



**HAL**  
open science

## Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions

M. Émile, J. Gumbel

► **To cite this version:**

M. Émile, J. Gumbel. Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions. Annales de l'ISUP, 1960, IX (2), pp.171-173. hal-04092830

**HAL Id: hal-04092830**

**<https://hal.science/hal-04092830>**

Submitted on 9 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## DISTRIBUTIONS DES VALEURS EXTRÊMES EN PLUSIEURS DIMENSIONS

M. Émile J. GUMBEL

Soient

$$(1) \quad F_1(x) = 1 - P_1(x) ; F_2(y) = 1 - P_2(y)$$

deux fonctions de probabilités à une variable. Alors on obtient une fonction de probabilité  $F(x, y)$  à deux variables telle que les fonctions  $F_1(x)$  et  $F_2(y)$  soient marginales en posant pour  $m \geq 1$

$$(2) \quad [-\log F(x, y)]^m = [-\log F_1(x)]^m + [-\log F_2(y)]^m$$

De même on obtient une fonction de probabilités  $P(x, y)$  pour des valeurs surpassant  $x$  et  $y$  telle que  $P_1(x)$  et  $P_2(y)$  soient marginales en posant pour  $m \geq 1$

$$(2') \quad [-\log P(x, y)]^m = [-\log P_1(x)]^m + [-\log P_2(y)]^m$$

Les variables  $x$  et  $y$  sont indépendantes pour  $m = 1$ .

La relation entre  $P(x, y)$  et  $F(x, y)$  est

$$(3) \quad P(x, y) = 1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y)$$

Les systèmes (2) et (2') peuvent être utilisés pour la construction de distributions asymptotiques et stables de valeurs extrêmes dépendantes ou non. Ce problème a été étudié par M. Finkelstein [1] pour les plus petites et par M. J. Tiago de Oliveira [5] pour les plus grandes valeurs. Mais ces solutions contiennent des fonctions  $w(x, y)$  et  $k(y, x)$  des deux valeurs extrêmes dont les propriétés sont connues, mais dont la forme analytique n'est pas connue. M. Geffroy [2] a donné une solution plus générale qu'il a étudiée en l'espèce pour une des trois distributions asymptotiques des plus grandes valeurs.

Pour obtenir une solution générale nous écrivons d'abord [3] les trois fonctions de probabilités asymptotiques et stables.  $\Phi_{(x)}^{(\lambda)}$  des plus

grandes et  $\Pi_{(x)}^{(\lambda)}$  des plus petites valeurs, où  $\Pi_{(x)}^{(\lambda)}$  est la probabilité d'une valeur supérieure à  $x$  et  $\lambda = 1, 2, 3$ .

$$(4.1) \quad -\log \Phi_{(x)}^{(1)} = e^{-x}; \quad -\infty < x < \infty. \quad -\log \Pi_{(x)}^{(1)} = e^x; \quad -\infty < x < \infty$$

$$(4.2) \quad -\log \Phi_{(x)}^{(2)} = x^{-k}; \quad x > 0. \quad -\log \Pi_{(x)}^{(2)} = (-x)^{-k}; \quad x < 0$$

$$(4.3) \quad -\log \Phi_{(x)}^{(3)} = (-x)^k; \quad x < 0. \quad -\log \Pi_{(x)}^{(3)} = x^k; \quad x > 0$$

où  $k > 0$ . Ces distributions sont appelées stables parce que la distribution du maximum de la plus grande valeur et du minimum de la plus petite valeur sont les distributions des extrêmes elles-mêmes sauf pour une transformation linéaire de la variable.

Les substitutions des  $\Phi$  au lieu de  $F$  et des  $\Pi$  au lieu de  $P$  dans les systèmes (2) et (2'), conduisent aux six fonctions de probabilités à deux plus grandes valeurs données par :

$$(5) \quad \left[ -\log \Phi_{(x,y)}^{(k,\lambda)} \right]^m = \left[ -\log \Phi_{(x)}^{(k)} \right]^m + \left[ -\log \Phi_{(y)}^{(\lambda)} \right]^m$$

et aux six fonctions de probabilités à deux plus petites valeurs données par :

$$(6) \quad \left[ -\log \Pi_{(x,y)}^{(k,\lambda)} \right]^m = \left[ -\log \Pi_{(x)}^{(k)} \right]^m + \left[ -\log \Pi_{(y)}^{(\lambda)} \right]^m$$

où  $k, \lambda = 1, 2, 3$ . Les trois cas  $k = \lambda$  conduisent à des fonctions de probabilités de valeurs extrêmes, homogènes, où les probabilités marginales sont du même type (1, 1), (2, 2), (3, 3). Les trois cas  $k \neq \lambda$  conduisent aux fonctions de probabilités des valeurs extrêmes non-homogènes où les probabilités marginales appartiennent à des types différents (1, 2) (1, 3) (2, 3). De nouveau le cas  $m = 1$  conduit à l'indépendance qui a été étudiée dans une note précédente [4]. Les fonctions de probabilités (5) et (6) sont stables parce que la multiplication des logarithmes dans le premier membre par  $n$  conduit à une transformation linéaire des variables  $x$  et  $y$  dans le second membre. Le cas le plus important semble être (1, 1) à savoir

$$(7) \quad \Phi_{(x,y)}^{(1,1)}(x,y) = \exp[-(e^{-mx} + e^{-my})^{1/m}]; \quad \Pi^{(1,1)}(x,y) = \exp[-(e^{mx} + e^{my})^{1/m}]$$

Le cas  $m=2, k=\lambda=2$  dans la formule (5) est celui de M. Geffroy [2].

Les systèmes (5) et (6) peuvent facilement être généralisés à  $n$  dimensions. Dans ce but on n'a qu'à remplacer la somme de deux valeurs en (5) et (6) par celle de  $n$  valeurs. On obtient ainsi des distributions asymptotiques et stables des valeurs extrêmes en  $n$  dimensions.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] FINKELSTEIN, B. V. - Distribution limites des valeurs extrêmes aléatoires en deux dimensions (en Russe), Doklady Akademii Nauk SSSR, 91, n° 2 (1953).
- [2] GEFFROY, J. - Contribution à la théorie des valeurs extrêmes Thèse de l'Université de Paris, 1958.
- [3] GUMBEL, E. J. - Statistics of Extremes, Columbia University, New York, 1958.
- [4] GUMBEL, E. J. - Fonctions de probabilités à deux variables extrémales indépendantes. C.R. As. Sc., t. 246, pp.49-50, Paris, 1958.
- [5] TIAGO DE OLIVEIRA, J. - Extremal distributions, Rev. Fac. Cien, Lisboa, A. Vol. VII, Fasc. 2°, pp.219-228, 1959.