



**HAL**  
open science

## Résolution approchée du contact de Hertz dans un roulement à billes

Jean-Francois Antoine, Gabriel Abba, Codrut Visa, Christophe Sauvey

► **To cite this version:**

Jean-Francois Antoine, Gabriel Abba, Codrut Visa, Christophe Sauvey. Résolution approchée du contact de Hertz dans un roulement à billes. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-04091298

**HAL Id: hal-04091298**

**<https://hal.science/hal-04091298>**

Submitted on 8 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## Résolution approchée du contact de Hertz dans un roulement à billes

Jean-François Antoine<sup>†</sup>, Gabriel Abba<sup>‡</sup>, Codrut Visa<sup>†1</sup> & Christophe Sauvey<sup>†</sup>

<sup>†</sup>LGIPM - CEMA, IUT de Thionville-Yutz, Espace Cormontaigne, 57970 YUTZ, jf.antoine@enim.fr

<sup>‡</sup>LGIPM - CEMA, ENIM, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex

### Résumé :

*Pour connaître les lois de comportement dans un roulement à billes, la théorie du contact de Hertz est souvent utilisée. Cette dernière ne permet cependant pas de résolution analytique. La formulation explicite proposée permet néanmoins d'obtenir les dimensions, la déformation et la pression de contact avec une précision d'au moins 0,3%, pour une large plage d'ellipticité de la surface de contact.*

### Abstract :

*In order to obtain the force-displacement relationships in a ball bearing, the Hertzian contact theory has been used. The latter doesn't allow any analytical solving. The explicit formulation proposed in this paper here allows to obtain the dimensions, the displacement and the contact stress with at least 0.3% precision and thus for a large range of ellipticity of the contact surface.*

### Mots-clefs :

**Roulement à billes ; lois de comportement ; contact de Hertz ; solution approchée**

## 1 Introduction

Pour pouvoir prédire le comportement dynamique d'un rotor utilisé en très grande vitesse (200 000 tr/min), lors d'applications de micro-perçage et micro-fraisage (diamètre d'outil de l'ordre de 2 mm), il faut connaître avec précision celui des roulements à contact oblique qui les supportent, et en particulier le comportement des contacts. Le calcul des propriétés du contact entre une bille et les bagues a souvent recours à la théorie du contact de Hertz entre deux solides élastiques, qui n'a pas de solution analytique. La résolution habituelle d'un problème de contact passe en effet par la résolution numérique d'une équation transcendante [1, 2] et le calcul d'intégrales elliptiques. Une résolution numérique itérative a par ailleurs été proposée dans [3].

Une résolution explicite permet cependant d'obtenir les résultats plus rapidement, d'optimiser le choix des roulements et d'optimiser les efforts de précharge.

Des formulations explicites approchées permettant le calcul de l'ellipticité et de la déformation ont été proposées pour le cas de contact faiblement elliptiques [4, 5, 6] et comparées dans [7]. Un modèle analytique permettant le calcul des grandeurs de Hertz dans un roulement a été développé par Houpert[8]. Ce dernier modèle est défini par morceau en fonction de la géométrie des contacts .

Dans notre approche et à des fins d'optimisation, un modèle continu et dérivable est souhaitable. Dans un premier temps, la solution de l'équation transcendante liant la géométrie des surfaces à l'ellipticité du contact est approchée par une fonction analytique. Des formules approchées des intégrales elliptiques sont proposées et permettent la résolution analytique du

<sup>1</sup>Nous remercions le Conseil Régional de Lorraine pour son soutien financier.

problème de Hertz quelque soit la géométrie du contact. Les résultats sont confrontés aux travaux d'autres auteurs [7, 9, 8].

## 2 Théorie du contact de Hertz

### 2.1 Notations et équations

Les équations classiquement utilisées par la théorie de Hertz pour les calculs de contact entre solides, vont être énoncées dans la suite. La géométrie des solides en contact (bille et bagues) est définie par leurs courbures suivant deux directions. On note  $\rho$  la courbure de la surface du solide  $I$  ou  $II$  en contact dans la direction latérale 1 ou dans la direction de roulement 2, comme présenté dans [1].

La théorie de Hertz montre que le paramètre d'excentricité  $\kappa$  est relié à la géométrie des deux surfaces en contact, représentée par  $F_\rho$ , par le biais de l'équation transcendante suivante [1] :

$$F_\rho = \frac{A - B}{A + B} = ((\kappa^2 + 1) \mathcal{E}(\kappa) - 2\mathcal{F}(\kappa)) / ((\kappa^2 - 1) \mathcal{E}(\kappa)) \quad (1)$$

avec  $A = \rho_{I1} + \rho_{II1}$  et  $B = \rho_{I2} + \rho_{II2}$ . Les courbures sont négatives pour des surfaces concaves. Les termes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  dans l'équation (1) sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de premier et second types, dont les expressions sont les suivantes :

$$\mathcal{F}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \frac{1}{\kappa^2}) \sin^2 \phi]^{-1/2} d\phi \quad ; \quad \mathcal{E}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \frac{1}{\kappa^2}) \sin^2 \phi]^{1/2} d\phi$$

Une fois la solution de l'équation transcendante obtenue et la valeur de  $\kappa$  trouvée à partir de celle de  $F_\rho$ , les valeurs des deux semi-axes  $a$  et  $b$  de l'ellipse et le rapprochement relatif  $\delta$  des deux centres de l'un et l'autre des solides en contact sont obtenus au moyen des expressions suivantes :

$$a = a^* \left( \frac{3Q}{2(A+B)E^*} \right)^{1/3} \quad b = b^* \left( \frac{3Q}{2(A+B)E^*} \right)^{1/3} \quad \delta = \delta^* \left( \frac{3Q}{2E^*} \right)^{2/3} \frac{(A+B)^{1/3}}{2}$$

où  $a^*$ ,  $b^*$  et  $\delta^*$  dépendent uniquement du paramètre  $F_\rho$  et ont pour expression :

$$a^* = \left( \frac{2\kappa^2 \mathcal{E}}{\pi} \right)^{1/3} \quad b^* = \left( \frac{2\mathcal{E}}{\pi\kappa} \right)^{1/3} \quad \delta^* = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \left( \frac{\pi}{2\kappa^2 \mathcal{E}} \right)^{1/3}$$

Le module d'élasticité équivalent  $E^*$  peut être calculé à partir des propriétés des deux matériaux en contact par la relation [2] :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \right)$$

avec  $\nu_i$  le coefficient de Poisson et  $E_i$  le module d'Young du matériau du solide  $i$  en contact ( $i \in [I, II]$ ).

### 2.2 Modèle approché de la théorie du contact Hertzien

#### 2.2.1 Calcul du paramètre d'ellipticité $\kappa$

La première étape consiste à résoudre l'équation (1) pour de nombreuses valeurs de  $F_\rho$  comprises entre 0 et 1, et à tracer la fonction  $\kappa = f(F_\rho)$ . L'étude essentiellement graphique de la

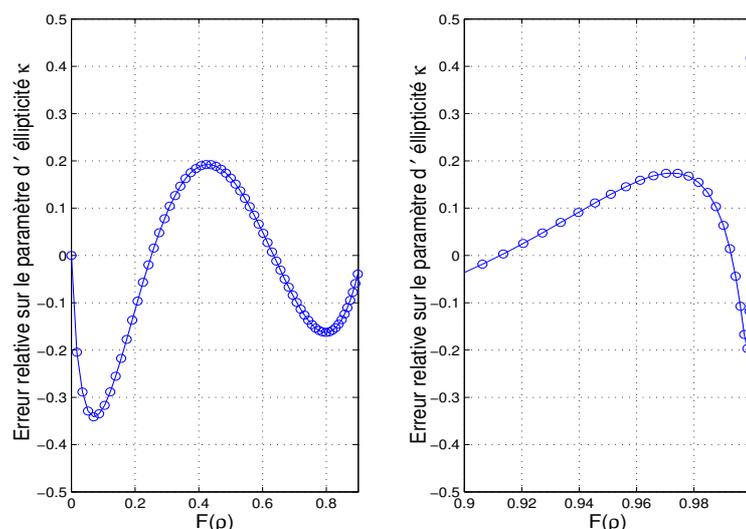


FIG. 1 – Erreur sur le paramètre d'ellipticité  $\kappa$  entre la solution approchée (2) et la solution numérique exacte de (1), en fonction du paramètre géométrique  $F_\rho$ . **à gauche** : pour  $F_\rho$  compris entre 0 et 0,9. **à droite** : pour  $F_\rho$  compris entre 0,9 et 1.

fonction obtenue, de sa forme et de ses valeurs particulières a permis d'opter pour une expression du type :

$$\kappa = 1 - 1/\mu_1 + 1/\mu_1 \left(1 - F_\rho^{\mu_2 + \mu_3 F_\rho^{\mu_4}}\right)^{-\mu_5} \quad (2)$$

comme solution approchée de l'équation (1). La fonction est ensuite optimisée par les moindres carrés, à l'aide de la fonction *lsqnonlin* de Matlab en utilisant  $\mu_1$  à  $\mu_5$  comme paramètres d'optimisation. Les valeurs obtenues sont données dans le tableau suivant :

$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
0,38357	1,03985	0,21733	1,93105	0,54796

La figure 1 montre que l'équation (2) est une solution approchée à moins 0,35% près sur une large plage de  $F_\rho$ . Une erreur de 0,42% est cependant commise pour  $F_\rho = 1$ .

### 2.2.2 Calcul approché des intégrales elliptiques complètes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$

Dans le cas de contacts moyennement elliptiques mais non circulaires, Brewe et Hamrock [5] ont proposé les formules approchées suivantes comme solution de l'équation implicite (1) et de l'intégrale elliptique complète du second type  $\mathcal{E}$  :

$$\kappa \approx 1,0339 \left(\frac{B}{A}\right)^{0,636} \quad \mathcal{E}(\kappa) \approx 1,0003 + 0,5968 \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{1,572}$$

Dans des travaux plus récents, ces mêmes auteurs [6] ont modifié le modèle afin de l'étendre au cas particulier du contact circulaire :

$$\kappa \approx (B/A)^{2/\pi} \quad \mathcal{E}(\kappa) \approx 1 + \frac{\pi-1}{\kappa^{\pi/2}}$$

La formule proposée par Maertens et Rousseau [9], probablement inspirée de la formule d'Euler de 1773 pour le calcul du périmètre d'une ellipse  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , permet d'écrire une autre expression :

$$\mathcal{E}(\kappa) = (1 + \kappa^y)^{1/y} \quad (3)$$

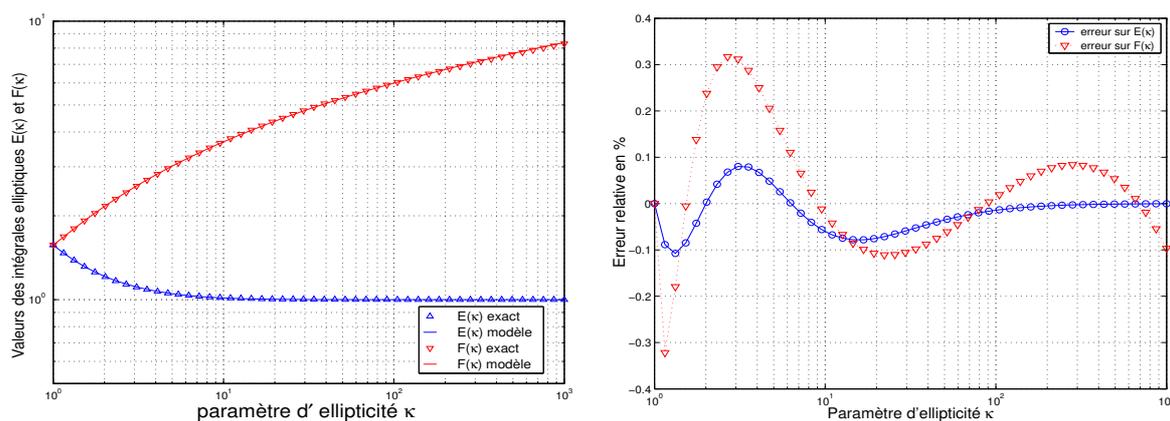


FIG. 2 – **à gauche** : Valeurs des intégrales elliptiques complètes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  donnés par le modèle (courbe) et la solution numérique exacte (symboles) en fonction de  $\kappa$ . **à droite** : Erreur relative sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  en fonction de la valeur de  $\kappa$ .

avec la constante  $y = \ln(2)/\ln(\pi/2)$  calculée pour répondre à la condition aux limites  $\mathcal{E}(1) = \pi/2$ .

En considérant les valeurs particulières des intégrales elliptiques ( $\mathcal{F}(1) = \pi/2$ ,  $\mathcal{E}(1) = 1$ ), nous avons testé différentes fonctions empiriques afin d'approcher au mieux la solution sur l'intervalle  $\kappa \in [1, 1000]$ . Les coefficients numériques sont autant de paramètres d'optimisation pour ajuster les fonctions. Le meilleur résultat obtenu a été le suivant :

$$\mathcal{F}(\kappa) = \frac{\pi}{2} + 0,881 (\log \kappa)^{1,0646} - 0,00572 \kappa^{0,5} \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(\kappa) = 1 + \frac{\pi/2 - 1}{\kappa^{1,3187} (1 + 0,0813 (\kappa^{1,0259} - 1))} \quad (5)$$

La figure 2 présente les résultats et les erreurs commises sur les valeurs des intégrales elliptiques pour une large plage d'ellipticité  $\kappa \in [1, 1000]$ . Sur cet intervalle, l'erreur reste en deçà de 0,35% pour  $\mathcal{F}(\kappa)$  et en deçà de 0,11% pour  $\mathcal{E}(\kappa)$ .

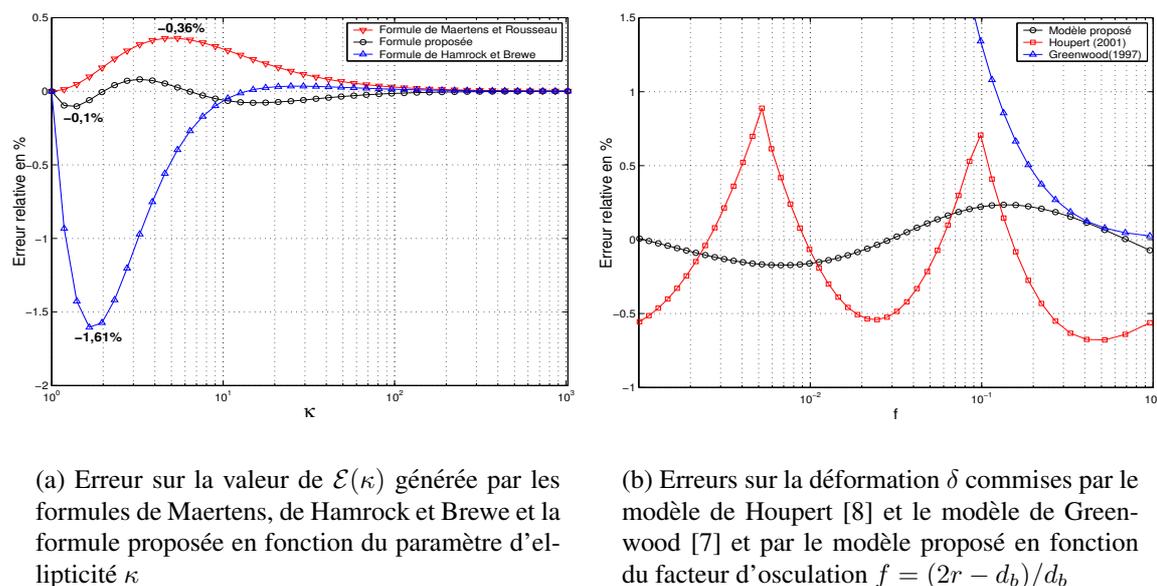
A titre de comparaison, la figure 3(a) présente les résultats donnés en utilisant les formules de Maertens et Rousseau, de Hamrock et Brewe et le modèle proposé. Les résultats montrent que les équations (4) et (5) sont une bonne alternative au calcul numérique des intégrales elliptiques complètes.

### 3 Résultats appliqués aux roulements

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats des différents modèles en calculant les grandeurs de la théorie de Hertz, que sont les dimensions de l'ellipse, la déformation et la pression de Hertz dans le cas d'un roulement de diamètre primitif  $d_m = 11,5$  mm, présentant des billes céramiques de diamètre  $d_b = 3,17$  mm et des bagues en acier. ( $E^* = 274$  GPa)

#### 3.1 Déformations des contacts

La figure 3(b) présente les erreurs relatives concernant le rapprochement mutuel  $\delta$  des deux centres des solides. Trois résultats sont comparés : ceux obtenus en utilisant la formule  $\delta = \frac{1}{2} (A a^2 + B b^2)$  donnée par Greenwood [7], le modèle  $\delta = c_{f1} \cdot (B/A)^{c_{f2}} \cdot A^{1/3} (Q/E^*)^{2/3}$  proposé par Houpert [8] et le modèle approché que nous proposons. Les coefficients  $c_{f1}$  et  $c_{f2}$  ont



(a) Erreur sur la valeur de  $\mathcal{E}(\kappa)$  générée par les formules de Maertens, de Hamrock et Brewe et la formule proposée en fonction du paramètre d'ellipticité  $\kappa$

(b) Erreurs sur la déformation  $\delta$  commises par le modèle de Houpert [8] et le modèle de Greenwood [7] et par le modèle proposé en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$

FIG. 3 – Comparaison des modèles approchés

été calculés par Houpert pour différentes plages du rapport  $B/A$  afin d'ajuster au mieux les lois approchées sur les résultats numériques de référence.

Le modèle proposé permet à l'aide d'une seule équation d'obtenir pour toute la plage de variation  $f$  une erreur inférieure à 0,25% en valeur absolue. Le modèle de Houpert donne des résultats comparables (moins de 0,8% d'erreur). On peut donc considérer que le modèle permet d'obtenir une bonne solution approchée du problème de Hertz.

### 3.2 Dimensions de l'ellipse de contact

La figure 4 présente les résultats donnés par le modèle approché et la solution numérique exacte pour les semi-axes et pour la surface de l'ellipse de contact en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$  allant de  $10^{-3}$  à 1 pour une force normale de 10 N. Dans un roulement à contact oblique, ce facteur est de l'ordre de 0,05 [8].

Les résultats fournis par le modèle donnent des valeurs proches des résultats calculés numériquement. L'erreur relative sur la valeur des semi-axes reste globalement dans la fourchette  $\pm 0,15\%$ . Pour la surface, cette erreur reste inférieure à 0,14% en valeur absolue. L'erreur commise sur la surface correspond également à celle commise sur la détermination de la pression de contact.

## 4 Conclusion

L'étude de la théorie de Hertz appliquée au contact dans les roulements a été détaillée. Un modèle permettant de trouver la valeur de l'ellipticité de la surface de contact entre une bille et une bague a été proposée. Le résultat exact est approché avec une formulation explicite à moins de 0,3% d'erreur. Parallèlement, les intégrales elliptiques ont été approchées, afin de s'affranchir totalement du calcul numérique. En utilisant ces résultats, le contact entre une bille et la piste intérieur d'un roulement a pu être étudié. Les résultats exacts concernant la déformation et

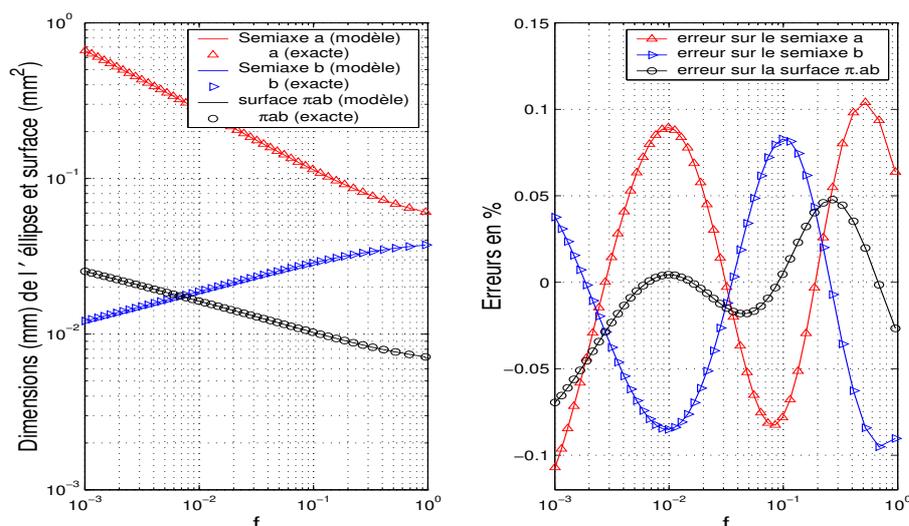


FIG. 4 – **à gauche** : Valeurs des demi-axes  $a$ ,  $b$  et de la surface de l'ellipse de contact données par le modèle (courbes) et la solution numérique exacte (symboles) en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$  (Force  $Q = 10$  N,  $d_b = 3,17$  mm,  $d_m = 11,5$  mm). **à droite** : Erreur relative sur les demi-axes et la surface de l'ellipse.

la pression de Hertz sont obtenus respectivement à moins de 0,35% et 0,15% près. Ce modèle approché permet donc d'avoir une bonne estimation des grandeurs caractéristiques des contacts dans un roulement à billes. Ces résultats sont utilisables pour le calcul de la rigidité d'un roulement à billes.

## Références

- [1] T.A. Harris. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley and sons, New York, fourth edition, 2001.
- [2] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] E.W. Deeg. New algorithms for calculating hertzian stresses, deformations and contact zone parameters. *AMP J. of technology*, 2 :14–24, November 1992.
- [4] S. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1970.
- [5] D.E. Brewe and B.J. Hamrock. Simplified solution for elliptical contact deformation between two elastic solids. *ASME J. Lub. Technol.*, 99 :485–487, 1977.
- [6] B.J. Hamrock and D.E. Brewe. Simplified equation for stresses and déformations. *ASME J. Lub. Technol.*, 105 :171–177, 1983.
- [7] J.A. Greenwood. Analysis of elliptical hertzian contacts. *Tribology Int.*, 30(3) :235–237, 1997.
- [8] L. Houpert. An engineering approach to hertzian contact elasticity - part I and II. *ASME J. Tribol.*, 123 :582–588, 589–594, July 2001.
- [9] R. Maertens and R. Rousseau. Een nieuwe benaderde formule voor de omtrek van een ellips (a new approximate formula for the perimeter of an ellipse). *Wiskunde & onderwijs*, 26 :249–258, 2000.