



HAL
open science

Sur les lois de certaines fonctionnelles additives ; applications aux temps locaux

Paul-André Meyer

► **To cite this version:**

Paul-André Meyer. Sur les lois de certaines fonctionnelles additives ; applications aux temps locaux. Annales de l'ISUP, 1966, 15 (3), pp.295-310. <hal-04092233>

HAL Id: hal-04092233

<https://hal.science/hal-04092233v1>

Submitted on 9 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

SUR LES LOIS DE CERTAINES FONCTIONNELLES ADDITIVES; APPLICATIONS AUX TEMPS LOCAUX

Paul-André MEYER

Nous indiquons dans ce travail une méthode qui permet, dans certains cas, de trouver la loi de la variable aléatoire terminale C_∞ associée à une fonctionnelle additive (C_t) , non nécessairement positive, dont le noyau potentiel U_c est connu. Nous donnerons au paragraphe 1 quelques formules générales pour le cas continu, et nous déterminerons explicitement la loi de C_∞ lorsque (C_t) est la différence des temps locaux de deux points a et b . Au paragraphe 2, nous établirons quelques formules analogues pour le cas discret. Au paragraphe 3 enfin, nous utiliserons le résultat obtenu sur les temps locaux pour redémontrer le théorème de Boylan sur la continuité des temps locaux.

Je remercie vivement R. Gettoor pour les remarques qu'il m'a faites sur la première rédaction de ce travail : je lui dois la correction d'une erreur assez importante au paragraphe 3, et un grand nombre d'améliorations techniques (telles que l'utilisation de fonctions caractéristiques au lieu de transformées de Laplace, qui posaient des problèmes d'intégrabilité assez compliqués).

1. Le cas continu

A. Nous désignerons par (X_t) un processus standard (en fait, nous n'aurons pas du tout besoin de la quasi-continuité à gauche), par (A_t) et (B_t) deux fonctionnelles additives positives, continues, et par λ un nombre fixe ≥ 0 . Nous supposerons que les λ -potentiels des deux fonctionnelles additives

$$g_A^\lambda = \mathbf{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dA_t \right], \quad g_B^\lambda = \mathbf{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dB_t \right]$$

sont finis. On peut alors définir des noyaux U_A^λ, U_B^λ en posant, pour toute fonction borélienne bornée f

$$U_A^\lambda f = \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_0 X_t dA_t \right], \quad U_B^\lambda f = \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_0 X_t dB_t \right]$$

Nous désignerons par (C_t) la fonctionnelle additive $(A_t - B_t)$, par U_C^λ le noyau $U_A^\lambda - U_B^\lambda$.

Soit R_λ un temps terminal exponentiel de paramètre λ , indépendant des processus ; $R_\lambda = +\infty$ si $\lambda = 0$. Nous poserons, pour tout nombre réel u

$$c^\lambda(x, u) = \mathbf{E}^x [\exp(iu C_{R_\lambda})]$$

$c^\lambda(x, \cdot)$ est donc la fonction caractéristique de la variable aléatoire C_{R_λ} . On a évidemment

$$(1) \quad c^\lambda(x, u) = \mathbf{E}^x \left[\int_0^\infty \exp(iu C_t) \lambda e^{-\lambda t} dt \right]$$

si $\lambda > 0$.

Nous introduirons aussi le noyau H_u^λ défini, pour toute fonction borélienne bornée f , par

$$(2) \quad H_u^\lambda f = \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty \exp(iu C_t) e^{-\lambda t} f_0 X_t dC_t \right]$$

Soit (P_t) le semi-groupe de transition du processus, et soit (U^p) sa résolvante ; on établit aussitôt les relations

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\lambda t} P_t c^\lambda = c^\lambda, \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\lambda t} P_t H_u^\lambda f = H_u^\lambda f,$$

puis les relations analogues obtenues en remplaçant $e^{-\lambda t} P_t$ par $pU^{p+\lambda}$. Il en résulte que les fonctions c^λ , $H_k^\lambda f$ sont presque-boréliennes.

Le théorème suivant est notre résultat principal : il nous permettra dans certains cas de déterminer la fonction caractéristique c^λ .

THÉORÈME 1. - La fonction $c^\lambda(\cdot, u)$ satisfait à l'équation

$$(3) \quad (I - iu U_C^\lambda) c^\lambda(\cdot, u) = 1$$

Si les potentiels g_A^λ et g_B^λ sont bornés, $c^\lambda(\cdot, u)$ est l'unique solution bornée de (3).

DÉMONSTRATION. - Nous établirons (3) en supposant $\lambda > 0$; le cas où $\lambda = 0$ s'en déduira aisément par un passage à la limite.

Considérons les deux processus mesurables et bornés

$$x_t = c^\lambda(X_t, u), \quad y_t = e^{\lambda t} \exp(-iuC_t) \int_t^\infty \exp(iuC_s) \lambda e^{-\lambda s} ds$$

On vérifie aussitôt, grâce à la propriété de Markov forte, que l'on a pour tout temps d'arrêt T

$$x_T I_{\{T < \infty\}} = E[y_T | \mathcal{F}_T] I_{\{T < \infty\}} \quad \text{p. s.}$$

(où l'on désigne comme d'habitude par (\mathcal{F}_t) la famille de tribus canonique). On a donc, d'après le théorème VII.15 de [3]

$$E \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} x_t dC_t \right] = E \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} y_t dC_t \right]$$

Multiplions par $-iu$ les deux membres. Le premier membre vaut alors $-iuU_c^\lambda c^\lambda(\cdot, u)$; le second vaut, avec une interversion d'intégrations immédiate

$$\begin{aligned} & -iu E \cdot \left[\int_0^\infty \exp(-iuC_t) dC_t \int_t^\infty \exp(iuC_s) \lambda e^{-\lambda s} ds \right] = \\ & = E \cdot \left[\int_0^\infty \exp(iuC_s) \lambda e^{-\lambda s} ds \int_0^s -iu \exp(-iuC_t) dC_t \right] = \\ & = E \cdot \left[\int_0^\infty \exp(iuC_s) \lambda e^{-\lambda s} (\exp(-iuC_s) - 1) ds \right] \\ & = 1 - c^\lambda(\cdot, u) \end{aligned}$$

Cela établit (3). Supposons maintenant que la fonction $U_{A+B}^\lambda (g_A^\lambda + g_B^\lambda)$ soit finie - condition trivialement satisfaite si les potentiels g_A^λ et g_B^λ sont bornés. Soit f une fonction borélienne bornée. Considérons les deux processus mesurables

$$x_t = e^{-\lambda t} \exp(iuC_t) U_c^\lambda f_0 X_t \quad y_t = \exp(iuC_t) \int_t^\infty e^{-\lambda s} f_0 X_s dC_s$$

Les espérances $E \cdot \left[\int_0^\infty |x_s| |dC_s| \right]$ et $E \cdot \left[\int_0^\infty |y_s| |dC_s| \right]$ sont finies, d'après l'hypothèse qui vient d'être faite. D'autre part, on a pour tout temps d'arrêt T

$$x_T I_{\{T < \infty\}} = E[y_T I_{\{T < \infty\}} | \mathcal{F}_T] \quad \text{p. s.}$$

On a donc, comme au début de la démonstration

$$iu E \cdot \left[\int_0^\infty x_t dC_t \right] = iu E \cdot \left[\int_0^\infty y_t dC_t \right]$$

Le premier membre vaut $iu E \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(iuC_t) U_c^\lambda f_0 X_t dC_t \right] = iu H_u^\lambda U_c^\lambda f$.

Le second membre vaut

$$\begin{aligned} & iu \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty \exp(iu C_t) dC_t \int_t^\infty e^{-\lambda t_0} X_s dC_s \right] = \\ & = \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} f_0 X_s dC_s \int_0^s iu \exp(iu C_t) dC_t \right] = \\ & = \mathbf{E} \cdot \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} f_0 X_s (\exp(iu C_s) - 1) dC_s \right] = \\ & = H_{uf}^\lambda - U_{cf}^\lambda. \end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver la relation

$$(4) \quad iu H_u^\lambda U_{cf}^\lambda = H_{uf}^\lambda - U_{cf}^\lambda$$

si f est borélienne bornée, ou encore

$$(5) \quad (I + iu H_u^\lambda) (I - iu U_{cf}^\lambda) f = f$$

On notera que cette relation est vraie aussi si $\lambda = 0$, si $U_{A+B}^0 (g_A^0 + g_B^0)$ est une fonction finie : la démonstration est encore valable dans ce cas.

La dernière assertion de l'énoncé s'établit alors aussitôt, en appliquant $(I + iu H_u^\lambda)$ aux deux membres de (3). Il vient que $c^\lambda(\cdot, u) = 1 + iu H_u^\lambda 1$.

B. Soient a et b deux points distincts de l'espace d'états E , tels que les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ ne soient pas semi-polaires, et soient Φ_a^λ et Φ_b^λ les λ -potentiels d'équilibre de $\{a\}$ et de $\{b\}$ respectivement. Nous supposons ici que λ est > 0 , mais les calculs s'étendront très bien au cas où $\lambda = 0$, si le noyau potentiel U^0 est propre. Blumenthal et Gettoor ont montré (*) que les fonctions Φ_a^λ et Φ_b^λ sont uniformément λ -excessives : ce sont donc les λ -potentiels de deux fonctionnelles additives continues (A_t) et (B_t) . En particulier, si $\lambda = 1$, (A_t) et (B_t) sont les *temps locaux* de a et b , au sens de Blumenthal et Gettoor. Nous désignerons par (C_t) , ou (C_t^{ab}) , si cette précision est nécessaire, la fonctionnelle additive $(A_t - B_t)$. Il est très facile de calculer le noyau U_c^λ : en effet, on a (d'après Blumenthal et Gettoor)

$$U_A^\lambda f(x) = f(a) \Phi_a^\lambda(x) ; \quad U_B^\lambda f(x) = f(b) \Phi_b^\lambda(x)$$

et par conséquent

$$(6) \quad U_C^\lambda f(x) = f(a) \Phi_a^\lambda(x) - f(b) \Phi_b^\lambda(x)$$

(*) Voir [1].

Nous désignerons par S le temps d'entrée dans l'ensemble $\{a, b\}$, et nous poserons (les mesures $P_s^\lambda(x, dy)$ étant portées par $\{a, b\}$)

$$(7) \quad P_s^\lambda(x, \{a\}) = p_a^\lambda(x), \quad P_s^\lambda(x, \{b\}) = p_b^\lambda(x)$$

On a évidemment $P_s^\lambda U_c^\lambda = U_c^\lambda$, $P_s^\lambda H_u^\lambda = H_u^\lambda$; comme $c^\lambda(\cdot, u) = 1 - iu H_u^\lambda 1$, on en déduit la relation

$$(8) \quad c^\lambda(x, u) = p_a^\lambda(x) c^\lambda(a, u) + p_b^\lambda(x) c^\lambda(b, u) + 1 - p_a^\lambda(x) - p_b^\lambda(x)$$

Cela nous permettra de ramener le calcul de la fonction caractéristique $c^\lambda(x, u)$ aux cas où $x = a$, $x = b$. Nous adopterons à cet effet les notations suivantes. Si f est une fonction définie sur E , nous noterons $\langle f \rangle$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \end{pmatrix}$. Les mesures $U_c^\lambda(x, dy)$ étant portées par $\{a, b\}$, la relation (6) donne

$$(9) \quad \langle U_c^\lambda f \rangle = u_c^\lambda \langle f \rangle$$

en désignant par u_c^λ la matrice $(2, 2)$ $\begin{pmatrix} 1 & -\Phi_b^\lambda(a) \\ \Phi_a^\lambda(b) & -1 \end{pmatrix}$, et la relation $(1 - iu U_c^\lambda) c^\lambda(\cdot, u) = 1$ nous donne

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 - iu & iu \Phi_b^\lambda(a) \\ -iu \Phi_a^\lambda(b) & 1 + iu \end{pmatrix} \langle c^\lambda(\cdot, u) \rangle = \langle 1 \rangle$$

Cette matrice a pour déterminant $1 + u^2(1 - \Phi_b^\lambda(a)\Phi_a^\lambda(b))$. Elle est donc inversible. Le calcul est immédiat, et donne le résultat suivant.

THÉORÈME 2 .- Soit R_λ un temps terminal exponentiel de paramètre λ indépendant des processus, et soit Z_x la mesure sur \mathbf{R} , loi de la variable aléatoire $C_{R_\lambda}^{ab} = A_{R_\lambda} - B_{R_\lambda}$ pour la mesure initiale ε_x . On désigne par $c^\lambda(x, \cdot)$ la fonction caractéristique de Z_x . On pose

$$\Phi_a^\lambda(b) = 1 - \eta, \quad \Phi_b^\lambda(a) = 1 - \eta', \quad \eta + \eta' - \eta\eta' = g^2.$$

$$1/ \text{On a} \quad c^\lambda(x, \cdot) = p_a^\lambda(x) c^\lambda(a, \cdot) + p_b^\lambda(x) c^\lambda(b, \cdot) + 1 - p_a^\lambda(x) - p_b^\lambda(x)$$

$$(11) \quad \begin{aligned} c^\lambda(a, u) &= \frac{1 + iu\eta'}{1 + u^2g^2} \\ c^\lambda(b, u) &= \frac{1 - iu\eta}{1 + u^2g^2} \end{aligned}$$

2/ La loi Z_x est un mélange des lois Z_a, Z_b, ε_0 dans les proportions $p_a(x), p_b(x), 1-p_a(x)-p_b(x)$.

Les lois Z_a et Z_b ont respectivement pour densités (par rapport à la mesure de Lebesgue dt sur \mathbf{R})

$$(12) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2g} \left(1 - \frac{\eta'}{g} \right) Y(-t) e^{\frac{t}{g}} + \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\eta'}{g} \right) Y(t) e^{-\frac{t}{g}} \\ & \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\eta}{g} \right) Y(-t) e^{\frac{t}{g}} + \frac{1}{2g} \left(1 - \frac{\eta}{g} \right) Y(t) e^{-\frac{t}{g}} \end{aligned}$$

(où Y désigne l'échelon unité de Heaviside).

Cela résulte aussitôt des formules (8) et (10). Nous utiliserons au paragraphe 3 le corollaire suivant

COROLLAIRE. - Soit R un temps terminal exponentiel de paramètre 1, indépendant des processus. Soient (L_t^a) et (L_t^b) les temps locaux des points a et b (au sens de [1]), et soit $C_t^{ab} = L_t^a - L_t^b$. On a pour tout $x \in E$ et tout nombre $d > 0$

$$(13) \quad \mathbf{P}^x \{ |C_R^{ab}| \geq d \} \leq e^{-d/g}$$

$$\text{où} \quad g^2 = 1 - \Phi_a^1(b) \Phi_a^1(a).$$

En effet, l'inégalité (13) est vraie pour chacune des lois Z_a, Z_b, ε_0 ; elle est donc vraie pour toute loi Z_x .

2. Le cas discret

A. Nous désignons maintenant par (X_n) un processus de Markov à temps discret, admettant un noyau de transition P . Nous nous proposons d'abord de mettre en évidence, par un calcul formel, quels sont les noyaux qui jouent ici le rôle des noyaux U_c, H_u de la formule (4) (nous n'introduirons pas de temps terminal dans ce paragraphe). Malheureusement, ces noyaux n'admettent en général pas d'interprétation en termes de fonctions caractéristiques. Nous donnerons ensuite des justifications de convergence, et nous traiterons un cas particulier de manière plus détaillée.

Soit (C_n) une fonctionnelle additive complexe du processus (X_n) : i. e., $C_0 = 0$, C_n est \mathfrak{F}_n -mesurable pour tout n , $C_{n+p} = C_n + C_p \circ \theta_n$ p. s. pour tout couple (n, p) . Nous dirons que (C_n) est naturelle si C_n est \mathfrak{F}_{n-1} -mesurable pour tout $n \geq 1$: alors C_1 est \mathfrak{F}_0 -mesurable, et on a donc $C_1 = g \circ X_0$ (où

$g(x) = E^x [C_1]$, espérance qui existe toujours, car C_1 est dégénérée pour la loi P^x ; finalement, si (C_n) est naturelle, on a

$$(1) \quad C_n = g_0 X_0 + g_0 X_1 + \dots + g_0 X_{n-1} .$$

Nous poserons

$$\Delta C_0 = 0, \Delta C_1 = C_1 - C_0 \dots \Delta C_n = C_n - C_{n-1}$$

($=g_0 X_{n-1}$ si la fonctionnelle est naturelle), et nous supposons que la fonction $E \left[\sum_0^\infty |\Delta C_n| \right]$ est finie. Nous introduirons alors le noyau U_c défini par

$$(2) \quad U_c f = E \left[\sum_0^\infty f \circ X_n \Delta C_n \right] ,$$

si f est mesurable bornée. En particulier, si (C_n) est naturelle, donnée par (1) , on aura $U_c(f) = U(g.Pf)$, U désignant le noyau potentiel.

Nous poserons ensuite, v désignant un nombre complexe

$$(3) \quad M_0 = 1, M_1 = (1 - v \Delta C_1) \dots M_n = (1 - v \Delta C_1) (1 - v \Delta C_2) \dots (1 - v \Delta C_n)$$

(nous écrirons M_n^v au lieu de M_n si cette précision est nécessaire). Nous aurons donc, en posant $\Delta M_0 = 0, \Delta M_n = M_n - M_{n-1}$

$$(4) \quad \Delta M_n = -v M_{n-1} \Delta C_n .$$

Nous introduirons alors, sans nous occuper pour l'instant de questions de convergence, la "fonction"

$$(5) \quad c(. , v) = E \left[\prod_1^\infty (1 - v \Delta C_i) \right]$$

et le "noyau" H_v défini par

$$(6) \quad H_v f = E \left[- \sum_0^\infty f \circ X_n \Delta M_n^v \right] ,$$

et nous allons "démontrer" les relations

$$(7) \quad (I + v U_c) c(. , v) = 1$$

$$(8) \quad (I - v H_v) (I + v U_c) = I$$

Pour traiter la première, nous remarquerons que

$$c(X_n, v) = \mathbf{E} \left[\prod_{i=n+1}^{\infty} (1 - v \Delta C_i) \mid \mathcal{F}_n \right]$$

et par conséquent, comme ΔC_n est \mathcal{F}_n -mesurable

$$v U_c c(\cdot, v) = \mathbf{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} v \Delta C_n \prod_{i=n+1}^{\infty} (1 - v \Delta C_i) \right]$$

Posons $v \Delta C_i = u_i$: $(1 + v U_c)c(\cdot, v)$ est égal à l'espérance de

$$\begin{aligned} & (1 - u_1) (1 - u_2) (1 - u_3) \dots + \\ & + u_1 (1 - u_2) (1 - u_3) \dots + \\ & + u_2 (1 - u_3) \dots + \dots \end{aligned}$$

somme qui est égale à 1 si $\prod_i (1 - u_i)$ est convergent. Passons à la relation (8). Nous avons

$$U_c f = \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} f \circ X_i \Delta C_i \right]$$

du fait que $\Delta C_0 = 0$, et par conséquent

$$U_c f \circ X_n = \mathbf{E} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} f \circ X_i \Delta C_i \mid \mathcal{F}_n \right]$$

Comme ΔM_n est \mathcal{F}_n -mesurable, on a donc

$$\begin{aligned} v H_v U_c f &= \mathbf{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} - \Delta M_n \sum_{i=n+1}^{\infty} v f \circ X_i \Delta C_i \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} v f \circ X_i \Delta C_i \sum_{n=0}^{i-1} - \Delta M_n \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} f \circ X_i \Delta C_i (v - v M_{n-1}) \right] = v U_c f + H_v f \end{aligned}$$

D'où résulte aussitôt la relation (8).

B. Passons aux justifications : supposons que nous ayons pu trouver une fonctionnelle additive positive (C'_n) telle que l'on ait les propriétés suivantes

$$|\Delta C_n| \leq \Delta C_n'$$

la fonction $E' [C_\infty']$ est finie

(9) la fonction $E' \left[\prod_n (1 + v C_n') \right] = c'$ est finie

la fonction $U_c.c'$ est finie ;

des arguments très simples de convergence absolue permettent alors de rendre légitimes toutes les interversions de sommations et d'intégrations qui ont conduit aux formules (7) et (8). Nous allons indiquer maintenant des conditions suffisantes pour que les propriétés (9) soient satisfaites.

Supposons que (C_n) soit la fonctionnelle additive naturelle (1), et supposons que le potentiel $U|g|$ soit borné par une constante k . Posons $|g| = h$, et désignons par (C_n') la fonctionnelle additive positive $(h \circ X_0 + \dots + h \circ X_{n-1})$. La première des conditions (9) est évidemment satisfaite, et nous allons voir que les autres le sont aussi si $|v|$ est assez petit

- Posons si $t \in [0, 1[\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_0, Y_t = U \circ X_0, C_t' = 0$
- si $t \in [1, 2[\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_1, Y_t = U \circ X_1, C_t' = h \circ X_0$
-
- si $t \in [n, n+1[\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_n, Y_t = U \circ X_n, C_t' = h \circ X_0 + \dots + h \circ X_{n-1}$

La famille (\mathfrak{F}_t) est alors continue à droite, le processus (Y_t) est un potentiel de la classe (D), engendré par le processus croissant intégrable naturel (C_t') . Comme (Y_t) est borné par k , l'inégalité (59.2) du chapitre VII, n° 59 de [3] nous donne

$$E' [C_\infty'^p] \leq p!k$$

pour tout entier p . Il en résulte que la fonction $E' [\exp(wC_\infty')]$ est bornée pour tout $w < \frac{1}{k}$. Par conséquent, si $|v| < \frac{1}{k}$, la fonction $E' \left[\prod_n (1 + |v| \Delta C_n') \right]$, majorée par $E' \left[\prod_n \exp(|v| \Delta C_n) \right]$, est bornée. Il en résulte aussitôt que les conditions (9) sont satisfaites.

C. Nous allons donner maintenant une application des formules précédentes. Soient a et b deux points distincts, tels que les fonctions $U_a = U(I\{a\})$, $U_b = U(I\{b\})$ soient finies (et donc bornées respectivement par les nombres $U_a(a), U_b(b)$). Nous désignerons

par (N_n^a) et (N_n^b) les deux fonctionnelles additives naturelles

$$N_n^a = I_{\{a\}^0} X_0 + \dots + I_{\{a\}^n} X_{n-1}, \quad N_n^b = I_{\{b\}^0} X_0 + \dots + I_{\{b\}^n} X_{n-1}$$

Soient s et t deux nombres complexes de module ≤ 1 ; considérons la fonctionnelle

$$C_n^{st} = (1-s)N_n^a + (1-t)N_n^b$$

On a alors

$$1 - \Delta C_n^{st} = \begin{cases} s & \text{si } X_{n-1} = a \\ 1 & \text{si } X_{n-1} \neq a, b \\ t & \text{si } X_{n-1} = b \end{cases}$$

de sorte que la fonctionnelle multiplicative $M_n = \prod_{i=1}^n (1 - \Delta C_i^{st})$ est égale à $s^{N_n^a} t^{N_n^b}$. La fonction

$$(10) \quad c(\cdot, s, t) = E[M_\infty] = E[s^{N_\infty^a} t^{N_\infty^b}]$$

est donc la fonction génératrice de la variable aléatoire (N_∞^a, N_∞^b) . La démonstration de la formule (7) est très facile à justifier dans ce cas, et la formule s'écrit

$$(11) \quad (I + U_{c^{st}})c(\cdot, s, t) = 1$$

Il est facile d'autre part de calculer le noyau $U_{c^{st}}$

$$(12) \quad U_{c^{st}} f = (1-s)Pf(a)U_a(\cdot) + (1-t)Pf(b)U_b(\cdot).$$

Il résulte alors aussitôt de (11) que $c(\cdot, s, t)$ est de la forme $1 - U_{c^{st}} f$, soit de la forme $1 - mU_a(\cdot) - nU_b(\cdot)$ d'après (12). Dans ces conditions, la relation (11) s'écrit

$$1 = 1 - mU_a(\cdot) - nU_b(\cdot) + (1-s)U_a(\cdot)[1 - m(U_a(a) - 1) - nU_b(a)] + (1-t)U_b(\cdot)[1 - mU_a(b) - n(U_b(b) - 1)]$$

D'où les deux équations pour m et n , obtenues en annulant les coefficients de $U_a(\cdot)$ et $U_b(\cdot)$

$$(13) \quad \begin{aligned} -m + (1-s)[1 - m(U_a(a) - 1) - nU_b(a)] &= 0 \\ -n + (1-t)[1 - n(U_b(b) - 1) - mU_a(b)] &= 0 \end{aligned}$$

Plutôt que de calculer directement m et n , introduisons les deux fonctions génératrices

$$(14) \quad \begin{aligned} X(s, t) &= c(a, s, t) = 1 - mU_a(a) - nU_b(a) \\ Y(s, t) &= c(b, s, t) = 1 - mU_a(b) - nU_b(b) \end{aligned}$$

Comme à la fin du paragraphe 1, $c(x, s, t)$ sera un mélange de $X, Y, 1$ dans les proportions $p_a(x), p_b(x), 1 - p_a(x) - p_b(x)$. Les équations (13) s'écrivent, compte tenu de (14)

$$(15) \quad \begin{aligned} -m + (1-s)[X+m] &= 0, \quad \text{d'où } X = m \frac{s}{1-s} \\ -n + (1-t)[Y+n] &= 0, \quad \text{d'où } Y = n \frac{t}{1-t} \end{aligned}$$

Posons maintenant $U_a(a) = \lambda, U_b(b) = \mu, U_a(b) = \nu, U_b(a) = \nu'$, $\frac{s}{1-s} = S, \frac{t}{1-t} = T$. Les équations (13) s'écrivent

$$\begin{aligned} m(S+\lambda) + n\nu' &= 1 \\ m\nu + n(T+\mu) &= 1 \end{aligned}$$

d'où l'on tire aussitôt m, n , puis X, Y (on notera que $\lambda\mu - \nu\nu' > 0$)

$$(16) \quad X = \frac{S(T+\mu-\nu')}{(S+\lambda)(T+\mu)-\nu\nu'}, \quad Y = \frac{T(S+\lambda-\nu)}{(S+\lambda)(T+\mu)-\nu\nu'}$$

Nous donnons ces expressions à titre de curiosité : on ne voit vraiment pas à quoi elles pourraient servir.

3. La continuité des temps locaux

A. Nous allons revenir aux notations de la fin du paragraphe 1, et donner une nouvelle démonstration du théorème de Boylan sur la continuité des temps locaux. Nous commencerons à cet effet par établir un lemme, qui nous permettra de beaucoup simplifier les calculs.

R désignera toujours un temps terminal de paramètre 1, adjoint aux processus de la manière habituelle : Ω étant l'espace de base des processus, on forme un espace probabilisé produit $\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \times \mathcal{R}_+$, muni des tribus $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}_t = \mathcal{F}'_t$ (où \mathcal{B}_t désigne la tribu sur \mathcal{R}_+ engendrée par les boréliens de $[0, t]$), des mesures

$\mathbf{P}^{\mu} = \mathbf{P}^{\mu} \times \varepsilon$ (où ε est une loi exponentielle de paramètre 1 sur \mathbb{R}_+).
Si $\omega' = (\omega, t) \in \Omega'$, on pose

$$(1) \quad R(\omega') = t$$

et, par abus de langage

$$(2) \quad X_s(\omega') = X_s(\omega), \quad L_s^a(\omega') = L_s^a(\omega), \quad L_s^b(\omega') = L_s^b(\omega)$$

où (L_s^a) et (L_s^b) sont les temps locaux de a et de b respectivement. Nous poserons $C_s^{ab} = L_s^a - L_s^b$.

LEMME. - Soit d un nombre > 0 . Il existe une constante $A > 0$ telle que l'on ait, pour toute loi initiale μ

$$(3) \quad \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq R} |L_t^a - L_t^b| \geq d + (\eta \vee \eta') \right\} \leq A \exp\left(-\frac{d}{2g}\right)$$

DÉMONSTRATION. - Considérons le processus (H_t) ainsi défini sur Ω'

$$(4) \quad H_t = (C_t^{ab} + \Phi_{a^0}^1 X_t - \Phi_{b^0}^1 X_t) I_{\{t < R\}} + C_R^{ab} I_{\{t \geq R\}}$$

Ce processus est une version continue à droite de la martingale $(\mathbf{E}'[C_R^{ab} | \mathcal{F}_t'])$. Posons

$$H = \frac{1}{2g} \sup_t |H_t|, \quad V = \frac{1}{2g} |C_R^{ab}|$$

On a, d'après les inégalités bien connues de Doob

$$\mathbf{E}'[H^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}'[V^p] \quad \text{si } p > 1 \quad (\text{le coefficient est } \leq 4 \quad \text{si } p \geq 2)$$

$$\mathbf{E}'[H] \leq k + k\mathbf{E}'[V \text{Log}^+ V] \quad (\text{avec } k = e/(e-1))$$

Mais nous connaissons la loi de $|C^{ab}|$ d'après le théorème 2 : c'est un mélange d'une masse unité à l'origine, et d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{g}$; la loi de V est donc un mélange d'une masse unité à l'origine, et d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On a donc

$$E'[V^p] \leq p!2^{-p} E'[V \text{Log}^+ V] < +\infty$$

Il en résulte aussitôt qu'il existe une constante A telle que

$$E'[\exp(H)] \leq A$$

et par conséquent, d'après l'inégalité de Tchebychev

$$P\{H \geq \frac{d}{2g}\} \leq A \exp\left(-\frac{d}{2g}\right)$$

ou encore

$$(5) \quad P\left\{\sup_{0 \leq t \leq R} |C^{ab} + \Phi_a^1 \circ X_t - \Phi_b^1 \circ X_t| \geq d\right\} \leq A \exp\left(-\frac{d}{2g}\right).$$

Mais la fonction $|\Phi_a^1 - \Phi_b^1|$ atteint son maximum sur l'ensemble $[a, b]$; ce maximum est donc égal à $\eta \vee \eta'$, et l'inégalité (3) en résulte. Nous en tirerons d'abord une conséquence immédiate

COROLLAIRE. - Soit a un point de l'espace d'états E . Supposons que l'on ait

$$\lim_{b \rightarrow a} \Phi_a^1(b) = 1; \quad \lim_{b \rightarrow a} \Phi_b^1(a) = 1$$

Soit N un nombre > 0 . La variable aléatoire $\sup_{0 \leq t \leq N} |L_t^a - L_t^b|$ sur Ω tend alors en probabilité vers 0 lorsque $b \rightarrow a$.

DÉMONSTRATION. - Soit ε un nombre > 0 . Posons $d = \varepsilon/2$, choisissons un voisinage V de a , tel que $b \in V$ entraîne $\eta \vee \eta' < \varepsilon/2$. Si $b \in V$, l'ensemble

$$K' = \{\omega' \in \Omega' : \sup_{t \leq R(\omega')} |L(\omega') - L_t(\omega')| > \varepsilon\}$$

est contenu dans l'ensemble

$$\{\omega' \in \Omega' : \sup_{t \leq R(\omega')} |L_t^a(\omega') - L_t^b(\omega')| > d + (\eta \vee \eta')\}$$

dont la probabilité est au plus $A \exp\left(-\frac{d}{2g}\right)$ d'après le lemme.

Choisissons un voisinage W de a , contenu dans V , assez petit pour que cette quantité soit majorée par εe^{-N} si $b \in W$. Désignons alors par K le sous-ensemble suivant de Ω

$$K = \{\omega \in \Omega : \sup_{t \leq N} |L_t^a(\omega) - L_t^b(\omega)| > \varepsilon\};$$

Le sous-ensemble $K \times ([N, \infty[)$ de Ω^1 est contenu dans K^1 , et on a donc, toujours si $b \in W$

$$P^\mu(K)e^{-N} \leq P^\mu(K^1) \leq \varepsilon e^{-N}$$

qui est le résultat désiré.

B. Nous passons maintenant au théorème de Boylan. On remarquera qu'il y a une différence apparente entre les hypothèses ci-dessous et celles de Boylan, puisque nous utilisons les fonctions Φ_a^1 , tandis que Boylan utilise les densités des noyaux potentiels par rapport à une mesure de base. L'équivalence des deux points de vue est traitée dans l'article [1]. Voici donc l'hypothèse de Boylan

h est une fonction définie sur \mathbf{R}_+ , croissante, nulle à l'origine, telle que

$$(6) \quad \sum_n n \sqrt{h(2^{-n})} < +\infty$$

Pour tout entier $M > 0$, il existe une constante K telle qu'on ait, pour tout couple (a, b) d'éléments de l'intervalle $[-M, M]$

$$(7) \quad 1 - \Phi_a^1(b) \leq Kh(|b-a|) \quad (\text{et donc aussi } 1 - \Phi_b^1(a) \leq Kh(|b-a|)).$$

On a alors le théorème suivant

THÉORÈME 3 (Boylan). - *Il est possible de choisir les temps locaux L_t^a de telle sorte que l'application $(a, t) \rightarrow L_t^a(\omega)$ soit p. s. continue.*

DÉMONSTRATION. - Soit N un nombre $\rightarrow 0$, et soit D l'ensemble des rationnels dyadiques de l'intervalle $[-M, +M[$. Considérons l'application de D dans $\mathcal{C}([0, N])$ qui associe à $a \in D$ la fonction continue $t' \rightarrow L_{t'}^a(\omega)$. Le théorème sera établi si nous prouvons la propriété suivante

Pour P^μ -presque tout $\omega \in \Omega$, l'application précédente est uniformément continue sur D .

En effet, cette application sera alors prolongeable en une application uniformément continue de $[-M, M]$ dans $\mathcal{C}([0, N])$, qui définira évidemment une fonction continue des deux variables (a, t) sur $[-M, M] \times [0, N]$, et qui coïncidera p. s. avec le temps local, pour chaque a , en vertu du corollaire précédent. Il restera ensuite à faire tendre N et M vers l'infini.

Comme dans la démonstration du corollaire, nous travaillerons sur Ω' au lieu de Ω , en remplaçant l'intervalle $[0, N]$ par $[0, R(\omega')]$. Nous laisserons au lecteur le soin d'en déduire le résultat souligné.

Soit λ un nombre > 0 , qui sera choisi plus loin. Nous poserons $d_n = \lambda n \sqrt{h(2^{-n})}$; l'hypothèse faite sur h entraîne que la série $\sum_n d_n$ est convergente. Toutes les valeurs de n considérées dans la suite de la démonstration seront supposées assez grandes pour que $d_n \geq Kh(2^{-n})$.

Soient a et b deux éléments de \overline{D} de la forme $i2^{-n}$, $(i+1)2^{-n}$. On a alors $\eta = 1 - \Phi_a^1(b) \leq Kh(2^{-n})$, $\eta' = 1 - \Phi_b^1(a) \leq Kh(2^{-n})$, $g = \sqrt{\eta + \eta' - \eta\eta'} \leq C \sqrt{h(2^{-n})}$, où $C = \sqrt{2K}$. Comme $d_n \geq Kh(2^{-n})$, on a $d_n + (\eta \vee \eta') \leq 2d_n$, et par conséquent, d'après (3)

$$(8) \quad \mathbf{P}\{\omega' : \sup_{0 \leq t \leq R(\omega')} |L_t^{i2^{-n}}(\omega') - L_t^{(i+1)2^{-n}}(\omega')| \geq 2d_n\} \leq Ae^{-\frac{d_n}{2g}} \leq Ae^{-\frac{\lambda n}{2C}}$$

Posons maintenant

$$(9) \quad \Phi_n = \mathbf{P}\left\{ \sup_{-M2^n \leq i \leq M2^n} \sup_{0 \leq t \leq R} |L_t^{i2^{-n}} - L_t^{(i+1)2^{-n}}| \geq 2d_n \right\}.$$

On a d'après les majorations précédentes, le nombre des entiers i en question étant $2M2^n$

$$\Phi_n < 2AM2^n \exp\left(-\frac{\lambda n}{2C}\right)$$

Ainsi, si l'on choisit $\lambda > 2C \log 2$, la série $\sum_n \Phi_n$ est convergente. Nous supposons désormais que λ a été choisi de cette façon.

Il ne reste plus maintenant qu'à appliquer la méthode bien connue que l'on doit à Paul Lévy : la série $\sum_n \Phi_n$ étant convergente, le lemme de Borel-Cantelli entraîne que la propriété suivante est satisfaite pour presque tout $\omega' \in \Omega'$

Il existe un entier ν tel que l'on ait pour tout $n \geq \nu$ et tout i tel que $-M2^n \leq i \leq M2^n$

$$\sup_{0 \leq t \leq R(\omega')} |L_t^{i2^{-n}}(\omega') - L_t^{(i+1)2^{-n}}(\omega')| \leq 2d_n.$$

Mais ceci entraîne la continuité uniforme désirée. En effet, soient m un entier $\geq v$, a et b deux éléments de D tels que $|a-b| < 2^{-m}$. Ecrivons

$$a = a_0 + p_1 2^{-m-1} + p_2 2^{-m-2} + \dots$$

$$b = b_0 + q_1 2^{-m-1} + q_2 2^{-m-2} + \dots$$

où les p_i et les q_j valent 0 ou 1, et où a_0 et b_0 sont deux points de la m -ième subdivision dyadique, contigus ou confondus. On a alors

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq s} |L_t^a - L_t^b| &\leq \sup_{t \leq s} |L_t^a - L_t^{a_0}| + \sup_{t \leq s} |L_t^{a_0} - L_t^{b_0}| + \sup_{t \leq s} |L_t^{b_0} - L_t^b| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2d_n + 2d_m + \sum_{n=m}^{\infty} 2d_n. \end{aligned}$$

La série $\sum d_n$ étant convergente, ceci est arbitrairement petit dès que m est assez grand, et le théorème est établi.

Bibliographie

- [1] BLUMENTHAL (R.) & GETTOOR (R.). — Local times for Markov processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3 (1964), 50-74.
 [2] BOYLAN (E.). — Local times for a class of Markov processes, *Illinois J. Math.*, 8 (1964), 19-39.
 [3] MEYER (P. A.). — *Probabilités et potentiel*. Blaisdell Publ. Co, Boston (1966) ; Hermann, Paris (1966).
 [4] TROTTER (H. F.). — A property of Brownian motion paths, *Illinois J. Math.*, 2 (1958), 425-433.



Institut de Probabilités
 Faculté des Sciences
 67, Strasbourg, France

Reçu le 25 Juin 1966

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN

Ouvrages scientifiques
 TYPO - OFFSET
 GAP (Hautes-Alpes)

Dépôt légal n° 132
 1966