série de Taylor associée à f_i représente la fonction $e^{\lambda_i x + \mu_i}$ (λ_i étant positif). Dans ce cas g et G sont confondus.

e^x étant une fonction entière, d'après le théorème I,1 F_i sera une fonction entière. e^x n'ayant pas de zéros F_i ne devra pas non plus avoir de zéros. Donc F_i devra être de la forme : $\bar{c}\varphi_i(x)$, $\varphi_i(x)$ étant une fonction entière. Comme F_i est représentée par une série entière à coefficients tous positifs, $e^{\varphi_i(x)}$ est égale au maximum du module de F_i dans le cercle

de centre O et de rayon x. $\varphi_i(x)$ est donc une fonction non décroissante de la variable $x > 0$. Pour $x = 0$ on peut prendre tous les f_1, \dots, f_n (et par suite les F_1, \dots, F_n) égaux à 1, Donc $\varphi_i(0) = 0$ et $\varphi_i(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Comme $\sum \alpha_i \varphi_i(x) = x$ les α_i étant positifs il en résulte que

$$\alpha_i \varphi_i(x) \leq x.$$

$\varphi_i(x)$ étant le maximum sur le cercle de rayon x de la partie réelle de $\varphi_i(z)$ il résulte du théorème de Liouville-Hadamard que $\varphi_i(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1; ce qui établit le résultat.

2 - EXTENSION DE RÉSULTATS D'ARITHMÉTIQUE DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Dans le cas où l'on a à étudier des relations de la forme $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_n$ $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ étant caractéristiques on peut s'aider de la signification de cette équation. Le problème est plus compliqué dans le cas où l'on a: $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant simplement des nombres positifs). Pourtant à cause des résultats du paragraphe précédent beaucoup des résultats d'arithmétique des lois de probabilités restent valables. Montrons :

THÉORÈME II.1 :

Si l'on a: $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ étant des fonctions caractéristiques $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant des nombres positifs et si la variable aléatoire dont φ est fonction caractéristique a des moments d'ordre quelconque il en est de même des variables dont les fonctions caractéristiques sont les φ_i .

Ce résultat s'établit très simplement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des entiers (voir par exemple D. Dugué, Arithmétique des lois de probabilités (Mémorial des Sciences Mathématiques)). Il me paraît contenu dans l'exposé de Linnick avec une autre démonstration.

La démonstration du théorème II,1 sera fondée sur le résultat suivant:

Si $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique réelle, $\varphi^{(2p+2)}(t)$ existe si et seulement si :

$$(-1)^p \frac{\varphi^{(2p)}(0) - \varphi^{(2p)}(t)}{t^2}$$

est bornée quand t tend vers 0 ($\varphi^{(k)}$ signifiant dérivée Kième).

Pour nous ramener au cas de fonctions caractéristiques réelles nous multiplierons les deux membres de l'égalité :

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(t)]^{\alpha_n}$$

par ceux de l'égalité que l'on en déduit en changeant t en -t. D'où :

$$\varphi(t)\varphi(-t) = [\varphi_1(t)\varphi_1(-t)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(t)\varphi_n(-t)]^{\alpha_n}$$

Si donc la première égalité est vérifiée on en déduira en posant $|\varphi(t)|^2 = \Phi(t)$ qui est une fonction caractéristique réelle :

$$\Phi(t) = [\Phi_1(t)]^{\alpha_1} \dots [\Phi_n(t)]^{\alpha_n}$$

Si $\varphi(t)$ est indéfiniment dérivable il en sera de même de $\Phi(t)$ réelle. Si l'on établit que dans ce cas $\Phi_i(t)$ est indéfiniment dérivable on aura établi le théorème car :

Si $\varphi(t)\varphi(-t)$ est indéfiniment dérivable il en est de même de $\varphi(t)$. Pour la démonstration des deux théorèmes qui viennent d'être indiqués voir le *Mémorial des Sciences Mathématiques* déjà cité.

Nous sommes donc ramenés au cas où $\varphi(t)$ est réel (et symétrique) ainsi que φ_i . Montrons que si $\varphi(t)$ a une dérivée du second ordre il en est de même de φ_i . $\varphi_i(t)$ étant réel et inférieur à 1, on a :

$$\varphi(t) \leq \varphi_i^{\alpha_i}(t)$$

$$\text{Donc : } \frac{1 - \varphi(t)}{t^2} \geq \frac{1 - \varphi_i^{\alpha_i}(t)}{t^2} = \alpha_i \varphi_i^{\alpha_i-1}(\theta t) \frac{1 - \varphi_i(t)}{t^2}$$

avec $0 < \theta \leq 1$. D'après l'hypothèse $\frac{1 - \varphi(t)}{t^2}$ est bornée quand t tend vers 0. Il en résulte que $\frac{1 - \varphi_i(t)}{t^2}$ l'est aussi et par suite que $\varphi_i''(t)$ existe

Il s'agit maintenant de montrer que si φ_i a des dérivées jusqu'à l'ordre $2p$, si φ a une dérivée d'ordre $2p+2$ il en est de même de φ_i .

On a :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \alpha_1 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \dots + \alpha_n \frac{\varphi_n'}{\varphi_n}$$

Pour calculer la dérivée $2p$ ième nous considérons $\frac{\varphi'}{\varphi}$ comme le produit de φ_1' par $\frac{1}{\varphi_1}$ et nous dériverons $2p-1$ fois l'égalité précédente ce qui est possible puisque d'après nos hypothèses toutes les dérivées d'ordre $2p$ existent. On a :

$$\varphi^{(2p)} \frac{1}{\varphi} + C_{2p-1}^1 \varphi^{(2p-1)} \left(\frac{1}{\varphi}\right)' + \dots = \sum_i \alpha_i \left[\varphi_i^{(2p)} \frac{1}{\varphi_i} + C_{2p-1}^1 (\varphi_i)^{2p-1} \left(\frac{1}{\varphi_i}\right)' + \dots \right]$$

On aura :

$$\left[\varphi^{(2p)}(0) \frac{1}{\varphi}(0) - \varphi^{(2p)}(t) \frac{1}{\varphi}(t) \right] + C_{2p-1}^1 \left[\varphi^{(2p-1)}(0) \left(\frac{1}{\varphi}\right)'(0) - \varphi^{(2p-1)}(t) \left(\frac{1}{\varphi}\right)'(t) \right] + \dots = \sum_i \alpha_i \left[\varphi_i^{(2p)}(0) \frac{1}{\varphi_i}(0) - \varphi_i^{(2p)}(t) \frac{1}{\varphi_i}(t) \right] + C_{2p-1}^1 \left[\varphi_i^{(2p-1)}(0) \left(\frac{1}{\varphi_i}\right)'(0) - \varphi_i^{(2p-1)}(t) \left(\frac{1}{\varphi_i}\right)'(t) \right] + \dots$$

En multipliant les deux membres par $(-1)^p$ et en divisant par t^2 on voit d'après les hypothèses que le premier membre tend vers une limite quand t tend vers 0. En effet, le premier terme est égal à :

$$\frac{(-1)^p}{t^2} \left[\left(\varphi^{(2p)}(0) - \varphi^{(2p)}(t) \right) \frac{1}{\varphi}(0) + \left(\frac{1}{\varphi}(0) - \frac{1}{\varphi}(t) \right) \varphi^{(2p)}(t) \right]$$

Il tend vers une limite puisque $\varphi(t)$ a une dérivée d'ordre $(2p+2)$. Puisque $\varphi(t)$ est réel et symétrique ses dérivées à l'origine d'ordre impair

sont nulles ainsi que celles de $\frac{1}{\varphi}$. Le second terme sera donc :

$$(-1)^p C_{2p-1}^1 \frac{\varphi^{(2p-1)}(t)}{t} \frac{\left(\frac{1}{\varphi}\right)'(t)}{t}$$

Il tend vers une limite égale à $(-1)^p C_{2p-1}^1 \varphi^{(2p)}(0) \left(\frac{1}{\varphi}\right)''(0)$ et ainsi de suite ; tous les termes du premier membre tendent vers une limite. Dans le second membre les termes autres que le premier tendent tous vers une limite pour la même raison que pour le premier membre (nous supposons que les φ_i ont des dérivées jusqu'à l'ordre $2p$). Donc :

$$\frac{(-1)^p}{t^2} \sum_i a_i \left[\varphi_i^{(2p)}(0) \frac{1}{\varphi_i}(0) - \varphi_i^{(2p)}(t) \frac{1}{\varphi_i}(t) \right]$$

tend vers une limite quand t tend vers 0. Cette quantité est donc bornée au voisinage de $t=0$. Chacun des n termes de cette somme est positif. Donc, chaque terme de la somme est borné. Or, l'un d'eux peut s'écrire :

$$\frac{(-1)^p}{t^2} \left\{ \left[\varphi_i^{(2p)}(0) - \varphi_i^{(2p)}(t) \right] \frac{1}{\varphi_i}(0) + \left[\frac{1}{\varphi_i}(0) - \frac{1}{\varphi_i}(t) \right] \varphi_i^{(2p)}(t) \right\}$$

$\frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{\varphi_i}(0) - \frac{1}{\varphi_i}(t) \right]$ tend vers une limite quand t tend vers 0 puisque $\varphi_i''(0)$

existe. Donc : $\frac{(-1)^p}{t^2} (\varphi_i^{(2p)}(0) - \varphi_i^{(2p)}(t))$ est borné et par suite il existe une dérivée d'ordre $2p+2$ pour tous les indices i . Le théorème II, 1 est donc établi.

Montrons maintenant :

THEOREME II, 2 :

Si l'on a $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, positifs et $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ fonctions caractéristiques et φ analytique dans une bande à l'intérieur de laquelle est l'axe réel, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont analytiques au moins dans la bande d'analyticité de φ .

Rappelons une propriété importante des fonctions caractéristiques.

Elles coïncident avec la fonction analytique définie par la série de Taylor qui leur est associée à l'origine et leur domaine d'analyticité comprend la bande parallèle à l'axe réel qui contient le cercle de convergence ayant pour centre l'origine.

Ce théorème est donné par M. Paul Lévy, p. 41, dans son livre : "Théorie de l'addition des variables aléatoires".

La condition de l'énoncé : l'axe réel est intérieur à la bande d'analyticité de φ (autrement dit n'est pas frontière) me parait pouvoir être levée. Dans le cas où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont rationnels l'arithmétique des lois de probabilité (voir le Mémorial cité) montre que le théorème est encore vrai même si l'axe réel est frontière de la bande d'analyticité de φ . Il y a donc de fortes pr sompions pour qu'il en soit de même pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ réels rationnels ou irrationnels. La démonstration que je vais donner

impose toutefois la condition de l'énoncé du théorème II.2. Ce théorème suffira pour les démonstrations de ce mémoire.

Si φ est analytique donc indéfiniment dérivable, il résulte du théorème II, 1 que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont indéfiniment dérivables.

Nous commencerons par établir le théorème dans le cas où $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_n$ sont les fonctions caractéristiques de variables symétriques et par suite sont elles-mêmes symétriques et réelles [$\varphi(t) = \varphi(-t)$].

Dans ce cas $\varphi(t)$ a ses dérivées d'ordre impair nulle à l'origine et ses dérivées d'ordre pair alternativement positives et négatives $\varphi(\sqrt{-u})$ aura des dérivées à l'origine toutes positives; il en sera de même de $\varphi_i(\sqrt{-u})$.

D'après le théorème I.1 et du fait que les fonctions caractéristiques coïncident avec les fonctions analytiques associées à l'origine, il en résulte que le cercle de convergence de $\varphi_i(\sqrt{-u})$ a un rayon supérieur ou égal à celui de $\varphi(\sqrt{-u})$ et la bande d'analyticité de $\varphi_i(t)$ recouvre la bande d'analyticité de $\varphi(t)$.

Dans le cas où $\varphi(t)$ et $\varphi_i(t)$ ne sont pas symétriques, on considérera le produit $\varphi(t)\varphi(-t)$ égal à $[\varphi_1(t)\varphi_1(-t)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(t)\varphi_n(-t)]^{\alpha_n}$. On pourra appliquer le résultat que l'on vient d'obtenir sur les fonctions caractéristiques symétriques.

La bande d'analyticité de $\varphi(t)\varphi(-t)$ sera recouverte par la bande d'analyticité de $\varphi_i(t)\varphi_i(-t)$ par conséquent par la bande d'analyticité de $\varphi_i(t)$ d'après les résultats d'arithmétique des lois de probabilité.

La bande d'analyticité de $\varphi(t)\varphi(-t)$ est la bande symétrique par rapport à l'axe réel et dont la frontière passe par le point singulier de $\varphi(t)$ le plus rapproché de l'origine (d'après les résultats connus sur les fonctions caractéristiques, ce point est sur l'axe imaginaire pur).

Pour obtenir le théorème II.2 il suffit de remarquer que si $\varphi(t)$ est caractéristique la fonction $\frac{\varphi(t+iy)}{\varphi(iy)}$ est caractéristique, si iy est intérieur à la bande d'analyticité.

Car
$$\varphi(t+iy) = \int e^{i(t+iy)x} dF(x) = \int e^{itx} e^{-yx} dF(x)$$
 et $\int e^{-yx} dF(x)$ est convergente si iy est intérieur à la bande d'analyticité.

On pourra ainsi prolonger de proche en proche sur le segment de l'axe complexe intérieur à la bande d'analyticité. La relation $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$ sera toujours valable et la bande d'analyticité de $\varphi_i(t)$ recouvrira toujours la bande que l'on obtiendra pour la fonction φ . Finalement, la bande d'analyticité de $\varphi_i(t)$ recouvre la bande d'analyticité de $\varphi(t)$.

Mais le raisonnement suppose que l'on puisse prolonger φ à partir de l'origine ce qui impose que φ soit analytique à l'origine.

3 - APPLICATION AU CAS OU φ EST LAPLACIEN OU POISSONNIEN

Il est possible maintenant d'utiliser les résultats précédents pour établir les deux théorèmes extensions des théorèmes de Lévy-Cramér et de Raikoff annoncés au début de cet article.

THEOREME III.1

Si $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont caractéristiques, φ laplacien, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ réels positifs et si $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont laplaciens.

Ce résultat a été établi par Linnick par une autre méthode. Il était connu quand $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont entiers positifs. On pouvait facilement l'étendre au cas où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont rationnels. Le cas où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas tous rationnels présente plus de difficultés.

D'après le théorème II.2 puisque la bande d'analyticité de φ est l'ensemble du plan il en résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont holomorphes dans tout le plan donc entières. Comme φ n'a pas de 0, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des fonctions entières sans zéro et par suite $\varphi_j = e^{\psi_j}$, ψ_j étant une fonction entière. On pourra par l'addition de quantités certaines s'arranger pour que l'une des variables aléatoires dont $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont fonctions caractéristiques prenne avec des probabilités non nulles des valeurs positives et des valeurs négatives. Il en résulte que quand y augmente indéfiniment en valeur absolue $\psi_j(iy)$ tend vers $+\infty$. Par suite, en vertu des propriétés du maximum d'une fonction caractéristique (voir D. Dugué, Analyticité et convexité des fonctions caractéristiques, Annales de l'Institut Henri Poincaré 1951) on aura

- sur le cercle de centre O et de rayon R, pour tout R assez grand :

$$\Re \psi_i(x+iy) < m \Re \psi(x+iy) < \frac{R^2 \sigma^2 + \varepsilon}{\alpha_i} \quad (i \neq j)$$

(σ étant l'écart type de φ et ε arbitrairement petit positif). En vertu du théorème de Liouville-Hadamard il en résultera que $\psi_j(x+iy)$ est un polynôme de degré au plus égal à 2; ce qui établit le théorème III.1 :

On a de même :

THÉORÈME III.2 :

Si $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ étant caractéristiques, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ réels positifs, si φ est égal à e^{imz} (fonction caractéristique de la variable certainement égale à m) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont égales à $e^{im_1 z}, \dots, e^{im_n z}$.

Ce résultat s'obtient immédiatement en remarquant que $\psi_j(iy)$ est une fonction convexe de y et que dans ce cas $\sum \alpha_j \psi_j(iy)$ est une fonction linéaire. Il en résulte que chacun des termes de cette somme doit être linéaire.

Montrons le :

THÉORÈME III.3 :

Si le support de la probabilité de la variable dont φ est fonction caractéristique est l'ensemble des entiers positifs ou nuls et si $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$ réels positifs) le support de la variable dont φ est fonction caractéristique est contenu dans l'ensemble obtenu en faisant subir à l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls la translation h_j avec $\sum \alpha_j h_j = 0$, si la fonction caractéristique de φ contient l'axe réel à l'intérieur de son domaine d'analyticité.

Ce résultat s'obtient aisément si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont rationnels. C'est un cas particulier du fait que le support de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est la fermeture de la somme vectorielle des supports de chacune des deux variables.

Si une variable aléatoire est positive, plus généralement, est bornée inférieurement, sa fonction caractéristique sera analytique au moins dans le demi-plan $\Im z > 0$.

L'énoncé du théorème III.3 impose la condition que l'axe réel soit intérieur à ce domaine pour que l'on puisse appliquer le théorème II.2.

D'après le théorème $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ seront analytiques au moins dans le demi-plan $\Im z > 0$.

La démonstration est fondée sur l'étude du comportement des fonctions caractéristiques sur l'axe imaginaire pur ($\Im z > 0$).

1°) Si une variable aléatoire n'est pas bornée inférieurement, on a pour sa fonction caractéristique $h(iY)$ l'inégalité suivante :

$$h(iY) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Yx} dF(x) > e^{-Ym} F(m)$$

m négatif étant arbitrairement grand en valeur absolue et $Y > 0$.

2°) De même si une variable aléatoire est bornée inférieurement par M , on a

$$h(iY) = \int_M^{+\infty} e^{-Yx} dF(x) < e^{-YM} \quad \text{avec } Y > 0$$

D'après cela, on aura $\varphi(iY) < 1$ pour $Y > 0$ si φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à support positif.

3°) Enfin si M est la borne inférieure d'une variable aléatoire et si $F(M+0) = 0$ (c'est-à-dire si la borne inférieure de la variable aléatoire a une probabilité nulle), on aura :

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} h(iY) e^{+YM} = 0 \quad \text{En effet pour } Y > 0$$

$$h(iY) = \int_M^{+M+\varepsilon} e^{-Yx} dF(x) + \int_{+M+\varepsilon}^{+\infty} e^{-Yx} dF(x) < \int_M^{+M+\varepsilon} e^{-YM} dF(x) + \int_{+M+\varepsilon}^{+\infty} e^{-Y(M+\varepsilon)} dF(x)$$

Donc pour $Y > 0$ et quel que soit $\varepsilon > 0$

$$h(iY) < e^{-YM} F(+M+\varepsilon) + e^{-Y(M+\varepsilon)} \quad \text{et}$$

$e^{YM} h(iY) < F(M+\epsilon) + e^{-Y\epsilon}$; ϵ étant pris tel que $F(M+\epsilon)$ soit inférieur à $\frac{\eta}{2}$ ce qui est possible d'après l'hypothèse faite sur $F(x)$, on prendra Y assez grand pour que $e^{-Y\epsilon}$ soit inférieur à $\frac{\eta}{2}$, ce qui montre que l'on peut prendre Y assez grand pour que $e^{YM} h(iY)$ soit arbitrairement petit.

Ces trois propriétés vont permettre d'établir le théorème III.3.

Supposons qu'il y ait pour chaque variable X_i dont la fonction caractéristique est φ_i , une valeur h_i telle que $F_i(h_i) > 0$ avec $\sum \alpha_i h_i < 0$. On aura pour $Y > 0$ (à cause du 1°)

$$[\varphi_1(iY)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(iY)]^{\alpha_n} > e^{-(\sum \alpha_i h_i)Y} F_1(h_1)^{\alpha_1} \dots F_n(h_n)^{\alpha_n}$$

qui augmente indéfiniment quand Y tend vers $+\infty$ ce qui contredit le fait que $\varphi(iY) < 1$ pour $Y > 0$. Il est donc impossible que l'on ait $\sum \alpha_i h_i < 0$. Toutes les variables sont donc bornées inférieurement et l'on peut leur ajouter des quantités certaines telles que la borne inférieure de chacune d'elles soit nulle. On supposera maintenant que cette correction a été faite.

Après cette opération supposons que la variable X_i ait pour support l'ensemble $\mathfrak{E}_i^{(1)}$ des entiers $0, 1, \dots, n$, avec une répartition de la probabilité sur cet ensemble égale à $F_i^{(1)}(x)$ et un ensemble $\mathfrak{E}_i^{(2)}$ de valeurs non entières dont la répartition de probabilité sera égale à $F_i^{(2)}(x)$ avec : $F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x) = F_i(x)$. Si la borne inférieure de l'ensemble $\mathfrak{E}_i^{(2)}$ est une valeur entière, on pourra faire entrer la probabilité de cette valeur dans $F_i^{(1)}(x)$ ce qui fait que dans ce cas $F_i^{(2)}(x)$ est continue à droite en ce point. $F_i^{(2)}(M+0) = 0$ si M est une valeur entière. Ce point est important pour la suite. On a alors :

$$\varphi_i(iY) = p_0^{(i)} + p_1^{(i)} e^{-Y} + \dots + p_{n_i}^{(i)} e^{-n_i Y} + A_i(iY)$$

l'entier n_i étant tel que la borne inférieure de l'ensemble $\mathfrak{E}_i^{(2)}$ soit égale à $n_i + h_i$ ($0 \leq h_i < 1$). On aura donc :

$$e^{-Y(n_i+h_i)} > A_i(iY) > e^{-Y(n_i+h_i+\epsilon)} a_i(\epsilon) \text{ pour } Y > 0 \text{ et } \epsilon > 0 \text{ avec}$$

$a_i(\epsilon) > 0$. On prendra $h_i + \epsilon < 1$.

Il en résulte que

$$[\varphi_i(iY)]^{\alpha_i} = q_0^{(i)} + q_1^{(i)} e^{-Y} + \dots + q_{n_i}^{(i)} e^{-n_i Y} + B_i(iY) \quad (q_0^{(i)} > 0)$$

avec $\beta_i e^{-Y(n_i+h_i)} > B_i(iY) > e^{-Y(n_i+h_i+\epsilon)} b_i(\epsilon)$ avec β_i, ϵ et $b_i(\epsilon) > 0$ cette fois pour $Y > 0$ suffisamment grand.

Soit $n+h$ le plus petit des $n_i + h_i \dots$ On aura :

$$[\varphi_1(iY)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(iY)]^{\alpha_n} = k_0 + k_1 e^{-Y} + \dots + k_n e^{-nY} + C(iY)$$

avec $C e^{-Y(n+h)} > C(iY) > e^{-Y(n+h+\epsilon)} c(\epsilon)$ avec C, ϵ et $c(\epsilon) > 0$

pour Y suffisamment grand. A cause de la remarque faite tout à l'heure :

$$(F_i^{(2)}(M+0) = 0 \text{ si } M \text{ est entier})$$

on a si $h = 0$, $\lim_{Y \rightarrow +\infty} e^{Yn} C(iY) = 0$. C'est la conséquence immédiate du 3° de

tout à l'heure; car alors si $h_i = 0$, $\lim_{Y \rightarrow +\infty} e^{Yn_i} A_i(iY) = 0$

Le fait que $\varphi(iY) = [\varphi_1(iY)]^{\alpha_1} \dots [\varphi_n(iY)]^{\alpha_n}$ avec $\varphi(iY)$ fonction caractéristique d'une variable aléatoire à support de valeurs entières positives ou nulles n'est pas compatible avec ce résultat; car alors on a:

$$\varphi(iY) = P_0 + P_1 e^{-Y} + \dots + P_n e^{-nY} + \dots = k_0 + k_1 e^{-Y} + k_n e^{-nY} + C(iY)$$

En faisant tendre Y vers $+\infty$ on en déduit $P_0 = k_0$; en multipliant par e^Y après avoir retranché P_0 et k_0 des deux membres on en déduit en faisant tendre Y vers $+\infty$, $k_1 = P_1$, ... et ainsi de suite jusqu'à:

$$P_n e^{-nY} + \dots = k_n e^{-nY} + C(iY)$$

en multipliant encore les deux membres par e^{+nY} et en faisant tendre Y vers $+\infty$ comme $e^{nY} C(iY)$ tend vers 0 (que h soit positif ou nul) on a $P_n = k_n$ et par suite $P_{n+1} e^{-(n+1)Y} + \dots = C(iY)$; $C(iY) > e^{-Y(n+h+\varepsilon)} c(\varepsilon)$ pour Y suffisamment grand avec $h + \varepsilon < 1$ ce qui contredit cette égalité. Il est donc impossible que les ensembles $\mathcal{E}_i^{(2)}$ ne soient pas tous vides: ce qui établit le théorème III.3.

Donc, le support de chacune des variables X_i est contenu dans l'ensemble des entiers positifs ou nuls. En posant $e^{iz} = u$, on transforme les fonctions caractéristiques en fonctions génératrices et si $\varphi(z) = e^{\lambda(e^{iz}-1)}$ (variable de Poisson), on a:

$$e^{\lambda(u-1)} = f_1(u)^{\alpha_1} \dots f_n(u)^{\alpha_n}$$

f_1, \dots, f_n ayant leurs dérivées à l'origine toutes positives et coïncidant avec leur série de Taylor associée à l'origine. D'après le théorème I.2

on a: $f_i = e^{\lambda_i u + \mu_i}$ $\lambda_i > 0$. Comme $f_i(1) = 0$, $\mu_i = -\lambda_i$ et par suite:

THÉORÈME III.4:

Si $\varphi = e^{\lambda(e^{iz}-1)} = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ caractéristiques, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des fonctions caractéristiques de variables de Poisson ce qui généralise le théorème de Raikoff.

ANNEXE I

Rappelons quelques problèmes posés dans cet article ainsi que d'autres suggérés par les travaux de M. Paul Lévy.

I°) Le théorème II.2 est-il encore vrai si l'axe réel est frontière de la bande d'analyticité? On obtiendrait ainsi un théorème tauberien.

II°) Y a-t-il des fonctions caractéristiques de la forme $e^{A(t)}$, $A(t)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1? (un théorème de Marcinkiewicz-Dugué affirme cette impossibilité si $A(t)$ est un polynôme de degré supérieur à 2).

III°) Y a-t-il des fonctions caractéristiques entières ayant le maximum de valeurs asymptotiques égal au plus grand entier contenu dans $2\rho + 1$, ρ , étant l'ordre, d'après le théorème de Denjoy-Ahlfors).

IV°) Il serait intéressant d'étudier la structure de l'ensemble des fonctions $[\varphi(t)]^\alpha$. Le produit de deux telles fonctions n'appartient pas forcément à l'ensemble. Par exemple : $[\cos t]^\pi [\cos 2t]^{\sqrt{2}}$ n'est pas un φ^α . S'il en était ainsi il devrait exister un α tel que :

$[\cos t]^{\frac{\pi}{\alpha}} [\cos 2t]^{\frac{\sqrt{2}}{\alpha}}$ soit caractéristique.
 $[\cos t]^{\frac{\pi}{\alpha}}$ et $[\cos 2t]^{\frac{\sqrt{2}}{\alpha}}$ étant analytiques autour de l'origine il devrait y avoir analyticité dans une bande ce qui entraîne que $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ devraient tous deux être entiers, ce qui est impossible.

ANNEXE II

Les résultats présentés dans ce travail me paraissent des cas particuliers de l'énoncé un peu vague suivant :

Si dans un théorème, il est question d'une suite infinie de coefficients, on obtient en général un résultat intéressant en imposant à tous les coefficients d'être positifs.

Exemples :

I - THÉORÈME DE PRINGSHEIM : Une fonction analytique à coefficients tous positifs a sur son cercle de convergence un point singulier sur l'axe réel positif.

II - THÉORÈME DE VALIRON : Si une fonction entière d'ordre infini a tous ses coefficients positifs, elle a l'axe réel positif pour demi-droite de Julia.

III - THÉORÈME DE BERNSTEIN : Si une fonction indéfiniment dérivable a toutes ses dérivées positives sur un segment elle est analytique sur ce segment.

IV - THÉORÈME DE THOGER-BANG-BOREL : Si une fonction quasi analytique a toutes ses dérivées positives en un point elle est analytique.

V - THÉORÈME DE DUGUÉ : Si une fonction continue est limite de polynômes à coefficients tous positifs, la limite ne peut être qu'uniforme et la fonction analytique.

VI - THÉORÈME DE LEBESGUE : Si une fonction continue et symétrique a tous les coefficients de sa série de Fourier positifs, elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

VII - THÉORÈME DE DUGUÉ : Une fonction caractéristique est égale à la somme de sa série de Fourier.

III) Y a-t-il des fonctions caractéristiques entières ayant le maximum de valeurs asymptotiques égal au plus grand entier contenu dans $2p+1$, p étant l'ordre, d'après le théorème de Denjoy-Ahlfors).

IV) Il serait intéressant d'étudier la structure de l'ensemble des fonctions $[\cos t]^{\frac{1}{n}}$. Le produit de deux telles fonctions n'appartient pas forcément à l'ensemble. Par exemple: $[\cos t]^{\frac{1}{2}}$ $[\cos 2t]^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une $[\cos t]^{\frac{1}{n}}$. S'il en était ainsi il devrait exister un réel que :

soit caractéristique, $[\cos t]^{\frac{1}{n}}$ et $[\cos 2t]^{\frac{1}{n}}$ étant analytiques autour de l'origine il devrait avoir analyticités dans une bande ce qui entraîne que $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ devraient tous deux être entiers, ce qui est impossible.

ANNEXE II

Les résultats présentés dans ce travail me paraissent des cas particuliers de l'énoncé un peu vague suivant :

Si dans un théorème, il est question d'une suite infinie de coefficients, on obtient en général un résultat intéressant en imposant à tous les coefficients d'être positifs.

Exemples :

I - THÉORÈME DE FRIEDSHEIM : Une fonction analytique à coefficients tous positifs a son cercle de convergence un point singulier sur l'axe réel positif.

II - THÉORÈME DE VALIRON : Si une fonction entière d'ordre infini a tous ses coefficients positifs, elle a l'axe réel positif pour demi-droite de Julia.

III - THÉORÈME DE BERNSTEIN : Si une fonction indéfiniment dérivable a toutes ses dérivées positives sur un segment elle est analytique sur ce segment.

IV - THÉORÈME DE THOGER-BANG-BORÉL : Si une fonction quasi-analytique a toutes ses dérivées positives en un point elle est analytique.

V - THÉORÈME DE DUGUÉ : Si une fonction continue est limite de polynômes à coefficients tous positifs, la limite ne peut être qu'uniforme et la fonction analytique.

VI - THÉORÈME DE LEBESGUE : Si une fonction continue est somme triple à tous les coefficients de sa série de Fourier positive, elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

VII - THÉORÈME DE DUGUÉ : Une fonction caractéristique est égale à la somme de sa série de Fourier.