



HAL
open science

Sur la solution de l'équation parabolique normale aux coefficients holderiens qui est une probabilité conditionnelle de processus stochastique

Halina Milicer Gruzewska

► **To cite this version:**

Halina Milicer Gruzewska. Sur la solution de l'équation parabolique normale aux coefficients holderiens qui est une probabilité conditionnelle de processus stochastique. *Annales de l'ISUP*, 1960, IX (4), pp.377-390. hal-04092984

HAL Id: hal-04092984

<https://hal.science/hal-04092984v1>

Submitted on 9 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

**SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE NORMALE
AUX COEFFICIENTS HÖLDERIENS
QUI EST UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE
DE PROCESSUS STOCHASTIQUE**

PARTIE I

Halina MILICER GRUŻEWSKA

INTRODUCTION

On sait, certaines conditions étant admises, que la probabilité de passage de processus stochastique est une solution de la première équation de Kolmogoroff [1], et que la solution de deux équations de Kolmogoroff est une fonction de passage. Les solutions des équations, dont il s'agit, se trouvent chez Feller [2] et Dressel [3]. Mais la supposition de la continuité des secondes dérivées des coefficients de la forme caractéristique de la première équation de Kolmogoroff est essentielle.

Récemment l'équation parabolique fût résolue par M. W. Pogorzelski (voir [4] et [7]) sous l'hypothèse que les coefficients qui figurent dans cette équation sont hölderiens donc sous une hypothèse beaucoup plus générale. Dans ces conditions la seconde équation de Kolmogoroff peut ne pas exister. On verra, que le théorème d'unicité de la solution de l'équation parabolique [5] suffit pour démontrer, que la solution de la première équation de Kolmogoroff est la densité de la probabilité de passage.

Les notations sont appropriées de l'article [4].

1/ Soit l'équation parabolique normale avec un signe changé (près de u_t^1).

$$\hat{\psi}(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X, t) u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(X, t) u'_{x_i} + c(X, t) u + u_t^1 = 0 \quad (1). \quad (1.1)$$

Nous admettons les hypothèses suivantes :

-I. Les coefficients $a_{ij}(X, t)$, $a_i(X, t)$ et $c(X, t)$ sont définis, bornés

(1) Pour $c(x, t) \equiv 0$ c'est l'équation de Kolmogoroff.

et continus dans la région $(X \in R_n, 0 \leq t \leq T)$, R_n désignant l'espace euclidien des points $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

-II. ces coefficients sont soumis aux conditions d'Hölder, à savoir :

$$\begin{aligned} |a_{ij}(X, t_1) - a_{ij}(Y, t_2)| &\leq k(|X - Y|^h + |t_1 - t_2|^{h'}), \quad 0 < h, h' \leq 1, \\ |a_i(X, t) - a_i(Y, t)| &\leq k' |X - Y|^h, \quad 0 < h \leq 1, \\ |c(X, t) - c(Y, t)| &\leq k'' |X - Y|^h, \quad \text{"}, \quad \text{ou} : \end{aligned} \quad (2.1)$$

h, h', k, k' et k'' désignent des constantes positives, $Y = Y(y_1, \dots, y_n)$ et

$$|X - Y|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = r_{XY}^2 ;$$

-III. la forme quadratique $\sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$: est définie positive et, si $a^{ij}(Z, t)$, $Z = Z(z_1, \dots, z_n) \in R_n$, $0 \leq t \leq T$, désignant les éléments de la matrice inverse à la matrice $\|a_{ij}(Z, t)\|$, et que :

$$\delta^{z,t}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(Z, t) (x_i - y_i) (x_j - y_j), \quad (3.1)$$

alors il existe des telles constantes positives g et G que :

$$g |X - Y|^2 \leq \delta^{z,t}(X, Y) \leq G |X - Y|^2, \quad X, Y, Z \in R_n, 0 < t < T. \quad (4.1)$$

En posant comme toujours:

$$w^{z,\tau}(X, t; Y, \tau) = (\tau - t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{\delta^{z,\tau}(X, Y)}{4(\tau - t)} \right], \quad \tau > t, \quad (5.1)$$

on a comme solution fondamentale de l'équation (1.1), (v.[4]) la fonction suivante :

$$\Gamma(X; t, Y, \tau) = w^{y,t}(X, t; Y, \tau) + \int_t^\tau \int_{R_n} w^{z,\theta}(X, t; Z, \theta) \Phi(Z, \theta; Y, \tau) dZ d\theta, \quad (6.1)$$

où $\Phi(X, t; Y, \tau)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{X,t} [w^{y,\tau}(X, t; Y, \tau)] - (2\sqrt{\pi})^n A^{-1}(X, t) \Phi(X, t; Y, \tau) + \\ + \int_t^\tau \int_{R_n} \hat{\Psi}_{X,t} [w^{z,\theta}(X, t; Z, \theta) \Phi(Z, \theta; Y, \tau)] dZ d\theta = 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$A(X, t) = \sqrt{\det |a^{ij}(X, t)|}.$$

En posant encore :

$$\lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n}; N(X, t; Z, \theta) = \lambda^{-1} f(X, t; Z, \theta) = \hat{\psi}_{X,t} [w^{Z,\theta}(X, t; Z, \theta)] A(X, t), \quad (8.1)$$

on peut écrire que :

$$\Phi(X, t; Y, \tau) = f(X, t; Y, \tau) + \lambda \int_t^\tau \int_{R_n} \mathfrak{N}(X, t; Z, \theta) f(Z, \theta; Y, \tau) dZ d\theta, \quad t < \tau \quad (9.1)$$

$\mathfrak{N}(X, t; Z, \theta)$ c'est le noyau résolvant de l'équation (7.1); les noyaux itérés du noyau $N(X, t; Y, \theta)$ sont déterminés par la relation de récurrence :

$$N_{n+1}(X, t; Y, \theta) = \int_t^\theta \int_{R_n} N(X, \theta; Z, \theta') N_n(Z, \theta'; Y, \theta) dZ d\theta', \quad N_0 = N \quad (10.1)$$

L'existence des intégrales des équations (10.1), (9.1) et (7.1), pour $t < \theta \leq T$, résulte des articles [4] et [7].

M. Pogorzelski fait intervenir dans l'article [6] l'intégrale que voici :

$$J(X, t, \tau) = \int_{R_n} \Gamma(X, t; Y, \tau) \rho(Y, \tau) dY, \quad \text{ici } t < \tau. \quad (11.1)$$

$\rho(Y, \tau)$ est une fonction bornée dans l'espace $(R_n, 0 < \tau \leq T)$ et intégrable dans tout domaine mesurable et borné de cet espace. L'intégrale (11.1) existe et vérifie l'équation (1.1) pour $0 \leq t < \tau \leq T$.

Il fût démontré dans le même article [6], que si la fonction $\rho(X, \tau)$ est continue au point (X, t) , alors on a la propriété limite :

$$\lim_{\tau \rightarrow t} J(X, t, \tau) = [\lambda A(X, t)]^{-1} \cdot \rho(X, t). \quad (12.1)$$

Rappelons que la fonction $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ dans l'expression (11.1) est définie par les formules (6.1), ... (10.1).

2/ On fait intervenir l'expression que voici :

$$U(X, t; Y, \tau) = \lambda A(Y, \tau) \Gamma(X, t; Y, \tau), \quad t < \tau \leq T. \quad (1.2)$$

Cette fonction est une solution de l'équation (1.1), pour $t < \tau$, par rapport à X et t .

Lemme (1.2).

Si la fonction $f(X, t)$ est une solution de l'équation (1.1), $X \in R_n, 0 \leq t \leq T$, ou elle est continue et bornée (voir [5]), alors on a l'identité suivante :

$$f(X, t) = \int_{R_n} U(X, t; Y, \tau) f(Y, \tau) dY, \quad 0 \leq t < \tau \leq T, \quad (2.2)$$

où la fonction $U(X, t; Y, \tau)$ est définie par l'égalité (1.2), si les coefficients de l'équation (1.1) vérifient les hypothèses I, II et III du 1/.

Preuve du Lemme (1.2).

Nous savons, à cause des égalités (1.2) et (1.2), que :

$$\lim_{t \rightarrow \tau-0} \int_{R_n} U(X, t; Y, \tau) f(Y, \tau) dY = f(X, \tau). \quad (3.2)$$

Mais la fonction $f(X, t)$ est la solution de l'équation (1.1) et :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} f(X, t) = f(X, \tau). \quad (4.2)$$

les fonctions $f(X, t)$ et l'intégrale :

$$\int_{R_n} U(X, t; Y, \tau) f(Y, \tau) dY,$$

sont les solutions de la même équation (1.1) avec les mêmes conditions finales : (3.2) et (4.2) et elles sont bornées, donc de classe E_2 (v. 5)⁽¹⁾, elles sont donc identiques, c. q. f. d. d. . .

On déduit immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire (1.2).

Si les coefficients de l'équation (1.1) vérifient les hypothèses I, II et III du 1/ et que $c(X, t) = 0$, alors la fonction $U(X, t; Y, \tau)$, définie par l'expression (1.2), satisfait à l'identité suivante :

$$\int_{R_n} U(X, t; Y, \tau) dY \equiv 1, \quad X, Y \in R_n, \quad t \leq \tau.$$

Preuve du Corollaire (1.2).

On y pose dans l'expression (2.2) : $f(Y, \tau) \equiv 1$, ce qui est légitime, parce que une telle fonction vérifie l'équation (1.1), où on a posé $c(X, t) \equiv 0$, et $\lim_{t \rightarrow \tau} f(X, t) \equiv 1$, $X \in R_n$.

Corollaire (2.2).

La fonction (1.2) vérifie l'équation de Smoluchowski, à savoir :

$$U(X, t; Y, \tau) = \int_{R_n} U(X, t; Z, \theta) U(Z, \theta; Y, \tau) dZ \quad \text{pour : } t \leq \theta < \tau,$$

si les conditions I, II et III du 1/ sont accomplies.

(1) La condition finale revient à la condition initiale par le changement de la variable par exemple : \bar{t} en $t = \tau - t$.

Preuve du Corollaire (2. 2).

On transforme l'expression (2.2) en écrivant : $Y = Z$ et $\tau = \theta > t$, et on y pose $f(Z, \theta) = U(Z, \theta; Y, \tau)$. C'est l'égite parce que la fonction $U(X, t; Y, \tau)$ est une solution continue de l'équation (1.1), pour $t \leq \theta < \tau$, et $\lim_{t \rightarrow \theta} U(X, t; Y, \tau) = U(X, \theta; Y, \tau)$. Outre celà la solution $U(X, t; Y, \tau)$ est bornée pour $0 \leq t \leq \theta < \tau$, θ étant fixé, d'après l'article [7], c. q. f. d. d.

On peut démontrer aussi (1), pareillement que l'a fait Feller dans l'article [2], que l'expression (1.2) est non négative, sous les suppositions du Corollaire (1.2). On a donc le Théorème suivant :

Théorème (1.2).

La fonction (1.2) est la densité de la probabilité de passage de l'état X , au moment t , à l'état Y , au moment $\tau > t$, $X, Y \in R_n$, si les coefficients de l'équation (1.1) satisfont aux hypothèses du Corollaire (1.2).

Les conditions de continuité de la fonction (1.2), à savoir l'existence des moments moyens (voir [2]), sera démontrée dans la seconde partie de cet article.

TRAVAUX CITES

- (1) - A. KOLMOGOROFF, *Mathematische Annalen*, 194, 1931, p. p.
- (2) - W. FELLER, *Mathematische Annalen*, 113, 1936, p. p. 113-160.
- (3) - F. G. DRESSEL, DUKE, *Mathematical Journal*, 13, 1946, p. p. 61-70.
- (4) - W. POGORZELSKI, *Ricerche di Matematica*, V, 1956, p. p. 25-57.
- (5) - M. KRZYZANSKI, *Annales Polonici Mathematici* XVIII, 1945, p. p. 145-156.
- (6) - W. POGORZELSKI, " " " IV, I, 1957, p. p. 61-92.
- (7) - W. POGORZELSKI, " " " IV, 3, 1958, p. p. 288-307.
- (8) - M. PICONE, *Mathematische Annalen*, 101, 1929, p. p. 701-712.

(1) Soit : $U(X', t'; Y', \tau') < 0$ et $c(X, t) \equiv 0$. Posons : $g(X, t) = U(X, t; Y', \tau')$ et $z(X, t) = g(X, t) \exp(-t+t')$. On a : $\hat{\psi}_{X, t}(g(X, t)) \equiv 0$, $g(X', t') < 0$, alors $z(X, t)$ est une solution d'une équation parabolique normale avec le coefficient linéaire $c_1 = -1$; de plus $z(X', t') < 0$.

Soit : $t^1 < t_1 < \tau^1$ et K un cercle de centre (X', t') et de rayon $t_1 - t'$. Sur la partie K_1 de ce cercle ou $t \geq t'$ la fonction $z(X, t)$ aura un minimum par exemple au point (X'', t'') et nous pouvons écrire, à cause du théorème de Gévrey, que $z(X'', t'') \leq z(X', t') < 0$. Mais c'est une contradiction avec le fait que $z(X'', t'')$ est la solution de la dite équation parabolique normale, où $c_1 = -1$, c. q. f. d. d.

**SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE NORMALE
AUX COEFFICIENTS HOLDERIENS
QUI EST UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE
DE PROCESSUS STOCHASTIQUE**

PARTIE II

Halina MILICER GRUŻEWSKA

INTRODUCTION

On a démontré dans la première partie de cet article que la solution de la première équation de Kolmogoroff est une probabilité de passage, si les coefficients de cette équation sont soumis aux conditions I, II, III. Dans cette partie on prouvera, que cette solution accomplie les bien connues conditions de continuité de la probabilité de passage. Les notations de la partie première seront maintenues ici. Les dites conditions de continuité pourront donc être écrites comme il suit :

$$\tau - t = \Delta t > 0, \quad \mu_i(X, t, \tau) = \int_{R_n} (x_i - y_i) U(X, t; Y, \tau) dY = o(\sqrt{\Delta t}), \quad i = 1 \dots n.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-1} \int_{R_n} (x_i - y_i) (x_j - y_j) U(X, t; Y, \tau) dY = 2 a_{ij}(X, t), \quad i, j = 1 \dots n.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-1} \int_{R_n} (y_i - x_i) U(X, t - \Delta t; Y, t) dY = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ces conditions de continuités, étant démontrées, permettront d'affirmer que la solution de la première équation de Kolmogoroff est non seulement une probabilité de passage, mais encore que ses deux premiers moments, centralisés vers l'état initial X, et divisés par l'accroissement du double de temps Δt , ou pour cet accroissement même, convergent vers les coefficients de la dite équation, quand $\Delta t \rightarrow 0$.

1/- Lemme (1.1).

Les premiers moments de la fonction de passage $U(X, t, Y, \tau)$, centralisés vers l'état initial X, sont $o(\sqrt{\tau - t})$, si les coefficients de la première équation de Kolmogoroff (équation (1.1) dans la partie I de cet article) accomplissent les suppositions du Théorème (1.2) de cette partie.

Nous pouvons écrire, avec les définitions (1.2) p. I et de l'article (4) (p. I) que :

$$\mu_i(X, t, \tau) = \int_{R_n} (x_i - y_i) \rho(Y, \tau) [w^i(X, t; Y, \tau) + \bar{w}^i(X, t; Y, \tau)] dY, \quad (1.1)$$

où :

$$\rho(Y, \tau) = \lambda A(Y, \tau)$$

$w^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau)$ est défini par l'équation (5. 1) p. I et

$$\bar{w}(X, t; Y, \tau) = \int_t^\tau \int_{R_n} w^{Z, \theta}(X, t; Z, \theta) \Phi(Z, \theta, Y, \tau) dY d\theta$$

v. (4) p. I, formules (98) et (99).

Nommons les intégrales correspondantes aux deux composants de l'expression (1. 1) par I_1 et I_2 respectivement. Nous avons donc :

$$\mu_i(X, t, \tau) = I_1 + I_2.$$

On transformera le premier composant comme il suit :

$$I_1 = \rho(X, \tau) \int_{R_n} (x_i - y_i) w^{X, t}(X, t; Y, \tau) dY + \quad (2. 1)$$

$$\rho(X, \tau) \int_{R_n} (x_i - y_i) [w^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) - w^{X, t}(X, t; Y, \tau)] dY +$$

$$\int_{R_n} [\rho(Y, \tau) - \rho(X, \tau)] (x_i - y_i) w^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) dY.$$

Mais il résulte de la définition de la fonction $\rho(Y, \tau)$ et des suppositions I, II, III p. I que :

$$\rho(Y, \tau) - \rho(X, \tau) = 0 (r_{XY}^{h/2}), \quad (3. 1)$$

et que :

$$w^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) - w^{X, t}(X, t; Y, \tau) = 0 \left\{ n^2 r_{XY}^2 (\tau - t)^{-\frac{n}{2} - 1} \sup |a^{ij}(Y, \tau) - a^{ij}(X, t)| \exp \left[- \frac{g_{XY}^2}{\tau - t} \right] \right\}$$

v. p. ex. (4) p. I formule (16).

Outre cela on reçoit par une transformation linéaire convenable de la variable Y l'égalité suivante :

$$\int_{R_n} (y_i - x_i) w^{X, t}(X, t; Y, \tau) dY =$$

$$(\tau - t)^{\frac{n}{2}} \int_{R_n} \sum_{v=1}^n c_v^i z_v \exp \left[- \sum_{v=1}^n z_v^2 / 4(\tau - t) \right] dz_1, \dots, dz_n. A^{-1}(X, t) \equiv 0.$$

où c_v^i sont des constantes.

Ces égalités permettent d'écrire que :

$$I_1 / \sqrt{\tau-t} = 0 \left\{ \int_{R_n} (x_i - y_i) (\tau-t)^{\frac{n}{2}-1} \cdot r_{XY}^2 \sup |a^{ij}(Y, \tau) - a^{ij}(X, t)| \exp[-gr_{XY}^2 / (\tau-t)] dY \right\} + 0 \left\{ \int_{R_n} (x_i - y_i) (\tau-t)^{\frac{n+1}{2}} r_{XY}^{h/2} \exp[-gr_{XY}^2 / (\tau-t)] dY \right\}.$$

Chacune de ces intégrales est représentée comme une somme des deux intégrales répendues respectivement sur les domaines: $r_{XY} \leq 1$ et $r_{XY} > 1$. Cette dernière converge vers zéro avec $(\tau-t)$, comme il est facile de voir.

Quant à la première on y pose :

$$r_{XY} / \sqrt{\tau-t} = u,$$

d'où on reçoit à cause de la supposition II. p. I, l'inégalité suivante :

$$\sup |a^{ij}(Y, \tau) - a^{ij}(X, t)| \leq k [(u\sqrt{\tau-t})^n + (\tau-t)^{h'}],$$

et on peut écrire :

$$I_1 = 0(1) + 0 \left\{ \int_{|u| \leq 1/\sqrt{\tau-t}} u^{n+2-h} [u(\tau-t)^{h/2} + (\tau-t)^{h'}] \exp(-gu^2) du \right\} + 0 \left\{ \int_{|u| \leq 1/\sqrt{\tau-t}} u^{n+h/2} (\tau-t)^{h/4} \exp(-gu^2) du \right\} \rightarrow 0, (\tau-t) \rightarrow 0, \text{ c. q. f. d. d.}$$

L'intégrale I_2 sera traitée comme dans l'article (4) p. I. à savoir :

$$I_2 = \int_{R_n} \rho(Y, \tau) (x_i - y_i) \bar{w}(X, t; Y, \tau) dY = \int_t^\tau \int_{R_n} w^{Z, \theta}(X, t; Z, \theta) \bar{\rho}_i(Z, \theta, \tau) dZ d\theta,$$

où :
$$\bar{\rho}_i(Z, \theta, \tau) = \int_{R_n} \phi(Z, \theta, Y, \tau) \rho(Y, \tau) (x_i - y_i) dY.$$

Posons maintenant :

$$x_i - y_i = x_i - z_i + z_i - y_i,$$

et écrivons comme dans les articles (4) et (7) p. I que :

$$(x_i - y_i) \phi(Z, \theta, Y, \tau) = 0 \{ r_{ZY}^{-n_1} (\tau-\theta)^{-h_1} \} + 0 \{ r_{ZY}^{n_2} (x_i - z_i) \},$$

où :

$$n_1 = n + 1 - 2\mu_1 - h_1, \quad n_2 = n + 2 - 2\mu_1' - h_1$$

et :

$$1/2 - h_1/2 < \mu_1 < 1/2, \text{ pour } r_{ZY} \leq 1 \text{ et } \mu_1' > 1 - \frac{h_1}{2}.$$

$$\mu_1 < 1/2 - h_1/2, \text{ pour } r_{ZY} > 1, \text{ et } \mu_1' < 1 - \frac{h_1}{2},$$

c. à d.

$$\mu_1 = 1/2 - h_1/2 \pm \varepsilon_1, \quad \mu_1' = 1 - h_1/2 \pm \varepsilon_1',$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_1' > 0$ seront petits.

Il résulte d'ici, que :

$$\bar{p}_i(Z, \theta, \tau) = 0 \{ (\tau - \theta)^{-\mu_1} + (x_i - z_i) (\tau - \theta)^{-\mu_1'} \}.$$

On aura alors, pour $0 < \mu$, mais $\mu + \mu_1 < 1/2$ et $\mu' = -1/2 \pm \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$, mais $\varepsilon' + \varepsilon_1' < h_1/2$, l'égalité suivante :

$$I_2 = 0 \left\{ \int_t^\tau [(\theta - t)^{-\mu} \cdot (\tau - \theta)^{-\mu_1} + (\theta - t)^{-\mu'} (\varepsilon - \theta)^{-\mu_1'}] d\theta \right\} = \\ 0 [(\tau - t)^{1-\mu-\mu_1} + (\tau - t)^{1-\mu'-\mu_1'}] = 0 [(\tau - t)^{1/2}],$$

comme $\mu' + \mu_1' < 1/2$, c. q. f. d. d...

2/ - Lemme (1. 2).

Les valeurs moyennes des secondes, moments centralisés vers l'état initial X, de la probabilité de passage $U(X, t, Y, \tau)$, qui est la solution de l'équation (1. 1) p.I, tendent vers les doubles des coefficients respectifs de la forme quadratique de cette équation avec $(\tau - t) \rightarrow 0$, si les suppositions du Théorème (1. 2) p.I. sont vérifiées. A savoir :

$$\lim_{\tau-t \rightarrow 0} (\tau-t)^{-1} \int_{R_n} (x_i - y_i) (x_i - y_i) U(X, t; Y, \tau) dY = 2 a_{ij}(X, t), \quad i, j = 1, 2, \dots n. \quad (1.2)$$

Preuve du Lemme (1. 2).

On écrit, conformément aux notations qui précèdent :

$$(\tau-t)^{-1} \int_{R_n} (x_i - y_i) (x_j - y_j) U(X, t; Y, \tau) dY = \\ (\tau-t)^{-1} \int_{R_n} (x_i - y_i) (x_i - y_i) [w^{i,\tau}(X, t; Y, \tau) + \bar{w}(X, t; Y, \tau)] \rho(Y, \tau) dY = \quad (2. 2) \\ (\tau-t)^{-1} \rho(X, t) \int_{R_n} (x_i - y_i) (x_j - y_j) w^{i,\tau}(X, t; Y, \tau) dY + 0(1).$$

La dernière égalité c'est une conséquence des formules (3. 1) et de l'analogie à (2. 1) (1).

Désignons maintenant la dernière intégrale de l'égalité (2. 2) par B_{ij} et formons la somme qui suit :

$$\sum_{i,j} a^{ij} (X, t) B_{ij} = \beta_n \int_{R_n} \sum_{i,j} a^{ij} (X, t) u_i u_j \exp [-\delta^{x,t} (U, O)] dU. \quad (3.2)$$

où on a posé :

$$-x_i + y_i = 2u\sqrt{\tau - t}, \quad U = (u_1, \dots, u_n) = \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{matrix} \right\} \text{ la matrice d'une colonne,}$$

$$\delta^{x,t}(U, O) = \sum_{i,j} a^{ij} (X, t) u_i u_j,$$

$$\beta_n = (\tau - t)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n+2} \rho(X, t) (\tau - t)^{\frac{n+1}{2}} = 2^{n+2} \rho(X, t) = 2^2 \pi^{\frac{n}{2}} \cdot A(X, t)$$

Mais nous pouvons écrire :

$$\| a^{ij} (X, t) \| = \| a_{ij} (X, t) \|^{-1} = A^{-1} = A_1 \text{ et } \delta^{x,t} (U, O) = U' A_1 U,$$

en usant la notation U' pour la matrice opposée à U et pour la matrice inverse à la matrice A la notation A^{-1} . Soit maintenant la matrice orthogonale et normée C , et soit :

$$U = CV, \text{ donc } U' = V' C'$$

$$U' A^{-1} U = V' C' A^{-1} CV = V' K V, \text{ avec } K = C' A_1 C = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire au lieu de la somme (3.2) l'égalité :

$$\sum_{i,j} a^{ij} (X, t) B_{ij} = \beta_n \int_{R_n} V' K V \cdot \exp (-V'KV) dV \quad (4.2)$$

parce que $dU = dV$.

Mais on sait que :

$$V' K V = \sum_{i=1}^n k_i v_i^2, \text{ si } V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

et alors on a : au lieu de l'égalité (4.2) l'égalité suivante :

$$\sum_{i,j} a^{ij} (X, t) B_{ij} = \beta_n \sum_{i=1}^n \int_{R_n} k_i v_i^2 \exp. (-\sum k_i v_i^2) dV. \quad (5.2)$$

Changeons les variables d'intégration en posant :

$$\sqrt{k_i} v_i = z_i, \text{ alors } dV = dZ / \sqrt{k_1 k_2 \dots k_n} = dZ / \sqrt{|A_1|}.$$

On reçoit donc :

$$\sum_{i,j} a^{ij}(X, t) B_{ij} = 4 \pi^{-n/2} \sum_i \int_{R_n} z_i^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i^2\right) dZ = 4 \pi^{-\frac{n}{2}} 2^{-1} \pi^{\frac{n}{2}} n = 2n.$$

Mais on peut écrire que :

$$\sum_{i,j} a^{ij}(X, t) B_{ij} = \sum_{j=1}^n (a^{1j}(X, t) B_{1j} + \dots + a^{nj}(X, t) B_{nj}) = 2 \sum_{j=1}^n 1$$

Les sommes des produits :

$$\alpha_{jj} = a^{1j}(X, t) B_{1j} + \dots + a^{nj}(X, t) B_{nj}$$

ce sont ces éléments du produit des déterminants A_1 et B qui se trouvent sur la diagonale principale. Soit le déterminant d'ordre n de la forme :

$$K_1 = \begin{vmatrix} 2, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 2, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & 2 \end{vmatrix} = 2^n$$

et soit C_1 un déterminant qui donne l'égalité qui suit :

$$C_1' (A_1 B) C_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

alors on aura :

$$\{1\} C_1' (A_1 B) C_1 (1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jj} ; \{1\} K (1) = \sum_{j=1}^n 2,$$

d'où :

$$\{1\} C_1' (A_1 B) C_1 (1) = \{1\} K_1 (1), \text{ donc } C_1' A_1 B C_1 = K_1, \text{ et } A_1 B = C_1 K_1 C_1' = 2^n$$

parce que :

$$C_1 K_1 C_1' = 2^n C_1 C_1' = 2^n.$$

Mais on a :

$$A_1^{-1} A_1 B = A_1^{-1} \cdot 2^n \text{ et } B = A_1^{-1} \cdot 2^n = 2^n \cdot A, \text{ c. à d.}$$

on a :

$$B_{ij} = 2 a_{ij}(X, t),$$

ce qui prouve, avec l'égalité (2. 2), le Lemme (1. 2).

3/ - Lemme (1. 3).

Les valeurs moyennes des premiers moments, centralisés vers l'état initial X , de la probabilité de passage $U(X, t, \tau)$, solution de l'é-

quation (1.1) p. I, tendent vers les coefficients des dérivées premières de cette équation, si les suppositions du Théorème (1.2) p. I sont vérifiées, avec $(\tau - t) \rightarrow 0$. A savoir :

$$\lim_{\tau-t \rightarrow 0} (\tau - t)^{-1} \int_{R_n} (y_i - x_i) U(X, t; Y, \tau) dY = b_i(X, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

Preuve du Lemme (1.3).

La démonstration est ici classique (v. p. ex. (2) p. I). On part de l'équation de Smoluchowski pour la fonction de passage $U(X, t - \Delta t; Z, t)$ et $t - \Delta t < t < \tau$:

$$U(X, t - \Delta t, Y, \tau) = \int_{R_n} U(X, t - \Delta t; Z, t) U(Z, t, Y, \tau) dZ,$$

mais d'ici :

$$U(X, t - \Delta t, Y, \tau) = U(X, t, Y, \tau) + \sum_{i=1}^n U'_{x_i}(X, t; Y, \tau) \int_{R_n} (z_i - x_i) U(X, t - \Delta t, Z, t) dZ +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n U''_{x_i x_j}(X, t, Y, \tau) \int_{R_n} (x_i - z_i)(x_j - z_j) U(X, t - \Delta t; Z, t) dZ + 0 \quad (1), \quad X \neq Y$$

donc :

$$0 = U'_t + \sum_{i=1}^n U'_{x_i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1/\Delta t \int_{R_n} (z_i - x_i) U(X, t - \Delta t; Z, t) dZ + X \neq Y + \sum_{i=j}^n U''_{x_i x_j} a_{ij}(X, t)$$

Mais la fonction U est la solution de l'équation (1.1) p. I, avec le coefficient $c(X, t) \equiv 0$. D'ici et de l'égalité précédente résulte que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1/\Delta t \int_{R_n} (z_i - x_i) U(X, t - \Delta t; Z, t) dZ = b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{c.q.f.d.d.}$$

Le Théorème (1.2) p. I, les Lemmes (1.1), (1.2) et (1.3) p. II permettent d'énoncer le Théorème (1.3) :

THEOREME (1.3) -

Les suppositions du Théorème (1.2), étant admises, la solution de l'équation (1.1) p. I est la fonction de passage de l'état X au moment t à l'état Y au moment τ , et les coefficients de cette équation sont respectivement les valeurs limites moyennes de $\frac{1}{2}$ des moments seconds et des premiers, pour $(\tau - t) \rightarrow 0$. On peut traiter le coefficient du terme linéaire, qui est ici égal à zéro, comme limite moyenne du carré du premier moment, pour $(\tau - t) \rightarrow 0$. Tous les moments sont centralisés vers l'état initial X .

