



**HAL**  
open science

# Sur la régression, la corrélation et la dépendance de probabilité d'une variable aléatoire par une fonction aléatoire

Jean Legoupil

► **To cite this version:**

Jean Legoupil. Sur la régression, la corrélation et la dépendance de probabilité d'une variable aléatoire par une fonction aléatoire. *Annales de l'ISUP*, 1963, XII (3-4), pp.183-336. hal-04092696

**HAL Id: hal-04092696**

**<https://hal.science/hal-04092696>**

Submitted on 9 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SUR LA RÉGRESSION,  
LA CORRÉLATION ET LA DÉPENDANCE DE PROBABILITÉ  
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
PAR RAPPORT A UNE FONCTION ALÉATOIRE**

Jean LEGOUPIL

Professeur à l'École Polytechnique de Montréal  
Actuellement, Professeur Invité à l'Université Laval (Québec)

8°√  
64396  
(12,  $\overline{111}$ )

1-1952

SUR LA RÉGRESSION  
LA CORRÉLATION ET LA DÉPENDANCE DE PROBABILITÉ  
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
PAR RAPPORT À UNE FONCTION ALÉATOIRE

Jean LECOURT

Professeur de Mathématiques de Montréal  
Actuellement à l'Université Laval (Québec)



## INTRODUCTION

Ces questions, qui ont été appliquées avec importance dans des domaines variés, ont été abordées par Sir Ronald Fisher dans ses travaux sur l'analyse des classes (*1*) et dans la question de la corrélation et de la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $X_i$  et à ses collègues, aux résultats obtenus des approches géométriques satisfaisantes (sans plus de précision mathématique) de la corrélation et de la régression de  $Y$  par rapport à la fonction elle-même (*2*) définie sur l'espace correspondant à la corrélation et régression qui n'a pas définies, et il n'a pas abordé les difficultés qui sont définies ailleurs. Ce n'est qu'après une étude mathématique rigoureuse que l'on peut justifier les approximations faites dans l'analyse géométrique de cette étude. Ceci a été l'objet de notre travail.

Le chapitre I est consacré à quelques préliminaires sur l'indépendance statistique qui joue un rôle fondamental dans l'analyse de la régression linéaire et multiple quadratique de  $Y$  par rapport à  $X_i$  (*3*) est définie et étudiée au chapitre II. On suppose maintenant que, moyennant certaines hypothèses, elle est linéaire et que la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $L$  variables indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_L$  de (les  $Y_i$  (*4*)) forment un système complet basé de  $L$  (*5*) quand  $L = \dots$

Le chapitre III est consacré à la définition et à l'étude du coefficient de corrélation de  $Y$  par rapport à  $X_i$  (*6*) définie sur  $T$  qui, à son tour, peut être considérée, moyennant certaines hypothèses, comme limite du coefficient de corrélation multiple de  $Y$  et de  $L$  variables indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_L$  de quand  $L$  tend vers l'infini.

Le chapitre IV est consacré à la définition et à l'étude du coefficient de corrélation multiple de  $Y$  par rapport à  $X_i$  (*7*) définie sur  $T$  qui, à son tour, peut être considérée, moyennant certaines hypothèses, comme limite du coefficient de corrélation multiple de  $Y$  et de  $L$  variables indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_L$  de quand  $L$  tend vers l'infini.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à Mr le Pro-  
fesseur Gaston Dugas, Directeur de l'Institut de Statistique de l'Uni-  
versité de Paris, qui m'a indiqué le sujet de cette thèse et qui m'a  
encouragé, avec tant de bienveillance dans la poursuite de ce travail.  
Ceci reçoit ici l'expression de toute ma gratitude.

## INTRODUCTION

Ces questions, qui ont des applications importantes dans des domaines variés, ont été abordées par Sir Ronald FISHER dans ses études sur l'influence des pluies ( $X(t) dt$  étant la quantité de pluie tombée pendant la durée  $t, t + dt$ ,  $X(t)$  étant une fonction aléatoire) sur la récolte (variable aléatoire  $Y$ ). La théorie des fonctions aléatoires n'étant alors pas développée, il a remplacé la fonction aléatoire  $X(t)$  par l'approximation  $\sum_{i=1}^k A_i \rho_i(t)$ , les  $A_i$  étant des variables aléatoires et les  $\rho_i(t)$  des fonctions certaines qu'il a choisies. Il a étudié la corrélation multiple et la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $A_i$  et a considéré ses résultats comme des approximations satisfaisantes (sans plus de précision mathématique) de la corrélation et de la régression de  $Y$  par rapport à la fonction aléatoire  $X(t)$  définie sur l'année correspondante (corrélation et régression qu'il n'a pas définies, et il n'a pas abordé les difficultés que cette définition soulevait). Ce n'est qu'après une étude mathématique rigoureuse que l'on peut justifier les approximations faites dans l'utilisation pratique de cette étude. Ceci a fait l'objet de notre travail.

Le chapitre I est consacré à quelques préliminaires sur l'intégration aléatoire qui joue un rôle fondamental dans l'ensemble de ce travail. La régression linéaire en moyenne quadratique de  $Y$  par rapport à  $X(t)$  est définie et étudiée au chapitre II. On montre notamment que, moyennant certaines hypothèses, elle est limite m. q de la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $L$  variables aléatoires  $\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  (les  $\rho_l(t)$  formant un système complet base de  $L_2(T)$ ) quand  $L \rightarrow +\infty$ .

Le chapitre III est consacré à la définition et à l'étude du coefficient de corrélation de  $Y$  par rapport à  $X(t)$  définie sur  $T$  qui, là encore, peut être considéré, moyennant certaines hypothèses comme limite du coefficient de corrélation multiple de  $Y$  et de  $L$  variables aléatoires  $\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  quand  $L$  tend vers l'infini.

Le chapitre IV traite de théorèmes limites, la régression et le coefficient de corrélation de  $Y$  par rapport à  $X(t)$  étant, moyennant certaines hypothèses, limites de la régression multiple et du coefficient de corrélation multiple de  $U$  par rapport aux  $n$  variables aléatoires  $\int_{\tau_1} X(t) dt \dots \int_{\tau_n} X(t) dt$  ou par rapport aux  $n$  variables aléatoires  $X(t_1) \dots X(t_n)$ , quand  $n \rightarrow +\infty$

Le chapitre V est consacré à des généralisations :

1/ au cas où on considère la régression d'une fonction aléatoire  $Y(\tau)$  par rapport à la fonction aléatoire  $X(t)$

2/ au cas où on considère la régression de  $Y$  par rapport à plusieurs variables aléatoires et fonctions aléatoires.

Dans le chapitre VI on examine la régression non linéaire.

La régression des espérances mathématiques conditionnelles est comparée à la régression m. q. au chapitre VII.

Dans les chapitres VIII et IX on étudie des problèmes d'estimation de la régression.

Enfin l'estimation de la loi conditionnelle de  $Y$  par rapport à  $X(t)$  est examinée au chapitre X.

L'étude de la dépendance de probabilité d'une variable aléatoire par rapport à une fonction aléatoire constituant un domaine très vaste. Il a fallu nous limiter, et bien des questions, que nous avons primitivement l'intention d'inclure dans ce travail, ne sont pas traitées ici. En particulier, dans le cas où la fonction aléatoire est à accroissements orthogonaux, on peut obtenir la fonction de régression sans résolution d'équation intégrale. Dans le cas où la fonction aléatoire est stationnaire du 2<sup>e</sup> ordre, on peut considérer une fonction de régression de la fréquence  $\nu$  (en utilisant la décomposition spectrale). Des problèmes de tests d'hypothèses seraient intéressants à étudier.

## CHAPITRE I

### PRÉLIMINAIRES SUR L'INTÉGRATION ALÉATOIRE

Nous consacrerons quelques préliminaires à des intégrales  $\int_T \rho(t) X(t) dt$   $\rho(t) \in L_2(T)$ ,  $X(t)$  étant une fonction aléatoire,  $T$  étant dans l'ensemble de ce travail un intervalle fini ou une somme d'un nombre fini d'intervalles finis sur  $R_1$ .

Ces intégrales que nous rencontrerons constamment dans ce travail peuvent, moyennant certaines hypothèses, être définies dans des sens très divers. Nous étudierons particulièrement deux définitions de cette intégrale qui interviendront fréquemment dans la suite. Nous les appellerons intégrales aux sens A et B. Toutefois la plupart des théorèmes des chapitres suivants sont valables même lorsque cette intégrale est définie dans d'autres sens pourvu que cette intégrale possède certaines propriétés. Dans les chapitres suivants, nous énoncerons donc beaucoup de théorèmes sous des hypothèses moins simples que les hypothèses A ou B, mais moins restrictives.

#### A) SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS D'INTEGRALES STOCHASTIQUES DE CERTAINES FONCTIONS ALÉATOIRES PRESQUE SUREMENT INTEGRABLES - L sur T.

*Lemme 1-1* - Si  $X(t) = x(t, \omega)$  est un processus mesurable sur  $T \times \Omega$  et si,  $\rho(t)$  étant une fonction mesurable sur T,

$$\int_T |\rho(t)| E |X(t)| dt < +\infty,$$

l'intégrale  $-L \int_T \rho(t) x(t, \omega) dt$  existe pour presque tout  $\omega$ , définit une variable aléatoire, et  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  existe et est égal à  $\int_T \rho(t) E [X(t)] dt$ .

*Démonstration :*

$\rho(t) x(t, \omega)$  étant mesurable sur  $T \times \Omega$  ce lemme résulte des théorèmes de Tonelli et Fubini.

Dans la suite nous appellerons cette intégrale, intégrale au sens A.

*Théorème 1-1*

Si  $X(t)$  est un processus mesurable et si  $\rho(t)$  et  $E | X(t) |$  appartiennent à  $L_2(T)$ ,  $\rho(t) X(t)$  est presque sûrement intégrale -L sur  $T$ ,  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  définit une variable aléatoire, et  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  existe et est égal à  $\int_T \rho(t) E(X(t)) dt$ .

*Démonstration :*

Il résulte du raisonnement qui permet de démontrer l'inégalité de Schwarz que si  $\rho(t)$  et  $E | X(t) | \in L_2(T)$  l'intégrale  $\int_T |\rho(t) | E | X(t) | dt$  existe et l'application de lemme 1-1 nous donne le résultat.

N.B. Si  $X(t)$  est un processus mesurable et si  $E(X^2(t))$  existe et est intégrable -L sur  $T$ ,  $E | X(t) |$  existe et appartient à  $L_2(T)$ , en effet, l'existence de  $E(X^2(t))$  entraîne l'existence de  $E | X(t) |$  et la propriété résulte de  $E | X(t) |^2 \leq E(X^2(t))$ .

*Lemme 1-2 :* Si  $X(t) = x(t, \omega)$  est une fonction aléatoire mesurable sur  $T \times \Omega$  et si l'intégrale -L

$$\iint_{T \times T} |\rho_1(t) \rho_2(t')| E | X(t) X(t') | dt dt' < +\infty$$

$\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t)$  étant des fonctions mesurables sur  $T$ ,

$$\text{L'intégrale -L } \iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') x(t, \omega) x(t', \omega) dt dt'$$

existe pour presque tout  $\omega$ , définit une variable aléatoire, et

$$E \left[ \iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') X(t) X(t') dt dt' \right]$$

existe et est égale à

$$\iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') E(X(t) X(t')) dt dt'.$$

*Démonstration :*

$\rho_1(t) \rho_2(t') x(t, \omega) x(t', \omega)$  étant mesurable sur  $T \times T \times \Omega$ , cela résulte des théorèmes de Tonelli et Fubini.

*Théorème 1-2*

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire mesurable, si  $\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t) \in L_2(T)$  et si  $E | X(t) X(t') |$  existe et  $\in L_2(T \times T)$ ,

$$\iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') x(t, \omega) x(t', \omega) dt dt'$$

existe pour presque tout  $\omega$ , définit une variable aléatoire. et

$$E \left[ \iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') X(t) X(t') dt dt' \right]$$

existe et est égal à

$$\iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') E(X(t) X(t')) dt dt'.$$

*Démonstration :*

si :  $\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t) \in L_2(T)$  et si  $E | X(t) X(t') |$  existe et est  $\in L_2(T \times T)$

$$\iint_{T \times T} |\rho_1(t) \rho_2(t')| E | X(t) X(t') | dt dt' < +\infty$$

(d'après l'inégalité de Schwarz) et l'application du lemme 1-2 nous donne le résultat.

N.B. Si  $X(t)$  est un processus mesurable et si  $E(X^2(t))$  existe et est intégrable - L sur T,  $E[|X(t) X(t')|]$  existe et est  $\in L_2(T \times T)$ . Ceci résulte de l'inégalité de Schwarz

$$[E | X(t) X(t') | ]^2 \leq E(X^2(t)) \times E(X^2(t'))$$

*Lemme 1-3 :* Si  $\rho(t)$  est mesurable, si  $x(t, \omega)$  est mesurable sur  $T \times \Omega$  et si  $\int_T |\rho(t)| E[|X(t) X(t')|] dt < +\infty$ , l'intégrale - L

$$\int_T \rho(t) x(t, \omega) x(t', \omega) dt$$

existe pour presque tout  $\omega$  et définit une variable aléatoire.

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) X(t') dt \right]$$

existe alors et est égal à  $\int_T \rho(t) E[X(t) X(t')] dt$ .

Ceci se démontre en utilisant les théorèmes de Tonelli et Fubini.

*Théorème 1-3*

Si  $\rho(t) \in L_2(T)$  si  $X(t)$  est une fonction aléatoire mesurable, si  $E|X(t) X(t')|^2$  est de carré intégrable sur  $T$  (cette dernière hypothèse étant en particulier vérifiée si  $E(X^2(t))$  existe et est intégrable -  $L$  sur  $T$ ),

$\int_T \rho(t) x(t, \omega) x(t', \omega) dt$  existe pour presque tout  $\omega$  et définit une variable aléatoire.  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) X(t') dt \right]$  existe alors et est égal à  $\int_T \rho(t) E[X(t) X(t')] dt$ .

*Démonstration :*

Il résulte de l'inégalité de Schwarz que

$$\int_T |\rho(t)| |E|X(t) X(t')|| dt < +\infty$$

et l'application du lemme 1-3 nous donne le résultat.

*Lemme 1-4 :* Si  $\rho(t)$  est mesurable sur  $T$ , si  $X(t)$  est un processus mesurable, si  $Y = y(\omega)$  est une variable aléatoire ( $Y$  étant alors mesurable sur  $\Omega$ ), et si,  $\int_T |\rho(t)| |E|Y X(t)|| dt < +\infty$ ,

l'intégrale -  $L$   $\int_T y(\omega) \rho(t) x(t, \omega) dt$  existe pour presque tout  $\omega$  et définit une variable aléatoire.

$E \left[ \int_T Y \rho(t) X(t) dt \right]$  existe et est égal à  $\int_T \rho(t) E[Y X(t)] dt$ .

Ceci se démontre en utilisant les théorèmes de Tonelli et Fubini.

*Théorème 1 - 4*

Si  $X(t)$  est mesurable, si  $\rho(t) \in L_2(T)$  et si  $E|Y X(t)| \in L_2(T)$  les résultats du lemme 1-4 sont vrais.

Ceci se démontre en utilisant l'inégalité de Schwarz.

N.B. Les résultats du lemme 1-4 sont vrais si  $X(t)$  est mesurable, si  $E[Y^2]$  existe et si  $E[X^2(t)]$  existe et est intégrable - L sur T.

Il résulte en effet de l'inégalité de Schwarz

$$[E | Y X(t) | ]^2 \leq E(Y^2) E(X^2(t)) \text{ que } E | Y X(t) | \in L_2(T)$$

Nous rencontrerons fréquemment par la suite les hypothèses suivantes que nous appellerons : HYPOTHESES A.

$$\text{Hypothèses A} \left\{ \begin{array}{l} X(t) = x(t, \omega) \text{ est une fonction aléatoire mesurable} \\ \text{sur } T \times \Omega, E[X^2(t)] \text{ existe et est intégrable L sur T} \\ \rho(t) \text{ est de carré intégrable sur T} \\ Y = y(\omega) \text{ est une variable aléatoire } y(\omega) \text{ mesurable} \\ \text{sur } \Omega, E[Y^2] \text{ existe} \end{array} \right.$$

Moyennant ces hypothèses A vérifiées par  $X(t)$ ,  $\rho(t)$  et  $Y$ , les résultats des 4 théorèmes précédents sont vrais.

B) SUR UNE AUTRE DEFINITION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

$$\int_T \rho(t) X(t) dt$$

T sera ici encore un intervalle de mesure finie ou la somme d'un nombre fini d'intervalles de mesures finies.

Nous considérerons les hypothèses suivantes que nous rencontrerons dans la suite et que appellerons : HYPOTHESES B<sub>1</sub>.

$$\text{Hypothèses B}_1 \left\{ \begin{array}{l} \rho(t) \in L_2(T) \\ X(t) \text{ est une fonction aléatoire du 2e ordre définie} \\ \text{sur T, continue en moyenne quadratique} \\ E(X^2(t)) \text{ est intégrable - L sur T} \end{array} \right.$$

Soit  $\rho_1(t) \dots \rho_n(t) \dots$  une suite s de fonctions continues convergeant en moyenne quadratique "sur T" vers  $\rho(t)$ . L'intégrale stochastique de Riemann m. q.  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$  est définie et, quand  $n \rightarrow \infty$ , elle converge en moyenne quadratique vers une limite L d'après le critère de Cauchy.

(Nous appellerons dans la suite cette intégrale, intégrale au sens B).

En effet :

$$E \left[ \int_T [\rho_n(t) - \rho_m(t)] X(t) dt \right]^2 \leq \int_T [\rho_n(t) - \rho_m(t)]^2 dt \int_T E[X^2(t)] dt$$

d'après l'inégalité de Schwarz et la permutabilité des signes  $E$  et  $\int_T$  dans  $E \left[ \int_T X^2(t) dt \right]$ . Or,  $\int_T E(X^2(t)) dt$  est fini, le 2<sup>e</sup> membre sera donc  $< \varepsilon$  (arbitrairement petit) dès que  $n$  et  $m$  sont supérieurs à  $N(\varepsilon)$ .

On peut démontrer l'unicité de la limite  $L$  quelque soit la suite  $s$  considérée (convergeant en  $m, q$  vers  $\rho(t)$ ).

Les symboles  $E$  et  $\int_T$  étant permutables sur  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$  on en déduit qu'ils le sont pour  $\int_T \rho(t) X(t) dt$ .

On peut démontrer aussi que, moyennant les hypothèses  $B_1$

$$(\rho_1(t) \text{ et } \rho_2(t) \in L_2(T))$$

$$E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \int_T \rho_2(t) X(t) dt \right]$$

existe et est égal à :

$$\iint_{T \times T} \rho_1(t) \rho_2(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = E \left[ \int_T \rho(t) X(t) X(t) dt \right]$$

existe et est égal à  $\int_T \rho(t) E[X(t) X(t)] dt$

Si de plus  $E[Y^2]$  existe (Nous appellerons hypothèses  $B$  les hypothèses  $B_1$  plus cette dernière hypothèse)

On démontre que  $E[Y X(t)]$  existe (ceci résulte de l'inégalité de Schwarz)

$E[Y X(t)]$  est continue, en effet :

$$E[|Y[X(t') - X(t)]|] \leq \sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E[X(t') - X(t)]^2}$$

et puisque  $E(Y^2)$  est fini, la continuité de  $E[Y X(t)]$  résulte de la continuité  $m, q$  de  $X(t)$ .

On peut démontrer enfin que :  $E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  existe et est égal à  $\int_T \rho(t) E[Y X(t)] dt$ .

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe au sens A et au sens B, il y a probabilité 1 pour qu'elles soient égales.

On pourrait définir  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  en des sens différents des précédents, par exemple

$$\text{si : } \rho(t) \in L_2(T)$$

si  $E[X(t) X(t')]$  existe et est de carré intégrable L sur  $T \times T$ ,

$$\text{et si : } E \left[ \rho(t) X(t) \rho(t') X(t') \right]$$

existe et est intégrable - L sur  $T \times T$ , on peut alors définir une certaine sorte d'intégrale qu'on pourrait appeler intégrale - L m. q (cf. Moysal, Journal of the Royal Statistical Society, Londres B 2 1949, Vol. X1, page 169). Ici,  $\rho(t) X(t)$  n'est pas forcément une fonction presque sûrement intégrable - L, ce qui empêche l'utilisation de cette définition pour l'étude statistique que nous ferons.

Les hypothèses B pourront intervenir dans l'étude de la régression, toutefois elles ne suffisent pas pour l'étude statistique. Les hypothèses A, elles, permettront une étude statistique.

Dans la suite interviendront des intégrales aléatoires définies en un certain sens S (pouvant être différent de A et B). Nous ferons, dans tout ce travail, sur S l'hypothèse suivante :

Si  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions aléatoires intégrables au sens S sur T, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels, alors  $\alpha f(t) + \beta g(t)$  est intégrable au sens S et

$$\int_T [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_T f(t) dt + \beta \int_T g(t) dt.$$

En plus de cette hypothèse (que nous ne répèterons pas) nous ferons sur S d'autres hypothèses qui ne seront pas les mêmes pour tous les théorèmes. Elles seront mentionnées explicitement dans les énoncés.

Les intégrales de fonctions non aléatoires que nous rencontrerons dans la suite seront entendues au sens de Lebesgue.

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .

On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .  
 On peut aussi démontrer que si l'intégrale  $\int_0^1 p(x) dx$  est finie, on a  $\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 p(x) dx$ .

## CHAPITRE II

### SUR LA RÉGRESSION LINÉAIRE M.Q. DE Y PAR RAPPORT A X (t)

Les théorèmes 2 - 1 et 2 - 2 sont relatifs aux bornes inférieures de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

et

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) (X(t) - \xi(t)) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_0$  et pour tous les  $\rho(t)$  et  $\xi(t)$  appartenant à certains ensembles de fonctions.

En posant  $\mathfrak{Y} = Y - E(Y)$ ,  $\mathfrak{X}(t) = X(t) - E(X(t))$ , on est ramené à l'étude de la borne inférieure de  $E \left[ \mathfrak{Y} - \int_T \rho(t) \mathfrak{X}(t) dt \right]^2$ .

Cette étude est abordée dans les théorèmes 2 - 3 et 2 - 4 et on aboutit à l'étude de la régression linéaire m. q. de  $\mathfrak{Y}$  par rapport à la fonction aléatoire  $\mathfrak{X}(t)$  dans le cas où  $E(\mathfrak{Y}) = 0$ ,  $E(\mathfrak{X}(t)) = 0$ . Puis on fait l'étude de la régression linéaire m. q.  $Y_x$  de Y par rapport à X (t), dans le cas général, dans les théorèmes 2 - 5 et

2 - 6.  $Y_x$  est limite de suites  $\alpha_{0n} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt$   
ou  $E(Y) + \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt$  telles que :

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \text{ ou } E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

tendent vers leur borne inférieure.

Ces résultats supposent un choix du sens S de l'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  et ils dépendent du choix de l'ensemble des fonctions auquel appartient  $\rho(t)$ .

Après l'étude du cas où cet ensemble est l'espace  $L_2(T)$ , on examine le cas où  $\rho(t)$  appartient à d'autres ensembles, par exemple l'espace des fonctions continues sur T, ou l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur T.

Dans les derniers théorèmes, on étudie le cas où l'espace des fonctions  $\rho(t)$  est un espace vectoriel à L dimensions. Dans ce cas, l'équation intégrale donnant  $\rho(t)$  telle que la borne inférieure soit atteinte (lorsqu'il existe au moins une solution de cette équation intégrale) devient un système d'équations algébriques, et on est ramené à une régression multiple. L'étude du cas où  $L \rightarrow +\infty$  est ensuite faite. Ces derniers cas sont particulièrement importants pour l'étude statistique que nous ferons à la fin de ce travail.

L'étude de la régression peut se faire si on connaît la fonction de répartition  $F(t_1, x_1, t_2, x_2, y) = \text{Prob}(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, Y < y)$  ou bien les 2 fonctions de répartition

$$F_1(t_1, x_1, t_2, x_2) = \text{Prob}(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2)$$

et

$$F_2(t_1, x_1, y) = \text{Prob}(X(t_1) < x_1, Y < y).$$

Bien entendu certaines hypothèses ne portant pas sur ces fonctions de répartition seront nécessaires si on veut que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  soit définie en certains sens S.

Dans le cas tout à fait particulier de la fonction aléatoire  $X(t) = \sum_{l=1}^L A_l \phi_l(t)$ , les  $\phi_l(t)$  étant des fonctions de carré intégrable sur T (dont nous pouvons supposer que  $\int_T \phi_l(t) dt = 1$ ), les  $A_l$  étant des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, la régression étudiée sans ce chapitre n'est autre que la régression multiple de Y par rapport aux L variables aléatoires  $A_l$ .

#### *Théorème 2 - 1 :*

Si la variable aléatoire Y a un moment du 2e ordre, si  $\rho(t)$  est une fonction certaine quelconque appartenant à un certain en-

semble  $\mathcal{G}$  de fonctions, si  $X(t)$  est une fonction aléatoire de  $t$  définie sur  $T$  telle que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe en un certain sens  $S$  et un moment du 2e ordre quel que soit  $\rho(t) \in \mathcal{G}$ , si  $E(X(t))$  existe, si  $\int_T \rho(t) E(X(t)) dt$  existe  $\forall \rho(t) \in \mathcal{G}$ , si  $S, \mathcal{G}$ , et  $X(t)$  sont tels que,  $\forall \rho(t) \in \mathcal{G}$ ,  $\int_T \rho(t) E(X(t)) dt = E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$

alors :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \geq E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

l'égalité n'étant vérifiée que si  $\alpha_0 = E(Y) - \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$ .

La borne inférieure pour tous les  $\alpha_0$  et tous les  $\rho(t) (\in \mathcal{G})$  de  $E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  est égale à la borne inférieure pour tous les  $\rho(t) (\in \mathcal{G})$

$$\text{de :} \quad E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

*Démonstration*

$$\text{Posons } Y - \int_T \rho(t) X(t) dt = Z$$

$Z$  est une variable aléatoire qui a un moment du 2e ordre (puisque  $Y$  et  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  en ont).

$Z$  a donc une espérance mathématique et

$$\begin{aligned} E(Z) &= E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right] = E(Y) - E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right] \\ &= E(Y) - \int_T \rho(t) E(X(t)) dt \end{aligned}$$

d'après nos hypothèses.

Le théorème se démontre alors en utilisant le fait que si  $Z$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre,  $E(Z - \alpha_0)^2$  est minimum si et seulement si  $\alpha_0 = E(Z)$

N.B. On considèrera souvent dans la suite l'ensemble  $\mathcal{G}$  des fonctions  $\in L_2(T)$

## Théorème 2 - 2

Si les hypothèses du Théorème 2 - 1 sont vérifiées, si de plus  $\xi(t)$  est une fonction appartenant à un ensemble  $\mathcal{G}'$  de fonctions tel que  $\int_T \rho(t) \xi(t) dt$  existe pour tout  $\rho(t) \in \mathcal{G}$  et pour tout  $\xi(t) \in \mathcal{G}'$ , si  $E(X(t)) \in \mathcal{G}'$  ou si, plus généralement, il existe une suite de  $\xi(t) \in \mathcal{G}'$ ,  $\xi_1(t) \dots \xi_n(t)$  telles que

$$\int_T \rho(t) \xi_n(t) dt \rightarrow \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

la borne inférieure de  $E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) [X(t) - \xi(t)] dt \right]^2$

pour tous les  $\alpha_0$  réels,  $\rho(t) \in \mathcal{G}$ ,  $\xi(t) \in \mathcal{G}'$ , est égale à la borne inférieure pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{G}$

de  $E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$

## Démonstration

$$\text{Posons :} \quad Z = Y - \int_T \rho(t) X(t) dt$$

$$k = \alpha_0 - \int_T \rho(t) \xi(t) dt$$

$E[Z - k]^2$  tend vers sa borne inférieure lorsque  $k \rightarrow E(Z)$  ce qui est possible puisqu'il est possible de choisir  $\alpha_0 = E(Y)$  et de choisir une suite de fonctions  $\xi_n(t) \in \mathcal{G}'$  telle que

$$\int_T \rho(t) \xi_n(t) dt \rightarrow \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Théorème 2 - 3

Si  $Y$  et  $Y_1$  sont des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, si  $\zeta(t)$  est une fonction définie sur  $T$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{G}''$  de fonctions, si  $X(t)$  est une fonction aléatoire telle que  $\int_T \zeta(t) X(t) dt$  existe en un certain sens  $S$  quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{G}''$ , si :

$$E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2$$

existe ( $\forall \zeta(t) \in \mathcal{G}''$ ), si  $E(Y X(t))$  et  $E(Y_1 X(t))$  existent et si l'intégrale - L

$$\int_T \zeta(t) E[(Y - Y_1) X(t)] dt$$

existe quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{G}''$  et est égale à

$$E \left[ (Y - Y_1) \int_T X(t) \zeta(t) dt \right],$$

la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$E(Y - Y_1)^2 \leq E \left[ Y - Y_1 - \alpha \int_T X(t) \zeta(t) dt \right]^2$$

quels que soient  $\alpha$  et  $\zeta(t) \in \mathcal{G}''$  ( $\alpha$  étant un nombre quelconque) est que

$$\int_T E[(Y - Y_1) X(t)] \zeta(t) dt = 0$$

quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{G}''$

Si  $\mathcal{G}''$  est l'espace  $L_2(T)$  la condition devient  $E[Y X(t)] = E[Y_1 X(t)]$  presque partout.

*Démonstration*

$$\begin{aligned} E \left[ Y - Y_1 - \alpha \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2 &= E(Y - Y_1)^2 - \\ &\quad - 2\alpha E \left[ (Y - Y_1) \int_T \zeta(t) X(t) dt \right] \\ &\quad + \alpha^2 E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ceci soit minimum pour  $\alpha = 0$  est que :

$$E \left[ (Y - Y_1) \int_T \zeta(t) X(t) dt \right] = 0$$

ou, vu nos hypothèses, que :

$$\int_T E[(Y - Y_1) X(t)] \zeta(t) dt = 0$$

et si ceci est vrai quel que soit  $\zeta(t) \in L_2(T)$

on a :

$$E ( Y X (t)) = E ( Y_1 X (t)) \text{ p. p.}$$

Parmi toutes les variables aléatoires  $Y_1$  possédant cette propriété, nous étudierons, à la suite du théorème 2 - 4,  $Y_x$  fonctionnelle linéaire de  $X (t)$ . Nous donnerons d'abord quelques préliminaires et nous démontrerons 2 lemmes qui seront nécessaires pour l'étude du théorème 2 - 4.

## SUR LES DEVELOPPEMENTS EN SERIE DE FONCTIONS PROPRES

Nous supposons que  $E [ X (t) X (t') ] \in L_2 (T \times T)$ . Soient  $\phi (t)$  les fonctions propres,  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $E (X (t) X (t'))$  c'est-à-dire les  $\lambda_i$  et  $\phi_i (t)$  vérifiant :

$$\int_T E (X (t) X (t')) \phi_i (t) dt = \frac{\phi_i (t')}{\lambda_i}$$

les  $\phi_i (t)$  formant un système orthogonal normé.

$E (X (t) X (t'))$  étant du type  $\geq 0$ , les  $\lambda_i$  sont positifs

$E (X (t) X (t'))$  n'étant pas nul presque partout, il existe au moins une fonction propre. Si le noyau est fermé il y a une infinité de fonctions propres et de valeurs propres. S'il y en a un nombre fini

$$E [ X (t) X (t') ] = \sum_i \frac{\phi_i (t) \phi_i (t')}{\lambda_i}$$

S'il y en a une infinité  $\sum_i \frac{\phi_i (t) \phi_i (t')}{\lambda_i}$  converge en moyenne quadratique vers  $E (X (t) X (t'))$  c'est-à-dire :

$$\iint_{T \times T} \left[ E (X (t) X (t')) - \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i (t) \phi_i (t')}{\lambda_i} \right]^2 dt dt' \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . L'intégrale simple en  $dt$  tend vers 0 pour presque tout  $t'$ .

*Lemme 2-4 :* Soit une fonction aléatoire  $X (t)$  telle que  $E (X (t) X (t'))$  existe et  $\in L_2 (T \times T)$ , et telle que,  $u (t)$  étant une fonction quelconque  $\in L_2 (T)$ ,  $\int_T u (t) X (t) dt$  existe en un certain sens  $S$ ,  $S$  et  $X (t)$  étant tels qu'elle ait un moment de 2e ordre égal à l'intégrale -  $L \iint_{T \times T} u (t) u (t') E (X (t) X (t')) dt dt'$  quel que soit  $u (t) \in L_2 (T)$

La condition nécessaire et suffisante pour que  $E (X (t) X (t'))$  soit un noyau fermé est qu'il n'existe pas de fonction certaine  $u (t)$  vérifiant  $\int_T (u (t))^2 dt \neq 0$  et telle que  $\int_T u (t) X (t) dt$  soit presque sûrement nulle.

*Démonstration*

$$E \left[ \int_T u(t) X(t) dt \right]^2 = \iint_{T \times T} u(t) u(t') E(X(t) X(t')) dt dt'.$$

Dire qu'il n'existe pas de  $u(t) \in L_2(T)$  avec  $\int_T (u(t))^2 dt \neq 0$  annulant le 2ème membre équivaut à dire qu'il n'existe pas de tel  $u(t)$  rendant presque sûrement nulle  $\int_T u(t) X(t) dt$ .

Soit  $\rho(t)$  une fonction  $\in L_2(T)$ . Si les  $\phi_i(t)$  forment un système complet, les  $c_i$  étant les coefficients de Fourier de  $\rho(t)$ , ( $c_i = \int_T \rho(t) \phi_i(t) dt$ ), la série  $\sum_i c_i \phi_i(t)$  converge en moyenne vers  $\rho(t)$ . Si les  $\phi_i(t)$  ne forment pas un système complet  $\rho(t)$  est égal à  $\sum_i c_i \phi_i(t)$  plus une fonction orthogonale aux  $\phi_i(t)$ , (l'égalité et le signe  $\sum$  étant entendus au sens de la convergence en moyenne quadratique sur  $T$ ).

Nous considérerons maintenant  $E(Y X(t))$  dont nous supposons qu'elle existe et  $\in L_2(T)$ . Si les  $\phi_i(t)$  forment un système complet (c'est-à-dire si le noyau  $E(X(t) X(t'))$  est fermé) et si on appelle  $f_i$  les coefficients de Fourier de  $E(Y X(t))$  par rapport aux  $\phi_i(t)$  la série  $\sum_i f_i \phi_i(t)$  converge en moyenne quadratique sur  $T$  vers  $E(Y X(t))$ .

Etudions maintenant le cas où les  $\phi_i(t)$  ne forment pas un système complet, on obtient alors le lemme 2 - 4 bis.

*Lemme 2-4 bis.* Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2ème ordre.

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire ayant un moment du 2ème ordre.

Si  $E[X(t) X(t')]$  est de carré intégrable sur  $T \times T$ .

Si  $E[Y X(t)] \in L_2(T)$ .

Si, l'intégrale étant définie en un certain sens  $S$ ,  $S Y$  et  $X(t)$  sont tels que :

$E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  existe et est égale à l'intégrale - L

$$\int_T \rho(t) E(Y X(t)) dt$$

quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$

$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  existe et est égale à l'intégrale - L

$\iint_{T \times T} \rho(t) \rho(t') E(X(t) X(t')) dt dt'$  quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$ ,

même si le noyau n'est pas fermé  $E(Y X(t))$  est développable en série de fonctions propres orthogonales  $\sum_i f_i \psi_i(t)$  (avec convergence en moyenne quadratique sur  $T$ ) ne contenant que les fonctions  $\psi_i(t)$  qui figurent dans le développement du noyau (ces fonctions  $\psi_i(t)$  formant un système incomplet si le noyau n'est pas fermé).

#### Démonstration

Ceci revient à démontrer que, si  $u(t)$  est quelconque  $\in L_2(T)$  orthogonale à  $E(X(t) X(t'))$ ,  $u(t)$  est aussi orthogonale à  $E(Y X(t))$

$$\int_T u(t) E(X(t) X(t')) dt = 0$$

entraîne

$$\iint_{T \times T} u(t) u(t') E(X(t) X(t')) dt dt' = 0$$

or ceci est égal à  $E \left[ \int_T u(t) X(t) dt \right]^2$  qui est donc nul, il en résulte (inégalité de Schwarz) que  $E \left[ Y \int_T u(t) X(t) dt \right] = 0$  donc que  $\int_T u(t) E[Y X(t)] dt = 0$  ce qui démontre notre lemme.

#### Théorème 2 - 4

Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre, si  $X(t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$  ayant un moment du 2e ordre,

si  $E[X(t) X(t')]$  est de carré intégrable sur  $T \times T$ ,

si  $E[Y X(t)] \in L_2(T)$ ,

si l'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe en un certain sens  $\forall \rho(t) \in L_2(T)$

et a un moment du 2e ordre ( $\forall \rho(t) \in L_2(T)$ )

si de plus  $Y X(t)$  et  $S$  sont tels que,  $\forall \rho(t) \in L_2(T)$  :

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = \iint_{T \times T} \rho(t) \rho(t') E(X(t) X(t')) dt dt'$$

$$E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right] = \int_T \rho(t) E(Y X(t)) dt$$

On a :

$$1/ E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = E(Y^2) - 2 \sum_i c_i f_i + \sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_i}$$

$$\geq E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2 \geq 0$$

(On posera  $E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2 = B_1$ )

2/ De plus, si et seulement si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  converge, il existe au moins une valeur de  $\rho(t)$ ,  $\rho(t) = \sum_i \lambda_i f_i \psi_i(t)$  (la série convergeant vers  $\rho(t)$  en moyenne quadratique sur  $T$ ) pour laquelle l'égalité est obtenue.

S'il n'existe pas de fonction  $u(t) \in L_2(T)$  avec  $\int_T (u(t))^2 dt \neq 0$  telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit presque sûrement nulle, la fonction  $\rho(t)$  pour laquelle  $B_1$  est atteinte est unique. (Nous considérerons comme identiques 2 fonctions  $\rho(t)$  telles que

$$\int_T [\rho_1(t) - \rho_2(t)]^2 dt = 0$$

S'il existe au contraire une telle fonction  $u(t)$ , la fonction  $\rho(t)$  pour laquelle  $B$  est atteinte n'est pas unique et l'égalité sera obtenue si et seulement si  $\rho(t) - \sum_i \lambda_i f_i \psi_i(t)$  est orthogonale aux  $\psi_i(t)$

3/ Même si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  ne converge pas, nous considérerons une suite quelconque  $\rho_n(t)$  de fonctions  $\rho(t)$  telle que

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2$$

tende vers  $B_1$  borne inférieure de  $E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  (il existe de telles suites),  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$  converge alors en moyenne quadratique vers une variable aléatoire

$$Y_{1x} = \sum_i \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt \quad (\text{m. q.}),$$

indépendante de la suite des  $\rho_n(t)$  choisie.

Nous verrons que, lorsque de plus  $E(Y) = 0$ ,  $E(X(t)) = 0$  la régression générale  $Y_x$  définie plus loin est égale à  $Y_{1x}$ .

Démonstration du 1/ :

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = E(Y^2) - 2 E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right] + E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

et d'après nos hypothèses ceci est égal à :

$$E(Y^2) - 2 \int_T \rho(t) E[Y X(t)] dt + \iint_{T \times T} \rho(t) \rho(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

Posons (même si les  $\psi_i(t)$  forment un système incomplet)  $c_i = \int_T \rho(t) \psi_i(t) dt$  (Les  $c_i$  étant les coefficients de Fourier de  $\rho(t)$ ,  $\sum_i c_i^2$  converge).

L'utilisation du lemme 2 - 4 bis, nous permet d'obtenir

$$\int_T \rho(t) E[Y X(t)] dt = \sum_i c_i f_i$$

d'où

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = E(Y^2) - 2 \sum_i c_i f_i + \sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_i}$$

et

$$E(Y^2) - 2 \sum_i c_i f_i + \sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_i} \geq E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2$$

(en effet cette inégalité est équivalente à  $\sum_i \frac{(\lambda_i f_i - c_i)^2}{\lambda_i} \geq 0$ )

qui est toujours vérifiée puisque les valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives).

Il ne nous reste plus pour le 1° qu'à démontrer que

$$E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2 \geq 0$$

$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \geq 0$  quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$  on a donc:

$$E(Y^2) - 2 \sum_i c_i f_i + \sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_i} \geq 0$$

quel que soient les  $c_i$  tels que  $\sum_i c_i^2$  converge.

Si on choisit  $c_i = \lambda_i f_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, I$

$$c_i = 0 \quad \text{pour } i > I \text{ (I entier quelconque)}$$

nous obtenons  $E(Y^2) - \sum_{i=1}^I \lambda_i f_i^2 \geq 0$

ou

$$\sum_{i=1}^I \lambda_i f_i^2 < E(Y^2)$$

ceci étant vrai quel que soit I, la série à termes positifs  $\sum_i \lambda_i f_i^2$  converge et a une somme inférieure ou égale à  $E(Y^2)$

*Démonstration du 2/*

Si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  converge, il existe au moins une fonction  $\rho(t) \in L_2(T)$  dont les coefficients de Fourier  $c_i$  sont égaux à  $\lambda_i f_i$ .  $E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2$  est donc la borne inférieure de

$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  et elle est atteinte pour  $\rho(t) = \sum_i \lambda_i f_i \psi_i(t)$

D'après le lemme 2 - 4, s'il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \in L_2(T)$  vérifiant  $\int_T (u(t))^2 dt \neq 0$  et telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit presque sûrement nulle, le noyau  $E[X(t) X(t')]$  est fermé et les  $\psi_i(t)$  forment un système complet,  $\rho(t)$  est alors unique. Si, au contraire, il existe une telle fonction  $u(t)$ , le noyau n'est pas fermé, les  $\psi_i(t)$  ne forment pas un système complet et la borne inférieure est atteinte pour toute fonction admettant les  $c_i$  comme coefficients de Fourier, c'est-à-dire pour

$$\rho(t) = \sum_i c_i \psi_i(t) + v(t),$$

$v(t) \in L_2(T)$  étant orthogonale aux  $\psi_i(t)$ .

Si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  ne converge pas, il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \in L_2(T)$  dont tous les coefficients de Fourier  $c_i$  sont égaux à  $\lambda_i f_i$  et l'égalité ne peut être vérifiée.

Démonstration du 3/

Soient  $c_{in}$  les coefficients de Fourier de  $\rho_n(t)$  par rapport aux  $\psi_i(t)$

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 = E(Y^2) - 2 \sum_i c_{in} f_i + \sum_i \frac{c_{in}^2}{\lambda_i}$$

Il existe au moins une suite (donc il en existe d'autres) de fonctions  $\rho_n(t) \in L_2(T)$  telles que

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B_1 = E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  (En effet  $\rho_n(t) = \sum_i c_{in} \psi_i(t)$  avec  $c_{in} = \lambda_i f_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $c_{in} = 0$  pour  $i > n$  est un exemple de telle suite)

Pour une suite  $\rho_n(t)$  quelconque telle que :

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B_1 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$E(Y^2) - 2 \sum_i c_{in} f_i + \sum_i \frac{c_{in}^2}{\lambda_i} \rightarrow E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2$$

d'où

$$\sum_i \frac{(c_{in} - \lambda_i f_i)^2}{\lambda_i} \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$

Considérons d'autre part la série  $\sum_i \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt$ , elle converge en moyenne quadratique vers une limite d'après le critère de Cauchy.

En effet :

$$E \left[ \sum_{i=n}^m \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt \right]^2 = \sum_{i=n}^m \lambda_i f_i^2$$

or nous avons vu dans le 1/ que la série à termes positifs  $\sum_i \lambda_i f_i^2$  était convergente, nous avons donc  $\sum_{i=n}^{i=m} \lambda_i f_i^2 < \varepsilon$  (positif arbitrairement petit) dès que  $m > n > N(\varepsilon)$ .

Nous allons maintenant démontrer que  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_{1X}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} E \left[ \int_T \rho_n(t) X(t) dt - Y_{1X} \right]^2 &= E \left[ \int_T \left[ \rho_n(t) - \sum_i \lambda_i f_i \psi_i(t) \right] X(t) dt \right]^2 \\ &= \sum_i \frac{(c_{i_n} - \lambda_i f_i)^2}{\lambda_i} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$

Nous allons donner quelques propriétés de  $Y_{1X}$  (on suppose ici que les hypothèses du théorème 2 - 4 sont vérifiées)

$$1/ E(Y_{1X}^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i f_i^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(Y_{1X}^2) &= \lim_{p \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt \right]^2 \\ \text{or } E \left[ \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt \right]^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j f_i f_j \iint_{T \times T} \psi_i(t) \psi_j(t') E[X(t) X(t')] dt dt' \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j f_i f_j \iint_{T \times T} \psi_i(t) \psi_j(t') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t) \psi_k(t')}{\lambda_k} dt dt' \end{aligned}$$

(le signe  $\sum$  sous intégration étant entendu au sens de la convergence en moyenne quadratique sur  $T \times T$ )

or l'intégrale n'est différente de 0 que si  $i = j = k$  auquel cas elle est égale à  $\frac{1}{\lambda_i}$

Nous obtenons donc :

$$E \left[ \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) X(t) dt \right]^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i^2$$

et quand  $p \rightarrow +\infty$  les limites des 2 membres sont égales

$$E(Y_{1X}^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i f_i^2$$

$$2/E(Y - Y_{1X})^2 = B_1 = E(Y^2) - \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i f_i^2 = E(Y^2) - E(Y_{1X}^2)$$

Démonstration

$Y_{1X}$  étant limite m. q de  $\int_{\tau} \rho_n(t) X(t) dt$

$$\begin{aligned} E(Y - Y_{1X})^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ Y - \int_{\tau} \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \\ &= B_1 = E(Y^2) - \sum_i \lambda_i f_i^2 \end{aligned}$$

or d'après le 1/  $\sum_i \lambda_i f_i^2 = E(Y_{1X}^2)$

$$E(Y - Y_{1X})^2 = E(Y^2) - E(Y_{1X}^2)$$

Toute cette étude est valable même si  $E(Y) \neq 0, E(X(t)) \neq 0$ .

Nous l'utiliserons généralement dans le cas où

$$E(Y) = 0, E(X(t)) = 0$$

et dans ce cas le  $Y_{1X}$  défini précédemment est égal à la régression linéaire m. q qui va être définie plus loin. Nous allons étudier dans ce qui suit le cas général où  $E(Y)$  et  $E(X(t))$  ne sont pas nécessairement nuls.

La borne inférieure de :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_{\tau} \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

peut être inférieure à celle de  $E \left[ Y - \int_{\tau} \rho(t) X(t) dt \right]^2$ . On peut alors appliquer le théorème 2 - 4 à la fonction aléatoire

$$\mathfrak{X}(t) = X(t) - E(X(t))$$

et à la variable aléatoire  $\mathfrak{Y} = Y - E(Y)$  pour obtenir, d'après le théorème 2 - 1, la borne inférieure de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_{\tau} \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

$$\text{et de } E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2$$

DEFINITION DE LA REGRESSION LINEAIRE EN MOYENNE QUADRATIQUE  $Y_x (L_2(T), S)$

Cette régression dépend du choix de l'ensemble des fonctions  $\rho(t)$  considéré (ici c'est  $L_2(T)$ ) et du sens  $S$  attribué à l'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$ .

Si  $Y$  et  $X(t)$  sont une variable aléatoire et une fonction aléatoire (définie sur  $T$ ) ayant un moment du 1er ordre.

Si l'intégrale  $\int_T \rho(t) E(X(t)) dt$  existe et est égale à  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  pour tout  $\rho(t) \in L_2(T)$ .

Si de plus la variable aléatoire  $\mathfrak{y} = Y - E(Y)$  et la fonction aléatoire  $\mathfrak{x}(t) = X(t) - E(X(t))$  vérifient les hypothèses du théorème 2 - 4,

La régression linéaire en moyenne quadratique  $Y_x (L_2(T), S)$  est égale par définition à

$$E(Y) + \sum_i \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) \left[ X(t) - E(X(t)) \right] dt$$

le mode de convergence de la série  $\sum_i$  étant la convergence en moyenne quadratique, les  $\lambda_i$  et  $\psi_i(t)$  étant les valeurs propres et les fonctions propres de

$$E \left[ \left( X(t) - E(X(t)) \right) \left( X(t') - E(X(t')) \right) \right],$$

$f_i$  étant les coefficients de Fourier de

$$E \left[ \left( Y - E(Y) \right) \left( X(t') - E(X(t')) \right) \right]$$

relativement aux  $\psi_i(t')$ .

Les hypothèses C définies ci-dessous permettent la définition de  $Y_x$ .

N.B. A la fin du théorème 2 - 4 intervient avec nos nouvelles notations un  $\mathfrak{y}_{1x} = \sum_i \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) \mathfrak{x}(t) dt$ .  $\mathfrak{y}_{1x}$  est donc égal à  $Y_x - E(Y)$

## Théorème 2 - 5

Moyennant les hypothèses ci-dessus qui ont servi à définir  $Y_x$  ( $L_2(T), S$ ) (ou moyennant les hypothèses C) on a :

1/

$$\begin{aligned} E(Y - Y_x)^2 &= B \leq E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \\ &\leq E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 \end{aligned}$$

B étant la borne inférieure des 2 membres pour tous les  $\alpha_0$  et  $\rho(t) \in L_2(T)$

2/

$$\begin{aligned} B &= E(Y - Y_x)^2 = E[Y - E(Y)]^2 - E[Y_x - E(Y)]^2 = \\ &= E[Y - E(Y)]^2 - \sum_i \lambda_i f_i^2 \end{aligned}$$

3/

Pour toute suite de fonctions  $\rho_n(t) \in L_2(T)$  telle que :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 \rightarrow B,$$

on a :

$$E(Y) + \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \rightarrow Y_x(L_2(T), S)$$

(convergence en moyenne quadratique).

L'application de la 2e partie du théorème 2 - 4 (à la variable aléatoire  $y = Y - E(Y)$  et à la fonction aléatoire  $x(t) = X(t) - E(X(t))$ ) nous donne les conditions d'existence et d'unicité de fonction(s)  $\rho(t) \in L_2(T)$  telle(s) que :

$$E(Y) + \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt = Y_x(L_2(T), S).$$

Ceci résulte des théorèmes 2 - 1 2 - 4 et de leurs conséquences.

N. B. Les hypothèses qui nous ont permis l'étude de  $Y_x (L_2 (T), S)$  sont les conséquences des hypothèses suivantes sur  $Y$  et  $X (t)$  que nous appellerons Hypothèses C.

### HYPOTHESES C

$Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre,  $X (t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$ , ayant un moment du 2e ordre.

$$E (X (t)) \text{ et } E (Y X (t)) \in L_2 (T), \quad E (X (t) X (t')) \in L_2 (T \times T).$$

Quel que soit  $\rho (t) \in L_2 (T)$ ,  $\int_T \rho (t) X (t) dt$  existe un certain sens  $S$  et a un moment du 2e ordre.

De plus  $S$ ,  $X (t)$  et  $Y$  sont tels que, quel que soit  $\rho (t) \in L_2 (T)$ , on ait :

$$\begin{aligned} \iint_{T \times T} \rho (t) \rho (t') E [X (t) X (t')] dt dt' &= E \left[ \int_T \rho (t) X (t) dt \right]^2 \\ \int_T \rho (t) E (X (t)) dt &= E \left[ \int_T \rho (t) X (t) dt \right] \\ \int_T \rho (t) E (Y X (t)) dt &= E \left[ Y \int_T \rho (t) X (t) dt \right] \end{aligned}$$

(ces hypothèses C sont conséquences des hypothèses A ou des hypothèses B du chapitre I)

Dans des questions de statistique considérer la régression  $Y_x (L_2 (T), S)$  égale à

$$E (Y) + \int_T \rho (t) [X (t) - E (X (t))] dt$$

ou limite d'une suite

$$E (Y) + \int_T \rho_n (t) [X (t) - E (X (t))] dt$$

peut soulever des questions d'estimation de  $E (Y)$  et de  $E (X (t))$ .  
Il peut être utile alors de considérer une régression

$$\alpha_0 + \int_T \rho(t) X(t) dt$$

ou une limite de

$$\alpha_{0n} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt$$

Le théorème 2 - 6 sera consacré à cette question. Démontrons d'abord le lemme 2 - 6 qui nous sera utile pour la démonstration de ce théorème.

*Lemme 2-6:* Si la variable aléatoire  $Y$  a un moment du 2e ordre. Si  $\rho(t)$  est une fonction certaine quelconque appartenant à un certain ensemble  $\mathcal{E}$  de fonctions. Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire de  $t$  définie sur  $T$  telle que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe en un certain sens  $S$  et ait un moment du 2e ordre quel que soit  $\rho(t) \in \mathcal{E}$ . Si  $E(X(t))$  existe et si l'intégrale  $-L \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$  existe et est égale à  $E\left[\int_T \rho(t) X(t) dt\right]$  quel que soit  $\rho(t) \in \mathcal{E}$  (cette hypothèse fait intervenir  $\mathcal{E}, S, X(t)$ ).

Si  $\alpha_{0n}$  et  $\rho_n(t)$  sont des suites telles que

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2$$

tende vers sa borne inférieure  $B(\mathcal{E}, S)$  (pour tous les  $\alpha_0$  et tous les  $\rho(t) \in \mathcal{E}$ ).

on a :

$$\alpha_{0n} + \int_T \rho_n(t) E(X(t)) dt \rightarrow E(Y)$$

et  $\rho_n(t)$  est terme d'une suite telle que :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 \rightarrow B(\mathcal{E}, S)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$

S'il existe  $\alpha_0$  et  $\rho(t) \in \mathcal{E}$  tel que

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = B(\mathcal{E}, S)$$

on a :

$$\alpha_0 + \int_T \rho(t) E(X(t)) dt = E(Y)$$

et

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 = B(\mathcal{G}, S)$$

*Démonstration*

On peut écrire :

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 = \\ = E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 + \\ + \left[ E(Y) - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) E(X(t)) dt \right]^2$$

Or  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit, dès que  $n > N(\varepsilon)$ ,

$$B(\mathcal{G}, S) \leq E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 < B(\mathcal{G}, S) + \varepsilon$$

il en résulte que :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 < B(\mathcal{G}, S) + \varepsilon$$

On sait déjà que le 1er membre est  $\geq B(\mathcal{G}, S)$ , ce qui démontre une partie du lemme.

On en déduit que :

$$\left[ E(Y) - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) E(X(t)) dt \right]^2 < \varepsilon$$

ce qui démontre une autre partie du lemme.

La démonstration de la dernière partie du lemme est immédiate.

*Théorème 2 - 6*

Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre, si  $X(t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$ , si  $E(X(t))$  existe,

si  $\mathcal{Y} = Y - E(Y)$  et  $\mathcal{X}(t) = X(t) - E(X(t))$  vérifient les hypothèses du théorème 2 - 4, si l'intégrale  $-L \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$  existe et est égale à  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$  quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$ .

alors :

$\alpha_{on} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_x(L_2(T), S)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour toutes les suites  $\alpha_{on}$  et  $\rho_n(t) \in L_2(T)$  telles que

$$E \left[ Y - \alpha_{on} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

S'il existe  $\alpha_o$  et  $\rho(t) \in L_2(T)$  tels que

$$E \left[ Y - \alpha_o - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = B$$

on a :

$$\alpha_o + \int_T \rho(t) X(t) dt = Y_x(L_2(T), S).$$

*Démonstration*

$$\begin{aligned} \alpha_{on} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt &= \left[ \alpha_{on} + \int_T \rho_n(t) E(X(t)) dt \right] + \\ &+ \int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt \end{aligned}$$

et

$$\alpha_{on} + \int_T \rho_n(t) E(X(t)) dt \rightarrow E(Y)$$

d'après le lemme 2 - 6 appliqué au cas où  $\mathcal{E} = L_2(T)$

D'après ce même lemme 2 - 6, puisque

$$E \left[ Y - \alpha_{on} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B,$$

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 \rightarrow B.$$

Il en résulte d'après le théorème 2 - 4 que

$$\int_T \rho_n(t) [X(t) - E(X(t))] dt$$

converge en moyenne quadratique vers

$$\sum_i \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t) [X(t) - E(X(t))] dt$$

d'où la convergence m. q de

$$\alpha_{on} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt$$

vers  $Y_x$  ( $L_2(T), S$ ) quand  $n \rightarrow +\infty$ .

N. B. Si les hypothèses C sont vérifiées, les hypothèses de ce théorème 2 - 6 le sont.

## RESIDUS

Le résidu de Y par rapport à X(t) sur T est par définition

$$Y - Y_x (L_2(T), S)$$

$E(Y - Y_x)^2$  est appelé variance résiduelle. Cette quantité peut servir de mesure de la qualité de la représentation de Y par  $Y_x$ .

$$\begin{aligned} E(Y - Y_x)^2 &= B = E[Y - E(Y)]^2 - \sum_i \lambda_i f_i^2 \\ &= E[Y - E(Y)]^2 - E[Y_x - E(Y)]^2 \end{aligned}$$

d'après le théorème 2 - 5.

Si la variance résiduelle est nulle, la probabilité pour que  $Y = Y_x$  est égale à 1.

## Théorème 2-7

Si les hypothèses C sont vérifiées et si de plus

$$E \left[ \left( \int_T \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right) (X(t') - E(X(t'))) \right] \\ = \int_T \rho(t) E [X(t) - E(X(t))] [X(t') - E(X(t'))] dt$$

$Y - Y_x$  est non corrélé avec  $X(t)$  pour presque tout  $t$  sur  $T$ .

Démonstration

$$E \left[ (Y - Y_x) [X(t) - E(X(t))] \right] = \\ = \lim_{p \rightarrow +\infty} E \left[ \left\{ Y - E(Y) - \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t') [X(t') - E(X(t'))] dt' \right\} \right. \\ \left. [X(t) - E(X(t))] \right]$$

l'expression dont nous cherchons la limite est égale presque partout à :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \psi_i(t) - \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \int_T \psi_i(t') E \left[ (X(t) - E(X(t))) \right. \\ \left. (X(t') - E(X(t')) \right) dt'$$

(le signe  $\sum$  étant entendu au sens de la convergence m. q)

ceci est égal à :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \psi_i(t) - \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \frac{\psi_i(t)}{\lambda_i} = \sum_{i=p}^{\infty} f_i \psi_i(t)$$

or, quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $\sum_{i=p}^{\infty} f_i \psi_i(t)$  converge vers 0 (en m. q sur  $T$ ) on a donc :

$$E \left[ (Y - Y_x) [X(t) - E(X(t))] \right] = 0$$

presque partout.

CAS OU  $\rho(t) \in \mathcal{E}$  ENSEMBLE DE FONCTIONS DE  $L_2(T)$

*Théorème 2-8*

Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de fonctions tel que :

- a) toute fonction  $\rho \in \mathcal{E}$  appartient à  $L_2(T)$
- b) Si  $\rho_1(t)$  est une fonction quelconque  $\in L_2(T)$  il existe une suite  $\rho_{2,n}(t)$  de fonctions de  $\mathcal{E}$  telle que  $\rho_{2,n}(t)$  converge en moyenne quadratique sur  $T$  vers  $\rho_1(t)$  quand  $n \rightarrow +\infty$

Si  $Y$  et  $X(t)$  vérifiant les hypothèses du théorème 2-4, la borne inférieure  $B_1$  de  $E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  est égale à la borne inférieure  $B_2$  de cette même quantité pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{E}$

*Démonstration*

D'abord  $B_1 \leq B_2$  puisque toute fonction  $\rho \in \mathcal{E}$  est  $\in L_2(T)$

Il nous suffit donc de prouver que,  $\varepsilon$  étant positif arbitrairement petit, il est possible de trouver une fonction  $\rho_{2,n}(t) \in \mathcal{E}$  telle que

$$E \left[ Y - \int_T \rho_{2,n}(t) X(t) dt \right]^2 < B_1 + \varepsilon$$

On a l'identité

$$\begin{aligned} E \left[ Y - \int_T \rho_{2,n}(t) X(t) dt \right]^2 &= E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \\ &+ 2 E \left[ \left( Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right) \left( \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)) X(t) dt \right) \right] \\ &+ E \left[ \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

Or, il existe une fonction  $\rho_1(t)$  telle que :

$$E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 < B_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \leq E(Y^2)$$

Nous allons choisir  $\rho_{2,n}(t)$  pour que les 2e et 3e termes soient inférieurs à  $\frac{\epsilon}{3}$

$$2 E \left[ \left( Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right) \left( \int_T [\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)] X(t) dt \right) \right] \leq 2 \sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)) X(t) dt \right]^2}$$

or

$$E \left[ \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)) X(t) dt \right]^2 \leq \left[ \sqrt{\iint_{T \times T} [E(X(t) X(t'))]^2 dt dt'} \right] \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t))^2 dt$$

et le 1er membre sera inférieur au plus petit des 2 nombres  $\frac{\epsilon}{3}$  et  $\frac{\epsilon^2}{36 E(Y^2)}$  si  $\int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t))^2 dt$  est inférieur au plus petit des 2 nombres.

$$\frac{\epsilon}{3 \sqrt{\iint_{T \times T} [E(X(t) X(t'))]^2 dt dt'}}$$

et

$$\frac{\epsilon^2}{36 E(Y^2) \sqrt{\iint_{T \times T} [E(X(t) X(t'))]^2 dt dt'}}$$

ce qui est possible, vu nos hypothèses.

$$2 \sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T (\rho_{2,n}(t) - \rho_1(t)) X(t) dt \right]^2} < \frac{\epsilon}{3}$$

on a alors pour un tel  $\rho_{2,n}(t) \in \mathcal{B}$

$$E \left[ Y - \int_T \rho_{2,n}(t) X(t) dt \right]^2 < B_1 + \epsilon$$

puisque le 1er membre est égal à la somme

$$\begin{aligned} & E \left[ Y - \int \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \\ & + 2 E \left[ \left( Y - \int \rho_1(t) X(t) dt \right) \left( \int \left( \rho_{2,n}(t) - \rho_1(t) \right) X(t) dt \right) \right] \\ & + E \left[ \int \left( \rho_{2,n}(t) - \rho_1(t) \right) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

et que le 1er terme est inférieur à  $B_1 + \frac{\varepsilon}{3}$

et les 2 autres sont inférieurs à  $\frac{\varepsilon}{3}$

ceci démontre notre théorème.

La borne inférieure de

$$E \left[ Y - E(Y) - \int \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2$$

peut s'étudier en appliquant le théorème précédent à la variable aléatoire  $\mathfrak{Y} = Y - E(Y)$  et à la fonction aléatoire  $\mathfrak{X}(t) = X(t) - E(X(t))$ . On obtient ainsi le résultat suivant :

#### *Théorème 2-9*

Si la variable aléatoire  $Y$  et la fonction aléatoire  $X(t)$  vérifient les hypothèses  $C$ , les bornes inférieures  $B(L_2(T), S)$  et  $B(\mathfrak{G}, S)$  de :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2$$

pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  et pour tous les  $\rho(t) \in \mathfrak{G}$  sont égales ( $\mathfrak{G}$  étant l'ensemble de fonctions défini au début du Théorème 2-8)

Pour toute suite  $\rho_n(t) \in \mathfrak{G}$  telle que :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int \rho_n(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 \rightarrow B(\mathfrak{G}, S) = B(L_2(T), S)$$

on a :

$$E (Y) + \int_T \rho_n (t) (X (t) - E (X (t))) dt$$

converge en m. q. vers  $Y_x (L_2 (T), S)$  étudié au théorème 2 - 5

*Théorème 2 - 10*

Si  $Y$  et  $X (t)$  vérifient les hypothèses C, la borne inférieure  $B (L_2 (T), S)$  de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho (t) X (t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\rho (t) \in L_2 (T)$  est égale à la borne inférieure  $B (\mathfrak{E}, S)$  de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho (t) X (t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\rho (t) \in \mathfrak{E}$

( $\mathfrak{E}$  étant l'ensemble de fonctions défini au début du Théorème 2 - 8) .

Ceci résulte des théorèmes 2 - 1 et 2 - 9.

On a aussi :

$\alpha_{0n} + \int_T \rho_{2,n} (t) X (t) dt$  converge en m. q. vers  $Y_x (L_2 (T), S)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour toutes les suites  $\alpha_{0n}$  et  $\rho_{2,n} (t) \in \mathfrak{E}$  telles que :

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_{2,n} (t) X (t) dt \right]^2 \rightarrow B (\mathfrak{E}, S) = B (L_2 (T), S)$$

Les théorèmes 2 - 8, 2 - 9, 2 - 10 s'appliquent en particulier dans les cas intéressants où  $\mathfrak{E}$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $T$ , ou l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur  $T$ .

*Théorème 2 - 11*

Si  $\mathfrak{E}$  est un espace vectoriel de fonctions, si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre.

Si  $X (t)$  est une fonction aléatoire ayant un moment du 2e ordre,

telle que, quels que soient  $\rho(t)$  et  $\zeta(t) \in \mathfrak{B}$ ,  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe en un certain sens S, a un moment du 2e ordre et si  $Y, X(t), S$  et  $\mathfrak{B}$  sont tels que,  $\forall \rho(t)$  et  $\zeta(t) \in \mathfrak{B}$ , les intégrales

$$\int_T \rho(t) E(Y X(t)) dt$$

et

$$\iint_{T \times T} \rho(t) \zeta(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

existent et sont respectivement égales à

$$E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]$$

et à

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]$$

alors :

la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $\rho(t)$  vérifie

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = B_1$$

(borne inférieure du 1er membre pour tous les  $\rho(t) \in \mathfrak{B}$ ) est que  $\rho(t)$  soit solution de l'équation intégrale :

$$\int_T \left[ \int_T E[X(t) X(t')] \rho(t) dt - E[Y X(t')] \right] \zeta(t') dt' = 0$$

quel que soit  $\zeta(t') \in \mathfrak{B}$ .

Si  $\mathfrak{B}$  est l'espace  $L_2(T)$  la condition est alors qu'il existe une ou des fonctions  $\rho(t) \in L_2(T)$  telle que :

$$\int_T E[X(t) X(t')] \rho(t) dt = E[Y X(t)]$$

presque partout.

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

est alors égal à B pour cette ou ces solution(s)  $\rho(t)$  de l'équation intégrale.

Démonstration

Soit  $\zeta(t)$  une fonction quelconque  $\in \mathfrak{E}$ , nous désirons que

$$E \left[ Y - \int_T (\rho(t) + \alpha \zeta(t)) X(t) dt \right]^2$$

soit minimum pour  $\alpha = 0$  quel que soit  $\zeta(t)$ .

Or :

$$\begin{aligned} E \left[ Y - \int_T (\rho(t) + \alpha \zeta(t)) X(t) dt \right]^2 &= E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \\ &+ 2\alpha \int_T \left[ \int_T E(X(t)X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) \right] \zeta(t') dt' \\ &+ \alpha^2 E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

Pour que ce soit minimum pour  $\alpha = 0$  quel que soit  $\zeta(t) \in \mathfrak{E}$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\rho(t) \in \mathfrak{E}$  tel que :

$$\int_T \left[ \int_T E(X(t) X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) \right] \zeta(t') dt' = 0$$

Si  $\mathfrak{E}$  est l'espace  $L_2(T)$ , ceci est nul quel que soit  $\zeta(t) \in L_2(T)$  si et seulement si :

$$\int_T E(X(t) X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t)) = 0$$

presque partout.

Si  $E(X(t)) \neq 0$   $E(Y) \neq 0$ , pour l'étude de la régression linéaire m. q. on pourra appliquer le Théorème 2 - 11 à la variable aléatoire  $y = Y - E(Y)$  et à la fonction aléatoire  $x(t) = X(t) - E(X(t))$ .

Si  $y$  et  $X(t)$  vérifient les hypothèses du Théorème 2 - 11, on a : la condition nécessaire et suffisante pour que

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 = B(\mathcal{G}, S)$$

(borne inférieure du premier membre pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{G}$ ) est que  $\rho(t)$  soit solution de l'équation intégrale

$$\int_T \left[ \int_T E \left[ (X(t) - E(X(t))) (X(t') - E(X(t')) \right) \right] \rho(t) dt - \\ - E \left[ (Y - E(Y)) (X(t') - E(X(t'))) \right] \right] \zeta(t') dt' = 0$$

quel que soit  $\zeta(t') \in \mathcal{G}$

Si  $\mathcal{G}$  est l'espace  $L_2(T)$  l'équation intégrale devient :

$$\int_T E \left[ (X(t) - E(X(t))) (X(t') - E(X(t'))) \right] \rho(t) dt = \\ = E \left[ (Y - E(Y)) (X(t') - E(X(t'))) \right]$$

pour presque tout  $t'$  et la condition d'existence de solution de cette équation est la convergence de la série  $\sum \lambda_i^2 t_i^2$  rencontrée plus haut.

Si  $\mathcal{G}$  vérifie aussi les hypothèses du théorème 2 - 8,  $B(\mathcal{G}, S)$  considéré ici est égal à  $B(L_2(T), S)$  considéré plus haut et :

$$E(Y) + \int_T \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt = Y_x(L_2(T), S)$$

$\rho(t)$  étant solution de l'équation intégrale ci-dessus.

Nous allons maintenant indiquer les hypothèses suivantes que nous appellerons hypothèses D. Elles nous seront utiles pour la suite.

#### HYPOTHESES D

$\mathcal{G}$  est un espace vectoriel de fonctions définies sur  $T$

$Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre

$X(t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$ , ayant un moment

du 2e ordre et telle que,  $\forall \rho(t) \in \mathcal{G}$ ,  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  existe en un certain sens S et a un moment du 2e ordre.

De plus  $\mathcal{g}$ , S, Y et X(t) sont tels que, quels que soient  $\rho(t)$  et  $\zeta(t) \in \mathcal{G}$ , les intégrales :

$$\int_T \rho(t) E(X(t)) dt, \iint_{T \times T} \rho(t) \zeta(t') E(X(t) X(t')) dt dt'$$

et

$$\int_T \rho(t) E(Y X(t)) dt$$

existent et sont respectivement égales à :

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right], E \left[ \left( \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \left( \int_T \zeta(t) X(t) dt \right) \right]$$

et à

$$E \left[ Y \left( \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \right]$$

#### Théorème 2-12

Si les hypothèses D sont vérifiées, alors :

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\alpha_0$  et  $\rho(t) \in \mathcal{G}$  soient tels que

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

soit égale à la borne inférieure de cette quantité pour tous les  $\alpha_0$  et tous les  $\rho(t) \in \mathcal{G}$  est que  $\alpha_0$  et  $\rho(t)$  soient solution du système :

$$\alpha_0 = E(Y) - \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$$

$$\int_T \left[ \int_T E(X(t) X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) + \alpha_0 E(X(t')) \right] \zeta(t') dt' = 0$$

quel que soit  $\zeta(t') \in \mathcal{G}$

La 2e équation peut d'ailleurs être remplacée par :

$$\int_T \left[ \int_T E [(X(t) - E(X(t)))(X(t') - E(X(t')))] \rho(t) dt - E [(Y - E(Y))(X(t') - E(X(t')))] \right] \zeta(t') dt' = 0$$

Si  $\mathcal{G}$  est l'espace  $L_2(T)$  la 2e équation peut être remplacée par celle que l'on obtient en écrivant que le coefficient de  $\zeta(t')$  sous le signe  $\int$  est nul presque partout.

*Démonstration*

On cherche  $\alpha_0$  et  $\rho(t)$  pour que :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T (\rho(t) + \alpha \zeta(t)) X(t) dt \right]^2$$

soit minimum pour  $\alpha = 0$ , quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T (\rho(t) + \alpha \zeta(t)) X(t) dt \right]^2 &= \alpha_0^2 + 2 \alpha_0 \alpha \int_T \zeta(t) E(X(t)) dt \\ &\quad + \alpha^2 E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2 \\ &\quad - 2 \alpha_0 \left[ E(Y) - \int_T \rho(t) E(X(t)) dt \right] \\ &\quad + 2 \alpha \int_T \left[ \int_T E(X(t)X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) \right] \zeta(t') dt' \\ &\quad + E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

Si on appelle  $z$  le 1er membre, par rapport aux axes  $O\alpha_0$ ,  $O\alpha$ ,  $Oz$  nous avons ci-dessus l'équation d'un paraboléide. Ce paraboléide est elliptique puisque

$$\left[ \int_T \zeta(t) E(X(t)) dt \right]^2 < E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2$$

et tourne sa concavité vers les  $z > 0$  puisque les coefficients de  $\alpha_0^2$  et  $\alpha^2$  sont positifs.

(dans le cas exceptionnel où :

$$\left[ \int_T \zeta(t) E(X(t)) dt \right]^2 = E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2$$

on a un cylindre parabolique à génératrices parallèles au plan  $\alpha_0 O\alpha$  et à concavité vers les  $z > 0$ )

$z$  passe donc par un minimum si et seulement si  $\frac{\partial z}{\partial \alpha_0}$  et  $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$  sont nuls (et nous voulons que ce soit nul pour  $\alpha = 0$  quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{G}$ )

On obtient ainsi les équations

$$\alpha_0 = E(Y) - \int_T \rho(t) E[X(t)] dt$$

$$\int_x \left[ \int_T E(X(t) X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) + \alpha_0 E(X(t')) \right] \zeta(t') dt' = 0$$

quel que soit  $\zeta(t') \in \mathcal{G}$

et en remplaçant dans la 2e équation  $\alpha_0$  tirée de la 1ère on obtient l'équation intégrale qui donne  $\rho(t)$ .

#### *Théorème 2-13*

Si  $\mathcal{G}_L$  est un espace vectoriel de fonctions (espace à  $L$  dimensions). Si  $\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_L(t)$  sont une base de cet espace. Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre, si  $X(t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$  telle que, pour  $l = 1, 2, \dots, L$ ,

$\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  existe (en un certain sens  $S$ ), a un moment du 2e ordre, et si  $Y, X(t), S$  et  $\mathcal{G}$  sont tels que les intégrales

$$\int_T \rho_l(t) E(Y X(t)) dt$$

et

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E(X(t) X(t')) dt dt'$$

( $l$  et  $l' = 1, 2, \dots, L$ ) existent et sont respectivement égales à

$$E \left[ Y \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right]$$

et

$$E \left[ \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_{l'}(t) X(t) dt \right],$$

la condition nécessaire et suffisante pour que

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

soit égale à sa borne inférieure  $B_{11}$  pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{G}_1$  est

que  $\rho(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$ , les  $\alpha_l$  étant solution du système de  $L$  équations à  $L$  inconnues :

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_T \rho_{l'}(t) E[Y X(t)] dt$$

( $l' = 1, 2, \dots, L$ )

S'il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \neq 0$  appartenant à  $\mathcal{G}_1$  telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit avec probabilité 1 égale à 0, ce système admet une et seulement une solution.

#### Démonstration

Nous pouvons en effet appliquer le théorème 2 - 11 dans le cas où  $\mathcal{G}$  est  $\mathcal{G}_1$  et où  $\zeta(t) = \sum_{l=1}^L \beta_l \rho_l(t)$

Nous obtenons ainsi comme condition nécessaire et suffisante que :

$$\rho(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$$

soit solution de l'équation intégrale :

$$\int_T \left[ \int_T E[X(t) X(t')] \left( \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) \right) - E[Y X(t')] \right] \sum_{l'=1}^L \beta_{l'} \rho_{l'}(t') dt' = 0$$

quels que soient les  $\beta_{l'}$ ,

Nous obtenons donc le système de  $L$  équations à  $L$  inconnues :

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_T \rho_{l'}(t) E[Y X(t)] dt$$

( $l' = 1, 2, \dots, L$ )

S'il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \neq 0$  appartenant à  $\mathcal{G}_1$  telle qu'il y ait probabilité 1 pour que  $\int_T u(t) X(t) dt = 0$ ,

$$E \left[ \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right]^2$$

est une forme quadratique positive (elle ne s'annule que pour tous les  $\alpha_l$  nuls). Le discriminant de cette forme quadratique est donc différent de 0, or, c'est le déterminant du système d'équations qui donne les  $\alpha_l$ . Il y a donc une seule solution pour ce système.

Si, au contraire, il existe des fonctions certaines  $u(t) \neq 0$ , appartenant à  $\mathcal{G}_{L_1}$ , telle que  $\text{Prob} \left[ \int_T u(t) X(t) dt = 0 \right] = 1$ , s'il existe également des  $u(t)$  telles que  $E \left[ \int_T u(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0$ , il existe un sous espace  $\mathcal{G}_{L_1} \in \mathcal{G}_1$  tel qu'il n'y ait pas de  $u(t) \neq 0$  appartenant à  $\mathcal{G}_{L_1}$  tel que  $E \left[ \int_T u(t) X(t) dt \right]^2 = 0$  et que tout

$$u(t) \in \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{L_1} \text{ vérifie } E \left[ \int_T u(t) X(t) dt \right]^2 = 0$$

En appliquant alors le théorème précédent à  $\mathcal{G}_{L_1}$  on obtient  $\rho_1(t) \in \mathcal{G}_{L_1}$  tel que

$$E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 = B_1(\mathcal{G}_{L_1})$$

On a aussi  $B_1(\mathcal{G}_{L_1}) = B_1(\mathcal{G}_1)$  et les  $\rho(t) \in \mathcal{G}_1$  tels que

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = B_1(\mathcal{G}_1)$$

sont égaux à  $\rho_1(t)$  plus une fonction arbitraire appartenant à  $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{L_1}$ .

Employons maintenant des notations matricielles qui seront utiles pour la suite

Soit  $\|\alpha\|$  la matrice colonne  $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{vmatrix}$ ,  $\|C\|$  la matrice colonne

dont les éléments sont  $c_m = \int_T E (Y X (t)) \rho_m (t) dt$  ( $m = 1, 2 \dots L$ )

$\| B \|$  la matrice carrée à  $L^2$  éléments :

$$b_{ml} = \iint_{T \times T} \rho_l (t) \rho_m (t') E (X (t) X (t')) dt dt'$$

( $l$  et  $m$  égaux à  $1, 2 \dots L$ )

le système d'équations du théorème 2 - 13 devient

$$\| B \| \times \| \alpha \| = \| C \|$$

#### *Théorème 2 - 14*

Si les hypothèses du théorème 2 - 13 sont vérifiées et si de plus

$$E \left[ \int_T \rho_l (t) X (t) dt \right] = \int_T \rho_l (t) E (X (t)) dt$$

(avec  $l = 1, 2 \dots L$ ) la condition nécessaire et suffisante pour que

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho (t) X (t) dt \right]^2$$

soit égale à la borne inférieure  $B (\mathcal{B}_1)$  de cette même quantité pour tous les  $\alpha_0$  et tous les  $\rho (t) \in \mathcal{B}_1$  est que  $\alpha_0$  et les  $\alpha_l$  coordonnées de  $\rho (t)$  ( $\rho (t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l (t)$ ) soient solution du système de  $L + 1$  équations à  $L + 1$  inconnues :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l (t) E (X (t)) dt &= E (Y) \\ \alpha_0 \int_T \rho_{l'} (t) E (X (t)) dt + \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} \rho_l (t) \rho_{l'} (t') E [X (t) X (t')] dt dt' & \\ &= \int_T \rho_{l'} (t) E (Y X (t)) dt \end{aligned}$$

( $l' = 1, 2 \dots L$ )

S'il n'existe pas de fonction certaine  $u (t) (\neq 0)$  appartenant à  $\mathcal{B}_1$  telle qu'il y ait une probabilité égale à 1 pour que  $\int_T u (t) X (t) dt = k$  ce système d'équation admet une solution unique.

## Démonstration

Nous pouvons en effet appliquer le théorème 2 - 12 et la démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2 - 13.

L'équation intégrale du théorème 2 - 12 devient le système d'équations algébriques de notre théorème.

Comme

$$E \left[ \alpha_0 + \alpha_l \sum_{l=1}^L \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right]^2$$

ne s'annule que pour tous les  $\alpha$  nuls, le discriminant de cette forme quadratique, qui n'est autre que le déterminant de notre système d'équations est différent de 0.

Il est à noter que le système d'équations du théorème 2 - 13 ne se déduit pas de celui de notre théorème 2 - 14 en faisant  $\alpha_0 = 0$ , et que ce théorème 2 - 13 est valable même si  $E(Y)$  et  $E(X(t))$  sont différents de 0.

Le cas où il existe  $u(t) \neq 0$  tel que, avec probabilité 1,  $\int_T u(t) X(t) dt$  est égal à une constante  $k$  se traite comme nous l'avons fait précédemment à la suite du théorème 2 - 13.

Dans les questions d'estimation, nous utiliserons les notations matricielles.

Soit  $\|\alpha\|$  la matrice colonne  $\left\| \begin{array}{c} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{array} \right\|$

$\|C\|$  la matrice colonne à  $L + 1$  lignes dont les éléments sont :

$$c_0 = E(Y) \dots c_m = \int_T E(Y X(t)) \rho_m(t) dt \quad (m = 1 \dots L)$$

$\|B\|$  la matrice à  $L + 1$  lignes et colonnes dont les éléments sont :

$$b_{00} = 1 \quad b_{0m} = b_{m0} = \int_T \rho_m(t) E(X(t)) dt$$

$$b_{m\lambda} = \iint_{T \times T} \rho_\lambda(t) \rho_m(t') E(X(t) X(t')) dt dt'$$

( $\lambda$  et  $m$  égaux à 1, 2 ... L) le système d'équations du théorème 2 - 14 devient

$$\| B \| \times \| \alpha \| = \| C \|$$

$\| B \|$ ,  $\| \alpha \|$  et  $\| C \|$  n'ont pas ici le même sens qu'au théorème précédent.

### Théorème 2 - 15

Si les hypothèses du théorème 2 - 4 sont vérifiées et si  $\rho_1(t), \rho_2(t) \dots \rho_l(t) \dots$  ( $\rho_l(t) \in L_2(T)$  quel que soit  $l$ ) forment un système complet, la borne inférieure de

$$E \left[ Y - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt \right]^2$$

tend quand  $L \rightarrow +\infty$  vers la borne inférieure  $B_1$  de

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \quad (\rho(t) \in L_2(T))$$

et  $\int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_1$ , (défini au théorème 2 - 4) quand  $L \rightarrow +\infty$ , lorsque les  $\alpha$  sont les valeurs correspondant au minimum. (Nous poserons alors cette intégrale égale à  $Y_1$  ( $\mathcal{E}_1$ ))

### Démonstration

$\rho(t)$  étant une fonction quelconque  $\in L_2(T)$ ,  $\alpha_l$  étant les coefficients de Fourier de  $\rho(t)$  par rapport aux  $\rho_l(t)$ ,  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  converge en moyenne quadratique sur  $T$  vers  $\rho(t)$  quand  $L \rightarrow +\infty$ ,

La première partie du théorème résulte alors de l'étude faite lors du théorème 2 - 8 (avec  $\mathcal{E}$  du théorème 2 - 8 remplacé par

$L_2(T)$ ,  $\rho_{2,n}(t)$  par  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$ )

La 2ème partie de notre théorème 2 - 15 résulte de la 1ère partie et du théorème 2 - 4 3°.

### Théorème 2 - 16

Si les hypothèses C sont vérifiées et si  $\rho_1(t), \rho_2(t) \dots \rho_l(t) \dots$  ( $\rho_l(t) \in L_2(T)$  quel que soit  $l$ ) forment un système complet.

La borne inférieure  $B(\mathcal{G}_L, S)$  de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt \right]^2$$

tend quand  $L \rightarrow +\infty$  vers la borne inférieure  $B(L_2(T), S)$  de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

et

$$\alpha_0 + \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x(L_2(T), S)$  quand  $L \rightarrow +\infty$ , lorsque les  $\alpha$  ont les valeurs correspondant au minimum.

Nous poserons alors  $Y_x(\mathcal{G}_L) = \alpha_0 + \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt$

*Démonstration*

$\rho(t)$  étant une fonction quelconque de  $L_2(T)$ ,  $\alpha_l$  les coefficients de Fourier de  $\rho(t)$  par rapport aux  $\rho_l(t)$ ,  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  converge m. q. sur  $T$  vers  $\rho(t)$  quand  $L \rightarrow +\infty$ .

La 1ère partie du théorème résulte alors de l'étude faite lors de la démonstration du théorème 2 - 10.

La 2ème partie de ce théorème 2 - 16 résulte de la 1ère partie et du théorème 2 - 6.

*Théorème 2 - 17*

Soient les espaces vectoriels  $\mathcal{G}_{L_1} \subset \mathcal{G}_{L_2} \subset L_2(T)$   $\mathcal{G}_{L_1}$  ayant pour base  $\rho_1(t) \dots \rho_{L_1}(t)$ ,

$\mathcal{G}_{L_2}$  ayant pour base  $\rho_1(t) \dots \rho_{L_1}(t) \rho_{L_1+1}(t) \dots \rho_{L_2}(t)$ .

Supposons les hypothèses du théorème 2 - 13 vérifiées et que les bornes inférieures de  $E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$  pour  $\rho(t) \in \mathcal{G}_{L_1}$  et pour  $\rho(t) \in \mathcal{G}_{L_2}$  soient respectivement atteintes pour  $\rho(t) = r_1(t)$  et pour  $\rho(t) = r_2(t)$ .

$r_1(t)$  diffère en général de la composante de  $r_2(t)$  dans  $\mathcal{E}_{L_1}$ . Il y a dans certains cas égalité de  $r_1(t)$  et de la composante de  $r_2(t)$  dans  $\mathcal{E}_L$  notamment lorsque  $\rho_1(t) \rho_2(t) \dots \rho_{L_1}(t) \dots \rho_{L_2}(T)$  sont des fonctions propres de  $E(X(t) X(t'))$

*Démonstration*

D'après le théorème 2 - 13

$$r_1(t) = \sum_{l=1}^{L_1} \alpha_l^{(1)} \rho_l(t)$$

$$r_2(t) = \sum_{l=1}^{L_2} \alpha_l^{(2)} \rho_l(t)$$

avec les  $\alpha_l^{(1)}$  et  $\alpha_l^{(2)}$  solution des systèmes d'équations suivants :

$$\sum_{l=1}^{L_1} \alpha_l^{(1)} \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_T \rho_{l'}(t) E(Y X(t)) dt$$

( $l' = 1, 2 \dots L$ )

$$\sum_{l=1}^{L_2} \alpha_l^{(2)} \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E(X(t) X(t')) dt dt' = \int_T \rho_{l'}(t) E(Y X(t)) dt$$

( $l' = 1, 2 \dots L$ )

l'égalité  $\alpha_l^{(1)} = \alpha_l^{(2)}$  pour  $l = 1, 2 \dots L_1$  exige que

$$\sum_{l=L_1+1}^{L_2} \alpha_l^{(2)} \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E(X(t) X(t')) dt dt' = 0$$

pour  $l' = 1, 2 \dots L_1$

Ce qui n'est pas toujours vérifié.

Ceci serait vérifié notamment si les  $\rho_l(t)$  étaient les fonctions propres de  $E(X(t) X(t'))$ , car alors

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E(X(t) X(t')) dt dt' = 0$$

pour  $l = L_1 + 1, L_1 + 2, \dots, L_2$

$l' = 1, 2 \dots L_1$

### CHAPITRE III

## COEFFICIENT DE CORRÉLATION DE LA VARIABLE ALÉATOIRE Y ET DE LA FONCTION ALÉATOIRE X (t) DÉFINIE SUR T

Ce coefficient de corrélation  $\rho$  que nous définirons, moyennant certaines hypothèses, sera la borne supérieure du coefficient de corrélation de Y et de  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  tels que  $E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0$

Il est nécessairement supérieur ou égal à 0 et inférieur ou à 1.

Ce coefficient de corrélation peut être considéré comme une généralisation du coefficient de corrélation multiple de Y et de L variables aléatoires ; par exemple, dans le cas tout à fait particulier où

$$X(t) = \sum_{l=1}^L A_l \psi_l(t)$$

les  $A_l$  étant L variables aléatoires, le coefficient de corrélation  $\rho$  devient dans ce cas le coefficient de corrélation multiple de Y et des  $A_l$ .

Les théorèmes 3 - 5 et 3 - 6 aboutissent à l'étude de la borne supérieure du coefficient de corrélation de Y et de  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  lorsque  $\rho(t) \in \mathcal{E}$ , espace vectoriel de fonctions pouvant être différent de  $L_2(T)$ .

#### Théorème 3 - 1

Si Y est une variable aléatoire ayant un moment du 2ème ordre différent de 0, si X (t) est une fonction aléatoire du 2ème ordre définie sur T si  $E[X(t) X(t')]$  est de carré intégrable sur  $T \times T$ , si  $E[Y X(t)] \in L_2(T)$ .

Si l'intégrale

$$\int_T \rho(t) X(t) dt$$

existe en un certain sens  $S$  ( $\forall \rho(t) \in L_2(T)$ ) et a un moment du 2e ordre ( $\forall \rho(t) \in L_2(T)$ ). Si de plus  $Y, X(t)$  et  $S$  sont tels que,  $\forall \rho(t) \in L_2(T)$ , on ait :

$$\begin{aligned} E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right] &= \int_T \rho(t) E[Y X(t)] dt \\ E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 &= \iint_{T \times T} \rho(t) \rho(t') E[X(t) X(t')] dt dt' \end{aligned}$$

$\phi_i(t)$  désignant les fonctions propres de  $E[X(t) X(t')]$ ,  $\lambda_i$  les valeurs propres,  $c_i$  et  $f_i$  les coefficients de Fourier de  $\rho(t)$  et  $E[Y X(t)]$  par rapport aux  $\phi_i(t)$ ,

alors on a :

$$1/ \frac{E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum_i \lambda_i f_i^2}}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E(Y_{1x}^2)}} = \frac{E[Y Y_{1x}]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E(Y_{1x}^2)}}$$

pour tous les  $\rho(t)$  pour lesquels ce premier rapport est défini, i.e. tels que

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0$$

( $Y_{1x}$  a été défini au théorème 2 - 4).

2/ Si et seulement si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  est convergente, il existe des valeurs de  $\rho(t)$  pour lesquelles

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2}}$$

est égal à sa borne supérieure  $\sqrt{\frac{\sum_i \lambda_i f_i^2}{E(Y^2)}}$

L'égalité est vérifiée si et seulement si  $\rho(t)$  est égal, à une constante positive multiplicative près, à la ou les solutions  $\rho(t)$  de l'équation :

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 = B_1$$

(Solution dont nous supposons que

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0,$$

ce qui est vrai si  $\sum_i \lambda_i f_i^2 \neq 0$ , ou ce qui revient au même si  $E(Y X(t))$  n'est pas nul presque partout).

3/ Dans le cas général où la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  ne converge pas nécessairement, si  $\rho_1(t) \dots \rho_n(t) \dots$  est une suite quelconque de fonctions  $\in L_2(T)$  telles que

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B_1$$

borne inférieure de

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$ ,

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2}}$$

tend vers la borne supérieure  $\frac{\sum_i \lambda_i f_i^2}{E(Y^2)}$ . (Nous supposons ici encore

$\sum_i \lambda_i f_i^2 \neq 0$  ou que  $E(Y X(t))$  n'est pas nul presque partout).

Démonstration

1/ En effet, cette inégalité équivaut à :

$$\frac{\sum_i c_i f_i}{\sqrt{\sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_i}}} \leq \sqrt{\sum_i \lambda_i f_i^2}$$

laquelle est équivalente à :

$$\sum_i \left( \frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) (\sqrt{\lambda_i} f_i) \leq \sqrt{\sum_i \left( \frac{c_i^2}{\lambda_i} \right)} \sqrt{\sum_i (\sqrt{\lambda_i} f_i)^2}$$

qui n'est autre que l'inégalité de Schwarz.

Nous avons vu après le théorème 2 - 4 que

$$E [Y \cdot Y_{1x}] = E (Y_{1x}^2) = \sum_i \lambda_i f_i^2$$

l'égalité

$$\frac{\sqrt{\sum_i \lambda_i f_i^2}}{\sqrt{E (Y^2)}} = \frac{E [Y \cdot Y_{1x}]}{\sqrt{E (Y^2)} \sqrt{E (Y_{1x}^2)}}$$

est donc vérifiée.

2/ En effet, l'inégalité de Schwarz ci-dessus se transforme en égalité si et seulement si :

$$\frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} = k \sqrt{\lambda_i} f_i \quad \text{ou si} \quad c = k \lambda_i f_i$$

(k étant positif). Ce choix pour les  $c_i$  est possible puisqu'ils ne sont soumis qu'à la restriction que  $\sum_i c_i^2$  converge et que la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  converge par hypothèse.

D'après le Théorème 2 - 4,  $\rho (t)$  est alors égal, à une constante positive multiplicative près, à la ou les solution (s) de l'équation :

$$E \left[ Y - \int_T \rho (t) X (t) dt \right]^2 = B_1$$

Si au contraire la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  n'est pas convergente, le choix  $c = k \lambda_i f_i$  n'est pas possible, l'inégalité de Schwarz ci-dessus ne se transforme pas en égalité.

3/ Si

$$E \left[ Y - \int_T \rho_n (t) X (t) dt \right]^2 \rightarrow B_1$$

d'après le théorème 2 - 4 3/

$$\int_T \rho_n(t) X(t) dt \rightarrow Y_{1x} \quad (\text{m. q.})$$

et si  $E(Y_{1x}^2) \neq 0$  (c'est-à-dire si  $\sum_i \lambda_i f_i^2 \neq \bar{0}$  ou ce qui revient au même si  $E(Y X(t))$  n'est pas nul presque partout)

$$\frac{E\left[Y \int_T \rho_n(t) X(t) dt\right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E\left[\int_T \rho_n(t) X(t) dt\right]^2}} \rightarrow \frac{E(Y Y_{1x})}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E(Y_{1x})^2}} = \frac{\sqrt{\sum_i \lambda_i f_i^2}}{\sqrt{E(Y^2)}}$$

Si  $E(Y) = 0$   $E(X(t)) = 0$  et si

$$E\left[\int_T \rho(t) X(t) dt\right] = \int_T \rho(t) E(X(t)) dt$$

quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$  le théorème 3 - 1 nous permet d'étudier la borne supérieure du coefficient de corrélation de  $Y$  et de

$$\int_T \rho(t) X(t) dt$$

pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  pour lesquels  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  n'est pas nul presque partout.

Si  $E(Y)$  et  $E(X(t))$  ne sont pas nécessairement nuls on peut appliquer le théorème 3 - 1 à  $\mathcal{Y} = Y - E(Y)$  et à  $\mathcal{X}(t) = X(t) - E(X(t))$  si  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X}(t)$  vérifient les hypothèses de ce théorème.

On obtient ainsi le théorème 3 - 2.

Ici  $\lambda_i$  et  $\phi_i(t)$  seront les valeurs propres et les fonctions propres de

$$E\left[\left(X(t) - E[X(t)]\right) \left(X(t') - E[X(t')]\right)\right]$$

à les coefficients de Fourier de

$$E\left[\left(Y - E(Y)\right) \left(X(t) - E[X(t)]\right)\right]$$

par rapport aux  $\phi_i(t)$ .

## Théorème 3 - 2

Si les hypothèses C sont vérifiées. Si  $E[Y - E(Y)]^2 \neq 0$  et si  $\rho(t) \in L_2(T)$  est tel que :

$$E \left[ \int_T \rho(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 \neq 0.$$

1/ le coefficient de corrélation de Y et de  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  (qui est d'ailleurs égal au coefficient de corrélation de Y - E(Y) et de

$$\int_T \rho(t) [X(t) - E[X(t)]] dt$$

ou au coefficient de corrélation de Y et de

$$\alpha_0 + \int_T \rho(t) X(t) dt$$

est inférieur ou égal au coefficient de corrélation  $\mathcal{C}$  de Y et de  $Y_x (L_2(T))$  défini au théorème 2 - 5.

(coefficient qui est égal à  $\sqrt{\frac{\sum_i \lambda_i f_i^2}{E(Y - E(Y))^2}}$ )

2/ Si et seulement si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  converge, il existe  $\rho(t)$  telle qu'il y ait égalité, ces  $\rho(t)$  étant le produit d'une constante positive par la (ou les) solution (s) de l'équation

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 = B$$

(quand B n'est pas connu la (ou les) solution (s) de cette équation est (ou sont) donnée (s) par la 2e équation intégrale du théorème 2 - 12 appliquée dans le cas où  $\mathcal{E}$  est  $L_2(T)$ ).

3/ Dans le cas général où  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  n'est pas nécessairement convergente, si  $\rho_1(t) \dots \rho_n(t) \dots$  est une suite de fonctions  $\in \mathcal{E}$  (ensemble de fonctions de  $L_2(T)$ ) telle que :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 \rightarrow B (L_2(T))$$

(cf. théorème 2 - 5), le coefficient de corrélation de Y et de

$$\int_T \rho_n(t) X(t) dt$$

tend, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers le coefficient de corrélation  $c$  de Y et de  $(Y_x(L_2(T)))$ .

### Théorème 3 - 3

Si les hypothèses C sont vérifiées, si  $\alpha_{01} \dots \alpha_{0n} \dots$  et  $\rho_1(t) \dots \rho_n(t) \dots (\rho_1(t) \dots \rho_n(t) \dots \in \mathcal{G}$  ensemble de fonctions de  $L_2(T)$ ) sont 2 suites telles que

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  (B borne inférieure de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_0$  et tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$ )

Le coefficient de corrélation de Y et de

$$\alpha_{0n} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt,$$

tend quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers le coefficient de corrélation  $c$  de Y et de  $Y_x(L_2(T))$ .

### Démonstration

Si

$$E \left[ Y - \alpha_{0n} - \int_T \rho_n(t) X(t) dt \right]^2 \rightarrow B$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ , d'après le lemme 2 - 6 :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_n(t) (X(t) - E(X(t))) dt \right]^2 \rightarrow B$$

et, d'après le théorème 3 - 2 3/, le coefficient de corrélation de Y

et de

$$\int_T \rho_n(t) X(t) dt$$

(qui est aussi le coefficient de corrélation de Y et de

$$\alpha_{0n} + \int_T \rho_n(t) X(t) dt$$

tend vers  $\mathcal{C}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### *Théorème 3 - 4*

Si les hypothèses (C) sont vérifiées, et si  $\rho_1(t) \rho_2(t) \dots \rho_l(t) \dots \rho_L(t) \dots$  sont des fonctions de  $L_2(T)$  formant un système complet, le coefficient de corrélation multiple  $\mathcal{C}_l$  de Y avec les L variables aléatoires

$$\int_T \rho_l(t) X(t) dt \quad (l = 1, 2 \dots L)$$

tend, quand  $L \rightarrow +\infty$ , vers le coefficient de corrélation  $\mathcal{C}$  de Y et de  $Y_x$ .

### *Démonstration*

D'après la théorie élémentaire du coefficient de corrélation multiple d'une variable aléatoire par rapport à L variables aléatoires,  $\mathcal{C}_l$  est le coefficient de corrélation de Y et de

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt,$$

les  $\alpha_l$  étant tels que :

$$E \left[ Y - \alpha_l - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right]^2$$

soit égal à sa borne inférieure pour tous les  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L$ .

Or quand  $L \rightarrow +\infty$ , d'après le théorème 2 - 15 :

$$\alpha_0 + \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$ . Il en résulte que  $\mathcal{C}_l$  tend quand  $L \rightarrow +\infty$  vers le coefficient de corrélation  $\mathcal{C}$  de Y et de  $Y_x$ .

Remarques sur le coefficient de corrélation  $\rho$ .

D'après le théorème 3-2

$$\rho = \frac{\sqrt{\sum_i \lambda_i f_i^2}}{\sqrt{E [Y - E (Y)]^2}}$$

et d'après ce qui a été vu au Chapitre II dans l'étude des résidus

$$\sum_i \lambda_i f_i^2 = E [Y - E (Y)]^2 - E [Y - Y_x]^2$$

on a donc 
$$\rho^2 = 1 - \frac{E [Y - Y_x]^2}{E [Y - E (Y)]^2}$$

ce qui peut encore s'écrire, en appelant  $\sigma_Y^2$  et  $\sigma_{Y-Y_x}^2$  la variance de Y et la variance résiduelle :

$$\sigma_{Y-Y_x}^2 = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$$

ceci est d'ailleurs égal à la borne B considérée aux théorèmes 2-5 et 2-6.

Le coefficient de corrélation  $\rho$  vérifie  $0 \leq \rho \leq 1$

si  $\rho = 1$ ,  $\sigma_{Y-Y_x}^2 = 0$  et il y a une probabilité égale à 1 pour que  $Y = Y_x$

si  $\rho = 0$ ,  $\sum_i \lambda_i f_i^2 = 0$  presque partout

Les  $\lambda_i$  étant tous positifs, tous les  $f_i$  sont donc nuls et

$$E \left[ [Y - E (Y)] [X (t) - E (X (t))] \right] = 0 \text{ presque partout}$$

réciroquement, si

$$E \left[ [Y - E (Y)] [X (t) - E (X (t))] \right]$$

est nul presque partout,  $\rho = 0$ .

théorème 3-5

Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de fonctions définies sur T, soit Y

une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre différent de 0 et soit  $X(t)$  une fonction aléatoire ayant un moment du 2e ordre,

$$\text{Si } \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt$$

existe en un certain sens  $S$  quel que soit  $\rho(t) \in \mathcal{E}$  et a un moment du 2e ordre ( $\forall \rho(t) \in \mathcal{E}$ )

Si  $Y, X(t), S$  et  $\mathcal{E}$  sont tels que les intégrales - L

$$\int_{\mathcal{T}} \rho(t) E[Y X(t)] dt$$

et

$$\iint_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}} \rho(t) \zeta(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

existent quels que soient  $\rho(t)$  et  $\zeta(t) \in \mathcal{E}$  et sont respectivement égales à

$$E \left[ Y \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt \right]$$

et à

$$E \left[ \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt \int_{\mathcal{T}} \zeta(t) X(t) dt \right]$$

Si de plus

$$\int_{\mathcal{T}} \zeta(t) E[Y X(t)] dt$$

n'est pas nul quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{E}$ ,

la borne supérieure de

$$\frac{E \left[ Y \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt \right]^2}}$$

pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{E}$  pour lesquels ce rapport est défini (c'est-à-dire tels que

$$E \left[ \int_{\mathcal{T}} \rho(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0)$$

est atteinte si et seulement si  $\rho(t)$  est égale, à une constante positive multiplicative près, à une solution de l'équation intégrale :

$$\int_T \left[ \int_T E(X(t) X(t')) \rho(t) dt - E(Y X(t')) \right] \zeta(t') dt' = 0$$

( $\zeta(t')$  étant une fonction quelconque  $\in \mathcal{E}$ ).

Si  $\mathcal{E}$  est l'espace  $L_2(T)$  l'équation intégrale devient :

$$\int_T E[X(t) X(t')] \rho(t) dt = E Y X(t') \text{ presque partout.}$$

*Démonstration*

Notons tout d'abord que grâce à l'hypothèse

$$\int_T \zeta(t) E(Y X(t)) dt$$

n'est pas nul quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{E}$ , nous allons pouvoir démontrer que, si  $\rho_1(t)$  est solution de l'équation intégrale,

$$E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \neq 0$$

En effet, si

$$E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2$$

était nul,

$$E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt - \alpha \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2 = E \left[ Y - \alpha \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2$$

serait minimum pour  $\alpha = 0$  quel que soit  $\zeta(t)$  et ce minimum serait

$$E(Y^2) - E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 = E(Y^2)$$

(cf théorème 2 - 11). Ceci entraînerait

$$E \left[ Y \int_T \zeta(t) X(t) dt \right] = \int_T \zeta(t) E [Y X(t)] dt = 0$$

quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{S}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si  $\rho_1(t)$  est solution de l'équation intégrale

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2}}$$

existe donc.

*Démonstration de la condition suffisante*

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2}} \leq \frac{E \left[ Y \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2}}$$

Nous appellerons  $\lambda$  ce premier rapport

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2}}$$

Posons  $\rho(t) = \rho_1(t) + \alpha \zeta(t)$

( $\rho_1(t)$  et  $\zeta(t) \in \mathcal{S}$ ,  $\rho_1(t)$  étant toujours solution de l'équation intégrale).

Posons aussi pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} A^2 &= \iint_{T \times T} E[X(t) X(t')] \rho_1(t) \rho_1(t') dt dt' = \int_T \rho_1(t) E[Y X(t)] dt \\ &= E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

avec  $A > 0$

$$B = \int_T \zeta(t) E[Y X(t)] dt = \iint_{T \times T} E[X(t) X(t')] \rho_1(t') \zeta(t) dt dt'$$

$$C^2 = \iint_{T \times T} E [X(t) X(t')] \zeta(t) \zeta(t') dt dt' = E \left[ \int_T \zeta(t) X(t) dt \right]^2$$

avec  $C \geq 0$

On a alors :

$$\lambda = \frac{A^2 + \alpha B}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2}}$$

la quantité sous le radical étant positive

$$A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2 > 0$$

$$B^2 - A^2 C^2 \leq 0$$

(si  $B^2 - A^2 C^2 = 0$  nous écartons d'après nos hypothèses la possibilité d'avoir  $\alpha = \alpha_1$  racine double de l'équation  $A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2 = 0$ ).

Or

$$\lambda = \frac{A^2 + \alpha B}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2}} \leq \frac{A}{\sqrt{E(Y^2)}}$$

car

$$(A^2 + \alpha B)^2 \leq A^2 (A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2)$$

puisque

$$B^2 \leq A^2 C^2$$

ce qui démontre la condition suffisante puisque

$$\frac{E \left[ Y \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]}{\sqrt{E(Y^2)} \sqrt{E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2}} = \frac{A}{\sqrt{E(Y^2)}}$$

*Démonstration de la condition nécessaire*

Nous examinerons les 2 cas 1/  $B^2 < A^2 C^2$

2/  $B^2 = A^2 C^2$

1/ Si  $B^2 < A^2 C^2$ , l'égalité n'est vérifiée que si  $\alpha = 0$ , l'égalité n'est donc atteinte que pour  $\rho(t) = \rho_1(t)$  solution de l'équation intégrale.

2/ Si  $B^2 = A^2 C^2$ .

Ecartons pour le moment le cas où B et C sont tous les deux nuls.

L'égalité est vérifiée si et seulement si  $A^2 + \alpha B > 0$ . Soit  $\alpha_1$  la racine double de  $A^2 + 2\alpha B + \alpha^2 C^2 = 0$ .

$\alpha_1 = -\frac{B}{C^2}$ ,  $B^2 = A^2 C^2$  et  $A^2 + \alpha B > 0$  entraînent  $1 - \frac{\alpha}{\alpha_1} > 0$ .

ayant  $A^2 + 2\alpha_1 B + \alpha_1^2 C^2 = 0$  on en déduit :

$$E \left[ \int_{\tau}^{\infty} (\rho_1(t) + \alpha_1 \zeta_1(t)) X(t) dt \right]^2 = 0$$

auquel cas  $\rho_1(t) + \alpha_1 \zeta_1(t)$  est égal à une fonction  $u(t)$  de  $\mathcal{E}$  telle que

$$E \left[ \int_{\tau}^{\infty} u(t) X(t) dt \right]^2 = 0.$$

(Nous avons vu qu'il peut même exister dans certains cas de telles fonctions  $u(t)$  vérifiant de plus  $\int_{\tau}^{\infty} (u(t))^2 dt \neq 0$ )

Pour une telle  $u(t)$  on a :

$$\int_{\tau}^{\infty} E [X(t) X(t')] u(t) dt = 0$$

On en déduit que :

$$-\alpha_1 \zeta_1(t) = \rho_1(t) - u(t)$$

est solution de l'équation intégrale, donc que :

$$\frac{\rho_1(t) + \alpha \zeta_1(t)}{1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}}$$

est aussi solution de l'équation intégrale.

$\rho(t) = \rho_1(t) + \alpha \zeta_1(t)$  est alors proportionnel à une solution de l'équation intégrale, le coefficient de proportionnalité  $1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}$  étant positif.

Quand au cas où B et C seraient tous les 2 nuls

$$E \left[ \int_T \zeta_1(t) X(t) dt \right]^2 = 0$$

nous donnerait  $\zeta_1(t) = u(t)$  et

$$\rho(t) = \rho_1(t) + \alpha \zeta_1(t) = \rho_1(t) + \alpha u(t)$$

est solution de l'équation intégrale quel que soit  $\alpha$ .

Donc dans tous les cas,  $\lambda$  est égal à sa borne supérieure si et seulement si  $\rho(t)$  est égal au produit d'une constante positive et d'une solution de l'équation de l'équation intégrale.

Si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  ne sont pas nécessairement nuls, l'application du théorème 3 - 5 à  $y = Y - E(Y)$  et à  $x(t) = X(t) - E[X(t)]$  nous permet d'étudier dans certains cas le coefficient de corrélation. On obtient le théorème suivant :

### Théorème 3 - 6

Si  $Y, X(t), S$  et  $\mathcal{E}$  vérifient les hypothèses du théorème 3 - 5 et si de plus :

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt \right] = \int_T \rho(t) E[X(t)] dt$$

(quel que soit  $\rho(t) \in \mathcal{E}$ ) (ou si les hypothèses D du théorème 2 - 12 sont vérifiées)

Si  $E[Y - E(Y)]^2 \neq 0$  si,

$$\int_T \zeta(t) E \left[ (Y - E(Y)) (X(t) - E[X(t)]) \right] dt$$

n'est pas nul quel que soit  $\zeta(t) \in \mathcal{E}$

la condition nécessaire et suffisante pour que  $\rho(t)$  soit tel que le coefficient de corrélation de  $Y$  et de

$$\int_T \rho(t) X(t) dt$$

(qui est défini pour tous les  $\rho(t)$  tels que

$$\int_T \rho(t) X(t) dt$$

ne soit pas presque sûrement nul) soit égal à sa borne supérieure (pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{E}$ ) est que  $\rho(t)$  soit égal à une constante positive multiplicative près, à une solution de l'équation intégrale

$$\int_T \left[ \int_T \Gamma(t, t') \rho(t) dt - \varphi(t') \right] \zeta(t') dt' = 0$$

où quel que soit  $\zeta(t') \in \mathcal{E}$ .

$$\Gamma(t, t') = E \{ (X(t) - E[X(t)]) (X(t') - E[X(t')]) \}$$

et

$$\varphi(t) = E \left[ (Y - E(Y)) (X(t) - E[X(t)]) \right]$$

Si  $\mathcal{E}$  est l'espace  $L_2(T)$ , l'équation intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_T E \left[ (X(t) - E[X(t)]) (X(t') - E[X(t')]) \right] \rho(t) dt = \\ = E \left[ (Y - E(Y)) (X(t') - E[X(t')]) \right] \end{aligned}$$

presque partout la condition d'existence de  $\rho(t) \in L_2(T)$  solution est alors la convergence de la série  $\sum \lambda_i^2 f_i^2$  déjà rencontrée

*Démonstration*

Si  $Y$  et  $X(t)$  vérifient les hypothèses de ce théorème 3-6

$\mathfrak{Y} = Y - E(Y)$  et  $\mathfrak{X}(t) = X(t) - E[X(t)]$  vérifient les hypothèses du théorème 3-5, et l'application de ce théorème 3-5 à  $\mathfrak{Y}$  et à  $\mathfrak{X}(t)$  nous conduit aux résultats du théorème 3-6.

## CHAPITRE IV

### THÉORÈMES LIMITES SUR LA RÉGRESSION LINÉAIRE M.Q. CORRESPONDANT A CERTAINS MODES D'OBSERVATIONS DE $X(t)$

Nous avons déjà rencontré au Chapitre II des théorèmes limites relatifs à la régression de  $Y$  par rapport aux variables aléatoires  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$ . Les valeurs de  $\int_T \rho_n(t) X(t) dt$  peuvent être considérées dans certaines applications, comme des observations sur la fonction aléatoire  $X(t)$  faites avec un instrument dont le réglage est caractérisé par  $\rho_n(t)$ .

Dans ce chapitre nous considérerons 2 autres modes d'observation de  $X(t)$  :

1/ l'intervalle  $T$  étant divisé en  $n$  intervalles  $T_i$ , nous ferons les  $n$  observations  $\int_{T_i} X(t) dt$ .

2/ Nous observerons les  $n$  variables aléatoires  $X(t_i)$ , les  $n$  valeurs de  $t_i$  étant  $\in T$ .

Nous étudierons des théorèmes limites sur la régression multiple et le coefficient de corrélation multiple de  $Y$  par rapport à ces  $n$  variables aléatoires lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

#### I - REGRESSION DE $Y$ PAR RAPPORT A $X(t)$ DEFINIE SUR $T$ ET REGRESSION DE $Y$ PAR RAPPORT AUX

$n$  v.a.  $\int_{T_i} X(t) dt$ .

Notations : Si nous considérons  $n$  et les  $T_i$  donnés, la borne inférieure de :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2$$

est atteinte pour les valeurs  $a_0$  et  $a_i$  attribuées aux  $\alpha_0$  et  $\alpha_i$ .

Les  $a_0$  et  $a_i$  sont évidemment fonctions de  $n$  et des  $T_i$ .

*Théorème 4 - 1*

Si les hypothèses C sont vérifiées, la borne inférieure de :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_0, \alpha_i$  et pour tous les  $n$  et  $T_i$  est égale à B. (cf. théorème 2 - 5).

Si  $n \rightarrow +\infty$  de telle manière que le plus grand des  $T_i$  tende vers 0,

$$E \left[ Y - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2 \rightarrow B$$

et :

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$  (cf. théorèmes 2 - 5 et 2 - 6).

*Démonstration*

Considérons la fonction en escalier  $A_n(t)$  définie sur T par :

$$A_n(t) = \alpha_i$$

lorsque  $t \in T_i$ .

$A_n(t)$  est de carré intégrable sur T et on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt = \int_T A_n(t) X(t) dt$$

et :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2 = E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T A_n(t) X(t) dt \right]^2$$

Nous allons d'abord démontrer que,  $\rho_1(t)$  étant une fonction quelconque de carré intégrable sur  $T$ , il existe une fonction  $A_n(t)$  telle que :

$$\int_T \left[ \rho_1(t) - A_n(t) \right]^2 dt < \varepsilon$$

(nombre positif arbitrairement petit)

En effet, il existe une fonction  $\rho(t)$  continue sur l'intervalle fermé  $T$  telle que :

$$\int_T \left[ \rho_1(t) - \rho(t) \right]^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

(On pourrait choisir, par exemple,  $\rho(t)$  égal à la somme des  $p$  premiers termes du développement de Fourier de  $\rho(t)$  par rapport à un système complet de fonctions continues orthonormées, développement qui converge, en moyenne quadratique sur  $T$ , vers  $\rho(t)$  quand  $p \rightarrow +\infty$ )

$\rho(t)$ , étant continue sur l'intervalle fermé  $T$ , peut être approchée par  $A_n(t)$  et lorsque le plus grand des  $T_i$  est inférieur à  $\eta(\varepsilon)$

$$\int_T \left( \rho(t) - A_n(t) \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

d'où il résulte que :

$$\begin{aligned} \int_T \left( \rho_1(t) - A_n(t) \right)^2 dt &= \int_T \left[ \left( \rho_1(t) - \rho(t) \right) + \left( \rho(t) - A_n(t) \right) \right]^2 dt \\ &< 2 \int_T \left( \rho_1(t) - \rho(t) \right)^2 dt + 2 \int_T \left( \rho(t) - A_n(t) \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$\int_T \left( \rho_1(t) - A_n(t) \right)^2 dt < \varepsilon$$

(lorsque le plus grand des  $T_i < \eta(\varepsilon)$ ).

On peut donc appliquer le théorème 2 - 10 (lorsque le plus grand des  $T_i < 0$ ,  $n$  tendant alors vers l'infini).

La borne inférieure pour tous les  $\alpha_0, \alpha_i, T_i$  de :

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2$$

est donc égale à B et lorsque le plus grand des  $T_i \rightarrow 0$

$$E \left[ Y - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2 \rightarrow B$$

or d'après le théorème 2 - 6

$$E \left[ Y - a_0 - \int_T A_n(t) X(t) dt \right]^2$$

tendant vers B,  $A_n(t)$  étant de carré intégrable sur T :

$$a_0 + \int_T A_n(t) X(t) dt = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$

On a immédiatement les théorèmes analogues suivants.

*Théorème 4 - 2*

Si les hypothèses C sont vérifiées, la borne inférieure de :

$$E \left[ Y - E(Y) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} (X(t) - E[X(t)]) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_i$  et pour tous les n et  $T_i$  est égale à B.

Si le plus grand des  $T_i \rightarrow 0$  (n tend alors vers  $+\infty$ )

$$E \left[ Y - E(Y) - \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} (X(t) - E[X(t)]) dt \right]^2 \rightarrow B$$

et :

$$E(Y) + \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} (X(t) - E[X(t)]) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$ .

*Théorème 4 - 3*

Si les hypothèses du théorème 2 - 4 sont vérifiées, la borne inférieure de

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_i$  et pour tous les  $n$  et  $T_i$  est égale à  $B_1$  (cf. th. 2 - 4)

Si le plus grand des  $T_i \rightarrow 0$  ( $n$  tend alors vers l'infini),

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt \right]^2 \rightarrow B_1$$

et :

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$  (cf. th. 2 - 4)

#### Théorème 4 - 4

Si les hypothèses C sont vérifiées : Le coefficient de corrélation multiple  $\mathcal{C}_n$  de  $Y$  et des  $n$  variables aléatoires  $\int_{T_i} X(t) dt$  est inférieur ou égal au coefficient de corrélation  $\mathcal{C}$  de  $Y$  et de  $X(t)$  sur  $T$  (tel que défini au chapitre III)

Quand le plus grand des  $T_i \rightarrow 0$  ( $n$  tendant alors vers  $+\infty$ )  $\mathcal{C}_n$  tend vers  $\mathcal{C}$ .

#### Démonstration

1/  $\mathcal{C}_n$  est le coefficient de corrélation de  $Y$  et de

$$\int_T A_n(t) X(t) dt$$

$A_n(t)$  étant la fonction en escalier définie par :  $A_n(t) = a_i$  lorsque  $t \in T_i$

$A_n(t)$  étant de carré intégrable sur  $R$ ,  $\mathcal{C}_n$  est inférieur ou égal à  $\mathcal{C}$  d'après le théorème 3 - 2.

2/  $\mathcal{C}_n$  est le coefficient de corrélation de  $Y$  avec

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt.$$

Quand le plus grand des  $T_i \rightarrow 0$

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \int_{T_i} X(t) dt$$

converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$  (cf. th. 4 - 1)  $\mathcal{C}_n$  tend donc vers le coefficient de corrélation  $\mathcal{C}$  de  $Y$  et de  $Y_x$ .

## II - REGRESSION DE Y PAR RAPPORT A X (t) DEFINIE SUR T ET REGRESSION MULTIPLE DE Y PAR RAPPORT AUX n v. a. X (t<sub>i</sub>)

Dans toute cette partie nous supposerons que l'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  est définie au sens B (cf. chapitre I).

Nous rencontrerons constamment dans ce chapitre les hypothèses suivantes :

X (t) est une fonction aléatoire du 2e ordre définie et continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé T,

L'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  ( $\rho(t) \in L_2(T)$ )

est définie au sens B,

Y est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre.

Ces hypothèses entraînent que les hypothèses C et les hypothèses du théorème 2 - 4 sont vérifiées.

Nous utiliserons les notations suivantes :

Nous appellerons  $t_1 t_2 \dots t_n$  n valeurs de  $t \in T$  ( $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ )

Nous rencontrerons l'étude du minimum de l'une ou l'autre des quantités :

$$\begin{aligned} & E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2, \quad E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 \\ & E \left[ Y - E(Y) - \sum_{i=1}^n \alpha_i (X(t_i) - E[X(t_i)]) \right]^2. \end{aligned}$$

Lorsque les  $t_i$  sont donnés nous appellerons  $a_i$  (fonctions des  $t_i$  évidemment) les valeurs des  $\alpha_i$  correspondant au minimum.

Nous utiliserons enfin les propriétés suivantes résultant du chapitre II :

Moyennant les hypothèses C, la borne inférieure B de

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

et de :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho(t) (X(t) - E[X(t)]) dt \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_o$  et pour tous les  $\rho(t) \in L_2(T)$  est égale à la borne inférieure de ces mêmes quantités pour toutes les fonctions  $\rho(t)$  continues sur l'intervalle fermé  $T$ . Si  $\alpha_{op}$  est une suite de nombres et  $\rho_p(t)$  une suite de fonctions continues sur l'intervalle fermé  $T$  tels que :

$$E \left[ Y - \alpha_{op} - \int_T \rho_p(t) X(t) dt \right]^2$$

(ou :

$$E \left[ Y - E(Y) - \int_T \rho_p(t) (X(t) - E[X(t)]) dt \right]^2$$

tende vers  $B$  quand  $p \rightarrow +\infty$ ,

$$\alpha_{op} + \int_T \rho_p(t) X(t) dt$$

(ou

$$E(Y) + \int_T \rho_p(t) (X(t) - E[X(t)]) dt$$

tend en moyenne quadratique vers  $Y_x$  quand  $p \rightarrow \infty$ .

Nous utiliserons aussi la propriété analogue pour

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2.$$

Nous démontrerons d'abord 2 lemmes qui nous seront utiles.

Lemme 4 - 5 - 1

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire du 2e ordre définie, continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$ , si  $t_1 < t_2 \dots < t_n$  sont  $n$  valeurs de  $t \in T$  ( $n$  nombre fini fixé), si  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  sont des nombres finis.

Il existe au moins une fonction  $\rho(t)$  continue sur l'intervalle fermé  $T$  telle que,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$E \left[ \int_{\tau}^{\tau} \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < \varepsilon$$

Démonstration

a) Vu la continuité en m. q. de  $X(t)$  il est possible de choisir  $\beta_i > 0$  pour que,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$E \left[ \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} (X(t) - X(t_i)) dt \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4n^2}$$

b)  $\beta_i$  étant ainsi choisi, il est possible de choisir  $\varphi(t, t_i) > 0$  telle que :  $\varphi(t, t_i) = 0$  si  $t$  est extérieur à l'intervalle  $t_i \pm \beta_i$

$$\varphi(t, t_i) < \frac{\alpha_i}{2\beta_i}$$

$\varphi(t, t_i)$  continue et telle que :

$$\int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{4n^2 \left[ \int_{\tau}^{\tau} E(X^2(t)) dt \right]}$$

Comme, en appelant  $T_i$  l'intervalle  $t_i - \beta_i, t_i + \beta_i$ , on a :

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right) X(t) dt \right)^2 \right] &= \\ &= \iint_{T_i \times T_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right) \left( \varphi(t', t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right) E(X(t) X(t')) dt dt' \\ &\leq \int_{T_i} \left[ \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right]^2 dt \times \left[ \int_{T_i} E(X^2(t)) dt \right] \end{aligned}$$

(en appliquant 3 fois l'inégalité de Schwarz)

or puisque

$$\int_{T_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{4n^2 \int_{T_i} E(X^2(t)) dt}$$

il en résulte que :

$$E \left[ \int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2 \beta_i} \right) X(t) dt \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4 n^2}$$

c) Nous allons maintenant montrer qu'en choisissant

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^n \varphi(t, t_i),$$

( $\rho(t)$  est continue puisque  $n$  est fini)

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < \varepsilon$$

En effet le 1er membre est égal à

$$E \left[ \sum_{i=1}^n \int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} \left( \varphi(t, t_i) - \frac{\alpha_i}{2 \beta_i} \right) X(t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2 \beta_i} \int_{t_i - \beta_i}^{t_i + \beta_i} (X(t) - X(t_i)) dt \right]^2$$

or pour que  $E [Z_1 + \dots + Z_i + \dots + Z_{2n}]^2 < \varepsilon$ , il suffit que tous les  $E (Z_i)^2 < \frac{\varepsilon}{4 n^2}$

et nous avons vu en a) et b) que chacune des  $2n$  variables aléatoires considérées ici à un 2e moment  $< \frac{\varepsilon}{4 n^2}$

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$$

est donc  $< \varepsilon$  (arbitrairement petit positif),  $\rho(t)$  étant continue.

Lemme 4 - 5 - 2

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire du 2e ordre définie continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$ , si  $\rho(t)$  est une fonction donnée (non aléatoire) continue sur  $T$  il existe une fonction  $\eta(\varepsilon)$  telle que, pour qu'il existe un nombre fini  $n$  de  $\alpha_i$  vérifiant

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < \varepsilon$$

( $\varepsilon > 0$  arbitraire), il suffit que le plus grand des  $(t_i - t_{i-1}) < \eta(\varepsilon)$ .

*Démonstration*

Nous partageons  $T$  en  $n$  intervalles  $T_i$  contenant respectivement les  $t_i$ .

L'intégrale  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  étant une intégrale au sens B, c'est-à-dire ici une intégrale de Riemann en moyenne quadratique,

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_i \rho(t_i) X(t_i) T_i \right]^2 < \varepsilon$$

dès que tous les  $T_i < \eta_1(\varepsilon)$

ou dès que le plus grand des  $(t_i - t_{i-1}) < \eta(\varepsilon)$   
(car  $T_i = (t_{i+1} - t_i) + (t_i - t_{i-1})$ )

En choisissant  $\alpha_i = \rho(t_i) T_i$ , ceci démontre notre théorème.

*Théorème 4 - 5*

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire du 2e ordre définie et continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$ ,

Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre

La borne inférieure de  $E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$  pour tous les  $\alpha_i$  n  $t_i$  est égale à  $B_1$

Si  $n \rightarrow +\infty$  de telle manière que le plus grand des  $t_i - t_{i-1}$  tende vers 0

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 \rightarrow B_1$$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i)$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_{1X}$ .

*Démonstration*

a) La borne inférieure de  $E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$  ne peut être inférieure à  $B_1$ .

Démontrons qu'il est impossible d'avoir pour certains  $\alpha_i, t_i$

$$\mathbb{E} \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < B_1 - \varepsilon$$

( $\varepsilon$  nombre positif arbitrairement petit).

D'après le lemme 4 - 5 - 1 il est possible de choisir  $\rho(t)$  continue tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

et  $< \frac{\varepsilon^2}{16(B_1 - \varepsilon)}$

On en déduirait que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \right] \\ & \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2} \sqrt{\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2} \\ & \leq \sqrt{B_1 - \varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16(B_1 - \varepsilon)}} = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Il existerait donc  $\rho(t)$  continue sur l'intervalle fermé  $T$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 &= \mathbb{E} \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 + \\ &+ 2 \mathbb{E} \left[ \left( Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \\ &\leq B_1 - \varepsilon + 2 \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq B_1 - \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

ce qui est impossible  $B_1$  étant borne inférieure de :

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

b) la borne inférieure de  $E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$  pour tous les  $\alpha_i$  tend vers  $B_1$  quand le plus grand des  $t_i - t_{i-1}$  tend vers 0.

Nous allons montrer que,  $\varepsilon$  étant en nombre positif arbitraire, il existe des  $\alpha_i$  tels que :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < B_1 + \varepsilon$$

dès que le plus grand des  $t_i - t_{i-1}$  est assez petit.

Il existe en effet d'après le théorème 2 - 8 une fonction  $\rho(t)$  continue telle que :

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 < B_1 + \frac{\varepsilon}{4}$$

et d'après le lemme 4 - 5 - 2, dès que le plus grand des  $t_i - t_{i-1} < \eta(\varepsilon)$ , il existe des  $\alpha_i$  tels que :

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{et } < \frac{\varepsilon^2}{16 \left( B_1 + \frac{\varepsilon}{4} \right)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \left( \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right) \right] \\ & \leq \sqrt{E \left( Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right)^2} \sqrt{E \left( \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right)^2} \\ & < \sqrt{B_1 + \frac{\varepsilon}{4}} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16 \left( B_1 + \frac{\varepsilon}{4} \right)}} = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe des  $\alpha_i$  tels que :

$$\begin{aligned}
 E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 &= E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 + \\
 &+ 2 E \left[ \left( Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right) \left( \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right) \right] \\
 &+ E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2 \\
 &= B_1 + \frac{\varepsilon}{4} + 2 \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 &< B_1 + \varepsilon
 \end{aligned}$$

d'où la borne inférieure pour tous les  $\alpha_i$  et tous les  $t_i$  et les  $n$  de

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$$

est égale à  $B_1$

ou la borne inférieure pour tous les  $t_i$  et les  $n$  de

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2$$

est égale à  $B_1$  et si le plus grand des  $t_i - t_{i-1}$  tend vers 0

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2 \rightarrow B_1$$

c)  $\sum_{i=1}^n a_i X(t_i)$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_{1x}$  lorsque le plus grand des  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$

D'après le chapitre II,  $\varepsilon$  étant un nombre  $> 0$  arbitraire, il existe  $\eta(\varepsilon)$  telle que :

$$E \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - Y_{1x} \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tous les  $\rho(t)$  continus vérifiant

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 < B_1 + \eta(\varepsilon) \quad (\eta(\varepsilon) > 0)$$

D'après b) il existe  $\eta_1(\varepsilon)$  telle que :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2 < B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4}$$

soit vérifiée dès que le plus grand des  $t_i - t_{i-1} < \eta_1(\eta(\varepsilon))$  et d'après le lemme 4 - 5 - 1 il existe une fonction  $\rho_1(t)$  continue sur  $T$  telle que :

$$E \left[ \int_T \rho_1(t) X(t) dt - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2 < \frac{\eta(\varepsilon)}{4}$$

et  $< \frac{\eta^2(\varepsilon)}{16 \left( B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4} \right)}$

et  $< \frac{\varepsilon}{4}$

On en déduit que :

$$E \left[ \left( Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right) \right]$$

$$\leq \sqrt{E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2} \sqrt{E \left[ \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2}$$

$$\leq \sqrt{B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4}} \sqrt{16 \left( B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4} \right) \frac{\eta^2(\varepsilon)}{16 \left( B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4} \right)}}$$

$$\leq \frac{\eta(\varepsilon)}{4}$$

Il existe donc une fonction  $\rho_1(t)$  continue sur  $T$  telle que :

$$E \left[ Y - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 = E \left[ Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2 +$$

$$+ 2 E \left[ \left( Y - \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right) \right]$$

$$+ E \left[ \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2$$

$$\leq B_1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{4} + 2 \frac{\eta(\varepsilon)}{4} + \frac{\eta(\varepsilon)}{4}$$

$$E \left[ Y - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 \leq B_1 + \eta(\varepsilon)$$

De cette inégalité résulte (d'après le début du c) :

$$\mathbb{E} \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - Y_{1X} \right]^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

et nous avons alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - Y_{1X} \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt + \int_T \rho(t) X(t) dt - Y_{1X} \right]^2 \\ &< 2 \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_T \rho(t) X(t) dt - Y_{1X} \right]^2 \\ &< 2 \frac{\varepsilon}{4} + 2 \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui démontre la dernière partie du théorème.

#### Théorème 4 - 6

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire du 2e ordre définie et continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$  et si  $Y$  est variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre.

La borne inférieure de :

$$\mathbb{E} \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X(t_i) \right]^2$$

ou de :

$$\mathbb{E} \left[ Y - \mathbb{E}(Y) - \sum_{i=1}^n \alpha_i (X(t_i) - \mathbb{E}[X(t_i)]) \right]^2$$

pour tous les  $\alpha_0, \alpha_i$  et  $t_i$  est égale à  $B$  (cf. th. 2 - 5).

Si  $n \rightarrow +\infty$  de telle manière que le plus grand des  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ , la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $n$  variables aléatoires  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$ .

*Démonstration*

Si  $X(t)$  et  $Y$  vérifient les hypothèses de ce théorème,  $\mathfrak{X}(t) = X(t) - E[X(t)]$  et  $\mathfrak{Y} = Y - E(Y)$  vérifient les hypothèses du théorème 4 - 5 et l'application de ce théorème 4 - 5 à  $\mathfrak{X}(t)$  et à  $\mathfrak{Y}$  nous donne les résultats du théorème 4 - 6, mais avec  $B$  et  $Y_x$  au lieu de  $B_1$  et  $Y_{1x}$ .

*Théorème 4 - 7*

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire du 2e ordre définie et continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$  et si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre.

Le coefficient de corrélation multiple  $\mathfrak{C}_n$  de  $Y$  et des  $n$  variables aléatoires  $X(t_i)$  est inférieur ou égal au coefficient de corrélation  $\mathfrak{C}$  de  $Y$  et de  $X(t)$  sur  $T$  tel qu'il a été défini au chapitre III.

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de telle manière que le plus grand des  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ ,  $\mathfrak{C}_n$  tend vers  $\mathfrak{C}$ .

*Démonstration*

Démontrons d'abord la 2ème partie du théorème. D'après le théorème 4 - 6, la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $n$  variables aléatoires  $X(t_1) \dots X(t_n)$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_x$  lorsque le plus grand des  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ .  $\mathfrak{C}_n$  tend donc vers le coefficient de corrélation  $\mathfrak{C}$ .

Pour démontrer la 1ère partie du théorème, nous prouverons que,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit, l'inégalité  $\mathfrak{C}_n > \mathfrak{C} + \varepsilon$  est impossible.

Soient  $t'_i$   $n'$  valeurs de  $t$  ( $n' > n$ ) telles que tous les  $t'_i$  appartiennent à l'ensemble des  $t'_i$ . On a immédiatement  $\mathfrak{C}_{n'} \geq \mathfrak{C}_n$

or si le plus grand des  $(t'_i - t'_{i-1}) < \eta(\varepsilon)$

$$|\mathfrak{C}_{n'} - \mathfrak{C}| < \varepsilon$$

d'après ce que nous avons démontré au début.

Les inégalités :

$$\mathfrak{C}_n > \mathfrak{C} + \varepsilon$$

$$c_{n'} \geq c_n$$

entraîneraient :

$$c_{n'} > c + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

qui est en contradiction avec

$$|c_{n'} - c| < \varepsilon$$

$\varepsilon$  étant positif arbitrairement petit, le fait que l'inégalité  $c_n > c + \varepsilon$  est impossible entraîne que  $c_n \leq c$ .

940 - 143.2101 791  
1437 - 112 - 1437 1437



$$\sigma_{X,Y} < \sigma_X \sigma_Y$$

Démonstration

Si  $X(t)$  et  $Y$  vérifient les hypothèses de ce théorème, les variables aléatoires  $X(t) - E(X(t))$  et  $Y - E(Y)$  vérifient les hypothèses du théorème 4-5 et l'application de ce théorème nous donne les résultats du théorème 4-6, mais avec  $\sigma_X$  au lieu de  $\sigma_{X(t)}$  et  $\sigma_Y$ .

$$\sigma_{X,Y} < \sigma_X \sigma_Y$$

Théorème 4-7

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire continue en moyenne quadratique sur l'intervalle fermé  $T$  et si  $X(t)$  est une variable aléatoire ayant un moment de 2e ordre.

Le coefficient de corrélation multiple  $\rho_{X,Y}$  de  $Y$  et des variables aléatoires  $X(t)$  est inférieur ou égal au coefficient de corrélation  $\rho_{X(t),Y}$  de  $Y$  et de  $X(t)$ .

IMP. LOUIS-JEAN - GAP  
Dépôt légal n° 232 - 1964

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  de telle manière que le plus grand des  $t_i$  tend vers  $\infty$ .

Démonstration

Démontrons d'abord la 1ère partie du théorème. D'après le théorème 4-5, la régression multiple de  $Y$  par rapport à des variables aléatoires  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  converge en moyenne vers  $Y$ , lorsque le plus grand des  $t_1, \dots, t_n \rightarrow \infty$ ,  $\rho_{X(t),Y}$  tend vers le coefficient de corrélation  $\rho_{X,Y}$ .

Pour démontrer la 2ème partie du théorème, nous montrons que,  $\epsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit, l'inégalité est impossible.

Soient  $t_i$   $n$  valeurs de  $t$  ( $n > n$ ) telles que tous les  $t_i$  tiennent à l'ensemble des  $t_i$  où  $\rho_{X(t_i),Y} > \rho_{X,Y} + \epsilon$  et où  $\sigma_{X(t_i)} > \sigma_X - \epsilon$ .



d'après ce que nous avons démontré au début.

Les inégalités :

$$\sigma_{X,Y} > \sigma_X \sigma_Y$$

8°  
6°  
(1

CHAPITRE V

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES

**SUR LA RÉGRESSION,  
LA CORRÉLATION ET LA DÉPENDANCE DE PROBABILITÉ  
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
PAR RAPPORT A UNE FONCTION ALÉATOIRE**

(Suite)

Jean LEGOUPIL

Professeur à l'École Polytechnique de Montréal  
Actuellement, Professeur Invité à l'Université Laval (Québec)

87  
64396  
(12,  $\bar{IV}$ )

SUR LA RÉGRESSION  
LA CORRÉLATION ET LA DÉPENDANCE DE PROBABILITÉ  
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
PAR RAPPORT À UNE FONCTION ALÉATOIRE

(Suite)

Jean LEGOUPIE

Professeur à l'École Polytechnique de Montréal  
Actuellement, Professeur invité à l'Université Laval (Québec)



1110  
(1110)

## CHAPITRE V

### GÉNÉRALISATIONS DIVERSES

#### I - REGRESSION ET CORRELATION D'UNE FONCTION ALEATOIRE Y ( $\tau$ ) PAR RAPPORT A LA FONCTION ALEATOIRE X (t) DEFINIE SUR T

Y ( $\tau$ ) est une fonction aléatoire définie pour tout  $\tau$  appartenant à un certain ensemble  $\mathfrak{C}$ .

Les résultats des chapitres précédents sont ici intégralement applicables si Y ( $\tau$ )  $\rho$  ( $t, \tau$ ) etc. vérifient les hypothèses correspondantes quel que soit  $\tau \in \mathfrak{C}$ .

Par exemple, le théorème 2 - 4 permet d'étudier la borne inférieure  $B_1(\tau)$  de  $E \left[ Y(\tau) - \int_T \rho(\tau, t) X(t) dt \right]^2$ , il permet de définir  $Y_{1X}(\tau)$  qui est soit égal à  $\int_T \rho(\tau, t) X(t) dt$  pour une certaine fonction  $\rho(\tau, t)$ , soit limite m. q d'une suite de telles intégrales. Les  $f_i$  et  $c_i$  qui interviennent dans l'étude de ce théorème sont fonctions de  $\tau$ . L'équation intégrale du théorème 2 - 11 dans le cas où  $\mathfrak{C}$  est  $L_2(T)$  par exemple devient ici :

$$\int_T \rho(\tau, t) E(X(t) X(t')) dt = E(Y(\tau) X(t'))$$

pour presque tout  $t' \in T$ . Les coefficients  $\alpha_i$  des théorèmes 2 - 13 et 2 - 14 sont ici fonctions de  $\tau$ . Le coefficient de corrélation  $c$  du chapitre III est ici fonction de  $\tau$ .

II - REGRESSION LINEAIRE M.Q D'UNE VARIABLE ALEATOIRE PAR RAPPORT A PLUSIEURS FONCTIONS ALEATOIRES ET VARIABLES ALEATOIRES.

Nous appellerons  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) les fonctions aléatoires, et  $Z_j$  ( $j = 1, 2, \dots p$ ) les variables aléatoires par rapport auxquelles on étudie la régression de  $Y$ .

Le théorème 2 - 1 se généralise immédiatement.

*Théorème 5 - 1*

Si  $Y$  et les  $Z_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) sont des variables aléatoires ayant des moments du 2e ordre, si les  $\rho_i(t)$  sont des fonctions certaines appartenant à certains ensembles de fonctions  $\mathcal{G}_i$ ,

si les  $X_i(t)$  sont  $n$  fonctions aléatoires respectivement définies sur  $T_i$  telles que :

$\int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt$  existe en un certain sens  $S_i$ , quel que soit  $i$ , ait un moment du 2e ordre,

si  $E(X_i(t))$  existe, si  $\int_{T_i} \rho_i(t) E(X_i(t)) dt$  existe et si les  $S_i \in \mathcal{G}_i$  et  $X_i(t)$  sont tels qu'elle soit égale à  $E\left[\int_{T_i} \rho_i(t) X(t) dt\right]$  quel que soit  $i$ )

alors on a :

$$E\left[Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p a_j Z_j\right]^2 \geq E\left[Y - E(Y) - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) (X_i(t) - E[X_i(t)]) dt - \sum_{j=1}^p a_j (Z_j - E(Z_j))\right]^2$$

l'égalité étant vérifiée si et seulement si :

$$\alpha_0 = E(Y) + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) E(X_i(t)) dt + \sum_{j=1}^p a_j E(Z_j)$$

et la borne inférieure du 1er membre de l'inégalité pour tous les  $\alpha_0$   $a_j$   $\rho_i(t)$  est égale à la borne inférieure du 2e membre pour tous les  $a_j$  et  $\rho_i(t)$ , ( $\in \mathcal{G}_i$ ).

La démonstration est analogue à celle du théorème 2 - 1.

## Théorème 5 - 2

Si  $Y$  et les  $Z_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) sont des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) sont  $n$  fonctions aléatoires définies sur  $T_i$  ayant un moment du 2e ordre,

si  $E[X_i(t) X_i(t')]$  est de carré intégrable sur  $T_i \times T_i$  (quel que soit  $i$ ) si  $E[Y X_i(t)]$  est de carré intégrable sur  $T_i$  (quel que soit  $i$ ),

si, l'intégrale  $\int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt$  existe en un certain sens  $S_i$  et a un moment du 2e ordre  $\forall \rho_i(t) \in L_2(T_i)$ .

Si de plus  $Y$  les  $X_i(t)$  les  $Z_j$  et les  $S_i$  sont tels que, quels que soient les  $i, j$  et les  $\rho_i(t) \in L_2(T_i)$ , on ait :

$$E \left[ \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right]^2 = \iint_{T_i \times T_i} \rho_i(t) \rho_i(t') E[X_i(t) X_i(t')] dt dt'$$

$$E \left[ Y \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right] = \int_{T_i} \rho_i(t) E[Y X_i(t)] dt$$

$$E \left[ \left( \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right) \left( \int_{T_{i'}} \rho_{i'}(t) X_{i'}(t) dt \right) \right] = 0$$

( $i \neq i'$  ( $i$  et  $i' = 1, 2 \dots n$ ))

$$E \left[ \left( \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right) Z_j \right] = 0$$

quels que soient  $\rho_i(t) \in L_2(T_i)$  et quels que soient  $i$  et  $j$

Si  $\rho_{i,\nu}(t) (\in L_2(T_i))$  et  $a_{j,\nu}$  sont des suites telles que, lorsque  $\nu \rightarrow +\infty$ ,

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \right]^2$$

tende vers sa borne inférieure  $B_1$  pour tous les  $\rho_i(t) (\in L_2(T_i))$  et tous les  $a_j$ ,

alors :

$$\sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt + \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j$$

converge en moyenne quadratique vers  $\sum_{i=1}^n Y_{1X_i} + Y_{1Z}$

( $Y_{1x_i}$  correspondant à ce qui a été défini au théorème 2 - 4, avec ici  $X_i(t)$  au lieu de  $X(t)$  du théorème 2 - 4.  $Y_{1z}$  étant égal par définition à  $\sum_{j=1}^n a_j Z_j$ , les  $a_j$  ayant les valeurs correspondant au minimum de  $E \left[ Y - \sum_{j=1}^p a_j Z_j \right]^2$

*Démonstration*

Il résulte de nos hypothèses que nous avons l'identité :

$$\begin{aligned} E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \right]^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[ Y - \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt \right]^2 + E \left( Y - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \right)^2 - n E(Y^2) \end{aligned}$$

(identité vraie quels que soient d'ailleurs  $\rho_{i,\nu}(t) (\in L_2(T_i))$  et  $a_{j,\nu}$ ).

Pour que le premier membre tende vers sa borne inférieure  $B$ , il faut et il suffit que tous les

$$E \left[ Y - \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt \right]^2$$

$$\text{et } E \left( Y - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \right)^2$$

tendent vers leurs bornes inférieures respectives.

Si le 1er membre  $\rightarrow B_1$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ , nous aurons donc en appli-

quant le théorème 2 - 4 aux  $E \left[ Y - \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt \right]^2$

$\int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt$  converge m. q vers  $Y_{1x_i}$  (quel que soit  $i$ )

et d'autre part  $\sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \rightarrow Y_{1z}$

ce qui démontre notre théorème.

Ce théorème sera utile pour l'étude du théorème 5 - 3 qui permet, moyennant certaines hypothèses, l'étude de la régression multiple de  $Y$  par rapport aux fonctions aléatoires  $X_i(t)$  et aux variables aléatoires  $Z_j$ , notamment dans le cas où les  $X_i(t)$  sont mutuellement indépendantes et sont indépendantes des  $Z_j$ .

## Théorème 5 - 3

Si  $Y$  et les  $Z_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) sont des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) sont  $n$  fonctions aléatoires définies sur  $T_i$ , ayant un moment du 2e ordre,

si  $E(X_i(t))$  et  $E(Y X_i(t)) \in L_2(T_i)$ ,

si  $E[X_i(t) X_i(t')]$  est de carré intégrable sur  $T_i \times T_i$  (quel que soit  $i$ ).

Si, quel que soit  $\rho_i(t) \in L_2(T_i)$ ,  $\int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt$  existe en un certain sens  $S_i$  a un moment du 2e ordre,

si de plus  $Y$  les  $X_i(t)$  les  $Z_j$  et les  $S_i$  sont tels que, quels que soient les  $i, j$  et les  $\rho_i(t) \in L_2(T_i)$  on ait :

$$\begin{aligned} E \left[ \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right] &= \int_{T_i} \rho_i(t) E(X_i(t)) dt \\ E \left[ Y \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right] &= \int_{T_i} \rho_i(t) E(Y X_i(t)) dt \\ E \left[ \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right]^2 &= \iint_{T_i \times T_i} \rho_i(t) \rho_i(t') E[X_i(t) X_i(t')] dt dt' \end{aligned}$$

Si de plus lorsque  $i \neq i'$  ( $= 1, 2 \dots n$ )

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_{T_i} \rho_i(t) [X_i(t) - E(X_i(t))] dt \right) \left( \int_{T_{i'}} \rho_{i'}(t) [X_{i'}(t) - E(X_{i'}(t))] dt \right) \right] &= 0 \\ E \left[ \left( \int_{T_i} \rho_i(t) [X_i(t) - E(X_i(t))] dt \right) (Z_j - E(Z_j)) \right] &= 0 \end{aligned}$$

quel que soit  $\rho_i(t) (\in L_2(T_i))$  et quels que soient  $i$  et  $j$ .

Si  $\rho_{i,\nu}(t) (\in L_2(T_i))$ ,  $\alpha_{o,\nu}$  et  $a_{j,\nu}$  sont des suites telles que, lorsque  $\nu \rightarrow +\infty$ ,

$$E \left[ Y - \alpha_{o,\nu} - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} Z_j \right]^2$$

ou

$$E \left[ Y - E(Y) - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) (X_i(t) - E[X_i(t)]) dt - \sum_{j=1}^p a_{j,\nu} (Z_j - E(Z_j)) \right]^2$$

tendent vers leur borne inférieure (pour tous les  $\alpha_0, \rho_i(t), a_j$ ) alors :

$$\alpha_{0,\nu} + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) X_i(t) dt + \sum_{j=1}^p a_{j\nu} Z_j$$

et

$$E(Y) + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_{i,\nu}(t) (X_i(t) - E(X_i(t))) dt + \sum_{j=1}^p a_{j\nu} (Z_j - E(Z_j))$$

convergent en moyenne quadratique vers  $Y_m$ , régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $X_i(t)$  et  $Z_j$ , qui est égale à :

$$Y_m = \sum_{i=1}^n Y_{X_i} + Y_Z - n E(Y)$$

( $Y_{X_i}$  étant la régression de  $Y$  par rapport à  $X_i(t)$  définie sur  $T_i$   
 $Y_Z$  la régression multiple de  $Y$  par rapport aux  $Z$ )

#### Démonstration

On démontre ce théorème en utilisant les résultats du théorème 5 - 2, comme précédemment lorsque les théorèmes 2 - 5 et 2 - 6 avaient été démontrés en utilisant le théorème 2 - 4.

Les hypothèses de ce théorème 5 - 3 sont vérifiées notamment si  $Y$  et les  $X_i$  vérifient les hypothèses A ou B du chapitre I, si les  $Z_j$  ont des moments du 2e ordre et si

$$E \left[ \left( X_i(t) - E(X_i(t)) \right) \left( X_{i'}(t') - E(X_{i'}(t')) \right) \right] = 0$$

$$E \left[ \left( X_i(t) - E(X_i(t)) \right) \left( Z_j - E(Z_j) \right) \right] = 0$$

quels que soient  $i, i'$  et  $j$ .

Nous allons donner des théorèmes généralisant la théorie des théorèmes 2 - 3, 2 - 11 et 2 - 12 et ne nécessitant pas d'hypothèses du genre indépendance mutuelle des  $X_i(t)$  et  $Z_j$  (ou les hypothèses un peu moins restrictives données ci-dessus), qui ont été nécessaires pour les théorèmes précédents.

#### Théorème 5 - 4

Si  $Y, Y_1$  et les  $Z_j$  ( $j=1, 2 \dots p$ ) sont des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, si les  $\zeta_i(t)$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) sont

des fonctions définies sur  $T$  appartenant respectivement aux ensembles de fonctions  $\mathcal{E}_i$ , si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) sont des fonctions aléatoires définies sur  $T_i$  telles que  $\int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt$  existe en un certain sens  $S_i$  quel que soit  $\zeta_i(t) \in \mathcal{E}_i$  et ait un moment du 2e ordre, si (les hypothèses qui suivent font intervenir notamment les  $\mathcal{E}_i$  et les  $S_i$ )

$$\int_{T_i} \zeta_i(t) E [(Y - Y_1) X_i(t)] dt$$

existe (quel que soit  $\zeta_i(t) \in \mathcal{E}_i$ ) et est égal à :

$$E \left[ (Y - Y_1) \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt \right]$$

si

$$\int_{T_i} \zeta_i(t) E [Z_j X_i(t)] dt$$

existe et est égal à

$$E \left[ Z_j \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt \right]$$

quels que soient  $i, j$  et  $\zeta_i(t)$  la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$E (Y - Y_1)^2 \leq E \left[ Y - Y_1 - \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p \gamma_j Z_j \right]^2$$

quels que soient les  $\beta_i, \gamma_j$  et  $\zeta_i(t) \in \mathcal{E}_i$  est que le système d'équations:

$$\begin{cases} \int_{T_i} E [(Y - Y_1) X_i(t)] \zeta_i(t) dt = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ E [(Y - Y_1) Z_j] = 0 & j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

soit vérifié quel que soit  $\zeta_i(t) \in \mathcal{E}_i$ .

Si  $\mathcal{E}_i$  est l'espace  $L_2(T_i)$  le système d'équations devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[(Y - Y_1) X_i(t)] = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in T_i \\ E[(Y - Y_1) Z_j] = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots p \end{array} \end{array} \right.$$

*Démonstration*

Posons :

$$F \equiv E \left[ Y - Y_1 - \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p \gamma_j Z_j \right]^2$$

Pour que  $F$  soit minimum lorsque tous les  $\beta_i$  et  $\gamma_j$  sont nuls il est nécessaire que les  $\frac{\partial F}{\partial \beta_i}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \gamma_j}$  soient nuls lorsque tous les  $\beta_i$  et  $\gamma_j$  sont nuls d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_i} E[(Y - Y_1) X_i(t)] \zeta_i(t) dt = 0 \quad \text{quel que soit } \zeta_i \in \mathcal{E}_i \\ \hspace{15em} (i = 1, 2 \dots n) \\ E[(Y - Y_1) Z_j] = 0 \quad (j = 1, 2 \dots p) \end{array} \right.$$

ces conditions sont suffisantes, car on a alors l'identité :

$$F \equiv E (Y - Y_1)^2 + E \left[ \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt + \sum_{j=1}^p \gamma_j Z_j \right]^2$$

*Théorème 5 - 5*

Si  $Y$  et les  $Z_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) sont des variables aléatoires ayant un moment du 2e ordre, si les  $\zeta_i(t)$  et les  $\rho_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) sont des fonctions définies sur  $T_i$  appartenant respectivement aux espaces vectoriels de fonctions  $\mathcal{E}_i$ ,

si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) sont des fonctions aléatoires définies sur  $T_i$ , ayant un moment du 2e ordre, telles que  $\int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt$  existe en un certain sens  $S_i$  (quel que soit  $\rho_i(t) \in \mathcal{E}_i$  et quel que soit  $i$ ) ait un moment du 2e ordre.

Si de plus  $Y$ , les  $Z_j$ , les  $X_i(t)$ , les  $S_i$  et les  $\mathcal{E}_i$  sont tels que les intégrales - L

$$\int_{T_i} \rho_i(t) E [Y X_i(t)] dt, \int_{T_i} \rho_i(t) E [Z_j X_i(t)] dt$$

et

$$\iint_{T_i \times T_i} \rho_i(t) \zeta_i(t') E [X_i(t) X_i(t')] dt dt'$$

existent et sont respectivement égales à  $E \left[ Y \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right]$

à 
$$E \left[ Z_j \left( \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right) \right]$$

et à

$$E \left[ \left( \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt \right) \left( \int_{T_i} \zeta_i(t) X_i(t) dt \right) \right]$$

(quels que soient  $i, i', j, \zeta_i \in \mathcal{G}_i, \rho_i \in \mathcal{G}_i$ )

la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions  $\rho_i(t) \in \mathcal{G}_i$  et les nombres  $\alpha_j$  vérifient :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt - \sum_j \alpha_j Z_j \right]^2 = B$$

(B étant la borne inférieure du premier membre pour tous les  $\alpha_j$  et tous les  $\rho_i(t) \in \mathcal{G}_i$ )

est que les  $\alpha_j$  et les  $\rho_i(t)$  soient solution du système d'équations intégrales :

$$\int_{T_i} \left[ \sum_{j=1}^p \alpha_j E [Z_j X_i(t)] + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t') E (X_i(t) X_i(t')) dt' - E (Y X_i(t)) \right] \zeta_i(t) dt = 0$$

quel que soit  $\zeta_i(t) \in \mathcal{G}_i$ ,

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j E (Z_j Z_j) + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) E [X_i(t) Z_j] dt - E (Y Z_j) = 0$$

$$i' = 1, 2 \dots n$$

$$j' = 1, 2 \dots p$$

Si  $\mathcal{E}_i$  est l'espace  $L_2(T_i)$  le système devient :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j E[Z_j X_{i'}(t)] + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t') E[X_{i'}(t) X_i(t')] dt' - E(Y X_{i'}(t)) = 0$$

pour presque tout  $t \in T_{i'}$ ,

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j E(Z_j Z_{j'}) + \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) E[X_{i'}(t) Z_{j'}] dt - E(Y Z_{j'}) = 0$$

$$i' = 1, 2 \dots n$$

$$j' = 1, 2 \dots p$$

### Démonstration

Pour que

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p \alpha_j Z_j \right]^2 = B$$

il faut et il suffit que :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int_{T_i} (\rho_i(t) + \beta_i \zeta_i(t)) X_i(t) dt - \sum_{j=1}^p (\alpha_j + \gamma_j) Z_j \right]^2$$

soit minimum quel que soit les  $\zeta_i(t) \in \mathcal{E}_i$  pour  $\beta_i = 0$   $\gamma_i = 0$ .

Nous pouvons alors appliquer le lemme précédent avec

$$Y_1 = \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \rho_i(t) X_i(t) dt + \sum_{j=1}^p \alpha_j Z_j$$

et nous obtenons le résultat indiqué.

L'application du théorème précédent à  $\mathcal{Y} = Y - E(Y)$

$\mathcal{Z}_i = Z_j - E(Z_j)$  et à  $\mathcal{X}_i(t) = X_i(t) - E[X_i(t)]$  permet de ramener l'étude des fonctions de régression  $\rho_i(t)$  et des coefficients de régression  $\alpha_j$  à l'étude du système d'équations intégrales donné au théorème 5 - 5.

CHAPITRE VI

SUR LA RÉGRESSION NON LINÉAIRE

Nous allons généraliser les théorèmes 2 - 3, 2 - 11, 2 - 12 du chapitre II en vue de l'étude de la régression non linéaire de la forme :

$$E(Y) + \sum_{i=1}^n \left\{ \int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1, \dots, t_i) \prod_{i'=1}^i \left[ X(t_{i'}) - E[X(t_{i'})] \right] dt_{i'} \right\}$$

Théorème 6 - 1

Si Y et Y<sub>i</sub> sont des variables aléatoires ayant un moment du 2<sup>e</sup> ordre,

si les ζ<sub>i</sub>(t<sub>1</sub>...t<sub>i</sub>) sont des fonctions des i variables t<sub>1</sub>... t<sub>i</sub> définies sur T<sup>i</sup> et appartenant respectivement aux ensembles de fonctions ℘<sub>i</sub> (i = 1, 2 ... n)

et si X(t) est une fonction aléatoire définie sur T telle que, quel que soit i,

$$\int \dots \int_{T^i} \zeta_i(t_1, \dots, t_i) \prod_{i'=1}^i (X(t_{i'}) - dt_{i'})$$

existe en un certain sens S<sub>i</sub> quel que soit ζ<sub>i</sub> ∈ ℘<sub>i</sub>, ait un moment du 2<sup>e</sup> ordre, si E[(Y - Y<sub>1</sub>) X(t<sub>1</sub>)... X(t<sub>i</sub>)] existe quel que soit i, si :

$$\int \dots \int_{T^i} \zeta_i(t_1 \dots t_i) E[(Y - Y_1) X(t_1) \dots X(t_i)] dt_1 \dots dt_i$$

existe quel que soit ζ<sub>i</sub> ∈ ℘<sub>i</sub> et est égale à :

$$E \left[ (Y - Y_1) \int \dots \int_{T^i} \zeta_i(t_1 \dots t_i) X(t_1) \dots X(t_i) dt_1 \dots dt_i \right]$$

(ces hypothèses font intervenir notamment les sens S<sub>i</sub> et les ℘<sub>i</sub>)

alors :

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$$E \left[ Y - Y_1 \right]^2 \leq E \left[ Y - Y_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\tau_i} \dots \int_{\tau_i} \zeta_i(t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i (X(t_{i'})) dt_{i'} \right]^2$$

est que :

$$\int_{\tau_i} \dots \int_{\tau_i} E (Y - Y_1) X(t_1) \dots X(t_i) \zeta_i(t_1 \dots t_i) dt_1 \dots dt_i = 0$$

quel que soit  $i$ , et quel que soit  $\zeta_i \in \mathfrak{G}_i$

Si  $\mathfrak{G}_i$  est l'espace  $L_2(T^i)$  l'équation devient :

$$E[(Y - Y_1) X(t_1) \dots X(t_i)] = 0 \text{ presque partout (avec } i = 1, 2 \dots n)$$

*Démonstration*

Posons :

$$F = E \left[ Y - Y_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\tau_i} \dots \int_{\tau_i} \zeta_i(t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i (X(t_{i'})) dt_{i'} \right]^2$$

Pour que  $F$  soit minimum lorsque tous les  $\alpha_i$  sont nuls, il est nécessaire que les  $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}$  soient nuls lorsque tous les  $\alpha_i$  sont nuls, ce qui donne le système d'équations :

$$\int_{\tau_i} \dots \int_{\tau_i} E[(Y - Y_1) X(t_1) \dots X(t_i)] \zeta_i(t_1 \dots t_i) dt_1 \dots dt_i = 0$$

(ce qui doit être vérifié quels que soient les  $\zeta_i \in \mathfrak{G}_i$ ).

Ces conditions sont suffisantes, car cela résulte de l'identité

$$F = E (Y - Y_1)^2 + E \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\tau_i} \dots \int_{\tau_i} \zeta_i(t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i (X(t_{i'})) dt_{i'} \right]^2$$

qui est alors vérifiée.

*Théorème 6 - 2*

Si  $Y$  est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre, si les  $\zeta_i(t_1 \dots t_i)$  et  $\rho_i(t_1 \dots t_i)$  sont des fonctions des  $i$  variables

$t_1 \dots t_i$  définies sur  $T^i$  appartenant à l'espace vectoriel  $\mathcal{G}_i$  (quel que soit  $i = 1, 2 \dots n$ )

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire définie sur  $T$  et si

$$\int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1 \dots t_i) X(t_1) \dots X(t_i) dt_1 \dots dt_i$$

existe en un certain sens  $S_i$  et a un moment du 2e ordre (quel que soit  $\rho_i \in \mathcal{G}_i$  et quel que soit  $i$ )

Si  $Y, X(t)$  les  $S_i$  et les  $\mathcal{G}_i$  sont tels que, quels que soient les  $\rho_i$  et  $\zeta_j \in \mathcal{G}_i$ , les intégrales - L

$$\int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1 \dots t_i) E[Y X(t_1) \dots X(t_i)] dt_1 \dots dt_i$$

et

$$\int \dots \int_{T^i \times T^j} \rho_i(t_1 \dots t_i) \zeta_j(t'_1 \dots t'_j) E\left[\prod_{i'=1}^i X(t_{i'}) \prod_{j'=1}^j X(t'_{j'})\right]$$

existent et sont respectivement égales à :

$$E\left[Y \int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1 \dots t_i) X(t_1) \dots X(t_i) dt_1 \dots dt_i\right]$$

et à :

$$E\left[\left(\int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i X(t_{i'}) dt_i\right) \left(\int \dots \int_{T^j} \zeta_j(t'_1 \dots t'_j) \prod_{j'=1}^j X(t'_{j'}) dt_j\right)\right]$$

quel que soit  $j (= 1, 2 \dots n)$

et quels que soient les  $\rho_i \in \mathcal{G}_i$  et  $\zeta_j \in \mathcal{G}_j$

alors :

La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions  $\rho_i(t_1 \dots t_i) \in \mathcal{G}_i$  vérifient

$$E\left[Y - \sum_{i=1}^n \left(\int \dots \int_{T^i} \rho_i(t_1 \dots t_i) X(t_1) \dots X(t_i) dt_1 \dots dt_i\right)\right]^2 = B$$

(B étant la borne inférieure du premier membre pour tous les  $\rho_i \in \mathcal{G}_i$ ) est qu'elles soient solution du système d'équations intégrales :

$$\int \dots \int_{\tau_j} \varphi_j \zeta_j (t_1' \dots t_j') \prod_{j'=1}^j dt_{j'} = 0$$

quels que soient les  $\zeta_j \in \mathcal{E}_j$  et quel que soit  $j$

(on a posé :

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^n \int \dots \int_{\tau_i} \rho_i (t_1 \dots t_i) E \left[ \prod_{i'=1}^i X (t_{i'}) \prod_{j'=1}^j X (t_{j'}) \right] \prod_{i'=1}^i dt_{i'} - E \left[ Y \prod_{j'=1}^j X (t_{j'}) \right]$$

Si les  $\mathcal{E}_j$  sont les espaces  $L_2(T^j)$  le système d'équations intégrales devient :

$$\sum_{i=1}^n \int \dots \int_{\tau_i} \rho_i (t_1 \dots t_i) E \left[ \prod_{i'=1}^i X (t_{i'}) \prod_{j'=1}^j X (t_{j'}) \right] dt_1 \dots dt_i = E \left[ Y \prod_{j'=1}^j X (t_{j'}) \right]$$

pour presque tous les  $t' \in T$

*Démonstration*

Pour que :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int \dots \int_{\tau_i} \rho_i (t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i (X (t_{i'}) dt_{i'}) \right]^2 = B$$

il faut et il suffit que :

$$E \left[ Y - \sum_{i=1}^n \int \dots \int_{\tau_i} (\rho_i (t_1 \dots t_i) + \alpha_i \zeta_i (t_1 \dots t_i)) \prod_{i'=1}^i (X (t_{i'}) dt_{i'}) \right]^2$$

soit minimum pour tous les  $\alpha_i$  nuls quels que soient les  $\zeta_i \in \mathcal{E}_i$ .

Il suffit alors d'appliquer le théorème 6 - 1.

$$\text{avec : } Y_1 = \sum_{i=1}^n \int \dots \int_{\tau_i} \rho_i (t_1 \dots t_i) \prod_{i'=1}^i (X (t_{i'}) dt_{i'})$$

pour obtenir les résultats du théorème 6 - 2.

L'application du théorème 6 - 2 à  $\mathfrak{Y} = Y - E (Y)$  et à

$$\mathfrak{X} (t) = X (t) - E (X (t))$$

permet de ramener l'étude des fonctions de régression  $\rho_i$  (dans le cas de la régression non linéaire) à l'étude du système d'équations intégrales du théorème 6 - 2.

## CHAPITRE VII

### RÉGRESSION

#### DES ESPÉRANCES MATHÉMATIQUES CONDITIONNELLES

#### ET RÉGRESSION LINÉAIRE M.Q.

##### Théorème 7 - 1

Si  $Y$  et  $X(t)$  vérifient les hypothèses C, si de plus  $X(t)$  est presque sûrement de carré intégrable sur  $T$  et si quand  $x(t) \in L_2(T)$

$$E \left[ Y / X(t) = x(t) \right] = \alpha_1 + \int_T \rho_1(t) x(t) dt \quad (\rho_1(t) \in L_2(T))$$

$$E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2$$

est minimum si  $\alpha_0 = \alpha_1, \rho(t) = \rho_1(t)$ .

S'il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \in L_2(T)$  telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit presque sûrement égale à une constante, il n'y a que pour  $\alpha_0 = \alpha_1$  et  $\rho(t) = \rho_1(t)$  que le minimum est atteint.

##### Démonstration

On a l'identité :

$$\begin{aligned} E \left[ Y - \alpha_0 - \int_T \rho(t) X(t) dt \right]^2 &= E \left[ Y - \alpha_1 - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right]^2 \\ &+ 2 E \left[ \left( Y - \alpha_1 - \int_T \rho_1(t) X(t) dt \right) \left( \alpha_1 - \alpha_0 + \int_T (\rho_1(t) - \rho(t)) X(t) dt \right) \right] \\ &+ E \left[ \alpha_1 - \alpha_0 + \int_T [\rho_1(t) - \rho(t)] X(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

Le 2e terme du 2e membre est nul puisque

$$E \left( Y / \text{conditionnelle } X(t) = x(t) \right) = \alpha_1 + \int_T \rho_1(t) x(t) dt$$

le 1er membre est donc minimum pour  $\alpha_0 = \alpha_1, \rho(t) = \rho_1(t)$ , et il n'y a que pour ces valeurs que le minimum est atteint dans le cas où il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \in L_2(T)$  telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit presque sûrement égal à une constante.

N.B. Nous aurions évidemment un théorème tout à fait analogue dans le cas de la régression non linéaire.

## CHAPITRE VIII

### SUR L'ESTIMATION DE LA RÉGRESSION LINÉAIRE M.Q.

#### I - QUELQUES REMARQUES SUR L'ESTIMATION DE $\rho(t)$ .

##### 1/ Cas où la f. a. $X(t)$ a une fonction de covariance

$$\Gamma(t, t') = E \left[ \left( X(t) - E[X(t)] \right) \left( X(t') - E[X(t')] \right) \right] \text{ connue.}$$

Nous supposons ici que les hypothèses C du chapitre II sont vérifiées, que les valeurs propres  $\lambda_i$  et fonctions propres  $\phi_i(t)$  de  $\Gamma(t, t')$  sont connues, que les coefficients de Fourier  $f_i$  de

$$E \left[ \left( Y - E(Y) \right) \left( X(t') - E[X(t')] \right) \right]$$

(que nous poserons égal à  $\varphi(t')$  pour simplifier l'écriture) ne sont pas connus.

Si la série  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$  converge, il existe  $\rho(t) \in L_2(T)$  tel que :

$$E \left[ \left( Y - E(Y) \right) - \int_T \rho(t) [X(t) - E(X(t))] dt \right]^2 = B(L_2(T))$$

et  $\rho(t)$  est solution de l'équation intégrale :

$$\int_T \Gamma(t, t') \rho(t) dt = \varphi(t')$$

Notons tout de suite que les  $f_i$  étant inconnus, il n'est pas très facile de tester l'hypothèse de la convergence de  $\sum_i \lambda_i^2 f_i^2$ , cela ne résulte pas de la convergence de  $\sum_i f_i^2$ , car  $\lambda_i \rightarrow +\infty$  quand  $i \rightarrow +\infty$  (Nous écartons ici le cas simple où le noyau  $\Gamma(t, t')$  serait dégénéré).

Pour estimer  $\rho(t)$  on pourrait être tenté de chercher un estimé  $\widehat{\varphi}_n(t')$  de  $\varphi(t')$  et de choisir un estimé  $\widehat{\rho}_n(t)$  vérifiant :

$$\int_T \Gamma(t, t') \widehat{\rho}_n(t) dt = \widehat{\varphi}_n(t')$$

On pourrait considérer par exemple :

$$\widehat{\varphi}_n(t') = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[ Y_k - \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \right] \left[ X_k(t') - \frac{X_1(t') + \dots + X_n(t')}{n} \right]$$

Soient  $f_{n\nu}$  les coefficients de Fourier d'un estimé quelconque  $\widehat{\varphi}_n(t') \in L_2(T)$  de  $\varphi(t')$  relativement aux  $\psi_\nu(t')$ . La convergence en moyenne quadratique de  $\widehat{\varphi}_n(t')$  vers  $\varphi(t')$  entraînerait  $\sum_\nu (f_{n\nu} - f_\nu)^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Or ceci n'entraîne pas l'existence de  $\widehat{\rho}_n(t)$  ce qui exigerait la convergence de  $\sum_\nu \lambda_\nu^2 f_{n\nu}^2$ , mais ceci n'est pas une difficulté majeure si  $\Gamma(t, t')$  est connu, on peut modifier l'estimé de  $\widehat{\varphi}_n(t')$  de façon que  $\sum_\nu \lambda_\nu^2 f_{n\nu}^2$  converge. (Il suffirait par exemple de choisir le nouvel estimé de façon que tous les  $f_{n\nu}$  soient nuls à partir d'un certain rang  $\nu$  (fonction de  $n$  évidemment), ceci peut être compatible avec  $\sum_\nu (f_{n\nu} - f_\nu)^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Si  $\widehat{\rho}_n(t)$  existe, il resterait à étudier la convergence de  $\widehat{\rho}_n(t)$  vers  $\rho(t)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La convergence en moyenne quadratique sur  $T$  de  $\widehat{\rho}_n(t)$  vers  $\rho(t)$  exigerait que  $\sum_\nu \lambda_\nu^2 (f_{n\nu} - f_\nu)^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , ceci ne résulte évidemment pas en général de  $\sum_\nu (f_{n\nu} - f_\nu)^2 \rightarrow 0$ . (Les  $\lambda_\nu \rightarrow +\infty$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ .) Même si on ajoute l'hypothèse de la convergence quel que soit  $n$  de  $\sum_\nu \lambda_\nu^2 f_{n\nu}^2$ , cela ne suffirait pas.

Même dans le cas simple où  $\Gamma(t, t')$  est complètement connue on voit toutes les précautions à prendre pour obtenir un estimé satisfaisant de la fonction de régression. Il ne suffit donc pas de choisir un estimé  $\widehat{\varphi}_n(t')$  de  $\varphi(t')$  convergeant en un certain sens vers  $\varphi(t')$  pour en déduire un estimé satisfaisant de la fonction de régression  $\rho(t)$ .

2/ Cas où la fonction de covariance  $\Gamma(t, t')$  est inconnue.

Les  $\lambda_i$  et les  $\psi_i(t)$  sont alors généralement totalement inconnus.

Si  $\widehat{\Gamma}_n(t, t')$  et  $\widehat{\varphi}_n(t')$  sont des estimés convergeant en un certain sens vers  $\Gamma(t, t')$  et  $\varphi(t)$ , il n'existe pas de théorème général permettant d'en conclure la convergence de  $\widehat{\rho}_n(t)$  défini par :

$$\int_T \widehat{\Gamma}_n(t, t') \widehat{\rho}_n(t) dt = \widehat{\varphi}_n(t')$$

(lorsqu'il existe un tel  $\widehat{\rho}_n(t)$ )

vers  $\rho(t)$  solution de :

$$\int_T \Gamma(t, t') \rho(t) dt = \varphi(t)$$

(lorsqu'il existe un tel  $\rho(t)$ ).

Le comportement de la suite  $\widehat{\rho}_n(t)$  sera très variable suivant les estimés choisis pour  $\widehat{\Gamma}_n(t, t')$  et  $\widehat{\varphi}_n(t')$  et, à moins de renseignements très précis sur la f. a.  $X(t)$  et la v. a.  $Y$ , on ne peut espérer obtenir ainsi d'estimés satisfaisants.

Soient  $Y_1 \dots Y_n, X_1(t) \dots X_n(t)$ ,  $n$  réalisations indépendantes.

Nous supposons que, quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$ ,  $X_i(t)$  est telle que  $\rho(t) X_i(t)$  est p. s. intégrable - L sur  $T$ ,  $\int_T \rho(t) X_i(t) dt$  définissant une variable aléatoire.

Nous supposons également que les hypothèses (C) sont vérifiées.

Nous supposerons pour simplifier que  $E(Y) = 0, E(X(t)) = 0$ .

Si  $E(Y)$  et  $E(X(t))$  n'étaient pas nuls, mais étaient connus, on se ramènerait immédiatement à ce cas en posant

$$y = Y - E(Y) \quad x(t) = X(t) - E[X(t)].$$

Considérons, par exemple, les estimés

$$\widehat{\Gamma}_n(t, t') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t) X_i(t')$$

$$\widehat{\varphi}_n(t') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i X_i(t')$$

Si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  n'étaient pas connus, on pourrait faire une étude assez analogue avec les estimés

$$\widehat{\Gamma}_n(t, t') = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ X_i(t) - \frac{X_1(t) + \dots + X_n(t)}{n} \right] \left[ X_i(t') - \frac{X_1(t') + \dots + X_n(t')}{n} \right]$$

et

$$\widehat{\varphi}_n(t') = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \right] \left[ X_i(t') - \frac{X_1(t') + \dots + X_n(t')}{n} \right]$$

Le noyau de l'équation intégrale

$$\int_T \widehat{\Gamma}_n(t, t') \widehat{\rho}_n(t) dt = \widehat{\varphi}_n(t')$$

est dégénéré.

Ceci ne nous surprend pas, car l'échantillon  $X_1(t) \dots X_n(t)$  ne peut donner d'information sur la composante de  $\rho(t)$  orthogonale à l'espace vectoriel engendré par  $X_1(t) \dots X_n(t)$ .

Tout au plus pouvons nous espérer obtenir un estimé satisfaisant de la composante de  $\widehat{\rho}(t)$  suivant cet espace vectoriel ou suivant un sous espace vectoriel  $\mathcal{E}_L$  à  $L$  dimensions de cet espace.

En appelant  $\rho_1(t) \dots \rho_L(t) \dots \rho_L(t)$  une base de  $\mathcal{E}_L$ , la composante de  $\widehat{\rho}_n(t)$  suivant  $\mathcal{E}_L$  est égale à  $\sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l(n) \rho_l(t)$ , les  $\widehat{\alpha}_l$  étant à étudier. (Pour abrégier l'écriture nous n'écrirons pas que  $\alpha_l$  est fonction de  $n$ ).

Si quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$ ,  $\rho(t) X_i(t)$  est presque sûrement intégrable -  $L$  sur  $T$ ,  $\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt$  étant égal à une variable aléatoire  $X_{il}$  (nous avons au chapitre I donné des conditions suffi-

santes simples pour que ce soit vrai), nous obtenons pour trouver l'estimé :

$$\int_{\tau} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i(t) X_i(t') \right) \left( \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l \rho_l(t) \right) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i X_i(t')$$

ce qui nous donne en égalant les composantes des 2 membres suivant  $\rho_{l'}(t')$  :

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{il'}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i X_{il'}}{n}$$

(avec  $l' = 1, 2 \dots L$ ).

Les conditions d'existence et d'unicité des  $\widehat{\alpha}_l$  seront données au théorème 8 - 1.

Nous remarquons que les  $\widehat{\alpha}_l$  peuvent être considérés comme des estimés "satisfaisants" des  $\alpha_l$  du théorème 2 - 13. (Nous supposons les hypothèses de ce théorème vérifiées). Les  $\alpha_l$  vérifient le système d'équations :

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{\tau \times \tau} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_{\tau} \rho_{l'}(t) E[Y X(t)] dt$$

Les  $\alpha_l$  existent et sont uniques puisque nous avons supposé qu'il n'existe pas de fonction certaine  $\rho(t) \neq 0$  appartenant à  $\mathfrak{E}_l$  telle que

$$\text{Prob} \left[ \int_{\tau} \rho(t) X(t) dt = 0 \right] = 1.$$

Les  $\widehat{\alpha}_l$  convergent presque sûrement vers les  $\alpha_l$  quand  $n \rightarrow \infty$

(L restant fixe) puisque  $E \left[ \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{il'}}{n} \right]$  converge presque sûrement vers

$$\iint_{\tau \times \tau} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

et que  $E \left[ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i X_{il'}}{n} \right]$  converge presque sûrement vers

$$\int_{\tau} \rho_{l'}(t) E[Y X(t)] dt.$$

$\sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l \rho_l(t)$  est donc un estimé "consistant" de :

$$\rho(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$$

rendant  $E \left[ Y - \int_{\tau} \rho(t) X(t) dt \right]^2$  égal à sa borne inférieure pour tous les  $\rho(t) \in \mathcal{E}_L$ .

Mais  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  est en général totalement différent de la composante de  $\rho(t)$ , solution de  $\int_{\tau} \Gamma(t, t') \rho(t) dt = \psi(t')$  suivant  $\mathcal{E}_L$  et l'augmentation de  $L$  ne supprime pas les difficultés (cf. th. 2 - 17). A noter toutefois le cas particulier où  $L$  fonctions propres de  $\Gamma(t, t')$  constituent une base de  $\mathcal{E}_L$ ,  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  est alors égal à la composante de  $\rho(t)$  suivant  $\mathcal{E}_L$ .

Notons cependant que l'estimation de la fonction de régression peut être étudiée plus facilement dans certains cas particuliers, par exemple, si  $X(t)$  est une f.a à accroissements orthogonaux, ou si  $X(t)$  est une f.a stationnaire (auquel cas on estimera la fonction de régression  $\rho(v)$  de la fréquence), ou si  $X(t)$  est de type particulièrement simple.

Tout ce qui précède montre toutes les précautions à prendre dans l'estimation de  $\rho(t)$  dans les cas où  $X(t)$  et  $Y$  sont suffisamment bien connues. Si nous ne sommes pas suffisamment renseignés, sur  $Y$  et  $X(t)$ , toute tentative d'estimation "satisfaisante" de  $\rho(t)$  est vouée à l'échec pour les raisons que nous avons données. Ceci explique l'orientation que nous avons donnée au chapitre II où l'essentiel dans l'obtention de la régression est non pas la fonction de régression  $\rho(t)$  qui souvent n'existe même pas, mais la variable aléatoire de régression  $Y_x$  et c'est l'estimation de cette variable aléatoire qui va être étudiée dans la suite de ce chapitre.

## ESTIMATION DE LA RÉGRESSION

L'estimation de la régression se présente de façon différente lorsque  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  sont connus et lorsqu'ils ne le sont pas.

a) Si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  sont connus

Si les hypothèses (C) sont vérifiées et si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  sont nuls l'estimation de la régression n'est autre que l'estimation de  $Y_{1X}$  défini au théorème 2 - 4 (on a alors  $Y_x = Y_{1X}$ )

Si  $y$  et  $x(t)$  (vérifiant toujours les hypothèses C) ont des espérances mathématiques connues, il suffit de poser

$$Y = y - E(y) \quad X(t) = x(t) - E[x(t)]$$

et d'estimer  $Y_{1X}$  car on a la régression  $y_x = E(y) + Y_{1X}$ .

Nous étudierons donc dans la 2e partie l'estimation de  $Y_{1X}$  tel que défini au théorème 2 - 4.

(Il est à noter que cette estimation de  $Y_{1X}$  pourrait être faite même si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  n'étaient pas nuls, mais alors  $Y_{1X}$  serait différent de  $Y_x$ .)

b) Si  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$  ne sont pas tous les deux connus

Plutôt que de chercher à estimer  $E(Y)$  et  $E[X(t)]$ , nous étudierons  $Y_x$  estimé par  $\widehat{\alpha}_0 + \int_T \widehat{\rho}(t) X(t) dt$ .

(Ici  $\widehat{\rho}(t)$  ne sera pas considéré comme l'estimation d'une fonction de régression qui dans certains cas n'existerait même pas).

Ceci fera l'objet de la 3e partie de ce chapitre.

## II - ESTIMATION DE $Y_{1X}$ (PAR LES MOINDRES CARRES)

Soient  $\rho_1(t) \rho_2(t) \dots \rho_l(t) \dots$  une suite de fonctions de  $L_2(T)$  formant un système complet. Soit  $\mathcal{E}_L$  l'espace vectoriel à  $L$  dimensions engendré par  $\rho_1(t) \dots \rho_l(t) \dots \rho_l(t)$  (que nous supposons linéairement indépendants).

Nous supposons que  $X(t)$  est une fonction aléatoire et  $Y$  une variable aléatoire telles que :

a)  $\rho_l(t) X(t)$  est p. s. intégrable -  $L$  sur  $T$ ,  $\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  définissant une variable aléatoire vérifiant ainsi que  $Y$  et  $X(t)$  les hypothèses du théorème 2 - 4 (les hypothèses de ce théorème 2 - 4 permettent de définir  $Y_{1X} (L_2(T))$ ).

b) il n'existe pas de fonction certaine  $u(t) \neq 0$   $u(t) \in \mathcal{E}_L$  telle que  $\text{Prob} \left( \int_T u(t) X(t) dt = 0 \right) = 1$

Il existe alors une fonction et une seule  $\rho(t) \in \mathcal{E}_L$

$$\rho(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$$

telle que :

$$\int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt = Y_{1X} (\mathcal{E}_L)$$

les  $\alpha_l$  étant solution du système

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_T \rho_{l'}(t) E[Y X(t)] dt$$

( $l' = 1, 2 \dots L$ )

Soit un échantillon de taille  $n$ ,  $X_i(t)$  et  $Y_i$  l'observation de rang  $i$ . Nous ne pouvons en déduire que des estimés d'un nombre  $L$  de paramètres indépendants nettement plus petit que  $n$ .

Nous estimerons  $Y_{1x}(\mathcal{E}_L)$  et nous utiliserons le résultat du théorème 2 - 15 où on a montré que  $Y_{1x}(\mathcal{E}_L)$  converge m.q vers  $Y_{1x}(L_2(T))$  quand  $L \rightarrow +\infty$ .

Il existe donc  $L_0(\epsilon)$  tel que,  $\epsilon$  étant  $> 0$  arbitrairement petit :

$$E[Y_{1x}(L_2(T)) - Y_{1x}(\mathcal{E}_L)]^2 < \epsilon$$

quand  $L > L_0(\epsilon)$

$L$  étant fixé ( $> L_0$ ) nous étudierons l'estimation de  $Y_{1x}(\mathcal{E}_L)$  quand la taille  $n$  de l'échantillon est supérieure à  $L$  et nous indiquerons des théorèmes limites quand  $n \rightarrow +\infty$ .

ESTIMES DES MOINDRES CARRES DE  $Y_{1x} (\mathcal{E}_1)$ 

## Théorème 8 - 1

Si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) et les  $\rho_l(t)$  ( $l = 1, 2 \dots L$ ) sont tels que l'intégrale  $-\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt$  existe quels que soient  $i$  et  $l$  (pour abrégé l'écriture nous appellerons  $X_{il}$  cette intégrale).

S'il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \in \mathcal{E}_1$  ( $\rho(t) \neq 0$ ) telle que  $\int_T \rho(t) X_i(t) dt = 0$  pour tous les  $i$  ( $1, 2 \dots n$ ), il existe un et un seul système de valeurs des  $\alpha_l$   $\widehat{\alpha}_l(n)$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_i - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X_i(t) dt \right)^2$$

soit minimum. Ils sont solution du système :

$$\sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l \sum_{i=1}^n X_{il} X_{il'} = \sum_{i=1}^n Y_i X_{il'}$$

(avec  $l' = 1, 2 \dots L$ )

## Démonstration

$$\text{Soit } z = \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il} \right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_{l'}} = - \sum_{i=1}^n X_{il'} (Y_i - \sum_l \alpha_l X_{il})$$

et l'annulation des  $\frac{\partial z}{\partial \alpha_{l'}}$  nous conduit au système

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{i=1}^n X_{il} X_{il'} = \sum_{i=1}^n Y_i X_{il'}$$

Puisqu'il n'existe pas de  $\rho(t) \neq 0$   $\rho(t) \in \mathcal{E}_1$  telle que tous les  $\int_T \rho(t) X_i(t) dt = 0$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X_i(t) dt \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il} \right)^2$$

n'est nul que pour tous les  $\alpha_l$  nuls. Le discriminant de cette forme quadratique (qui n'est autre que le déterminant de notre système) est donc  $\neq 0$ .

Notre système d'équation admet donc une solution et une seule  $\alpha_l$ .

Les  $\widehat{\alpha}_l$  sont les valeurs des  $\alpha_l$  correspondant au minimum de  $z$ , car cela résulte de l'identité

$$z = \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l X_{il} \right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{l=1}^L (\widehat{\alpha}_l - \alpha_l) X_{il} \right]^2$$

Lemme 8-2-1

Si les  $\widehat{\alpha}_l(n)$  convergent presque sûrement vers les  $\alpha_l$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (pour  $l = 1, 2, \dots, L$ ) et si  $\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  existe et est une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre :

$$\widehat{Y_{1X}}(\mathcal{E}_1) = \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l(n) \int_T \rho_l(t) X(t) dt$$

converge presque sûrement, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers

$$Y_{1X}(\mathcal{E}_1) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt.$$

Démonstration

Nous poserons pour abrégier l'écriture  $X_l = \int_T \rho_l(t) X(t) dt$ .  $\eta$  étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut choisir un nombre  $M$  tel que

$$M > \sqrt{\frac{2}{\eta} E(X_l^2)}$$

on a alors :

$$\frac{E(X_l^2)}{M^2} < \frac{\eta}{2}$$

et d'après l'inégalité de Tchébitcheff

$$\text{Prob} [ |X_l| < M ] > 1 - \frac{E(X_l^2)}{M^2} > 1 - \frac{\eta}{2}$$

D'autre part puisque  $\widehat{\alpha}_l(n)$  converge presque sûrement vers  $\alpha_l$  il en résulte qu'il existe  $N(\varepsilon, M, \eta)$  tel que la probabilité, pour que toutes les inégalités

$$|\widehat{\alpha}_l(n) - \alpha_l| < \frac{\varepsilon}{M}$$

correspondant à tous les  $n > N(\varepsilon, M, \eta)$  soient satisfaites, soit supérieure à  $1 - \frac{\eta}{2}$  ( $\varepsilon$  étant un nombre  $> 0$  arbitraire).

La probabilité pour qu'en plus de ces inégalités, l'inégalité  $|X_l| < M$  soit satisfaite est donc supérieure à  $(1 - \frac{\eta}{2})^2$  qui est lui-même supérieur à  $1 - \eta$ .

Or si  $|X_l| < M$  et si pour tous les  $n > N(\varepsilon, M, \eta)$

$$|\widehat{\alpha}_l(n) - \alpha_l| < \frac{\varepsilon}{M},$$

$$|X_l(\widehat{\alpha}_l(n) - \alpha_l)| < \varepsilon$$

La probabilité pour que toutes les inégalités :

$$|X_l(\alpha_l(n) - \alpha_l)| < \varepsilon$$

correspondant à tous les  $n > N(\varepsilon, M, \eta)$  soient satisfaites est supérieure à  $1 - \eta$ .

Quel que soit  $\varepsilon$ ,  $\widehat{\alpha}_l(n) X_l$  converge p.s vers  $\alpha_l X_l$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Il en résulte que :

$\widehat{Y}_{1x}(\widehat{\mathcal{E}}_l)$  converge presque sûrement vers  $Y_{1x}(\mathcal{E}_l)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Nous utiliserons enfin pour démontrer le théorème 8 - 2 la propriété suivante :

Lemme 8 - 2 - 2

Soit la matrice carrée symétrique  $\|B_n\|$  à  $L^2$  éléments et soient les 2 matrices colonnes à  $L$  éléments  $\|C_n\|$  et  $\|\widehat{\alpha}_{(n)}\|$ .

Si  $\|B_n\|$  converge presque sûrement vers  $\|B\|$  de déterminant non nul et si  $\|C_n\|$  converge presque sûrement vers  $\|C\|$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , la probabilité pour que, pour tous les  $n > N$ , il existe une et une seule solution  $\|\widehat{\alpha}_{(n)}\|$  du système d'équation :

$$\|B_n\| \times \|\widehat{\alpha}_{(n)}\| = \|C_n\|$$

tend vers 1 quand  $N \rightarrow +\infty$ .

Cette solution converge alors presque sûrement vers  $\|\alpha\|$  solution du système

$$\|B\| \times \|\alpha\| = \|C\|.$$

Démonstration

Puisque  $\|B_n\|$  converge p. s vers  $\|B\|$  de déterminant non nul, il existe  $N(\eta)$  tel que la probabilité pour que tous les  $|B_n| \neq 0$  pour  $n > N(\eta)$  soit supérieure à  $1 - \eta$ . ( $\eta$  étant positif arbitrairement petit).

La 2e partie du lemme résulte des faits suivants.

Si  $X_n$  et  $Y_n$  convergent p. s vers  $X$  et  $Y$ ,  $X_n + Y_n$ ,  $X_n Y_n$ , convergent p. s vers  $X + Y$ ,  $X Y$ ;  $\frac{X_n}{Y_n}$  convergera p. s vers  $\frac{X}{Y}$  si de plus  $\text{Prob}(Y = 0) = 0$ .

Nous considérerons dans le théorème 8 - 2 l'estimé

$$\widehat{Y_{1X}}(\mathcal{E}_L) = \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha}_l(n) \int_T \rho_l(t) X(t) dt$$

de  $Y_{1X}(\mathcal{E}_L)$  les  $\alpha_l(n)$  étant les estimés des moindres carrés du théorème 8 - 1.

## Théorème 8 - 2

Soient  $\rho_1(t) \dots \rho_l(t) \dots \rho_L(t)$   $L$  fonctions linéairement indépendantes définies sur  $T$  et  $\mathcal{E}_L$  l'espace vectoriel engendré par ces fonctions

et soit  $X(t)$  ou  $(x(t, \omega))$  une fonction aléatoire du 2e ordre définie sur  $T$  telles que :

L'intégrale -  $L \int_T \rho_l(t) x(t, \omega) dt$  existe pour presque tout  $\omega$ , et est une fonction de  $\omega$  mesurable sur  $\Omega$  quel que soit  $l$ .

Si :

$$E \left[ \left( \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right) \left( \int_T \rho_{l'}(t) X(t) dt \right) \right]$$

existe quels que soient  $l$  et  $l'$  et est égale à

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

et si,  $Y$  étant une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre,

$$E \left[ Y \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] = \int_T \rho_l(t) E[Y X(t)] dt$$

quel que soit  $l$ .

Si de plus il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \neq 0$   $\rho(t) \in \mathcal{E}_L$  telle que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  soit presque sûrement nulle.

Soit  $n$  la taille de l'échantillon.

La probabilité pour que, pour tous les  $n > N$  l'estimé  $\widehat{Y_{1X}}(\mathcal{E}_L)$  existe et soit unique, tend vers 1 quand  $N \rightarrow +\infty$ . Cet estimé converge alors presque sûrement vers  $Y_{1X}(\mathcal{E}_L)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Démonstration

Soit  $\|B_n\|$  la matrice carrée à  $L^2$  éléments dont l'élément  $(i, i')$  est  $\sum_{i=1}^n \frac{X_{ii} X_{ii'}}{n}$

Soit  $\|C_n\|$  la matrice colonne à  $L$  éléments  $\sum_{i=1}^n \frac{Y_i X_{ii}}{n}$

$E (X_{i_l} X_{i_l'})$  existe et est égale à

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_l'(t') E [X(t) X(t')] dt dt'$$

$E (Y_i X_{i_l})$  existe et est égale à  $\int_T \rho_l(t) E [Y X(t)] dt$

D'après le théorème de Khintchine-Kolmogorov  $\|B_n\|$  converge presque sûrement vers  $\|B\|$  dont l'élément ( $ii'$ ) est

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_l'(t') E [X(t) X(t')] dt dt'$$

$\|C_n\|$  converge presque sûrement vers la matrice colonne  $\|C\|$  dont les éléments sont  $\int_T \rho_l(t) E [Y X(t)] dt$ .

Le déterminant de la matrice  $\|B\|$  est différent de 0 puisqu'il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \neq 0$   $\rho(t) \in \mathcal{G}_l$  telle que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  soit presque sûrement nulle.

On peut donc appliquer le lemme 8 - 2 - 2 à  $\widehat{\alpha_{(n)}}$  solution

$$\|B_n\| \times \|\widehat{\alpha_{(n)}}\| = \|C_n\|$$

De l'existence et l'unicité de  $\|\widehat{\alpha_{(n)}}\|$  se déduit l'existence et l'unicité de

$$\widehat{Y_{1X}}(\mathcal{G}_l) = \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha_{l(n)}} \int_T \rho_l(t) X(t) dt$$

et de la convergence presque sûre de  $\|\widehat{\alpha_{(n)}}\|$  vers  $\|\alpha\|$  solution de l'équation

$$\|B\| \times \|\alpha\| = \|C\|$$

et de l'application du lemme 8 - 2 - 1 résulte la convergence presque sûre de  $\widehat{Y_{1X}}(\mathcal{G}_l)$  vers  $Y_{1X}(\mathcal{G}_l)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Considérons :

$$\sqrt{n} \left[ \widehat{Y_{1X}}(\mathcal{G}_l) - Y_{1X}(\mathcal{G}_l) \right] = \int_T \sqrt{n} \left[ \sum_{l=1}^L (\widehat{\alpha_{l(n)}} - \alpha_l) \rho_l(t) \right] X(t) dt$$

Nous montrerons dans le théorème 8 - 3 que lorsque  $n \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{n} \left[ \sum_{l=1}^L (\bar{\alpha}_l(n) - \alpha_l) \rho_l(t) \right]$$

tend vers une loi de Laplace que l'on précisera.

Nous introduirons les notations suivantes :

$$\|P\| = \|\rho_1(t) \dots \rho_2(t) \dots \rho_L(t)\|$$

matrice ligne à  $L$  éléments

et nous appellerons  $\|D\|$  la matrice carrée à  $L^2$  éléments dont l'élément  $d_{mm}$  est défini ainsi

$$\begin{aligned} d_{mm} = & \iint_{T \times T} E [Y^2 X(t) X(t')] \rho_m(t) \rho_m(t') dt dt' \\ & - 2 \sum_{l=1}^L \alpha_l \iiint_{T^3} \rho_l(t) \rho_m(t') \rho_m(t'') E [Y X(t) X(t') X(t'')] dt dt' dt'' \\ & + \sum_{l=1}^L \sum_{l'=1}^L \alpha_l \alpha_{l'} \iiint_{T^4} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') \rho_m(t'') \rho_m(t''') \\ & E [X(t) X(t') X(t'') X(t''')] dt dt' dt'' dt''' \end{aligned}$$

les  $\alpha_l$  constituant la matrice colonne  $\|\alpha\|$  vérifiant

$$\|B\| \times \|\alpha\| = \|C\|$$

tel que vu précédemment.

On peut si on préfère moyennant les hypothèses du théorème 8 - 3 écrire :

$$d_{mm} = E \left[ \left( Y - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right)^2 \iint_{T \times T} X(t) X(t') \rho_m(t) \rho_m(t') dt dt' \right]$$

*Théorème 8 - 3*

Si les hypothèses du théorème 8 - 2 sont vérifiées et si de plus les expressions suivantes existent et vérifient les égalités suivantes quels que soient  $l, mm'$  (égaux à  $1, 2 \dots L$ )

$$E \left[ Y^2 \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt \right] =$$

$$= \iint_{T \times T} E [Y^2 X(t) X(t')] \rho_m(t) \rho_m(t') dt dt'$$

$$E \left[ Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] =$$

$$= \iiint_{T^3} E [Y X(t) X(t') X(t'')] \rho_m(t) \rho_m(t') \rho_l(t'') dt dt' dt''$$

$$E \left[ \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] =$$

$$\iiint \int_{T^4} E [X(t) X(t') X(t'') X(t''')] \rho_m(t) \rho_m(t') \rho_l(t'') \rho_l(t''') dt dt' dt'' dt'''$$

$\sqrt{n} \sum_{l=1}^L (\widehat{\alpha_l(n)} - \alpha_l) \rho_l(t)$  converge quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de variance

$$\|P\| \times \|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1} \times \|P\|$$

Démonstration

Des équations définissent  $\widehat{\alpha_l(n)}$  et  $\alpha_l$  on déduit :

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \left[ \sqrt{n} (\widehat{\alpha_l} - \alpha_l) \right] \left[ \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{im}}{n} \right] \right\} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_{im} - \sum_{l=1}^L X_{il} X_{im}}{\sqrt{n}}$$

avec  $(m = 1, 2 \dots L)$ .

Les 2e membres constituent L variables aléatoires et pour étudier leur loi limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , nous utiliserons le résultat classique suivant :

Soient L variables aléatoires  $Z_{(m)}$ ,  $(m = 1, 2 \dots L)$  et soient n réalisations indépendantes d'un échantillon  $Z_{i,(m)}$   $(i = 1, 2, \dots n)$

Si  $E [Z_{(m)}] = 0$  et si  $E [Z_{(m)}^2]$  existe (quel que soit m)

Les L variables aléatoires  $\frac{\sum_{i=1}^n Z_{i,(m)}}{\sqrt{n}}$  convergent quand  $n \rightarrow +\infty$  en loi vers la loi de Laplace-Gauss d'espérance mathématique nulle et de matrice de covariance dont l'élément  $(m, m')$  est  $E [Z_{(m)} Z_{(m')}]$ .

Ici :

$$Z_{i,(m)} = Y_i X_{im} - \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il} X_{im}$$

$$Z_{(m)} = Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt$$

qui vérifient nos hypothèses. Nous aurons donc convergence en loi vers la loi de Laplace-Gauss dont nous allons trouver la matrice de covariance.

$$E \left[ Z_{(m)} Z_{(m)'} \right] = E \left\{ \begin{array}{l} \left[ Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt \right] \\ \times \left[ Y \int_T \rho_m'(t) X(t) dt \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_m'(t) X(t) dt \right] \end{array} \right\}$$

$$= d_{mm}$$

La matrice de covariance de la loi limite des L v. a du 2e membre de notre système d'équations est donc  $\|D\|$

Comme d'autre part la matrice  $\|B_n\|$  d'éléments  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_{il} X_{im}}{n} \right)$

converge en probabilité vers la matrice symétrique  $\|B\|$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

Les L variables aléatoires  $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_l - \alpha_l)$  convergent en loi (quand  $n \rightarrow +\infty$ ) vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de matrice de covariance  $\|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1}$ .

Il en résulte que :

$$\sqrt{n} \left[ \sum_{l=1}^L \hat{\rho}_l(t) (\widehat{\alpha_l(n)} - \alpha_l) \right]$$

converge en loi vers la loi de Laplace à une variable d'espérance mathématique nulle et de variance

$$\|P\| \times \|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1} \|P\|'$$

N.B. La variable aléatoire  $\sqrt{n}(\widehat{Y_{lx}}(\mathcal{E}_l) - Y_{lx}(\mathcal{E}_l))$  ne converge pas forcément en loi vers la loi de Laplace, car si

$$\sqrt{n} \left[ \sum_{l=1}^L \widehat{(\alpha_l(n))} - \alpha_l \right] \rho_l(t)$$

tend vers la loi de Laplace et si  $X(t)$  est une fonction aléatoire indépendante de la précédente, il n'en résulte pas nécessairement que :

$$\int_T \sqrt{n} \sum_{l=1}^L \widehat{(\alpha_l(n))} - \alpha_l \rho_l(t) X(t) dt$$

tende vers la loi de Laplace quand  $n \rightarrow +\infty$ .

III ESTIMATION DE  $Y_x$  (PAR LES MOINDRES CARRÉS) DANS  
LE CAS OU  $E(Y)$  ET  $E[X(T)]$  NE SONT PAS TOUS LES  
DEUX CONNUS.

De même qu'au II puisque  $Y_x(\mathcal{G}_L)$  converge en moyenne quadratique vers  $Y_x[L_2(T)]$  quand  $L \rightarrow +\infty$ , on étudiera l'estimation de  $Y_x(\mathcal{G}_L)$ ,  $L$  étant donné quelconque. Nous avons les théorèmes suivants.

*Théorème 8 - 4*

Si les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) et les  $\rho_l(t)$  ( $l = 1, 2 \dots L$ ) sont tels que l'intégrale  $-\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt$  existe quels que soient  $i$  et  $l$  (on posera  $\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt = X_{il}$ ).

S'il n'existe pas de fonction  $\rho(t) (\in \mathcal{G}_L)$  telle que :

$$\int_T \rho(t) X_i(t) dt = k$$

pour tous les  $i$  ( $1, 2 \dots n$ ).

Il existe un et un seul système de valeurs de  $\alpha_0 \dots \alpha_L \dots$  ( $\widehat{\alpha_0(n)} \dots \widehat{\alpha_L(n)} \dots$ ) tel que :

$$\sum_{i=1}^n \left[ Y_i - \alpha_0 - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) X_i(t) dt \right]^2$$

soit minimum. Ils sont solution du système :

$$\widehat{\alpha_0} + \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha_l} \sum_{i=1}^n \frac{X_{il}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

$$\widehat{\alpha_0} \sum_{i=1}^n \frac{X_{im}}{n} + \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha_l} \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{im}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_{im}}{n}$$

(avec  $m = 1, 2 \dots L$ )

La démonstration est analogue à celle du théorème 8 - 1.

*Théorème 8 - 5*

Soient  $\rho_1(t) \dots \rho_l(t) \dots \rho_l(t)$   $L$  fonctions linéairement indépendantes définies sur  $T$  et soit  $\mathcal{E}_l$  l'espace vectoriel engendré par ces fonctions, soit  $X(t)$  ou  $x(t, \omega)$  une fonction aléatoire du 2e ordre définie sur  $T$  telles que :

L'intégrale -  $L \int_T \rho_l(t) x(t, \omega) dt$  existe pour presque tout  $\omega$ , et est une fonction de  $\omega$  mesurable sur  $\Omega$  quel que soit  $l$ ,

$$E \left[ \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right]$$

et

$$E \left[ \left( \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right) \left( \int_T \rho_{l'}(t) X(t) dt \right) \right]$$

existent quels que soient  $l$  et  $l'$  et sont respectivement égales à

$$\int_T \rho_l(t) E[X(t)] dt$$

et

$$\iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt'.$$

Si,  $Y$  étant une variable aléatoire ayant un moment du 2e ordre,

$$E \left[ Y \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] = \int_T \rho_l(t) E[Y X(t)] dt$$

(quel que soit  $l$ ).

Si de plus il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \in \mathcal{E}_l$  telle que  $\int_T \rho(t) X(t) dt$  soit presque sûrement égale à 1.

Si  $n$  est la taille de l'échantillon.

alors :

La probabilité pour que, pour les  $n > N$  l'estimé

$$\widehat{Y_x(\mathcal{G}_L)} = \widehat{\alpha_0(n)} + \sum_{l=1}^L \widehat{\alpha_l(n)} \int_T \rho_l(t) X(t) dt$$

existe et soit unique, tend vers 1 quand  $N \rightarrow +\infty$ . Cet estimé converge alors presque sûrement vers  $Y_x(\mathcal{G}_L)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La démonstration est analogue à celle du théorème 8 - 2.

Nous utiliserons les notations suivantes pour le théorème 8 - 6. Elles ont des significations différentes de celles du théorème 8 - 3.

Nous appellerons  $\|B\|$  la matrice carrée à  $(L+1)^2$  éléments.

$$b_{00} = 1 \quad b_{0l} = b_{l0} = \int_T \rho_l(t) E[X(t)] dt$$

$$b_{ll'} = \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_{l'}(t') E[X(t) X(t')] dt dt'$$

( $l$  et  $l' = 1, 2 \dots L$ )

Les  $\alpha_0 \dots \alpha_l \dots$  étant solution du système :

$$\alpha_0 + \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) E[X(t)] dt = E(Y)$$

$$\alpha_0 \int_T \rho_m(t) E[X(t)] dt + \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} \rho_l(t) \rho_m(t') E[X(t) X(t')] dt dt' = \int_T \rho_m(t) E[Y X(t)] dt$$

( $m = 1, 2 \dots L$ )

Nous définirons la matrice carrée  $\|D\|$  à  $(L+1)^2$  éléments :

$$d_{00} = E(Y - \alpha_0)^2 + 2\alpha_0 \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) E[X(t)] dt - 2 \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T E[Y X(t)] \rho_l(t) dt + \sum_{l=1}^L \sum_{l'=1}^L \alpha_l \alpha_{l'} \iint_{T \times T} E[X(t) X(t')] \rho_l(t) \rho_{l'}(t') dt dt'$$

$$d_{m0} = d_{0m} = \int_T E[Y^2 X(t)] \rho_m(t) dt + \alpha_0^2 \int_T E[X(t)] \rho_m(t) dt$$

$$+ \sum_{l=1}^L \sum_{l'=1}^L \alpha_l \alpha_{l'} \iiint_{T^3} E[X(t) X(t') X(t'')] \rho_l(t) \rho_{l'}(t') \rho_{l''}(t'') dt dt' dt''$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \alpha_0 \int_T E [YX (t)] \rho_m (t) dt - 2 \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} E [YX (t) X (t')] \rho_l (t) \rho_m (t') dt dt' \\
 & \quad + 2 \alpha_0 \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint_{T \times T} E [X (t) X (t')] \rho_l (t) \rho_m (t') dt dt' \\
 d_{mm} = & \iint_{T \times T} E [Y^2 X (t) X (t')] \rho_m (t) \rho_m (t') dt dt' + \\
 & \quad + \alpha^2 \iint_{T \times T} E [X (t) X (t')] \rho_m (t) \rho_m (t') dt dt' \\
 & + \sum_{l=1}^L \sum_{l'=1}^L \alpha_l \alpha_{l'} \iiint \int_{T^4} E [X (t) X (t') X (t'') X (t''')] \\
 & \quad \rho_l (t) \rho_m (t') \rho_{l'} (t'') \rho_m (t''') dt dt' dt'' dt''' \\
 & - 2 \alpha_0 \iint_{T \times T} E [Y X (t) X (t')] \rho_m (t) \rho_m (t') dt dt' \\
 & - 2 \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint \int_{T^3} E [Y X (t) X (t') X (t'')] \rho_m (t) \rho_l (t') \rho_m (t'') dt dt' dt'' \\
 & + 2 \alpha_0 \sum_{l=1}^L \alpha_l \iint \int_{T^3} E [X (t) X (t') X (t'')] \rho_m (t) \rho_l (t') \rho_m (t'') dt dt' dt''
 \end{aligned}$$

Les matrices  $\|B\|$  et  $\|D\|$  existent moyennant les hypothèses du théorème 8 - 6 et moyennant ces mêmes hypothèses

$$\begin{aligned}
 d_{00} &= E \left[ Y - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l (t) X (t) dt \right]^2 \\
 d_{m0} = d_{0m} &= E \left[ \left( Y - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l (t) X (t) dt \right) \left( \int_T \rho_m (t) X (t) dt \right) \right] \\
 d_{mm} &= E \left[ \left( Y - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l (t) X (t) dt \right) \left( \int_T \rho_m (t) X (t) dt \right) \right. \\
 & \quad \left. \left( \int_T \rho_m (t) X (t) dt \right) \right]
 \end{aligned}$$

Nous appellerons enfin  $\|P\|$  et  $\|Q\|$  les 2 matrices lignes à  $L + 1$  éléments.

$$\|P\| = \| 0 \ \rho (t) \ \dots \ \rho (t) \|$$

$$\|Q\| = \| 1 \ 0 \ \dots \ 0 \|$$

*Théorème 8 - 6*

Si les hypothèses du théorème 8 - 5 sont vérifiées et si de plus les expressions suivantes existent (quels que soient  $l, l', m, m' = 1, 2 \dots L$ ) et vérifient les égalités :

$$\begin{aligned}
 & E \left[ Y^2 \int_T \rho_m(t) X(t) dt \right] = \int_T E [Y^2 X(t)] \rho_m(t) dt \\
 & E \left[ Y^2 \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_{m'}(t) X(t) dt \right] = \\
 & \quad = \iint_{T \times T} E [Y^2 X(t) X(t')] \rho_m(t) \rho_{m'}(t') dt dt' \\
 & E \left[ Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_{m'}(t) X(t) dt \right] = \\
 & \quad = \iint_{T \times T} E [Y X(t) X(t')] \rho_m(t) \rho_{m'}(t') dt dt' \\
 & E \left[ Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_{m'}(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] = \\
 & \quad = \iiint_{T^3} E [Y X(t) X(t') X(t'')] \rho_m(t) \rho_{m'}(t') \rho_l(t'') dt dt' dt'' \\
 & E \left[ \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_{m'}(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \right] = \\
 & \quad \iiint_{T^3} E [X(t) X(t') X(t'')] \rho_m(t) \rho_{m'}(t') \rho_l(t'') dt dt' dt'' \\
 & E \left[ \int_T \rho_m(t) X(t) dt \int_T \rho_{m'}(t) X(t) dt \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_{l'}(t) X(t) dt \right] = \\
 & \quad \iiint \int_{T^4} E [X(t) X(t') X(t'') X(t''')] \rho_m(t) \rho_{m'}(t') \rho_l(t'') \rho_{l'}(t''') dt dt' dt'' dt''' \\
 & \quad 1 / \sqrt{n} \left[ \sum_{l=1}^l (\widehat{\alpha}_l(n) - \alpha_l) \rho_l(t) \right] \text{ converge en loi, quand } n \rightarrow +\infty, \\
 & \quad \text{vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de variance}
 \end{aligned}$$

$$\|P\| \times \|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1} \times \|P\|'$$

2/  $\sqrt{n} [\widehat{\alpha}_0(n) - \alpha_0]$  converge en loi, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de variance

$$\|Q\| \times \|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1} \times \|Q\|'$$

*Démonstration*

Nous obtenons ici le système d'équations :

$$\sqrt{n} (\widehat{\alpha}_0 - \alpha_0) + \sum_{l=1}^l \left[ \sqrt{n} (\widehat{\alpha}_l - \alpha_l) \right] \frac{\sum_{i=1}^n X_{il}}{n} = \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^l \alpha_l \frac{\sum_{i=1}^n X_{il}}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\widehat{\alpha}_0 - \alpha_0) \sum_{i=1}^n \frac{X_{im}}{n} + \sum_{l=1}^L \left[ \sqrt{n} (\widehat{\alpha}_l - \alpha_l) \right] \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{im}}{n} = \\ = \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{Y_i X_{im}}{n} - \alpha_0 \sum_{i=1}^n \frac{X_{im}}{n} - \sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{i=1}^n \frac{X_{il} X_{im}}{n} \right) \end{aligned}$$

(avec  $m = 1, 2 \dots L$ )

Nous poserons cette fois

$$Z_{i,(0)} = Y_i - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il}$$

$$Z_{i,(m)} = Y_i X_{im} - \alpha_0 X_{im} - \sum_{l=1}^L \alpha_l X_{il} X_{im}$$

$$Z_{(0)} = Y - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt$$

$$\begin{aligned} Z_{(m)} = Y \int_T \rho_m(t) X(t) dt - \alpha_0 \int_T \rho_m(t) X(t) dt - \\ - \sum_{l=1}^L \alpha_l \int_T \rho_l(t) X(t) dt \int_T \rho_m(t) X(t) dt \end{aligned}$$

Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 8 - 3 en notant toutefois, que les notations actuellement utilisées n'ont pas la même signification qu'alors. Les  $L + 1$  v. a  $Z_{(0)}, Z_{(m)}$  ont une espérance mathématique nulle et une matrice de covariance égale à  $\|D\|$ . Le théorème en résulte.

Les théorèmes limites du chapitre IV pourraient être utilisés pour estimer  $Y_x(L_2(T))$  qui peut être, par exemple, considéré comme limite d'une régression multiple de  $Y$  par rapport à  $L$  variables aléatoires  $X(t_1) \dots X(t_L)$  quand  $L \rightarrow +\infty$  de façon que le plus grand des  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ .

Le point important pour l'utilisation pratique de ceci est évidemment la rapidité de convergence vers  $Y_x(L_2(T))$  de façon à pouvoir obtenir avec  $L$  pas trop grand une bonne approximation de  $Y_x(L_2(T))$ . Par exemple dans le mémoire de Sir R. Fisher sur l'influence de la pluie sur les récoltes, la régression multiple de  $Y$  par rapport à 6 v. a  $\int_T \rho_l(t) X(t) dt$  représentait, à son avis,

une approximation satisfaisante de  $Y_x(L_2(T))$  (avec les choix de  $\rho_i(t)$  faits par R. Fisher naturellement), alors que dans ce même problème d'application pratique, la régression multiple de Y par rapport aux  $\int_{T_i} X(t) dt$  aurait exigé environ une soixantaine de termes (les  $T_i$  correspondant à 6 jours) pour obtenir d'après l'avis de S. R. Fisher une approximation convenable de  $Y_x(L_2(T))$ , ce qui rendait impossible toute estimation, puisque la taille de l'échantillon était faible dans le cas des récoltes.

## CHAPITRE IX

### SUR L'ESTIMATION

#### DES ESPÉRANCES MATHÉMATIQUES CONDITIONNELLES

Nous considérerons dans ce chapitre le cas où l'espérance mathématique de  $Y$  conditionnelle à la réalisation  $x(t)$  de la fonction aléatoire  $X(t)$  est, lorsque  $x(t) \in L_2(T)$ , de la forme

$$\alpha_0 + \int_T \rho(t) x(t) dt$$

avec  $\rho(t) \in L_2(T)$ .

$\alpha_0$  peut être connu ou à estimer (si  $\alpha_0$  est connu on se ramène immédiatement au cas où il est nul).  $\rho(t)$  doit être estimé. On suppose que  $n$  réalisations de  $X(t)$   $x_i(t) \in L_2(t)$  sont observées et que  $p$  observations de  $Y$   $Y_{ij}$  sont faites pour chaque  $x_i(t)$  observé.

Notons tout d'abord qu'on ne peut espérer estimer que la composante de  $\rho(t)$  suivant l'espace vectoriel engendré par les  $x_i(t)$  ou suivant un sous-espace  $\mathcal{G}_l$  de cet espace, sous espace dont nous appellerons  $\rho_1(t) \dots \rho_l(t)$  la base. Mais puisque  $\rho(t) \in L_2(T)$ , il existe un entier  $L_0(\epsilon)$  tel que, si les  $\rho_l(t)$  forment un système complet de fonctions base de  $L_2(T)$ , lorsque  $L > L_0(\epsilon)$ , on ait :

$$\int_T \left[ \rho(t) - \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) \right]^2 dt < \epsilon$$

$\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  étant la composante de  $\rho(t)$  suivant l'espace vectoriel  $\mathcal{G}_L$  qui a pour base  $\rho_1(t) \dots \rho_L(t)$ .  $\epsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit.

Si nous avons la possibilité d'observer à notre choix les réalisations  $x(t)$  que nous désirons, nous pouvons, par exemple, observer comme réalisations de  $x_i(t)$  les  $L$  premières fonctions  $\rho_1(t) \dots \rho_L(t)$  d'un système complet base de  $L_2(T)$ .

Si les réalisations observées  $X_i(t)$  dépendent du hasard, faisons l'hypothèse que  $\rho(t) X_i(t)$  est presque sûrement intégrable - L sur T quel que soit  $\rho(t) \in L_2(T)$ .

Si'il n'existe pas de fonction  $u(t) \in \mathcal{E}_1$  telle que  $\int_T u(t) X(t) dt$  soit presque sûrement nulle, la probabilité pour que :

$$\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt = 0$$

pour  $l = 1, 2 \dots L$  quel que soit  $i = 1, 2 \dots n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , L restant fixe.

Soit  $\rho_{(n)}(t)$  la composante de  $\rho(t)$  suivant l'espace vectoriel engendré par les  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ )

$\rho_{(n)}(t)$  est aléatoire.

Puisque :

$$\int_T \left( \rho(t) - \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) \right)^2 dt < \varepsilon$$

et puisque la probabilité pour que

$$\int_T \rho_l(t) X_i(t) dt = 0$$

pour  $l = 1, 2 \dots L$  quel que soit  $i = 1, 2 \dots n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  la probabilité pour que :

$$\int_T \left( \rho(t) - \rho_{(n)}(t) \right)^2 dt < \varepsilon$$

tend vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Si au contraire de ce qui a été fait précédemment, on sélectionne à notre gré les réalisations  $x_i(t)$ , on peut retarder indéfiniment l'observation de réalisations permettant d'estimer certaines composantes importantes de  $\rho(t)$ .

ESTIMATION, PAR LES MOINDRES CARRES, DE LA COMPOSANTE DE  $\rho(t)$  SUIVANT  $\mathcal{E}_l$ 

Ici  $\mathcal{E}_l$  pourra être soit l'espace vectoriel engendré par les réalisations  $x_i(t)$ , soit un sous espace vectoriel de cet espace. Puisqu'il est question ici d'espérance mathématique conditionnelle, nous agirons comme si  $\mathcal{E}_l$  n'était pas aléatoire.

Au chapitre VIII, il était essentiel de faire une étude statistique portant à la fois sur  $X(t)$  et sur  $Y$ . Ici, lorsque  $\mathcal{E}_l$  est choisi, il n'y a aucune nécessité de multiplier le nombre d'observations sur  $X(t)$ , à moins que l'on cherche à faire des tests de l'hypothèse :

$$E(Y / \text{conditionnelle } X(t)) = \alpha_0 + \int_T \rho(t) X(t) dt$$

Il suffit que  $\mathcal{E}_l$  soit inclus dans l'espace vectoriel des observations  $x_1(t) \dots x_i(t)$ .

En faisant tendre le nombre  $p$  d'observations de  $Y$  (pour chaque  $x_i(t)$ ) vers l'infini, nous obtiendrons des théorèmes asymptotiques.

## Théorème 9-1

Si les  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) et les  $\rho_l(t)$  ( $l = 1, 2 \dots L$ ) sont tels que l'intégrale -  $L \int_T \rho_l(t) x_i(t) dt$  (que nous poserons égale à  $x_{i,l}$  pour simplifier l'écriture) existe quels que soient  $i$  et  $l$

1/ Si de plus, il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \in \mathcal{E}_l$  ( $\rho(t) \neq 0$ ) telle que :

$$\int_T \rho(t) x_i(t) dt$$

soit nulle pour tous les  $i$  ( $= 1, 2 \dots n$ )

Il existe un et un seul système de valeurs des  $\alpha_l$   $\hat{\alpha}_l$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left[ Y_{ij} - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) x_i(t) dt \right]^2$$

soit minimum.

Elles sont solution du système d'équations :

$$\sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l \sum_{i=1}^n x_{il} x_{il'} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p Y_{ij} x_{il'} \quad (\text{avec } l' = 1, 2 \dots L)$$

2/ S'il n'existe pas de fonction  $\rho(t) \in \mathcal{E}_L$  ( $\rho(t) \neq 0$ ) telle que  $\int_T \rho(t) x_i(t) dt = k$  pour tous les  $i$  ( $= 1, 2 \dots n$ )  $k$  étant une constante quelconque.

Il existe un et un seul système de valeurs des  $\alpha$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left[ Y_{ij} - \alpha_0 - \int_T \sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t) x_i(t) dt \right]^2$$

soit minimum.

Ils sont solution du système :

$$n \hat{\alpha}_0 + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l \sum_{i=1}^n x_{il} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p Y_{ij}$$

$$\hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^n x_{im} + \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l \sum_{i=1}^n x_{il} x_{im} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p Y_{ij} x_{im}$$

(avec  $m = 1, 2 \dots L$ )

la démonstration est analogue à celle du théorème 8 - 1 pour le 1/ et du théorème 8 - 4 pour le 2/.

*Théorème 9 - 2*

Si  $E \left[ Y / \text{condit. } X(t) = x(t) \in L_2(T) \right]$  est égale à :

$$\int_T \rho(t) x(t) dt \quad (\rho(t) \in L_2(T))$$

et si la variance de  $Y$  conditionnelle à la réalisation  $x(t)$  est indépendante de  $x(t)$

Si de plus les réalisations observées  $x_i(t)$  vérifient les hypothèses du théorème 9 - 1 1/,

alors :

les estimés des moindres carrés (cf théorème 9 - 1 1/ de la composante  $\sum_l \alpha_l \rho_l(t)$  de  $\rho_l(t)$  suivant l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_L$  des observations  $x_i(t)$  sont les estimés linéaires par rapport aux observations de variance minimum.

Si on réalise de nouvelles observations  $x_i(t)$  engendrant un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{L'}$ , n'ayant pas d'élément commun avec  $\mathcal{E}_L$  et si on considère l'estimé des moindres carrés (th. 9 - 1 1/ de la composante  $\sum_{l'} \alpha_{l'} \rho_{l'}(t)$  de  $\rho(t)$  suivant  $\mathcal{E}_{L'}$ ,

$$\sum_l \hat{\alpha}_l \rho_l(t) + \sum_{l'} \hat{\alpha}_{l'} \rho_{l'}(t)$$

est l'estimé linéaire par rapport aux observations de variance minimum de la composante de  $\rho(t)$  suivant l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_{L+L'}$ , de dimension  $L + L'$  et de base les  $\rho_l(t)$  et  $\rho_{l'}(t)$ .

*Démonstration*

Elle résulte du théorème de Gauss-Markov.

*Théorème 9 - 3*

Si

$$E\left(Y / \text{condit. } X(t) = x(t) \in L_2(T)\right) = \alpha_0 + \int_T \rho(t) x(t) dt$$

avec  $\rho(t) \in L_2(T)$ , et si la variance de  $Y$  conditionnelle à  $x(t)$  est indépendante de  $x(t)$ ,

si de plus les réalisations vérifient les hypothèses du théorème 9 - 1 2/

Les estimés de ce théorème 9 - 1 2/ sont les estimés de  $\alpha_0$  et de la composante  $\rho(t)$  suivant  $\mathcal{E}_L$ , linéaires par rapport aux observations, de variance minimum.

*Démonstration*

Ceci résulte du théorème de Gauss Markov. Il est toutefois à noter que nous n'avons pas ici de propriété équivalente à la dernière propriété du théorème 9 - 2, ce qui s'explique facilement.

Soit  $Y_i$  la variable aléatoire  $Y$  conditionnelle à la réalisation  $x_i(t) \in L_2(T)$  de  $X(t)$ .

*Théorème 9 - 4*

Si les  $E(Y_i)$  existent et sont égales à :

$$\int_T \rho(t) x_i(t) dt \text{ avec } \rho(t) \in L_2(T) \text{ (ou à } \alpha_0 + \int_T \rho(t) x_i(t) dt)$$

et si les hypothèses du théorème 9 - 1 sont vérifiées les estimés des moindres carrés des  $\alpha$  donnés au théorème 9 - 1 convergent presque sûrement vers les  $\alpha$  quand  $p \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration*

Pour  $i = 1, 2 \dots n$

$$\begin{aligned} \int_T \rho(t) x_i(t) dt &= \int_T \sum_{l=1}^l \alpha_l \rho_l(t) x_i(t) dt \\ &= \sum_{l=1}^l \alpha_l x_{il} \end{aligned}$$

Le théorème résulte alors du théorème de Khintchine-Kolmogoroff.

*Théorème 9 - 5*

Si les  $Y_i$  ont des moments du 2e ordre quel que soit  $i$ , si :

$$E(Y_i) = \int_T \rho(t) x_i(t) dt \text{ avec } \rho(t) \in L_2(t),$$

et si les hypothèses du théorème 9 - 1 1/ sont vérifiées, en appelant  $\|B\|$  la matrice des coefficients des  $\alpha$ , dans les équations qui donnent les estimés  $\hat{\alpha}_l$  du théorème 9 - 1 1/, en appelant  $\|D\|$  la matrice à  $L^2$  éléments

$$d_{mm'} = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \text{Cov}(Y_i, Y_{i'}) x_{im} x_{i'm'}, \text{ (m et m' = 1, 2 \dots L)}$$

alors :

Les variables aléatoires  $\sqrt{p}(\hat{\alpha}_l - \alpha_l)$  convergent en loi, quand  $p \rightarrow +\infty$ , vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de matrice de covariance la matrice  $\|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1}$

*Démonstration*

La démonstration est analogue à celle du théorème 9 - 6.

*Théorème 9 - 6*

Si les  $Y_i$  ont des moments du 2e ordre, si

$$E(Y_i) = \alpha_0 + \int_T \rho(t) x_i(t) dt \text{ avec } \rho(t) \in L_2(T)$$

et si les hypothèses du théorème 9 - 1 2/ sont vérifiées, si on appelle  $\|B\|$  la matrice des coefficients des  $\alpha_0 \dots \alpha_l \dots$  dans les équations qui donnent les estimés du théorème 9 - 1 2/ et  $\|D\|$  la matrice à  $(L+1)^2$  éléments :

$$d_{00} = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \text{cov}(Y_i Y_{i'})$$

$$d_{0m} = d_{m0} = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \text{cov}(Y_i Y_{i'}) x_{i'm}$$

$$d_{mm'} = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \text{cov}(Y_i Y_{i'}) x_{im} x_{i'm'}$$

(m et m' = 1, 2 ... L)

les variables aléatoires  $\sqrt{p}(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) \dots \sqrt{p}(\hat{\alpha}_l - \alpha_l) \dots$  tendent, quand  $p \rightarrow +\infty$ , vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de matrice de covariance  $\|B\|^{-1} \times \|D\| \times \|B\|^{-1}$ .

*Démonstration*

Des équations 9 - 1 - 2 on déduit :

$$n \sqrt{p}(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) + \sum_{l=1}^L \sqrt{p}(\hat{\alpha}_l - \alpha_l) \sum_{i=1}^n x_{il} = \sum_{j=1}^p \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l x_{il})}{\sqrt{p}}$$

$$\sqrt{p} (\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) \sum_{i=1}^n X_{im} + \sum_{l=1}^L \sqrt{p} (\hat{\alpha}_l - \alpha_l) \sum_{i=1}^n x_{il} x_{im} = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l x_{il}) x_{im}}{\sqrt{p}} \right]$$

(m = 1, 2 ... L)

Or quand  $p \rightarrow +\infty$ , les variables aléatoires du 2e membre tendent vers la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et de matrice de covariance  $\|D\|$  d'où notre théorème.

## CHAPITRE X

### ESTIMATION DE LA LOI CONDITIONNELLE

Nous considérerons le cas où la densité de probabilité de Y conditionnelle à la réalisation  $x(t)$  ( $\in L_2(T)$ ) de la fonction aléatoire  $X(t)$  est de la forme  $f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)$  avec

$$u = \int_T \rho_u(t) x(t) dt, \quad v = \int_T \rho_v(t) x(t) dt$$

( $\rho_u(t)$  et  $\rho_v(t) \in L_2(T)$ )

$\rho_u(t)$ ,  $\rho_v(t)$  et les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant à estimer.

(Pour éviter de multiplier le nombre d'indices employés, nous considérons le cas de 2 fonctionnelles  $u$  et  $v$  et 2 paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . Il va de soi que les méthodes seraient exactement les mêmes et les résultats analogues s'il y avait un nombre quelconque de fonctionnelles ou de paramètres.)

Le cas plus général où on considérerait la loi conditionnelle de Y par rapport à plusieurs fonctions aléatoires ou variables aléatoires s'étudierait de façon tout à fait analogue.

Soit  $\rho_1(t) \dots \rho_l(t) \dots \rho_L(t)$  un système de fonctions de  $L_2(T)$  orthogonal normé formant une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_L$  engendré par les réalisations  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) de la fonction aléatoire (on suppose que ces réalisations sont de carré intégrable sur T)

Soient :

$x_{il}$  les coordonnées de  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots L$ )

$\alpha_l$  les coordonnées de  $\rho_u(t)$

$\beta_l$  les coordonnées de  $\rho_v(t)$

On posera :

$$u_i = \sum_l x_{il} \alpha_l \quad v_i = \sum_l x_{il} \beta_l$$

On ne peut espérer estimer que les composantes de  $\rho_u(t)$  et  $\rho_v(t)$  suivant l'espace linéaire  $\mathcal{E}_L$  des réalisations  $x_i(t)$ . Les remarques faites au début du chapitre IX sont valables ici et  $\sum_{l=1}^L \alpha_l \rho_l(t)$  converge m. q sur  $T$ ) vers  $\rho_u(t)$  quand  $L \rightarrow +\infty$ , dans les mêmes conditions.

Nous supposerons que  $p$  réalisations  $Y_{ij}$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) de  $Y$  sont observées pour chaque  $x_i(t)$  et nous nous contenterons d'indiquer brièvement quelques propriétés des estimés du maximum de vraisemblance de  $\theta_1, \theta_2$  et des coordonnées  $\alpha_l, \beta_l$  des  $\rho_u(t), \rho_v(t)$ .

*Théorème 10 - 1*

Si  $\int f(y, u, v, \theta_1, \theta_2) dy$  peut être dérivée sous le signe  $\int$  par rapport à  $u, v, \theta_1, \theta_2$ , si

$$\frac{\partial \text{Log } f}{\partial u} \quad \frac{\partial \text{Log } f}{\partial v} \quad \frac{\partial \text{Log } f}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \text{Log } f}{\partial \theta_2}$$

sont continues en  $u, v, \theta_1, \theta_2$  pour les valeurs  $u_i, v_i, \theta_1, \theta_2$  uniformément par rapport à  $y$ , les estimés du maximum de vraisemblance de  $\alpha_1 \dots \alpha_L, \beta_1 \dots \beta_L, \theta_1, \theta_2$  convergent presque sûrement lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , vers  $\alpha_1 \dots \alpha_L, \beta_1 \dots \beta_L, \theta_1, \theta_2$  si le système d'équations qui donne ces estimés n'a qu'une seule solution.

Ces estimés du maximum de vraisemblance sont solution du système :

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{f(y_{ij}, u_i, v_i, \theta_1, \theta_2)} \left[ \frac{\partial f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)}{\partial u} \right]_{ij} x_{il} = 0$$

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{f(y_{ij}, u_i, v_i, \theta_1, \theta_2)} \left[ \frac{\partial f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)}{\partial v} \right]_{ij} x_{il} = 0$$

(avec  $l = 1, 2 \dots L$ )

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{f(y_{ij}, u_i, v_i, \theta_1, \theta_2)} \left[ \frac{\partial f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \right]_{ij} = 0$$

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{f(y_{ij}, u_i, v_i, \theta_1, \theta_2)} \left[ \frac{\partial f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right]_{ij} = 0$$

(les indices  $i$  et  $j$  placés après les dérivées indiquant qu'on considère les valeurs de ces dérivées quand  $y = y_{ij}$   $u = u_i$   $v = v_i$ )

*Théorème 10 - 2*

Si les estimés du maximum de vraisemblance  $\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_l \beta_1 \dots \beta_l$   $\theta_1 \theta_2$  tendent en probabilité vers  $\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_1 \dots \beta_l$   $\theta_1 \theta_2$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , si  $f(y, u, v, \theta_1, \theta_2)$  est dérivable 2 fois sous le signe  $\int$  par rapport aux  $u, v, \theta_1, \theta_2$ , si la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right] \\ E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right] \\ E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial f}{\partial v} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right)^2 \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right] \\ E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\partial f}{\partial u} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right] & E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] \end{array} \right\|$$

existe et si les fonctions :

$$\frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial \theta_1^2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial \theta_2^2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial u \partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial u \partial \theta_1}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial u \partial \theta_2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial v \partial \theta_1}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial v \partial \theta_2}, \frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$$

sont continues en  $u, v, \theta_1, \theta_2$  pour les valeurs  $u_i, v_i, \theta_1, \theta_2$ , la continuité étant uniforme par rapport à  $y$ .

La loi de probabilité de l'ensemble :

$$\sqrt{P}(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1), \dots, \sqrt{P}(\hat{\alpha}_L - \alpha_L), \sqrt{P}(\hat{\beta}_1 - \beta_1), \dots, \sqrt{P}(\hat{\beta}_L - \beta_L), \sqrt{P}(\hat{\theta}_1 - \theta_1), \sqrt{P}(\hat{\theta}_2 - \theta_2)$$

tend, quand  $p \rightarrow +\infty$ , vers la loi de Laplace à  $2L + 2$  dimensions dont les espérances mathématiques sont nulles et dont la matrice de covariance est égale à l'inverse de la matrice symétrique  $\|\mathcal{J}\|$  dont les éléments sont :

(l'indice  $i$  que nous placerons après les parenthèses signifieront ici que nous considérerons les valeurs des expressions entre parenthèses pour  $u = u_i$   $v = v_i$ )

$$\text{pour } \begin{matrix} 1 \leq l \leq L \\ 1 \leq l' \leq L \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \right]_i x_{il} x_{il'}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} 1 \leq l \leq L \\ L + 1 < l' \leq 2L \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right]_i x_{il} x_{i, (l'-l)}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} 1 \leq l \leq L \\ l' = 2L + 1 \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right]_i x_{il}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} 1 \leq l \leq L \\ l' = 2L + 2 \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right]_i x_{il}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} L + 1 \leq l \leq 2L \\ L + 1 \leq l' \leq 2L \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right]_i x_{i, (l-l)} x_{i, (l'-l)}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} L + 1 \leq l \leq 2L \\ l' = 2L + 1 \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right]_i x_{i, (l-l)}$$

$$\text{pour } \begin{matrix} L + 1 \leq l \leq 2L \\ l' = 2L + 2 \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right]_i x_{i, (l-l)}$$

$$\text{pour } l = l' = 2L + 1 \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right)^2 \right]_i$$

$$\text{pour } \begin{matrix} l = 2L + 1 \\ l' = 2L + 2 \end{matrix} \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right]_i$$

$$\text{pour } l = l' = 2L + 2 \quad a_{ll'} = \sum_i E \left[ \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right)^2 \right]_i$$

Nous n'insisterons pas davantage, puisque ceci est analogue à la théorie classique.

### SUR UN CAS PARTICULIER

Nous donnerons quelques brèves indications sur le cas particulier simple où  $Y$  obéit à une loi conditionnelle normale dont l'espérance mathématique conditionnelle à la réalisation  $x(t) \in L_2(T)$  de la fonction aléatoire  $X(t)$  est égale à :

$$\alpha_0 + \int_T \rho(t) x(t) dt \quad (\rho(t) \in L_2(T))$$

et dont la variance est égale à  $\sigma^2$  (indépendante de  $x(t)$ )

Nous supposerons qu'étant donné  $x_i(t)$ ,  $j_i$  observations de  $Y$  (appelées  $Y_{ij}$ ) seront faites et nous estimerons  $\sigma^2$ ,  $\alpha_0$ , et la composante de  $\rho(t)$  suivant l'espace vectoriel des  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ )

#### Estimés du maximum de vraisemblance

$$\text{En posant } \sum_{i=1}^n j_i = J$$

et :

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{j_i} \left( Y_{ij} - \alpha_0 - \int_T \rho(t) x_i(t) dt \right)^2 = Q$$

on obtient pour la vraisemblance  $L$

$$L = -\frac{J}{2} \text{Log } \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} Q$$

qui est maximum si et seulement si  $Q$  est minimum et  $\sigma^2$  est égal à  $\frac{Q \text{ min.}}{J}$  (que nous poserons égal à  $\hat{\sigma}^2$ ).

Soient  $\alpha_l$  les coordonnées de  $\rho(t)$  par rapport à  $\mathfrak{B}_l$

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i} \left[ Y_{ij} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^L \alpha_l x_{il} \right]^2$$

$Q$  est minimum si et seulement si  $\alpha_0$  et  $\alpha_l$  sont solution du système :

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n j_i + \sum_{l=1}^L \alpha_l \left( \sum_{i=1}^n j_i x_{il} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i Y_{ij}$$

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n j_i x_{il'} + \sum_{l=1}^L \alpha_l \left( \sum_{i=1}^n j_i x_{il} x_{il'} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i Y_{ij} x_{il'}$$

(avec  $l' = 1, 2 \dots L$ )

S'il n'existe pas de  $\rho(t) \in \mathcal{E}_L$  tel que :

$$\int_T \rho(t) x_i(t) dt = k$$

quel que soit  $i$  ( $= 1, 2 \dots n$ ) ce système admet une seule solution que nous appellerons  $\hat{\alpha}_0 \dots \hat{\alpha}_L \dots$

Le théorème de Gauss Markov est ici applicable et ces estimés des  $\alpha$  sont les estimés, linéaires par rapport aux observations, de variance minimum.

Nous appellerons  $\|A\|$  la matrice des coefficients des inconnues de ce système et  $a_{qq}$ , les éléments de cette matrice.

Les  $\hat{\alpha}$  sont normalement distribués et ont pour densité de probabilité :

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^{L+1} \frac{|A|}{\sigma^{L+1}} \exp. \left[ - \frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{q=0}^L \sum_{q'=0}^L a_{qq'} (\hat{\alpha}_q - \alpha_q) (\hat{\alpha}_{q'} - \alpha_{q'}) \right) \right]$$

D'autre part  $\sum_i j_i \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$  est distribuée indépendamment des  $\hat{\alpha}$  et obéit à une loi du  $\chi^2$  à  $\sum_i j_i - L - 1$  degrés de liberté, d'où :

$$\frac{\hat{\alpha}_q - \alpha_q}{\sqrt{a_{qq} \frac{\sum_i j_i \hat{\sigma}^2}{\sum_i j_i - L - 1}}} = t$$

obéit à la loi de Student à  $\sum_i j_i - L - 1$  degrés de liberté. ( $a_{qq}$  étant les éléments de la matrice  $\|A\|^{-1}$ )

Enfin :

$$F = \frac{\left(\sum_i j_i - L - 1\right) \sum_{q=0}^L \sum_{q'=0}^L a_{qq'} (\hat{\alpha}_q - \alpha_q) (\hat{\alpha}_{q'} - \alpha_{q'})}{(L + 1) \left(\sum_i j_i\right) \hat{\sigma}^2}$$

obéit à la loi du F avec  $L + 1$  et  $\sum_i j_i - L - 1$  degrés de liberté, d'où un intervalle de confiance pour l'ensemble des  $\hat{\alpha}_p$ .

Intervalle de confiance pour Y conditionnelle à la réalisation  $x_o(t)$  de la fonction aléatoire X (t).

( $x_o(t)$  appartenant à l'espace vectoriel des observations  $x_1(t) \dots x_n(t)$ )

$$Y - \hat{\alpha}_o - \sum_{l=1}^L \hat{\alpha}_l x_{ol} = t \sqrt{\frac{\sum_i j_i \hat{\sigma}^2 \left(1 + \sum_{q=0}^L \sum_{q'=0}^L a_{qq'} x_{oq} x_{oq'}\right)}{\sum_i j_i - L - 1}}$$

( $x_{ol}$  étant les coordonnées de  $x_o(t)$  par rapport aux  $\rho_l(t)$ )

obéit à la loi de Student à  $\sum_i j_i - L - 1$  degrés de liberté et peut être utilisé pour donner un intervalle de confiance pour Y.

Enfin si on utilise le critère du rapport de vraisemblance pour faire un test de l'hypothèse  $H_\omega$  ( $\alpha_q = \alpha_{oq}$  ( $q = 0, 1 \dots L$ )  $\sigma$  quelconque) contre l'hypothèse H que les  $\alpha$  et les  $\sigma$  sont quelconques on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\left[1 + \frac{L + 1}{\sum_i j_i - L - 1} F\right]^{\sum_i j_i / 2}}$$

F étant égal à :

$$\frac{\sum_i (j_i - L - 1) \sum_{q=0}^L \sum_{q'=0}^L (\hat{\alpha}_q - \alpha_{oq}) (\hat{\alpha}_{q'} - \alpha_{oq'})}{(L + 1) \left(\sum_i j_i\right) \hat{\sigma}^2}$$

le test  $\lambda$  est donc équivalent au test de F aux faibles valeurs de  $\lambda$  correspondant les grandes valeurs de F.



Enfin : 
$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$
 où  $t = \frac{y - \mu}{\sigma}$  et  $dt = \frac{dy}{\sigma}$ . On obtient à la loi du  $F$  avec  $L + 1$  et  $\sum_{i=1}^{L+1} |x_i - \mu|$  degrés de liberté, d'où un intervalle de confiance pour  $\mu$  calculable dans le cas

intervalle de confiance pour  $Y$  conditionnelle à la réalisation  $x_n(t)$  de la fonction aléatoire  $X_n(t)$ .

$x_n(t)$  appartenant à l'espace aléatoire des observations  $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Ln}$  et  $x_{n+1}$  à un instant  $t$  quelconque.

Les variables  $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Ln}, x_{n+1}$  sont indépendantes et ont la même loi de probabilité  $F$ . On a donc : 
$$\sum_{i=1}^{L+1} (x_i - \mu)^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{L+1}$$
 où  $\chi^2_{L+1}$  est la loi de Student à  $L+1$  degrés de liberté. On obtient à la loi de Student à  $L+1$  degrés de liberté un intervalle de confiance pour  $\mu$  qui est donné par :

Enfin si on utilise le critère de rapport de vraisemblance pour faire un test de l'hypothèse  $H_0: \mu = \mu_0$  (à rejeter) contre l'hypothèse  $H_1: \mu < \mu_0$  (à accepter) on obtient un test à unilatéral qui est donné par :

Le test  $T$  est donc équivalent au test de  $F$  aux mêmes valeurs de  $L$  correspondant les grandes valeurs de  $F$ .

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{L+1} (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{L+1} (x_i - \bar{x})^2} \sim F_{L+1, L}$$



## BIBLIOGRAPHIE

R. A. FISHER - The influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamstead. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B, Vol. 213, pages 89 - 142). Il s'agit ici de l'étude d'un exemple d'application pratique des probabilités et de la statistique. Les théories que nous avons développées peuvent s'y appliquer.

En ce qui concerne les théories de probabilités ou de statistique que nous avons utilisées on pourra consulter par exemple :

BLANC-LAPIERRE et FORTET - Théorie des Fonctions aléatoires, (Paris, Masson 1953).

CRAMER - Mathematical Methods of Statistics.

DUGUE - Traité de Statistique théorique et appliquée, (Paris, Masson 1958).

WILKS - Mathematical Statistics (Wiley)

BIBLIOGRAPHIE

R. A. FISHER - The influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamstead. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B, Vol. 213, pages 85 - 143). Il s'agit ici de l'étude d'un exemple d'application pratique des probabilités et de la statistique. Les théories que nous avons développées peuvent s'y appliquer.

En ce qui concerne les théories de probabilités ou de statistiques que nous avons utilisées on pourra consulter par exemple :

BLANCHARD - Théorie des Fonctions Algébriques. (Paris, Masson 1933).

DEMOING - Mathematical Methods of Statistics.

DUBOIS - Traité de Statistique Théorique et Appliquée. (Paris, Masson 1936).

WILKS - Mathematical Statistics (Wiley).

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	
CHAPITRE I : PRELIMINAIRES SUR L'INTEGRATION ALEATOIRE.....	167
CHAPITRE II : SUR LA REGRESSION LINEAIRE EN MOYENNE QUADRATIQUE DE Y PAR RAPPORT A X (t) DEFINIE SUR T.....	175
CHAPITRE III : SUR LE COEFFICIENT DE CORRELATION DE Y ET X (t) DEFINIE SUR T.....	215
CHAPITRE IV : THEOREMES LIMITES SUR LA REGRES- SION LINEAIRE M. Q CORRESPONDANT A CERTAINS MODES D'OBSERVATION DE X (t).....	231
CHAPITRE V : GENERALISATIONS :	
1/ Régression et corrélation d'une fonction aléatoire par rapport à une autre fonction aléatoire.....	251
2/ Régression d'une variables aléatoire par rapport à plusieurs fonctions aléatoires et variables aléatoires.....	252
CHAPITRE VI : SUR LA REGRESSION NON LINEAIRE....	261
CHAPITRE VII : REGRESSION DES ESPERANCES MATHE- MATIQUES CONDITIONNELLES ET RE- GRESSION LINEAIRE M. Q.....	265



	Pages
CHAPITRE VIII : SUR L'ESTIMATION DE LA REGRESSION	
I Quelques remarques sur l'estimation de $\rho(t)$ .....	267
II Estimation de $Y_{1x}$ (par les moindres carrés).....	274
III Estimation de $Y_x$ (par les moindres carrés) dans le cas où $E(Y) E[X(t)]$ ne sont pas tous les 2 connus.....	286
CHAPITRE IX : SUR L'ESTIMATION DE LA REGRESSION DES ESPERANCES MATHÉMATIQUES CONDITIONNELLES LINEAIRES.....	293
CHAPITRE X : SUR L'ESTIMATION DE LA LOI CONDITIONNELLE.....	301
BIBLIOGRAPHIE	

## INDEX

	Pages
<b>BORNE INFERIEURE</b>	
$B_1(L_2(T), S)$ ou $B_1(L_2(T))$ ou $B_1$ (pour abréger l'écriture).....	184
$B(L_2(T), S)$ ou $B(L_2(T))$ ou $B$ .....	191
$B_1(\mathcal{E}_1)$ ou $B_{11}$ .....	208
$B(\mathcal{E}, S)$ .....	193
$B(\mathcal{E}_1)$ .....	210
<b>HYPOTHESES</b>	
Hypothèses A.....	171
Hypothèses B.....	172
Hypothèses C.....	192
Hypothèses D.....	204
<b>INTEGRALE</b>	
sens A.....	171
sens B.....	171
sens S.....	173
<b>MATRICE</b>	
$\ \alpha\ $ 1e sens.....	209
2e sens.....	211

	Pages
B    1e sens.....	210
2e sens.....	211
3e sens.....	298
4e sens.....	299
C    1e sens.....	209
2e sens.....	211
P    1e sens.....	282
2e sens.....	289
Q	289
D    1e sens.....	282
2e sens.....	288
3e sens.....	298
4e sens.....	299

#### REGRESSION LINEAIRE M. Q.

$Y_{1x} (L_2(T), S)$ ou $Y_{1x} (L_2(T))$ ou $Y_{1x}$ .....	185
$Y_x (L_2(T), S)$ ou $Y_x (L_2(T))$ ou $Y_x$ .....	190
$Y_{1x} (\mathcal{G}_1)$ .....	212
$Y_x (\mathcal{G}_1)$ .....	213