



HAL
open science

Morphismes rationnels et algébriques dans les titres d'A-Algèbres discrètes à une dimension.

J. Roubaud

► **To cite this version:**

J. Roubaud. Morphismes rationnels et algébriques dans les titres d'A-Algèbres discrètes à une dimension..
Annales de l'ISUP, 1968, XII (4), pp.1-77. <hal-04090017>

HAL Id: hal-04090017

<https://hal.science/hal-04090017v1>

Submitted on 5 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

PUBLICATIONS DE
L'INSTITUT de
STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

SOMMAIRE

J. ROUBAUD. — Morphismes rationnels et algébriques dans les titres d'A-Algèbres discrètes à une dimension .



VOLUME XVII — FASCICULE 4 — 1968
PARIS

INSTITUT
DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Publié par l'Institut de Statistique de l'Université de Paris
10 rue des Saussaies - Paris 8^e

Les publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris
ont pour objet de publier les travaux de statistique théorique et appliquée
de nos collègues et de nos amis.

Chaque volume est composé de plusieurs fascicules.
Le prix de chaque fascicule est de 10 francs.

VOLUME XVII - FASCICULE I
1957

Publ. Inst
17

PE

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

BI

TABLE DES MATIERES

| | Pages |
|--|-------|
| PRELIMINAIRES | 3 |
| 0.1. Types d'algèbres | 3 |
| 0.2. Magmas | 5 |
| 0.3. Le type SEG | 6 |
| 0.4. Théorèmes de Kleene et de R-Jungen Schützenberger | 7 |
| 0.5. Grammaires de constituants | 8 |
| 0.6. Automates finis | 9 |
| 1. TYPES D'A-ALGÈBRES COMPLETES A UNE DIMENSION ... | 11 |
| 1.1. Types d'A-algèbres à une dimension | 11 |
| 1.2. La "Formule de Taylor" et ses conséquences | 13 |
| 1.3. Types d'algèbres complètes à une dimension | 17 |
| 1.4. Le théorème des fonctions implicites | 18 |
| 1.5. La catégorie des types d'A-algèbres | 19 |
| 1.6. p-types définis par un type d'A-algèbres | 20 |
| 1.7. Lois de groupes. Morphismes multilinéaires | 22 |
| 2. MAGMAS AVEC ASSOCIATION | 25 |
| 2.1. Magmas avec association | 26 |
| 2.2. Ω -séries formelles à coefficients dans un anneau | 28 |
| 2.3. Exemples d'associations cohérentes | 32 |
| 3. SERIES FORMELLES RATIONNELLES | 40 |
| 3.1. Systèmes d'équations en séries formelles gauches | 40 |
| 3.2. Séries formelles rationnelles | 41 |
| 3.3. Systèmes d'équations linéaires à droite à coefficients rationnels : élimination | 42 |
| 3.4. Représentations matricielles associées aux séries formelles rationnelles | 47 |
| 3.5. Le théorème de Kleene | 51 |
| 3.6. Exemple | 52 |
| 4. SERIES FORMELLES ALGEBRIQUES - THEOREME DE R. JUNGEN SCHUTZENBERGER | 54 |
| 4.1. Systèmes d'équations algébriques | 54 |
| 4.2. Produit hadamarien de séries formelles | 55 |
| 5. GRAMMAIRES DE CONSTITUANTS DANS LES MAGMAS LIBRES | 58 |
| 5.1. Définition | 58 |
| 5.2. Grammaires dans les magmas avec association | 62 |
| 6. AUTOMATES FINIS | 64 |
| 6.1. Relations d'état | 64 |
| 6.2. Parties régulières | 67 |
| 6.3. Automates | 69 |
| 7. DOMAINES D'APPLICATION - GENERALISATIONS | 72 |
| 7.1. Domaine d'application | 72 |
| 7.2. Construction de types d'A-algèbres sur des types | 72 |
| 7.3. Généralisations | 74 |
| BIBLIOGRAPHIE | 76 |

TABLE DES MATIERES

| | |
|-------|---|
| Pages | PRELIMINAIRES |
| 1 | 0.1 Types d'algèbres |
| 2 | 0.2 Algèbres |
| 3 | 0.3 Le type $2E_6$ |
| 4 | 0.4 Théorème de Klein et de R-Jean Schüppert |
| 5 | 0.5 Groupes de Coxeter |
| 6 | 0.6 Algèbres de Lie |
| 11 | 1. TYPES D'ALGÈBRES COMPLETES A UNE DIMENSION |
| 11 | 1.1 Types d'algèbres à une dimension |
| 12 | 1.2 Le "Formule de Taylor" et ses conséquences |
| 13 | 1.3 Types d'algèbres complètes à une dimension |
| 14 | 1.4 Le théorème des fonctions implicites |
| 15 | 1.5 La structure des types d'algèbres |
| 16 | 1.6 Pages déduites par un type d'algèbre |
| 17 | 1.7 Les de groupes. Notions multilinéaires |
| 20 | 2. MAGMAS AVEC ASSOCIATION |
| 20 | 2.1 Magmas avec association |
| 21 | 2.2 Opérations binaires à coefficients dans un magma |
| 22 | 2.3 Exemples d'associations binaires |
| 40 | 3. SERIES FORMELLES RATIONNELLES |
| 40 | 3.1 Définitions et opérations sur séries formelles |
| 41 | 3.2 Séries formelles rationnelles |
| 42 | 3.3 Opérations d'opérations binaires à coefficients |
| 43 | 3.4 Opérations binaires |
| 44 | 3.5 Applications algébriques associées aux séries formelles |
| 45 | 3.6 Les théorèmes de Koenig |
| 46 | 3.7 Le théorème de Koenig |
| 47 | 3.8 Les théorèmes de Koenig |
| 48 | 3.9 Les théorèmes de Koenig |
| 49 | 3.10 Les théorèmes de Koenig |
| 50 | 3.11 Les théorèmes de Koenig |
| 51 | 3.12 Les théorèmes de Koenig |
| 52 | 3.13 Les théorèmes de Koenig |
| 53 | 3.14 Les théorèmes de Koenig |
| 54 | 3.15 Les théorèmes de Koenig |
| 55 | 3.16 Les théorèmes de Koenig |
| 56 | 3.17 Les théorèmes de Koenig |
| 57 | 3.18 Les théorèmes de Koenig |
| 58 | 3.19 Les théorèmes de Koenig |
| 59 | 3.20 Les théorèmes de Koenig |
| 60 | 3.21 Les théorèmes de Koenig |
| 61 | 3.22 Les théorèmes de Koenig |
| 62 | 3.23 Les théorèmes de Koenig |
| 63 | 3.24 Les théorèmes de Koenig |
| 64 | 3.25 Les théorèmes de Koenig |
| 65 | 3.26 Les théorèmes de Koenig |
| 66 | 3.27 Les théorèmes de Koenig |
| 67 | 3.28 Les théorèmes de Koenig |
| 68 | 3.29 Les théorèmes de Koenig |
| 69 | 3.30 Les théorèmes de Koenig |
| 70 | 3.31 Les théorèmes de Koenig |
| 71 | 3.32 Les théorèmes de Koenig |
| 72 | 3.33 Les théorèmes de Koenig |
| 73 | 3.34 Les théorèmes de Koenig |
| 74 | 3.35 Les théorèmes de Koenig |
| 75 | 3.36 Les théorèmes de Koenig |
| 76 | 3.37 Les théorèmes de Koenig |
| 77 | 3.38 Les théorèmes de Koenig |
| 78 | 3.39 Les théorèmes de Koenig |
| 79 | 3.40 Les théorèmes de Koenig |
| 80 | 3.41 Les théorèmes de Koenig |
| 81 | 3.42 Les théorèmes de Koenig |
| 82 | 3.43 Les théorèmes de Koenig |
| 83 | 3.44 Les théorèmes de Koenig |
| 84 | 3.45 Les théorèmes de Koenig |
| 85 | 3.46 Les théorèmes de Koenig |
| 86 | 3.47 Les théorèmes de Koenig |
| 87 | 3.48 Les théorèmes de Koenig |
| 88 | 3.49 Les théorèmes de Koenig |
| 89 | 3.50 Les théorèmes de Koenig |
| 90 | 3.51 Les théorèmes de Koenig |
| 91 | 3.52 Les théorèmes de Koenig |
| 92 | 3.53 Les théorèmes de Koenig |
| 93 | 3.54 Les théorèmes de Koenig |
| 94 | 3.55 Les théorèmes de Koenig |
| 95 | 3.56 Les théorèmes de Koenig |
| 96 | 3.57 Les théorèmes de Koenig |
| 97 | 3.58 Les théorèmes de Koenig |
| 98 | 3.59 Les théorèmes de Koenig |
| 99 | 3.60 Les théorèmes de Koenig |
| 100 | 3.61 Les théorèmes de Koenig |
| 101 | 3.62 Les théorèmes de Koenig |
| 102 | 3.63 Les théorèmes de Koenig |
| 103 | 3.64 Les théorèmes de Koenig |
| 104 | 3.65 Les théorèmes de Koenig |
| 105 | 3.66 Les théorèmes de Koenig |
| 106 | 3.67 Les théorèmes de Koenig |
| 107 | 3.68 Les théorèmes de Koenig |
| 108 | 3.69 Les théorèmes de Koenig |
| 109 | 3.70 Les théorèmes de Koenig |
| 110 | 3.71 Les théorèmes de Koenig |
| 111 | 3.72 Les théorèmes de Koenig |
| 112 | 3.73 Les théorèmes de Koenig |
| 113 | 3.74 Les théorèmes de Koenig |
| 114 | 3.75 Les théorèmes de Koenig |
| 115 | 3.76 Les théorèmes de Koenig |
| 116 | 3.77 Les théorèmes de Koenig |
| 117 | 3.78 Les théorèmes de Koenig |
| 118 | 3.79 Les théorèmes de Koenig |
| 119 | 3.80 Les théorèmes de Koenig |
| 120 | 3.81 Les théorèmes de Koenig |
| 121 | 3.82 Les théorèmes de Koenig |
| 122 | 3.83 Les théorèmes de Koenig |
| 123 | 3.84 Les théorèmes de Koenig |
| 124 | 3.85 Les théorèmes de Koenig |
| 125 | 3.86 Les théorèmes de Koenig |
| 126 | 3.87 Les théorèmes de Koenig |
| 127 | 3.88 Les théorèmes de Koenig |
| 128 | 3.89 Les théorèmes de Koenig |
| 129 | 3.90 Les théorèmes de Koenig |
| 130 | 3.91 Les théorèmes de Koenig |
| 131 | 3.92 Les théorèmes de Koenig |
| 132 | 3.93 Les théorèmes de Koenig |
| 133 | 3.94 Les théorèmes de Koenig |
| 134 | 3.95 Les théorèmes de Koenig |
| 135 | 3.96 Les théorèmes de Koenig |
| 136 | 3.97 Les théorèmes de Koenig |
| 137 | 3.98 Les théorèmes de Koenig |
| 138 | 3.99 Les théorèmes de Koenig |
| 139 | 3.100 Les théorèmes de Koenig |

fan
gél
me
une
d'h
qui
sur
con
les
196
R.

res
sio
liel
don
cat
mu
pro
obj
dén
bas
d'a
obj
ce
me
sai
dis
gra
ne
[§
tai
teu
en

for
est
du
tée

INTRODUCTION

L'objet du présent travail est la définition et l'étude de certaines familles de morphismes, que nous appelons "morphismes rationnels et algébriques" d'une catégorie. Il s'agit de généraliser la notion de série formelle définie par un système d'équations linéaires (resp. algébriques) à une classe de structures algébriques assez vaste et d'y étendre, à l'aide d'hypothèses convenables, certains calculs et résultats du cas "modèle" qui est celui des algèbres associatives (non nécessairement commutatives) sur un anneau unitaire (que pour simplifier nous considérerons toujours commutatif et de caractéristique 0 (cf [§1])) : ce sont essentiellement les résultats dus à M. P. SCHÜTZENBERGER ([SCHÜTZENBERGER, 1962 et 1963]), généralisation au cas non commutatif d'un théorème dû à R. Jungen (cf. [§4]).

Le cadre le mieux adapté à l'étude dans cette optique des structures algébriques est celui des "types d'algèbres (discrètes) à une dimension sur I-termes de base (cf [BENABOU 1964 et 1966] (le cas particulier où $I = \{1\}$ a été étudié par LAWVERE)). Les algèbres d'un type π donné dans une catégorie \mathcal{C} avec produits (le cas usuel étant celui de la catégorie des ensembles) sont les foncteurs du type π dans \mathcal{C} qui commutent avec les produits. Les types eux-mêmes étant des catégories avec produits on peut définir dans ce cadre des structures algébriques sur les objets de π (qui sont des algèbres de π sur un autre type). Nous considérons ainsi un type π donné sur les termes I de base et sur chaque objet-base (i.e. élément de l'ensemble I) une structure de A-module unitaire d'anneau A donné. Les ensembles de morphismes $\text{Hom}(\mu, \iota)$ où μ est un objet de π et ι un objet-base sont ainsi "fonctoriellement" des A-modules, ce qui signifie que ces structures de A-modules se comportent convenablement par rapport à la composition des morphismes. Dans un tel contexte on sait "additionner" des morphismes, les multiplier par des scalaires. Nous disposerons d'une notion de "polynôme" ou de "série formelle" si on peut graduer de manière convenable les ensembles $\text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$. Ceci nous amène à la notion de type d'A-algèbres (resp. type d'A-algèbres complètes (cf [§1]) à une dimension sur I. Compte tenu de l'équivalence (en un certain sens) des notions de types d'algèbres (sur un terme) et de "compositeur" ([LAZARD 1955]) cette notion généralise celle d' "Analyseur" qui en est le cas particulier si I a un élément.

La catégorie des types d'A-algèbres (A variable) est munie d'un foncteur "anneau de base" dans la catégorie des anneaux. Cette catégorie est fibrée et cofibrée sur les anneaux. Cette propriété "caractérise les graduations" et permet une autre définition des types d'A-algèbres, mieux adaptée à la généralisation à d'autres structures [BENABOU 1966 a] mais qui

n'est pas développée dans ce travail où nous faisons un usage explicite des graduations.

Le [§0] est consacré à des préliminaires. Dans le [§1] nous démontrons un "théorème des fonctions implicites" destiné à assurer l'existence des solutions des "systèmes d'équations en séries formelles". Le [§2] met en place le mécanisme de calcul conduisant aux théorèmes des [§3 et 4]. Il s'agit de formuler des conditions d'associativité valables pour des familles d'opérations. Ce sont les associations cohérentes, cas particulier "partout défini" et "ensembliste" du cas étudié dans [BENABOU 1966]. Les plus utiles semblent être les "associations standard". Nous ignorons s'il existe des associations cohérentes non standard. Les [§5 et 6] traitent respectivement des grammaires génératives et des automates finis. Compte tenu des hypothèses faites les définitions et résultats usuels s'étendent sans difficulté. Enfin le dernier paragraphe esquisse diverses directions de recherche dont certaines ont été entreprises mais qui ne sont pas suffisamment avancées pour donner lieu à plus de développements. Il s'agit essentiellement de deux directions différentes ; d'une part l'étude plus poussée, catégorique, des types d'A-algèbres. D'autre part dans l'étude des morphismes "algébriques" il sera sans doute nécessaire d'abandonner certaines hypothèses trop restrictives pour assurer à la théorie suffisamment de souplesse dans les applications : passage au non-partout défini, cas n -aire, à des ensembles infinis d'opérations, abandon des hypothèses d'associativité "ensemblistes" (i.e par égalité d'expressions) pour développer la notion de transformation (ou récaténation). C'est à ce prix, pensons-nous, que pourrait s'édifier une théorie convenable de la syntaxe (sous ses deux aspects de grammaires génératives et de transformations) dans la catégorie S E G (plus exactement les algèbres du type S E G ou S E G-oïdes) [BENZÉCRI 1964] qui était le point de départ de ces recherches.

Je ne voudrais pas terminer cette présentation sans remercier Monsieur BENZÉCRI qui a dirigé, orienté ce travail et dont les conseils fréquents et la patience inlassable m'ont permis de mener à bien ces recherches.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur DUGUÉ qui a bien voulu faire parti du jury auquel cette thèse est soumise.

L'aide de Jean BENABOU m'a été indispensable pour la présentation des problèmes posés dans un cadre catégorique. Je le remercie de m'avoir fourni les outils qui rendent ce travail (un peu) plus lisible. Je remercie enfin Mademoiselle CHÉRIAUX pour la conscience avec laquelle elle s'est acquittée de la tâche rébarbative de frappe du manuscrit ; toutes les qualités de la présentation sont à son crédit ; les erreurs, s'il y en a sont dues à ma négligence.

0. PRÉLIMINAIRES

Dans ce paragraphe, nous rappelons le plus succinctement possible, les principales notions et notations qui nous seront utiles par la suite. Pour toutes les démonstrations, pour toutes les définitions et résultats que nous ne rappelons pas, nous renvoyons, sauf s'ils appartiennent au domaine courant, au moment utile, à la bibliographie ([p. 95]).

Nous commençons par *les types d'algèbres à une dimension sur I-termes* de base et les catégories $\text{Alg}(\pi, \mathcal{C})$, où π est un type et \mathcal{C} une catégorie admettant des produits finis [BENABOU 1966 chap. 0].

Nous donnons ensuite quelques développements sur les *magmas* [BENABOU 1966 App.].

Au numéro 3, nous rappelons la définition de la *catégorie S E G* des "peignes" [BENZÉCRI.]. Nous la présentons comme type.

Les résultats "classiques" sur les *langages* (du point de vue des "grammaires" et du point de vue des "séries formelles" (références principales : [CHOMSKY MILLER 1963, SCHÜTZENBERGER 1962, FRIANT 1966]) ainsi que sur les *automates finis* ([JAULIN 1963]) terminent ce paragraphe, dont la longueur est due au caractère hybride du sujet, et varié des sources.

1. Types d'algèbres

1.1. Notations, conventions

1.1.1. — Si I est un ensemble, M désignera le monoïde libre unitaire sur I . Si n est un entier, $]n[$ sera l'ensemble totalement ordonné $\{1, \dots, n\}$. $]0[$ est \emptyset . Si $\mu_1 \dots \mu_n$ est un mot, il peut être considéré comme une application $i \rightarrow \mu_i$ de $]n(\mu)[\rightarrow I$, $n(\mu) = n = |\mu|$, étant la longueur du mot μ , que nous écrirons $\mu = \mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n$, $\mu_i \in I$.

1.1.2. — Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des produits finis ; (μ_i) , $1 \leq i \leq n$, une famille finie d'objets de \mathcal{C} ; $\mu = \prod_i \mu_i$ un objet produit des μ_i dans la catégorie \mathcal{C} . Nous noterons Γ_n^i la projection canonique des μ sur son $i^{\text{ème}}$ facteur μ_i .

1.1.3. — Soient $\nu, \mu = \prod_i \mu_i, \nu = \prod_j \nu_j, 1 \leq j \leq m$, des objets de \mathcal{C} . Nous distinguerons, par l'emploi des notations suivantes, les deux notions habituellement rencontrées de «morphisme produit» si $f_i, 1 \leq i \leq n$, est une famille de morphismes $\nu \rightarrow \mu_i$ respectivement nous écrirons $(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$ le morphisme canonique de $\nu \rightarrow \mu$ qui résulte de la propriété universelle du produit.

Si $g_i, \nu_i \rightarrow \mu_i$ est, pour tout i , un morphisme, on définit un morphisme $\nu \rightarrow \mu$ en composant g_i et la projection canonique $\prod \nu_i$. On en déduit donc un morphisme $\nu \rightarrow \mu$ qui n'est autre que $(g_1 \circ \prod \nu_i^{\mu_1}, \dots, g_i \circ \prod \nu_i^{\mu_i}, \dots, g_n \circ \prod \nu_i^{\mu_n})$. Nous le noterons parfois $g_1 \times \dots \times g_i \times \dots \times g_n$.

1.2. Types et algèbres

1.2.1. — Un *type d'algèbres à une dimension sur I-termes de base* (ou I-type) est une catégorie π dont l'ensemble des objets est le monoïde libre de base I et telle que tout $\mu \in M, \mu = \mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n$ est muni de flèches canoniques $\prod \mu_i^{\mu}$, dites projections canoniques, qui en font, dans π , le produit des objets $\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n$.

1.2.2. — Si π et π' sont deux I-types, un morphisme de π dans π' est un foncteur de π dans π' dont la restriction aux objets est l'application identique de M , et qui commute avec les projections canoniques.

1.2.3. — Soit π un I-type et \mathcal{C} une catégorie à produits finis. Une *algèbre de type π* (ou π -algèbre) de \mathcal{C} est un foncteur $A : \pi \rightarrow \mathcal{C}$ qui commute avec les produits finis. Si A et A' sont deux π -algèbres, un morphisme de A dans A' est une transformation naturelle.

1.2.4. — On note **typ**(I) la catégorie des I-types, **Alg**(π, \mathcal{C}) la catégorie des π -algèbres de \mathcal{C} .

1.2.5. — **THÉORÈME.** — Pour tout ensemble I , il existe un type **M**(I) sur $M \times I$ termes tel que les catégories **Typ** I et **Alg**(**M**(I), **Ens**) sont équivalentes.

COROLLAIRE. — La catégorie **typ**(I) des I-types admet des limites inductives et projectives.

2. Magmas

2.1. Un magma est un triple (Ω, X, ω) , où Ω et X sont des ensembles et ω une application de Ω dans l'ensemble des lois de composition binaires sur X , $\text{Hom}(X \times X, X)$. Si $\alpha \in \Omega$; $x, y \in X$, nous notons $\alpha x y$ le composé de x et de y pour la loi $\omega(\alpha)$. Nous dirons que X est un Ω -magma, et que Ω opère sur X .

2.2. Bimorphismes.

Soient $M = (\Omega, X, \omega)$; $M' = (\Omega', X', \omega')$ deux magmas. Un bimorphisme de M vers M' est un couple (τ, \mathcal{C}) , $\tau: \Omega \rightarrow \Omega'$; $\mathcal{C}: X \rightarrow X'$ d'applications telles que l'on ait

$$\mathcal{C}(\alpha x y) = \tau(\omega) \mathcal{C}(x) \mathcal{C}(y), \text{ pour tous } x, y \in X; \alpha \in \Omega$$

compte tenu de la convention de notation faite en [2.1]).

2.3. La catégorie des Ω -magmas.

Les objets sont les Ω -magmas, les morphismes sont les applications $\mathcal{C}: X \rightarrow X'$ telles que le couple $(\text{id}(\Omega), \mathcal{C})$ soit un bimorphisme, la composition des morphismes est la composition des applications. On note $\text{Mag}(\Omega)$ cette catégorie. Un foncteur d'oubli évident associe à $M = (\Omega, X, \omega)$, l'ensemble X , au morphisme $(\text{id}(\Omega), \mathcal{C})$ du magma M dans le magma $M' = (\Omega, X', \omega')$, l'application $\mathcal{C}: X \rightarrow X'$. C'est donc un foncteur $\text{Mag}(\Omega) \rightarrow \text{Ens}$, catégorie des ensembles.

2.4. Magmas libres.

Le foncteur d'oubli $0: \text{Mag}(\Omega) \rightarrow \text{Ens}$, défini en [2.3] admet un adjoint à gauche $\wedge: \Omega$ étant fixe, X un ensemble, on définit ainsi le Ω -magma libre sur X , $\wedge(X)$ (pour $\wedge(\Omega, X)$).

On sait que le Ω -magma libre sur X peut être ainsi décrit : soit $L(X \cup \Omega)$ le monoïde libre engendré par la réunion disjointe de X et de Ω . L'ensemble Σ sous-jacent au Ω -magma libre $\wedge(X)$ sur X (i.e. $0(\wedge(X)) = \Sigma$) est le plus petit sous-ensemble de $L(X \cup \Omega)$ contenant les éléments de X et tel que $\sigma, \tau \in \Sigma, \alpha \in \Omega \implies \alpha \sigma \tau \in \Sigma$.

(On remarquera que Σ n'est pas une partie régulière [voir plus loin n° 6] de $L(X \cup \Omega)$ mais un sous-ensemble CF : [cf. par exemple [JAULIN 1963 p. 12]).

Ω opère sur Σ en posant $\tau(\alpha) = \alpha$ (et Ω étant supposé canoniquement plongé dans $L(X \cup \Omega)$). Nous dirons que Λ est l'ensemble des *variables*, Ω est l'ensemble des *opérations*, Σ est l'ensemble des *expressions* du Ω -magma $\Lambda(X)$. Toute expression s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha \sigma \tau ; \sigma, \tau \in \Sigma, \alpha \in \Omega .$$

2.5. Structure des expressions.

Toute expression $\sigma \in \Sigma$ s'identifie à un triple $(\tilde{n}(\sigma), \tilde{\alpha}(\sigma), \tilde{x}(\sigma))$; $\tilde{x}(\sigma)$ est le mot de $L(X)$ (monoïde libre sur X), obtenu en "supprimant" les opérations dans l'écriture de σ (considérée comme mot de $L(X \cup \Omega)$); $\tilde{\alpha}(\sigma)$ est le mot de $L(\Omega)$ obtenu en supprimant les variables. Enfin $\tilde{n}(\sigma)$, le *parenthésage* de σ , indique les positions respectives des symboles de variables et d'opérations dans σ . $\tilde{n}(\sigma)$ est un *entier non associatif*, c'est-à-dire un élément de l'ensemble des expressions du magma libre à une opération et une variable (i.e Ω et X sont des ensembles réduits à un seul élément).

L'ensemble \tilde{N} des entiers non associatifs (en notant ainsi aussi bien le magma que l'ensemble sous-jacent de ses expressions) s'identifie à l'ensemble des suites finies d'entiers (éventuellement la suite vide) $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$, telles que, pour $k = 1, \dots, n - 1$ on ait

$$k \leq v_1 + \dots + v_k \leq n - 1 ; v_1 + \dots + v_k + \dots + v_n = n - 1 .$$

Il existe aussi une bijection de \tilde{N} sur l'ensemble des suites croissantes $(s_1, \dots, s_k, \dots, s_n)$ d'entiers telles que

$$s_n = n - 1, k \leq s_k \leq n - 1 \text{ si } k = 1, \dots, n - 1$$

(s_k) représente intuitivement le nombre de parenthèses ouvertes jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ occurrence de la variable, alors que v_k représente le nombre de parenthèses que l'on ouvre avant cette occurrence).

3. Le type S E G

SEG est un type d'algèbres, dont l'ensemble des objets est en correspondance bijective avec $L(\mathbb{N})$. Un objet est dit: *simplexe segmenté*. Un objet de la base (assimilé à un entier) est dit un *peigne*.

Les morphismes, ou correspondances simpliciales s'obtiennent par composition de trois types fondamentaux de morphismes.

1° Les *liaisons*, en correspondance bijective avec les applications croissantes de $]n] \rightarrow]m]$

2° Les *projections canoniques* d'un produit sur ses facteurs

3° Les *imbrications binaires*, qui sont des morphismes du mot n , m de $L(N)$ dans l'objet $n + m$ de SEG. (pour la définition précise, et des exemples voir [BENZÉCRI op. cit.]).

Une *concaténation* est le composé d'une liaison et d'une imbrication. Nous appellerons *échelle* une SEG-algèbre de la catégorie des ensemble échelle d'un monoïde, une algèbre sur SEG dans la catégorie des monoïdes, conformément aux définitions de [BENZÉCRI op. cit. §III].

On notera que pour toute échelle S de Ens , l'objet $S(1)$ est canoniquement muni d'une structure de monoïde.

Rappelons enfin [BENABOU op. cit. et BENZÉCRI op. cit.] que le problème universel suivant, dont la solution est *l'échelle libre* sur l'alphabet gradué λ , admet une solution

$\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ où Λ_n est un ensemble. Il s'agit de construire une échelle $S(\Lambda)$ et une application $\Phi(\Lambda)$ telle que Λ_n soit envoyé dans $S(\Lambda)(n)$ de manière universelle.

Toute échelle peut être définie par générateurs et relations.

4. Théorèmes de Kleene et de R. Jungen - Schützenberger.

X étant un ensemble, $L(X)$ le monoïde libre sur X , A un anneau (commutatif unitaire pour simplifier) $A[[X]]$ l'algèbre des séries formelles $u = \sum a_f f$, $a_f \in A$, $f \in L(X)$. Les éléments *rationnels* de $A[[X]]$ sont ceux du plus petit sous-ensemble soit R , de $A[[X]]$ qui contient les variables, qui est un sous-anneau (et même une sous-algèbre) et qui est stable pour l'opération $*$, *quasi inversion*

$$u^* = u + uu^* \quad \text{donc} \quad u^* = \sum_{n > 0} u^n$$

On a alors le théorème (Kleene).

THÉORÈME 4.1. — Une série formelle sans terme constant est rationnelle si et seulement s'il existe un entier $N \geq 2$ un homomorphisme μ de $L(X)$

dans le monoïde multiplicatif des matrices (N, N) à coefficients dans A , telles que

$$a = \sum \mu f_{1,N} f, f \in L(X)$$

Les séries formelles *algébriques* de $A[[X]]$ sont les séries solutions des systèmes algébriques, par la méthode des "approximations successives". On sait que tout système propre admet une solution unique ([SCHÜTZENBERGER 1962, p. 886]).

On appelle produit *hadamarien* de deux séries a, b , $a = \sum a_f f$, $b = \sum b_f f$ la série $a \bullet b = \sum a_f b_f f$

On a alors le théorème suivant, dû à M.P. Schützenberger.

THÉORÈME 4.2. — Si a est algébrique et b rationnelle le produit $a \bullet b$ est algébrique. En outre, si a est rationnelle $a \bullet b$ est rationnelle.

Rappelons pour terminer que le *support* d'une série formelle $a = \sum a_f f$ est l'ensemble des f de $L(X)$ tels que $a_f \neq 0$. Toute série formelle définit ainsi une partie de $L(X)$. Si on se borne aux séries formelles à coefficients positifs ($A = \mathbb{Z}$) on établit une correspondance entre parties de $L(X)$ et séries : les opérations $+$ et la multiplication dans $A[[X]]$ s'interprètent comme réunion et produit dans $\rho(L(X))$. $a \bullet b$ a pour support l'intersection des supports de a et de b . Les parties correspondant aux séries rationnelles sont les parties régulières et les séries algébriques ont pour support les parties "context-free". On obtient ainsi une forme voisine de la forme traditionnelle du théorème de Kleene et le résultat "classique" sur l'intersection d'un langage context-free et d'un langage régulier [cf. par exemple GINSBURG - RICE].

5. Grammaires de constituants.

La thèse de J. Friant, [FRIANT 1966] représentant le premier exposé complet des questions relatives aux langages CS en français, nous adoptons la terminologie de ce travail auquel nous renvoyons. Nous ajoutons seulement quelques définitions et résultats relatifs aux grammaires régulières ou linéaires d'un côté, qui ne sont pas étudiées par Friant.

Les *grammaires régulières* (à droite) sont celles où toutes les règles de production sont de la forme $\alpha \rightarrow f \beta$ où $f \in L(T)$ et où α et β sont des

symboles non-terminaux. On sait que les langages définis par les grammaires régulières (à droite et à gauche) sont exactement les parties régulières [4] du monoïde libre $L(X)$.

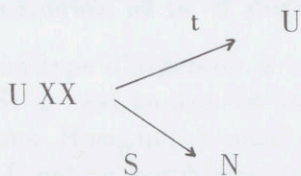
L'ensemble des langages réguliers (i.e. définis par les grammaires régulières) est stable par réunion, produit, $*$ (opération correspondant à la quasi-inversion des séries formelles), intersection et complémentation.

Terminons ce numéro en rappelant la définition des *grammaires linéaires* [cf. par exemple SCHÜTZENBERGER - CHOMSKY 63] : les règles de production sont des règles $\alpha \rightarrow f\beta$ ou $\alpha \rightarrow \beta f$. Il existe des langages linéaires non réguliers.

6. Automates finis.

6.1. Automate de Mealey,

Un automate de Mealey est défini par trois ensembles U (états) X (entrées) N (sorties) et deux applications t (transfert) s (sortie) selon le schéma



Le monoïde $L(X)$ opère sur U d'une manière naturelle en prolongeant t par $t(a, xf) = t(t(a, x), f)$ $f \in L(X)$, $x \in X$, par récurrence sur la longueur de f , s se prolonge en une application de $U \times L(X) \rightarrow L(N)$ en posant $s(a, xf) = S(a, x) S(t(a, x), f)$ si $S(t(a, x), f)$ est défini.

6.2. Applications séquentielles.

Une application séquentielle f de $L(X) \rightarrow L(N)$ satisfait aux deux conditions

(a) $f(p)$ a même longueur que p , pour tout $p \in L(X)$

(b) $f(pq) = f(p) r(p, q)$

Pour toute application séquentielle f , il existe un automate U, X, N, s, t et un état $a \in U$ tel que, si $p \in L(X)$ $f(p) = S(a, p)$.

6.3. Relations d'équivalences représentables.

On dit qu'une relation d'équivalence est représentable dans $L(X)$ si l'ensemble quotient est fini. Toute relation représentable E est associée à l'état a d'un automate à nombre fini d'états et réciproquement, i.e. $p E q$ si et seulement si $S(a, p) = S(a, q)$.

THÉORÈME 6.3.1. (Rabin - Scott). — *Pour qu'une relation d'équivalence L sur un monoïde libre $L(X)$ soit représentable, il faut et il suffit que L soit moins fine qu'une congruence (i.e. compatible à gauche et à droite avec la loi de monoïde) K finie.*

6.4. Parties régulières.

Une partie régulière d'un monoïde libre $L(X)$ est une classe d'équivalence d'une représentation représentable. On peut prouver

PROPOSITION 6.4.1. — *Pour qu'une partie $L \subset L(X)$ soit régulière il faut et il suffit qu'il existe un monoïde fini F et un morphisme $f: L(X) \rightarrow F$ tel que $L = f^{-1}(f(L))$.*

6.5. Langages des automates.

Soit $U, X \xrightarrow{t} U$ un automate sans sortie, $a_0 \in U$, $v \subset U$ le langage de l'automate par rapport à l'état initial a_0 et aux états finaux de V est l'ensemble des mots de $L(X)$, p tels que $t(a_0, p) \in V$. Les langages définis par les automates finis sont des parties régulières, et réciproquement. Ils coïncident également avec les langages définis par les grammaires régulières ([n° 5]).

1. TYPES d'A-ALGÈBRES COMPLÈTES A UNE DIMENSION

Dans ce paragraphe, on définit les *types d'A-algèbres*, puis les *types d'A-algèbres complètes à une dimension*. Ce sont des types d'algèbre au sens de [0.1.2] dans lesquels on peut faire des "calculs de morphismes". Grâce à la notion de *degré* d'un morphisme ([1.1]) on raisonne sur des "polynômes de morphismes" (resp. "séries formelles") outre les définitions et propriétés élémentaires, on démontre un "Théorème des fonctions implicites" ([4,3]), qui joue un rôle essentiel dans les applications.

Ces derniers numéros introduisent différentes notions (p-types associés à un type, lois de groupes, morphismes multilinéaires et pseudo multilinéaires) qui seront utilisées plus tard.

1. Types d'A-Algèbres à une dimension.

1.0. Dans ce paragraphe, A est un anneau commutatif intègre, de caractéristique 0 , et tous les A -modules considérés sont sans torsion ([1.3]).

1.1. Soit π un type d'algèbres à une dimension sur I -termes, ou I -type ([0-1.2.1]). Si μ est un mot de longueur n du monoïde libre M sur I , $\iota \in I$, supposons $\text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$ muni d'une structure de A -module, gradué par \mathbb{N}^n . Si f est un morphisme $\mu \rightarrow \iota$, f^{α} une composante homogène de f ($\alpha \in \mathbb{N}^n$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i est le *degré* de f^{α} en μ_i

par rapport à ι , $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est le *degré total* de f^{α} . Si $r \in \mathbb{N}$ est

un entier, $\sum_{|\alpha|=r} f^{\alpha}$ est la *composante homogène de degré total* r de f .

Nous la notons f^r : ainsi f^0 est la composante homogène de degré (total) 0 du morphisme f .

Si $f, g \in \text{Hom}(\mu, \iota)$, $f_m g(r)$ signifie que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| < r$, les composantes homogènes de degré α de f et de g sont égales : nous dirons que f et g *coïncident jusqu'à l'ordre* r .

Soit $g \in \text{Hom}(\nu, \mu)$ ($\nu \in M$; $|\nu| = m$; $g = (g_1, \dots, g_i, \dots, g_n)$);

si g_i est homogène pour tout i , $1 \leq i \leq n$, le degré de g est la matrice carrée d'entiers à n lignes et n colonnes $\beta = (\beta_{if})$, où β_{ij} est le de-

gré en v_j de g_j par rapport à μ_j , $1 \leq j \leq m$. Avec ces notations

1.2. DÉFINITION. — Un type d' A -algèbres à une dimension sur I , où I -type de A -algèbres est un I -type d'algèbres π tel que, pour tous $(\mu, \iota) \in M \times I$, $\text{Hom}(\mu, \iota)$ soit muni d'une structure de A -module gradué par N^n . En outre les axiomes suivants sont satisfaits.

1.2.1. Si $g \in \text{Hom}(v, \mu)$, l'application $f \rightarrow f \circ g$ de $\text{Hom}(\mu, \iota) \rightarrow \text{Hom}(v, \iota)$ est A -linéaire.

1.2.2. Si f est un élément homogène de degré α de $\text{Hom}(\mu, \iota)$, g un morphisme quelconque $v \rightarrow \mu$; $(a) = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de A^n , la relation d'homogénéité suivante a lieu

$$f \circ (a_1 g_1, \dots, a_n g_n) = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} f \circ g$$

1.2.3. (avec les notations de [1.2.2.], si, pour un indice i , $\alpha_i = 0$ (nous dirons dans ce cas que f est neutre en μ_i) et si g_i, h_i , sont deux morphismes $v \rightarrow \mu_i$ on a

$$f \circ (g_1, \dots, g_i, \dots, g_n) = f \circ (g_1, \dots, h_i, \dots, g_n)$$

1.2.4. Pour tout i , $\prod_{\mu}^{\mu_i}$ est homogène, de degré 1 en μ_i et de degré 0 en μ_j , pour tout $j \neq i$.

1.2.5. Remarque. — Pour tout $\mu \in M$, le degré de 1_{μ} (morphisme identique de μ) est donc la matrice unité ([1.1]).

1.3. Remarque. — La définition [1.2] ci-dessus généralise un cas particulier des *analyseurs* de M. Lazard [LAZARD 1955 p. 305]. Les restrictions imposées à l'anneau A et aux modules considérés évitent la formulation de deux axiomes supplémentaires, correspondant aux axiomes (A_5) et (A_6) des analyseurs, qui sont ici conséquences des autres axiomes. Nous avons choisi cette solution, d'abord pour des raisons de simplicité, ensuite parce que dans la plupart des applications que nous avons en vue l'anneau A sera \mathbf{Z} et les modules considérés libres. Toutefois, une définition un peu plus générale que celle donnée ici, permettant de raisonner en caractéristique ρ , par exemple, est parfaitement possible, et nous laissons au lecteur le soin de la formuler par lui-même.

2. La "formule de Taylor" et ses conséquences.

2.1. LEMME. — Si $f \in \text{Hom}(\nu, \mu)$ (resp. $g \in \text{Hom}(\xi, \nu)$) est un morphisme homogène dont le degré est la matrice α (resp. β), $f \circ g$ est homogène et son degré est la matrice produit $\alpha\beta$.

Soient $\alpha = (\alpha_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; $\beta = (\beta_{kl})$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq p$ ($|\xi| = p$), les matrices considérées. Nous supposons que l'on a $f = (f_1, \dots, f_m)$ $g = (g_1, \dots, g_n)$, et soit $h \Pi \rightarrow \xi$ un morphisme ($h = h_1, \dots, h_p$).

Soit enfin $(a) = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de A^p . Evaluons, pour tout indice i entre 1 et m ($|\mu| = m$) le morphisme

$$x_i = f_i \circ g \circ (a_1 h_1, \dots, a_p h_p). \text{ On a d'abord}$$

$$x_i = f_i \circ (a_1^{\beta_{11}} \dots a_p^{\beta_{1p}} g_1, \dots, a_1^{\beta_{i1}} \dots a_p^{\beta_{ip}} g_i, \dots, a_1^{\beta_{p1}} \dots a_p^{\beta_{pp}} g_p) \circ h$$

$$\text{ensuite } x_i = a_1^{\alpha_{i1}\beta_{11} + \dots + \alpha_{ij}\beta_{j1} + \dots + \alpha_{in}\beta_{n1}} \dots a_j^{\alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{1j}} \dots a_p^{\alpha_{i1}\beta_{1p} + \dots}$$

$\dots f_i \circ g \circ h$ vérifie donc l'égalité d'homogénéité de degré $\alpha\beta$ ([1.2.2])

2.2. Soient $f \nu \rightarrow \mu$ un morphisme homogène de degré α , p un entier tel que $p \geq n = |\nu|$, $\sigma :]p] \rightarrow]n]$ une surjection, définissant une partition de $]p]$. Soit $\xi = \xi_1 \dots \xi_p$ le mot de M à p composantes défini par les conditions

$\xi_k = \nu_{\sigma(k)}$, pour tout k ; et soit $\Pi_{\xi}^{\xi_k}$ la projection canonique de ξ sur son facteur ξ_k . Nous examinons le morphisme $s : \xi \xrightarrow{s} \nu$ $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ défini par les conditions

$$s_i = \sum_{j(k)=i} \Pi_{\xi}^{\xi_k}. \text{ Nous cherchons les degrés des composantes}$$

homogènes non nulles du morphisme composé $f \circ s$. Soit pour cela la matrice (n, p) (i.e à n lignes et p colonnes) η définie par

$\eta_{ij} = 1$ si $\sigma(i) = j$, $\eta_{ij} = 0$ dans le cas contraire. Soit enfin β le degré d'une composante homogène du morphisme $f \circ s$. On a alors

2.2.1. LEMME. — $\beta\eta = \alpha$

En effet, soit $s' \nu \rightarrow \xi$ le morphisme homogène suivant

$$s' = (s'_1, \dots, s'_i, \dots, s'_p), \text{ où } s'_i \text{ est la projection canonique } \Pi_{\xi}^{\xi_{\sigma(i)}}.$$

Il est clair que η n'est autre que le degré du morphisme homogène s' . D'autre part, $f \circ s \circ s'$ est un morphisme de la forme af , où a est un élément non nul de A que l'on peut calculer en utilisant l'exiome [1.2.2]. Le résultat est alors une conséquence immédiate du [lemme 2.1].

2.3. Soient maintenant $f: v \rightarrow \mu$, $g: \xi \rightarrow v$ des morphismes quelconques. Nous allons caractériser les degrés des composantes homogènes non nulles du morphisme composé $f \circ g$. Supposons que

$g = (g_1, \dots, g_1, \dots, g_m)$ où $g_i = g_i^1 + \dots + g_i^r + \dots + g_i^{d_i}$, g_i^r étant, pour $1 \leq r \leq d_i$, une composante homogène de degré ϕ_i^r ($\phi_i^r = (\phi_{i1}^r, \dots, \phi_{in}^r)$) de g_i . Nous posons $p = \sum_{i=1}^n d_i$, et soit σ une surjection de $[p] \rightarrow [n]$ ($d_i \geq 0$, pour tout i), telle que l'on ait $\text{Card } \sigma^{-1}(i) = d_i$. Les notations de [2.2] restant valables, soient $\xi, s \in \text{Hom}(\xi, v)$, $s' \in \text{Hom}(v, \xi)$ comme ci-dessus et soit $g': \Pi \rightarrow \xi$ le morphisme homogène de composantes g'_i , $1 \leq i \leq p$, g'_i étant défini comme suit

$g'_i = g_{\sigma(i)}^r$, où r , $1 \leq r \leq d_{\sigma(i)}$ est le plus petit entier qui n'est pas dans l'ensemble des r' ($1 \leq r' \leq d_{\sigma(i)}$), tels que $g_{i'} = g_{\sigma(i')}^{r'}$, avec les conditions $i' \leq 1$ et $\sigma(i) = \sigma(i')$. Dans ces conditions, on peut formuler la proposition suivante

2.3.1. PROPOSITION ("Formule de Taylor"). — *Pour qu'il existe une composante homogène non nulle de $f \circ g$, de degré donné ϵ , il faut et il suffit qu'il existe une composante homogène non nulle de degré α de f , une composante homogène non nulle de degré β de $f \circ s$ et que l'on ait, si ϕ' est le degré du morphisme g'*

$$\beta \phi' = \epsilon$$

En effet [lemme 2.2.1] $\beta \eta = \alpha$; mais aussi $f \circ g = f \circ s \circ g'$.

D'où le résultat [lemme 2.1].

2.3.2. Nous déduisons maintenant, comme corollaires de la formule de Taylor, quelques résultats utiles concernant la préservation par composition de la coïncidence jusqu'à un ordre donné [terminologie en 1.1].

Dans la suite de ce numéro, nous supposons vérifiée la condition suivante (axiome (A_7) des analyseurs)

Si f est un morphisme, $f^0 = 0$. Nous dirons que f est "sans terme constant", par abus de langage.

2.3.3. COROLLAIRE. — Soient $f \in \text{Hom}(\mu, \iota)$, $g, h \in \text{Hom}(v, \mu)$ des morphismes sans terme constant ([2.3.2]), ayant les propriétés suivantes

(i) f est nul jusqu'à l'ordre $\ell, \ell > 0$ (i.e., f coïncide avec le morphisme 0 jusqu'à l'ordre ℓ).

(ii) si $g = (g_1, \dots, g_i, \dots, g_m)$, $h = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_m)$ et, pour tout $i, 1 \leq i \leq m$ g_i coïncide avec h_i jusqu'à l'ordre $\ell' > 0$

Dans ces conditions $f \circ g$ et $f \circ h$ coïncident jusqu'à l'ordre $\ell + \ell' - 1$. Nous conservons les notations de la [proposition 2.3.1]. ε est une matrice $(1, p)$ telle que

$\varepsilon = \beta \varphi' \quad \alpha = \beta \eta \quad \alpha$ étant un degré de f (i.e. le degré d'une composante homogène non nulle de f). Nous cherchons à quelles conditions ε sera un degré de la différence $f \circ g - f \circ h$.

Or, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ $\eta = (\eta_{ij})$ avec $\alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{ji}$

on a aussi $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $\varepsilon_i = \sum_{j=1}^p \beta_j \varphi'_{ji}$. On en déduit tout de

suite que $\sum_i \alpha_i = \sum_j (\beta_j \sum_f \eta_{ji})$, Or il est clair, par définition de η [2.2]

que $\eta_{ji} = 0$ sauf si $\sigma(j) = i$, donc que $\sum_j \eta_{ji} = 1$ et ainsi que

$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$. D'autre part $\sum_i \varepsilon_i = \sum_j (\beta_j \sum_i \varphi'_{ji})$. Nous devons étudier

cette expression, qui est le degré total de ε .

Supposons d'abord que l'on a $\beta_j = 0$ si $\sum \varphi'_{ji} \geq \ell'$. Il est sûr alors que les morphismes g'_j et h'_j sont neutres [1.2.3] dans le morphisme composé. Comme les composantes homogènes de degré total $< \ell'$ de g_i et h_i sont égales par hypothèse, la composante homogène de degré ε de $f \circ g - f \circ h$ est, dans ce cas, nulle.

Sinon, il existe un indice $j_0, 1 \leq j_0 \leq p$, tel que $\beta_{j_0} \neq 0$ et, pour cet indice $\sum_i \varphi'_{j_0 i} \geq \ell'$. Deux cas sont possibles

1°) $\sum_{j=1}^p \beta_j < \ell$. D'après les [lemmes 2.1 et 2.2.1], la composante homogène de degré β de $f \circ s$ est nulle et les composantes homogènes de degré ε de $f \circ g$ et $f \circ h$ sont nulles toutes deux

2°) $\sum_j \beta_j \geq \ell$. Alors nous pouvons écrire

$\sum_i \varepsilon_i = \beta_{j_1} \varphi'_{j_1} + \dots + \beta_{j_{i_0}} \varphi'_{j_{i_0}} + \dots + \beta_p \sum_i \varphi'_{p_i}$. Or $\sum_j \varphi'_{j_i}$, degré total du morphisme homogène g'_j , ne saurait être nul, en vertu de l'hypothèse faite en [2.3.2], donc

$$\begin{aligned} \sum_i \varepsilon_i &\geq \beta_1 + \dots + \beta_{j_{i_0}} \sum_i \varphi'_{j_{i_0}} + \dots + \beta_p = \beta_1 + \dots + \beta_p + \beta_{j_{i_0}} (\sum_i \varphi'_{j_{i_0} - 1}) \\ &\geq \ell + \ell' - 1. \end{aligned}$$

C Q F D .

2.3.4. COROLLAIRE. — Soient $f \in \text{Hom}(\mu, \nu)$, $f' \in \text{Hom}(\mu, \nu)$ deux morphismes qui coïncident jusqu'à l'ordre ℓ ; $g = (g_1, \dots, g_m)$ et $g' = (g'_1, \dots, g'_m)$ deux morphismes $\nu \rightarrow \mu$ tels que g'_i et g_i coïncident jusqu'à l'ordre ℓ , pour tout i . Alors les composés $f \circ g$ et $f' \circ g'$ coïncident jusqu'à l'ordre ℓ . On applique le [corollaire 2.3.3] qui vient d'être démontré

$(f - f') \equiv 0(\ell)$, $g_i \equiv 0(1)$ pour tout i , impliquent $(f - f') \circ g \equiv 0(\ell)$. De plus, $f' \equiv 0(\ell)$ implique $f' \circ g' = f' \circ g(\ell)$. De même $f \circ g' \equiv f \circ g(\ell)$ enfin $(f - f') \circ g + f' \circ g - f' \circ g' + (f' - f) \circ g' \equiv 0(\ell)$, ce qui suffit.

2.3.5. COROLLAIRE. — Soient $f \in \text{Hom}(\mu, \nu)$, $g, h_1 \in \text{Hom}(\nu; \mu)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$, $h = (h_1, \dots, h_m)$ tels que

1°) pour un indice i_0 , $1 \leq i_0 \leq m$ on a $g_{i_0} = h_{i_0}$

2°) $f \circ (g_1, \dots, g_{i_0-1}, 0, g_{i_0+1}, \dots, g_m)$ et

$f \circ (h_1, \dots, h_{i_0-1}, 0, h_{i_0+1}, \dots, h_m)$ coïncident jusqu'à l'ordre $l > 0$.

Alors $f \circ g$ et $f \circ h$ coïncident jusqu'à l'ordre ℓ .

Nous nous appuyons de nouveau sur le [corollaire 2.3.3]. Soit ε un degré (c'est une matrice $(1, p)$) de $f \circ g - f \circ h$ tel que $|\varepsilon| < \ell$ $\varepsilon = \beta \varphi$, $\alpha = \beta \eta$. Soit \bar{g}' le morphisme homogène obtenu en annulant les composantes de g' d'indices j tels que $\sigma(j) = i_0$, et soit $\bar{\varepsilon}$ le degré $\beta_{\bar{\varphi}}$ (où $\bar{\varphi}$ est le degré du morphisme \bar{g}'). Il est clair que $|\bar{\varepsilon}| \leq |\varepsilon| < \ell$ et que ε est un degré du morphisme $f \circ (g_1, \dots, g_{i_0-1}, 0, g_{i_0+1}, \dots, g_m)$. Par hypothèse les composantes homogènes de degré ε de ce morphisme et du morphisme $f \circ (h_1, \dots, h_{i_0-1}, 0, h_{i_0+1}, \dots, h_m)$ coïncident.

Donc $\bar{\varepsilon} = 0$, donc $\beta_j = 0$ sauf si $\sigma(j) = i_0$.

Soit alors le morphisme (homogène) $(f \circ s)^\beta$ ([1.1]). D'après l'axiome [1.2.3] $(f \circ s)^\beta \circ (g_1, \dots, g_{i_0}, \dots, g_m) = (f \circ s)^\beta \circ (h_1, \dots, h_{i_0} = g_{i_0}, \dots, h_m)$ ce qui achève la démonstration.

3. Types d'algèbres complètes à une dimension.

3.1. Définition.

Un type d'A-algèbres complètes (à une dimension) sur I est une catégorie Θ satisfaisant aux axiomes suivants.

3.1.1. Les objets de Θ sont en correspondance bijective avec les mots du monoïde libre M sur I . Pour tout couple $(\mu, \iota) \in M \times I$, l'ensemble $\text{Hom}(\mu, \iota)$ est muni de la structure ainsi définie : $\text{Hom}(\mu, \iota)$ est le complété d'un A -module gradué par \mathbb{N}^n , noté $\text{Hom}(\mu, \iota)$.

3.1.2. La donnée des $\text{Hom}(\mu, \iota)$ définit un type d'A-algèbres à une dimension sur I ([définition 1.2]), noté Θ , dit associé à Θ .

3.1.3. Si $\mu \in M$, $\mu = \mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_m$ et si on munit l'ensemble $\text{Hom}(\mu, \iota)$, pour tout $v \in M$, de la topologie produit des topologies données sur $\text{Hom}(\mu, \iota)$ la composition des morphismes est continue pour les topologies des modules $\text{Hom}(\mu, \iota)$.

3.2. Définition.

Soit π un type d'A-algèbres à une dimension sur I . Pour tout couple (μ, ι) . Soit $\text{Hom}(\mu, \iota)$ le complété du module gradué $\text{Hom}(\mu, \iota)$. La composition des morphismes se prolonge canoniquement aux modules $\text{Hom}(\mu, \iota)$ et définit un type d'A-algèbres complètes (à une dimension) $\hat{\pi}$ sur I , en posant $\hat{\pi} = \pi$ (c'est-à-dire que π est le type d'A-algèbres associé [3.1.2] à $\hat{\pi}$).

3.3. Dans le n° suivant Θ est un type d'A-algèbres complètes, donné sur I .



4. Le théorème des fonctions implicites.

4.1. Énoncé du théorème préliminaire.

Soit $\mu \in M$, $|\mu| = n$; f un morphisme de ${}_{1\mu}$ dans ${}_{1,1}I$ tel que l'on ait

$$4.1.1. f \circ (\Pi_{1\mu}^1, 0, \dots, 0) \equiv \Pi_{1\mu}^1 \quad (2)$$

Il existe un morphisme unique $g_\mu \rightarrow 1$ tel que soit vraie l'égalité

$$4.1.2. f \circ (g \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \dots, \Pi_{1\mu}^n) = 0 \quad (\mu = \mu_1 \dots \mu_n)$$

4.2. Démonstration.

Posons $h = \Pi_{1\mu}^1 - f$. Comme $\Pi_{1\mu}^1 \circ (\Pi_{1\mu}^1, 0, \dots, 0) = \Pi_{1\mu}^1$, on a, d'après l'hypothèse $h \circ (\Pi_{1\mu}^1, 0, \dots, 0) = 0$ (2).

Soient g, g' deux éléments de $\text{Hom}(\mu, 1)$ qui coïncident jusqu'à l'ordre $\ell > 0$. Comme $\Pi_{1\mu}^\mu$ est un morphisme homogène, $g \circ \Pi_{1\mu}^\mu$ et $g' \circ \Pi_{1\mu}^\mu$ sont deux morphismes ${}_{1\mu} \rightarrow 1$ qui coïncident jusqu'à l'ordre ℓ . Alors [Corollaire 2.3.3]

$h \circ (\Pi_{1\mu}^1, 0, \dots, 0) \circ (g \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n}) = h \circ (g \circ \Pi_{1\mu}^\mu, 0, \dots, 0)$
et $h \circ (g' \circ \Pi_{1\mu}^\mu, 0, \dots, 0)$ coïncident jusqu'à l'ordre $\ell + 1$. D'après le [corollaire 2.3.5]. On en déduit que les morphismes $h \circ (g \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n})$ et $h \circ (g' \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n})$ coïncident jusqu'à l'ordre $\ell + 1$.

Posons alors $g_0 = 0$. Par récurrence sur l'entier $i > 0$, si g_{i-1} est défini, soit g_i le morphisme $\mu \rightarrow 1$ défini par

$$g_i \circ \Pi_{1\mu}^\mu = h \circ (g_{i-1} \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n}) \quad (\text{ainsi } g_i = g_i \circ \Pi_{1\mu}^\mu \circ (1_\mu, 0))$$

il est clair que $h \circ (0, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n}) \equiv 0(1)$, ce qui implique, avec la définition des g_i , $g_i \equiv g_0(1)$. Alors si $g_i \equiv g_{i-1}(i)$ on a, par ce qui précède

$$h \circ (g_i \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n}) = g_{i+1} \circ \Pi_{1\mu}^\mu \equiv g_i \circ \Pi_{1\mu}^\mu =$$

$$= h \circ (g_{i-1} \circ \Pi_{1\mu}^\mu, \Pi_{1\mu}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{1\mu}^{\mu_n}) \quad (i+1), \text{ d'où pour tout } i \quad g_i \equiv g_{i-1}(i).$$

Les morphismes g_i définissent donc un élément du module topologique $\text{Hom}(\mu, \iota)$. Soit g cet élément.

Montrons que g satisfait aux conditions de l'énoncé : en effet le morphisme $f \circ (g \circ \prod_{i\mu}^\mu, \prod_{i\mu}^{\mu_1}, \dots, \prod_{i\mu}^{\mu_n})$ est nul jusqu'à l'ordre i quel que soit i , par construction, donc nul. En outre g est unique : car si g et g' sont tels que les morphismes $f \circ (g \circ \prod_{i\mu}^\mu, \prod_{i\mu}^{\mu_1}, \dots, \prod_{i\mu}^{\mu_n})$ et $f \circ (g' \circ \prod_{i\mu}^\mu, \prod_{i\mu}^{\mu_1}, \dots, \prod_{i\mu}^{\mu_n})$ soient tous deux nuls, g et g' , qui coïncident jusqu'à l'ordre ℓ coïncident jusqu'à l'ordre $\ell + 1$ dès qu'ils coïncident jusqu'à l'ordre ℓ , d'après le raisonnement fait plus haut, ce qui achève la démonstration du théorème.

4.3. Théorème des fonctions implicites (pour les "systèmes de fonctions")

Soit p un entier ≥ 1 , (f_1, \dots, f_p) p morphismes de $L^p \mu \rightarrow \iota$ dans le type Θ satisfaisant aux p conditions.

4.3.1. $f_i \circ (0, \dots, \prod_{i\mu}^i p_\mu, 0, \dots, 0) \equiv \prod_{i\mu}^i p_\mu$ (2), $1 \leq i \leq p$
(où $\prod_{i\mu}^i p_\mu$ désigne la projection de $i^p \mu$ sur le $i^{\text{ème}}$ facteur ι de ce mot) ; il existe p morphismes $(g_1, \dots, g_i, \dots, g_p)$, $g_i \mu \rightarrow \iota$ tels que les égalités suivantes aient lieu, pour $1 \leq i \leq p$.

4.3.2. $f_i \circ (g_1 \circ \prod_{i\mu}^\mu p_\mu, \dots, g_i \circ \prod_{i\mu}^\mu p_\mu, \dots, g_p \circ \prod_{i\mu}^\mu p_\mu, \prod_{i\mu}^\mu p_\mu) = 0$.
La démonstration est essentiellement la même que celle du [théorème 4.1].

5. La catégorie des types d'A-algèbres (resp. complètes) à une dimension, sur I.

5.1. Soient π, π' deux I-types d'A-algèbres. On appelle morphisme de π vers π' un morphisme des types sous-jacents, soit Φ ([§0, 1-2] tel que

5.1.1. si $f \mu \rightarrow \iota$ est un morphisme homogène dans π , Φf est homogène de même degré dans π'

5.1.2. L'application restreinte de Φ à $\text{Hom}_\pi(\mu, \iota)$ est un homomorphisme de ce A-module dans le A-module $\text{Hom}_{\pi'}(\mu, \iota)$. Les morphismes de types d'A-algèbres se composent et définissent une catégorie que

nous appellerons **typ**(I, A) ou **typ**(A), si aucune confusion n'est à craindre.

5.2. Un morphisme de types d'A-algèbres complètes $\Phi: \Theta \rightarrow \Theta'$ sera un foncteur induisant un morphisme des types d'A-algèbres associés $\check{\Theta}, \check{\Theta}'$ ([3.1.2] et [5.1]) tel qu'en outre

5.2.1. Φ , restreint à $\text{Hom}_{\Theta}(\mu, \iota)$ est un homomorphisme continu de ce module topologique dans le A-module topologique $\text{Hom}_{\Theta'}(\mu, \iota)$.

5.3. D'après les [définitions 3.1, 5.1, 5.2] et la [définition 3.2] les correspondantes $\pi \longrightarrow \hat{\pi}$ et $\Theta \longrightarrow \check{\Theta}$ définissent des foncteurs

$\wedge: \mathbf{typ} A \longrightarrow \mathbf{tyc} A$ (catégorie des types d'A-algèbres complètes)

$\vee: \mathbf{tyc} A \longrightarrow \mathbf{typ} A$ Il est clair que $\wedge \circ \vee$ est l'identité de $\mathbf{tyc} A$ et que $\vee \circ \wedge$ est l'identité de $\mathbf{typ} A$. Donc

5.3.1. PROPOSITION. — Les catégories **typ** A et **tyc** A sont isomorphes.

5.4. PROPOSITION. — Les limites projectives existent dans **typ** A.

Soit en effet \underline{X} une petite catégorie, F un foncteur de \underline{X} dans **typ** A. Nous construisons d'abord le type π , limite projective des types F_x , où x parcourt les objets de \underline{X} . On sait [BENABOU 1964] (et il est aisé de le vérifier) que $\text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$ est la limite projective des ensembles $\text{Hom}_{F_x}(\mu, \iota)$. Un morphisme $f: \mu \rightarrow \iota$ dans π s'identifie donc à une famille f_x , $x \in \underline{X}$ de morphisme $\mu \rightarrow \iota$ dans les types F_x respectivement, ces données respectant les conditions de cohérence habituelles. Il s'agit de munir canoniquement $\text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$ d'une structure de A-module gradué par \mathbb{N} . Nous donnons à $\text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$ la structure de A-module limite projective des A-modules $\text{Hom}_{F_x}(\mu, \iota)$. Si $f \in \text{Hom}_{\pi}(\mu, \iota)$ et si $\alpha \in \mathbb{N}$, f sera homogène de degré α pour π si et seulement si chaque f_x l'est. Les vérifications, qui ne présentent "aucune difficulté ni intérêt", sont laissées au lecteur.

6. p-types définis par un type d'A-algèbres.

6.1. Soit π un type d'A-algèbres, nous construisons une famille π_p , $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, de types d'A-algèbres, qui seront dits définis par π . Nous procéderons comme suit

6.2. Pour tout couple $(\mu, \iota) \in M \times I$, posons $\text{Hom}_{\pi_p}(\mu; \iota) = \text{Hom}_{\pi}(\mu^p; \iota)$ si $f \in \text{Hom}_{\pi_p}(\mu, \iota) = \text{Hom}_{\pi}(\mu^p, \iota)$ ($\mu = \mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_n$) ;
 $g = (g_1, \dots, g_j, \dots, g_n)$, $g_j \in \text{Hom}_{\pi_p}(\nu, \mu_j) = \text{Hom}_{\pi}(\nu^p, \mu_j)$ ($\nu + \mu$) le composé $f \circ g$ dans π_p est le morphisme $\nu^p \rightarrow \iota$ dans π suivant

Soit $\mu^{(p)} = (\mu_{11}, \dots, \mu_{n1}, \dots, \mu_{1p}, \dots, \mu_{np})$ où $\mu_{ji} = \mu_j$; pour tout i , $1 \leq i \leq p$; soit $g^{(p)}$ le morphisme dans π de ν^p dans le mot $\mu^p = \prod \mu_{ji}$ dont la composante par rapport à μ_{ji} est g_i . Alors le composé de f et de g dans π_p est le composé dans π $f \circ g^{(p)} : \nu^p \rightarrow \iota$. On définit ainsi un type : car les objets de π_p sont ceux de π , donc sont les mots de α . Pour vérifier l'hypothèse sur les produits, il faut définir les projections canoniques de μ sur les μ_j dans π_p .

Plusieurs choix sont possibles (exactement p) qui donneront des structures isomorphes. Posons, par exemple, pour projection de μ sur μ_j dans π_p la projection dans π de μ^p sur le premier facteur μ_j de ce produit (μ_{j1} avec nos notations). On vérifie sans peine qu'avec ce choix les conditions du [§ 0, 1-2] sont satisfaites.

6.3. Nous allons maintenant définir π_p comme type d'A-algèbres. Les structures de A-modules sur les $\text{Hom}_{\pi_p}(\mu, \iota)$ seront celles des A-modules $\text{Hom}_{\pi}(\mu^p; \iota)$. L'axiome [1.2.1] s'ensuit simplement. Le degré d'un morphisme f aura la signification suivante : f sera homogène de degré α ($\alpha \in \mathbb{N}^n$) si et seulement si, dans π il est de degré total ([1.1]) α_j par rapport à l'ensemble des variables $(\mu_{j1}, \dots, \mu_{jp})$, pour tout j , $1 \leq j \leq n$. Il reste à vérifier les relations d'homogénéité [1.2.2] et [1.2.3]. Soient donc $f, g, (a) \in A^n$, comme à l'ordinaire et calculons dans π_p le morphisme $f \circ (a_1 g_1, \dots, a_j g_j, \dots, a_n g_n)$. Il suffit de l'interpréter dans π par définition, ce composé vaut

$f \circ (a_1 g_{11}, \dots, a_n g_{n1}, \dots, a_1 g_{1p}, \dots, a_n g_{np})$, où $g_{ji} = g_i$, pour tous i, j . En utilisant les relations d'homogénéité dans π et en regroupant les termes, compte tenu de la condition donnée un peu plus haut pour les α_j , il vient

$\prod_j a_j^{\alpha_j} f \circ g^{(p)}$, d'où le résultat. La deuxième condition [1.2.3] se démontre de même. On remarque enfin que pour un choix quelconque des projections canoniques dans π_p , celles-ci ont le degré voulu.

6.4. Remarque.

La notion de p -type défini par un type π d' A -algèbres, généralise celle de "puissance cartésienne $p^{\text{ème}}$ d'un analyseur" ([LAZARD 1955 p. 323]) dont la terminologie nous a semblé impropre, car π_p n'est pas une "puissance" de π dans la catégorie $\mathbf{typ}(I, A)$.

6.5. Les types d' A -algèbres π_p , définis par π , sont munis de morphismes canoniques dans π . De manière précise, pour tout entier $p \geq 1$, si f est un morphisme de $\mu^p \rightarrow 1$, donc un élément de $\text{Hom}_{\pi_p}(\mu, 1)$ soit $\Phi_p f$ le morphisme $\mu \rightarrow 1$ dans π défini par la condition

$\Phi_p f = f \circ \Delta_p^\mu$, où Δ_p^μ est le morphisme diagonal $\mu \rightarrow \mu^p$ ($\Delta_p^\mu = (1_\mu, \dots, 1_\mu)$). Alors Φ_p définit un morphisme dans $\mathbf{typ}(I, A)$ $\pi_p \rightarrow \pi$. Car Φ_p est un foncteur : si $g: \nu \rightarrow \mu$ est un morphisme dans π_p , le diagramme (d_1) commute

$$(d_1) \quad \begin{array}{ccccc} & & \Phi g & \Phi f & \\ & & \longrightarrow & \longrightarrow & \\ \nu & \xrightarrow{\Delta \nu} & \mu & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \nearrow g & \downarrow & \nearrow f & \\ \nu & \xrightarrow{\quad} & \mu & & \\ & & g^{(p)} & & \end{array}$$

(nous ne vérifierons pas les autres conditions).

6.6. Remarquons que l'on a $\pi_1 = \pi$ et que Φ_1 est le morphisme identique de π . Par une construction analogue à la précédente on définit, pour tout couple d'entiers (m, n) $m \geq n \geq 1$ un morphisme $\Phi_{mn}: \pi_m \rightarrow \pi_n$ dans $\mathbf{typ} A$. Il est clair que, si $m \geq n \geq p \geq 1$, on a $\Phi_{np} \circ \Phi_{mn} = \Phi_{mp}$. De plus, le morphisme Φ_m défini plus haut n'est autre que Φ_{m1} .

7. Lois de groupes. Morphismes multilinéaires.

7.1. Monoïdes d'un type d' A -algèbres.

Un *monoïde* d'un type Θ est un monoïde de la catégorie Θ , i.e. la donnée d'un objet μ de Θ et d'un morphisme $f: \mu^2 \rightarrow \mu$ tel que le

diagramme (d2) commute

$$\begin{array}{ccc}
 & & f \times 1_v \\
 & & \mu^3 \longrightarrow \\
 1_\mu \times f \downarrow & & \mu^2 \\
 & & \downarrow f \\
 & & \mu \\
 & \mu^2 \longrightarrow & \\
 & f &
 \end{array}$$

Le monoïde sera unitaire si le morphisme 0 est "élément neutre"

i.e. si $f \circ (\prod_{\mu^2}^\mu, 0) \circ (1_\mu, 1_\mu) = f \circ (0, \prod_{\mu^2}^\mu) \circ (1_\mu, 1_\mu)$

7.2. Groupes dans les types d'A-algèbres.

Un groupe de Θ est un monoïde unitaire tel qu'en outre il existe un morphisme $g_\mu \rightarrow \mu$ ayant la propriété suivante

$$f \circ (\prod_{\mu^2}^\mu, g) = \mu \circ (g, \prod_{\mu^2}^\mu) = 0$$

7.2.1. Exemple. — L'addition des morphismes d'un type Θ définit une structure de groupe sur chaque objet μ de Θ (plus précisément, le morphisme $\prod_\mu^1 + \prod_\mu^2$).

7.3. Groupes dans les types d'A-algèbres complètes.

7.3.1. PROPOSITION. — Soit $\iota \in I, f$ une loi de monoïde sur ι telle que l'on ait $f \equiv \prod_{\iota^2}^1 + \prod_{\iota^2}^2$ (2). Dans ces conditions f est une loi de groupe sur ι .

7.3.2. Remarque. — Si f est une loi de groupe sur ι , on a nécessairement $f \equiv \prod_{\iota^2}^1 + \prod_{\iota^2}^2$ (2) ([LAZARD 1955 p. 339])

7.3.3. Remarque. — La donnée d'une loi de groupe sur μ , définit une structure de groupe sur chaque $\text{Hom } v, \mu$.

7.4. Morphismes multilinéaires et pseudo multilinéaires.

Un morphisme $f \in \text{Hom}(\mu, \iota)$ est linéaire en μ_i s'il est homogène de degré 1 en μ_i par rapport à ι . Il est multilinéaire s'il est linéaire en chaque argument.

7.4.1. LEMME. — Soit $f \in \text{Hom}(\mu, \iota)$ un morphisme, linéaire en μ_i , μ' l'objet $\mu_1 \cdots \mu_i \mu_i \cdots \mu_n$, Π' le morphisme $(\Pi_{\mu'}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_i}, + + \Pi_{\mu'}^{\mu_i+1}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_n})$ de $\mu' \rightarrow \mu$. Alors

$$f \circ \Pi' = f \circ (\Pi_{\mu'}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_i}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_n}) + f \circ (\Pi_{\mu'}^{\mu_1}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_i+1}, \dots, \Pi_{\mu'}^{\mu_n})$$

7.4.2. DÉFINITION. — Un morphisme $f \in \text{Hom}(\mu, \iota)$ est *pseudo linéaire* en μ_i s'il satisfait à l'égalité du [lemme 7.4.1]. Un morphisme en μ_i est donc pseudo linéaire en μ_i .

7.5. Loi d'anneau annulaire.

Une loi d'anneau annulaire dans Θ est définie par un morphisme pseudo bilinéaire Θ de $\text{Hom}^2(\mu, \iota)$. Si Π_1, Π_2 sont les deux projections de ι^2 sur ι , l'addition et le morphisme \otimes définissent un anneau de Θ . En outre le morphisme $*$ = $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_1 \otimes \Pi_2$ définit une loi de groupe sur ι .

2. MAGMAS AVEC ASSOCIATION.

Sous le nom de "*magma avec association*" nous étudions un cas particulier de la situation envisagée dans [BENABOU 1966 App. I], dont nous utilisons les résultats. Les notations que nous introduisons permettent de faire plus aisément le lien avec les développements classiques sur les grammaires ([§ 0, § 3 à 6]).

Après avoir défini les Ω -séries formelles, les systèmes d'équations et les représentations matricielles nous abordons le problème de la détermination des associations cohérentes bijectives sur un ensemble Ω donné : ceci nous conduit à un "modèle", particulier mais utile, d'association, les associations standards. Nous ignorons s'il en existe d'autres (le point de la question est fait dans le dernier numéro).

Ω sera le plus souvent un ensemble de cardinal fini.

1. MAGMAS AVEC ASSOCIATION

1.1. Expressions droites et gauches

Les notations sont celles du [§0 n° 2]. Si N_n désigne l'ensemble des entiers (non associatifs) de "degré" n (i.e. où figure n fois la variable), [§0, 2.5]), \tilde{N}_n possède un élément distingué \hat{e}_n , représenté ([§0, 2.5]) par la suite $(1, 2, \dots, n-1, n-1)$ (ce qui signifie intuitivement que l'on ouvre une et une seule parenthèse avant chaque occurrence de la variable, sauf la dernière. On a alors la définition suivante

1.1.1. DÉFINITION. — On appelle *expressions droites* les expressions ayant pour parenthésage \hat{e}_n .

1.1.2. Exemple.

Si x_1, \dots, x_n sont n variables ([§0, n° 2.4]), $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ des opérations ([§0, 2.4]), l'expression $\alpha_1 x_1 \dots \alpha_{n-1} x_{n-1} x_n$ est une expression droite.

1.1.3. Les expressions dont le parenthésage est défini par la suite (s_k) , $1 \leq k \leq n$, $s_k = n-1$ pour tout k , sont dites *expressions gauches* (intuitivement, on peut dire que l'on ouvre "d'un seul coup" toutes les parenthèses). Avec les notations de l'exemple 1.1.2., l'expression $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} x_1 \dots x_n$ est une expression gauche.

1.1.4. Notations.

X, Ω , étant donnés, nous notons Γ (resp. Δ) l'ensemble des expressions gauches (resp. droites) du magma libre Λ (pour $\wedge(X)$).

1.1.5. Remarque.

Γ (resp. Δ) est une partie régulière ([§0, n° 6]) de $L(X \cup \Omega)$ (Δ est le support de la série formelle solution de l'équation

$$u = \sum_{x \in X} x + \left(\sum_{\alpha \in \Omega} \alpha \right) \left(\sum_{x \in X} x \right) u \quad ([\S 0, n^\circ 4])$$

1.2. Ω -Magmas avec association

1.2.1. DÉFINITION. — Un magma avec association est un triple

$(M, a, \xrightarrow{\delta})$, où M est un magma. (Ω, X, ω) , a une application de Ω^2 dans Ω^2 , $\xrightarrow{\delta}$ une relation binaire entre éléments de X , telle que l'on ait, si $a = (g, d)$; $g: \Omega^2 \rightarrow \Omega$; $d: \Omega^2 \rightarrow \Omega$; $\alpha, \beta \in \Omega$; $x, y, z \in X$

1.2.2. $\alpha x \beta y z \xrightarrow{\delta} g\alpha\beta \ d \ \alpha\beta \ xyz$

Nous dirons que a est une association dans le magma $M, \xrightarrow{\delta}$ est la relation d'association à droite dans M . La relation inverse de $\xrightarrow{\delta}$ est dite relation d'association à gauche. Nous la noterons $\xrightarrow{\delta}$.

Si a est une bijection, $\bar{a} = (\bar{g}, \bar{d})$ la bijection inverse, on a

$\alpha\beta \ xyz \xrightarrow{\delta} \bar{g} \ \alpha\beta \ \bar{d} \ \alpha\beta \ yz$; $x, y, z \in X$; $\alpha, \beta \in \Omega$

1.2.3. Exemple. a est l'application identique de Ω^2 , pour $\Omega = \{\alpha\}$ et $\xrightarrow{\delta}$ est la relation d'égalité. M est alors un monoïde.

Nous noterons le plus souvent \rightarrow la relation d'association à droite, si aucune confusion n'est à craindre.

Les associations les plus intéressantes pour notre propos sont celles qui satisfont à des conditions de cohérence explicitées ci-dessous.

1.3. Associations cohérentes

1.3.1. DÉFINITION. — Une association a dans un magma M est cohérente si elle satisfait aux trois axiomes ci-après

CO1 g est une loi de composition associative dans Ω

CO2 pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ on a $gd \ \alpha g \beta \gamma \ d \ \beta \gamma = dg \ \alpha \beta \gamma$

CO3 pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ on a $dd \ \alpha g \beta \gamma \ d \ \beta \gamma = d \ \alpha \beta$

1.3.2. Remarque. Les conditions CO1 à CO3 traduisent "algébriquement" le "pentagone"

$$\begin{array}{l}
 \alpha \beta \gamma \ z \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \alpha \beta \gamma \ d \ \beta \gamma \ z \quad \longrightarrow \quad g \alpha \beta \gamma \ d \ d g \beta \gamma \ x \ d \ \beta \gamma \ z \\
 \alpha \beta \ d \ d \beta \ x \ y \ z \quad \longrightarrow \quad g g \alpha \beta \ d \ g \alpha \beta \gamma \ d \ \alpha \beta \ x \ y \ z
 \end{array}$$

1.3.3. Soit Λ le magma libre sur X , a une association cohérente, \rightarrow la relation d'association à droite dans Λ , Soit R la relation transitive dans Σ ([§ 0 n° 2.4]) déduite de \rightarrow . Nous notons \Rightarrow la relation suivante dans Σ $\sigma \Rightarrow \tau$; $\sigma, \tau \in \Sigma$ si ou bien $\sigma R \tau$ ou bien $\sigma = \tau = \alpha xy$ pour un $\alpha \in \Omega$; $x, y \in X$; ou bien $\sigma = \tau = x$; $x \in X$.

On sait qu'alors ([BÉNABOU op. cit. théorème d'associativité]).

1.3.4. PROPOSITION. — Si on pose, pour $\sigma \Rightarrow \tau$, $\tau = f(\sigma)$, f est une application de Σ dans l'ensemble Γ des expressions gauches du magma Λ ([1.1.3]). f sera dite application d'association à droite. En outre

1.3.5. PROPOSITION. — L'application d'association f (définie dans [prop. 1.3.4.]) restreinte à l'ensemble Δ des expressions droites ([déf. 1.1.1.]) est bijective si et seulement si a est bijective.

La démonstration est immédiate, par récurrence sur le degré des expressions.

1.3.6. Remarque. $f \circ f = f$

1.3.7. Remarque. si $f\sigma = f\sigma'$; $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, $f\tau = f\tau'$; $\tau, \tau' \in \Sigma$ alors

$$f \alpha \sigma \tau = f \alpha' \sigma' \tau'$$

1.3.8. La restriction de f à Δ définit par "suppression" des variables une application (bijective si a est bijective) de $L(\Omega)$ dans $L(\Omega)$; plus généralement, par suppression des variables dans des expressions de même parenthésage on obtient des applications bijectives de l'ensemble des mots de longueur donnée dans $L(\Omega)$ sur lui-même.

2. Ω -SÉRIES FORMELLES A COEFFICIENTS DANS UN ANNEAU

2.1. Le magma des séries formelles.

Soit Σ l'ensemble des expressions du magma libre Λ (X et Ω étant donnés), a une association dans Λ ([1.2]). Soit A un anneau commutatif intègre de caractéristique 0 (qui sera le plus souvent \mathbf{Z} dans les applications). Considérons l'ensemble $A[[\Lambda]]$ (ou simplement $A[[X]]$) si aucune confusion n'est possible, des sommes formelles

$$u = \sum_{\sigma \in \Sigma} u_{\sigma} \sigma, \sigma \in \Sigma, u_{\sigma} \in A, \text{ où } \sigma \text{ parcourt } \Sigma$$

Nous dirons qu'un élément u de $A[[X]]$ est une Ω -série formelle en les variables de X (ou simplement Ω -série formelle, série formelle).

2.1.1. Si u, v sont deux séries formelles, λ, μ , deux éléments de A , $u = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \sigma$, $\sigma \in \Sigma$; $v = \sum_{\tau} v_{\tau} \tau$, $\tau \in \Sigma$ on définit la série formelle $w = \lambda u + \mu v$ par la condition $w = \sum_{\varphi} w_{\varphi} \varphi$, $\varphi \in \Sigma$ et $w = \lambda u_{\varphi} + \mu v_{\varphi}$. On munit ainsi $A[[X]]$ d'une structure de A -module.

Si u_{σ} est nul sauf pour un nombre fini d'expressions de Σ , nous dirons que u est un Ω -polynôme (ou simplement polynôme). (Les expressions sont encore les monômes à coefficient 1). L'ensemble $A[X]$ des Ω -polynômes s'identifie au A -module libre de base Σ .

2.1.2. $A[[X]]$ est canoniquement muni d'une structure de Ω -magma, Ω opérant sur les séries formelles de la manière suivante ; si u, v sont deux séries $u = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \sigma$; $v = \sum_{\tau} v_{\tau} \tau$; $\sigma, \tau \in \Sigma$; si $\alpha \in \Omega$, αuv est par définition la série $w = \sum_{\varphi} w_{\varphi} \varphi$, $\varphi \in \Sigma$ où $w_{\varphi} = u_{\sigma} v_{\tau}$ si $\varphi = \alpha \sigma \tau$, $w_{\varphi} = 0$ dans le cas contraire.

Le Ω -magma Λ se prolonge dans $A[[X]]$, muni de cette structure, par un morphisme évident de Ω -magmas.

2.1.3. Si a est une association cohérente dans $\Lambda([1.3])$, l'application f d'association à droite ([prop. 1.3.4.]) dans Σ dans Γ s'étend en une application, encore notée f de $A[[X]]$ dans lui-même, en posant, si $u = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \sigma$ $f(u) = \sum_{\tau} v_{\tau} \tau$, $\tau \in \Sigma$ où $v_{\tau} = \sum_{\sigma} u_{\sigma}$, $f\sigma = \tau$ (nous utilisons ici l'hypothèse faite dans l'introduction de ce paragraphe, que Ω est de cardinal fini). Définissons les séries formelles gauches (resp. droites) comme les séries $u = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \sigma$, pour lesquelles $u_{\sigma} = 0$ si σ n'est pas une expression gauche (resp. droite). L'application f que nous venons de définir applique alors $A[[X]]$ dans l'ensemble des séries formelles gauches. En outre, si a est bijective, f , restreinte aux séries formelles droites est une bijection de l'ensemble des séries formelles droites sur l'ensemble des séries formelles gauches.

2.2. Systèmes d'équations en séries formelles

2.2.1. Soit Y un ensemble fini à n éléments, $Y = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$, $A[[X \cup Y]]$ le magma des Ω -séries formelles en les variables de la somme disjointe $X \cup Y$ ([2.1]). Un système d'équations \mathcal{S} en séries formelles

est un n -uple $f_1, \dots, f_i, \dots, f_n, f_i \in A[[X \cup Y]]$ pour $1 \leq i \leq n$ satisfaisant à la condition suivante

2.2.2. la variable y_i ne figure pas dans p_i ; $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n$ (i.e., si $p_i = \sum_{i\sigma} \sigma$, $\sigma \in \Sigma$, $i\sigma = 0$ pour $\sigma = y_i$)

Il est aisé de vérifier (et c'est aussi une conséquence immédiate du [théorème des fonctions implicites du § 1; théorème 4.3] en considérant le type d'A-algèbres défini par le magma \wedge (généralisation de "l'analyseur de Kurosh" [LAZARD 1955 p. 332 exemple a])) qu'il existe une famille unique de n séries formelles de $A[[X]]$: $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_n\}$ telles que pour tout i , on ait

2.2.3. $u_i = f_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ où $f_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ désigne la série formelle obtenue en substituant u_i à y_i dans f_i , et où f est l'application de $A[[X]]$ dans l'ensemble des séries formelles gauches que nous avons définie plus haut, en [2.1].

2.2.4. Les u_i s'obtiennent par "approximations successives", i.e. comme "limite" de la suite $u_i^{(p)}$ $p \rightarrow +\infty$ définie, par récurrence sur n .

2.2.5. $u_i^{(0)} = f_i(0, \dots, 0)$

2.2.6. $u_i^{(n)} = f_i(u_1^{(n-1)}, \dots, u_i^{(n-1)}, \dots, u_n^{(n-1)})$ $n \geq 1$ le n -uple $u_1, \dots, u_i, \dots, u_n$ de séries formelles de $A[[X]]$ (plus précisément de séries formelles gauches) ainsi obtenu, est dit solution droite du système d'équations ([2.2.1]). On dit que u_i est une coordonnée de la solution du système \mathcal{S} .

2.2.7. Nous écrirons le plus souvent un système d'équations sous la forme abusive

2.2.8. $u_i = f_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$, si aucune confusion n'est à craindre.

2.2.9. On définit de même la solution gauche d'un système

2.2.10. $u_i^Y = f_i^Y(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ où f_i^Y est déduite de la relation d'association à gauche. Ce sont des séries formelles droites. Si nous avons à

considérer simultanément les relations d'association à droite et à gauche, nous noterons u_i^γ des coordonnées de la solution gauche (où \bar{u}_i) et u_i^ν (ou simplement u_i) celles de la solution droite.

2.3. Représentations matricielles.

2.3.1. Soit a une association cohérente bijective, Σ l'ensemble des expressions du magma libre Λ . Une représentation matricielle droite est définie en plusieurs temps

2.3.2. Soit x une variable. Ordonnons Ω en une suite $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \dots, \alpha_p\}$. Nous définissons ρx comme la donnée d'un $p+1$ -uple de matrices

2.3.3. $\rho x = (\rho^0 x, \rho^1 x, \dots, \rho^q x, \dots, \rho^p x)$, où pour tout q , $0 \leq q \leq p$.

ρx est une matrice carrée à $n = n(\)$ signes et n colonnes, à coefficients dans A .

2.3.4. Soit ensuite q un entier, $1 \leq q \leq p$. On pose

$$\rho \alpha_q x y = (\rho^q x \rho^{q'} y), \quad 0 \leq q' \leq p, \quad x \in X, \quad y \in X$$

$\rho^q x \rho^{q'} y$ étant le produit (ordinaire) de ces deux matrices.

2.3.5. $\rho \sigma$ est ainsi défini pour toute expression de degré 2, si l'on s'est donné ρx , $x \in X$.

Par induction sur le degré de σ , on définit ensuite $\rho \sigma$ pour toute expression gauche; si σ est une expression gauche, elle s'écrit $\sigma = \alpha \sigma' x$, $x \in X$, $\alpha \in \Omega$ et $\sigma' \in \Sigma$ est une expression gauche. Alors

2.3.6. $\rho^{q'} \sigma = \rho^{q'} \sigma' \rho^{q'} x$, $0 \leq q' \leq n$

2.3.7. Enfin, si σ est une expression quelconque, nous poserons $\rho \sigma = \rho f \sigma$ et f est définie, car $f \sigma$ est une expression gauche.

2.3.8. Le lecteur définira pour lui-même la notion de *représentation matricielle gauche* à l'aide de \bar{a} , \bar{f} (inverses de a , f).

2.3.9. Remarque. Soient σ, τ, φ trois expressions ; α, β deux opérations, ρ une représentation matricielle, on a

$$\mathbf{2.3.10.} \quad \rho\alpha\sigma\beta \quad \tau\varphi = \rho g\alpha\beta \quad d \alpha\beta\sigma\tau\varphi$$

2.3.11. Considérons l'ensemble des matrices carrées à N (fixe) lignes et colonnes à coefficients dans A et soit \mathfrak{M} l'ensemble des $p+1$ -uples de matrices $m \in \mathfrak{M} \Rightarrow m = (m^0, m^1, \dots, m^q, \dots, m^p)$, tous les m^q étant des (N, N) . On définit une structure de Ω -magma sur \mathfrak{M} de la manière suivante

Si $m = (m^0, m^1, \dots, m^q, \dots, m^p)$ $m' = (m'^0, m'^1, \dots, m'^q, \dots, m'^p)$
 $\alpha_q \in \Omega$ alors $\alpha_q mm' = (m^{q'})$ $0 \leq q' \leq p$ et $m^{q'} = m^q m'^q$. On définit une relation d'association à droite dans \mathfrak{M} en posant, pour $m, m', m'' \in \mathfrak{M}$; $\alpha, \beta \in \Omega$

$\alpha m \beta m' m'' \rightarrow a \alpha \beta \quad b \alpha \beta \quad m m' m''$. $(\mathfrak{M}, a, \rightarrow)$ est ainsi un magma avec association a .

3. EXEMPLES D'ASSOCIATIONS COHÉRENTES.

3.1. Exemple (a). — On se donne une loi de monoïde sur Ω , notée multiplicativement et on pose $a(\alpha, \beta) = (g\alpha\beta, d\alpha\beta)$, avec $g\alpha\beta = \alpha\beta$ (produit de α et de β pour la loi donnée sur Ω) $d\alpha\beta = \alpha$; $\alpha, \beta \in \Omega$

L'axiome [CO1] ([1.3.1]) est vrai par hypothèse. On vérifie trivialement [CO2] et [CO3].

Exemple (b). — Sous les hypothèses de l'exemple (a), imposons à a d'être injective. Comme on a $a(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \alpha)$, on voit que, pour la loi de monoïde donnée sur Ω , la relation $\alpha\beta = \alpha\gamma$ implique $\beta = \gamma$, Ω , muni de cette loi est donc un semi-groupe à gauche ([BOURBAKI Alg Chap. I §2 ex. 11]). Nous dirons dans ce cas que Ω est un g -semi-groupe à gauche.

Si, en outre, a est surjective (ce qui est vrai si Ω est fini), les translations à gauche dans le g -semi groupe Ω sont bijectives (et le g -semi groupe Ω est sans résidu, au sens de [BOURBAKI op. cit. ex. 13]). Réciproquement, si Ω est un g -semi groupe à gauche à translations à gauche surjectives, a est une association cohérente bijective.

Exemple (c). — Nous supposons maintenant seulement que g est une loi de groupe (multiplicative) sur Ω (Ω est un g -groupe). D'après les [exemples (a) et (b)], l'association $a(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \alpha)$ est une association

cohérente bijective, cherchons toutes les associations cohérentes bijectives pour lesquelles Ω est un g -groupe.

Si ε est l'élément neutre du groupe Ω , on a $d\varepsilon\varepsilon = d\varepsilon\varepsilon = d\varepsilon\varepsilon$ d'après [CO2], donc $d\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$. On a de même, si α est un élément quelconque de Ω , $d\varepsilon\alpha = d\varepsilon\alpha = d\varepsilon\alpha$, donc $d\varepsilon\alpha = \varepsilon$.

Soit $\alpha \in \Omega$. La condition de bijectivité de a impose en particulier que d soit une application surjective $\Omega^2 \rightarrow \Omega$. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$ tels que l'on ait

$$d\alpha_1\alpha_2 = \alpha. \text{ Or ceci implique}$$

$d\alpha d\alpha_2\varepsilon = d d\alpha_1\alpha_2 d\alpha_2\varepsilon = d\alpha_1\alpha_2$ (d'après [CO3]) $= \alpha$. Donc il existe pour tout α un élément β de Ω tel que l'on ait

$$d\alpha\beta = \alpha.$$

Soit alors γ un élément quelconque de Ω . Considérons l'élément $d\alpha\gamma$. D'après [CO2] $d\alpha\gamma d\alpha^{-1}(\alpha\gamma) = d(\alpha\alpha^{-1})(\alpha\gamma) = d\varepsilon(\alpha\gamma) = \varepsilon$, comme il a été établi plus haut. Ceci, étant vrai pour tout γ , est donc vrai en particulier pour β donc

$d\alpha\beta d\alpha^{-1}(\alpha\beta) = \varepsilon$ or d'après [CO3] on a $d d\alpha\gamma d\alpha^{-1}(\alpha\gamma) = d\alpha\alpha^{-1}$ donc aussi $d d\alpha\beta d\alpha^{-1}(\alpha\beta) = d\alpha\alpha^{-1}$ ce qui montre que $a(d\alpha\gamma, d\alpha^{-1}(\alpha\gamma)) = a(d\alpha\beta, d\alpha^{-1}(\alpha\beta)) = (\varepsilon, d\alpha\alpha^{-1})$

Si a est une application injective on a donc

$$d\alpha\gamma = d\alpha\beta = \alpha \text{ en résumé}$$

3.1.1. PROPOSITION. — Si $a = (g, d)$ est une association cohérente bijective, et si g est une loi de groupe sur Ω , on a nécessairement $d\alpha\beta = \alpha$, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

3.1.2. Remarque. — Nous n'avons utilisé en fait que l'injectivité de a et la surjectivité de d (la première condition étant équivalente à la bijectivité de a si Ω est de cardinal fini).

3.2. Exemple (d). — Posons maintenant, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$ $g\alpha\beta = \beta$

L'axiome [CO2] est alors automatiquement vérifié. Il en est de même pour [CO1] car la loi $g\alpha\beta = \beta$ est évidemment associative. L'axiome [CO3] prend la forme plus simple

$$[\text{CO}'3] \quad d \, d\alpha\gamma \, d\beta\gamma = d\alpha\beta \quad \text{pour tous } \alpha, \beta, \gamma \in \Omega .$$

Soit alors une loi de semi-groupe à droite sur l'ensemble Ω et définissons $d\alpha\beta$, pour tous α, β comme l'unique élément de Ω tel que l'on ait

$$d\alpha\beta \, \beta = \alpha$$

Vérifions, avec cette hypothèse, la forme [CO'3] de l'axiome [CO3]. On a d'abord $d \, d\alpha\gamma \, d\beta\gamma\beta = d \, d\alpha\gamma \, d\beta\gamma \, d\beta\gamma\gamma = d \, \alpha\gamma\gamma = \alpha$ donc

$d\alpha\beta \, \beta = dd\alpha\gamma \, \alpha\beta\gamma\beta$ d'où le résultat puisque Ω est un semi-groupe à droite.

Exemple (e).— Comme cas particulier de l'association de l' [exemple (d)], supposons Ω muni d'une structure de groupe et que nous posons

$$d \, \alpha\beta = \alpha\beta^{-1} \quad \text{on a alors, d'après [CO3]}$$

$$\alpha(g\beta\gamma)^{-1} \, \gamma\beta^{-1} = \alpha\beta^{-1} \quad \text{donc } g \, \beta\gamma = \gamma \quad \text{pour tous } \beta, \gamma \in \Omega . \text{ D'où}$$

3.2.1. PROPOSITION. — Si a est une association cohérente et si d est définie par $d\alpha\beta = \alpha\beta^{-1}$, pour une loi de groupe donnée sur Ω , on a nécessairement $g\alpha\beta = \beta$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

On notera que, dans ce cas, la bijectivité de a résulte des autres hypothèses.

3.3. Dans les [exemples (a) à (e)] ci-dessus, on se trouve dans l'un des deux cas suivants : ou bien $g\alpha\beta$ ne dépend que de β , ou bien $d\alpha\beta$ ne dépend que de α . Nous cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire des associations cohérentes pour que g (resp. d) ne dépende que de sa première coordonnée (resp. seconde).

Exemple (f). — Ω est un g -monoïde multiplicatif. Nous posons $d\alpha\beta = \psi(\beta)$. D'après [CO3] on doit avoir $\psi(\psi(\gamma)) = \psi(\beta)$ pour tous β, γ . [CO2] s'écrit $\psi(\beta\gamma)\psi(\gamma) = \psi(\gamma)$. Si ψ est surjective (ce qui est vrai si d est surjective) $\psi(\beta)$ est une constante, d'après [CO3] et cette constante est un idempotent du g -monoïde Ω , d'après [CO2].

Exemple (g). — Posons cette fois $d\alpha\beta = \varphi(\alpha)$. On a alors $\varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha)$ $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta)$. φ est une application $\Omega \rightarrow \Omega$. Si φ est surjective

(ce qui est vrai si on veut que a soit bijective) et si Ω est de cardinal fini $\varphi(\alpha) = \alpha$. Dans le cas général (mais toujours Ω fini), si $\varphi(\Omega)$ est l'image de Ω par φ , φ est l'identité sur $\varphi(\Omega)$ qui est un sous-monoïde et φ est un endomorphisme de Ω , appliquant \mathcal{A} sur $\varphi(\Omega)$ et se réduisant à l'identité sur $\varphi(\Omega)$.

Exemple (h). — Nous posons $g\alpha\beta = \varphi(\alpha)$ la condition [CO1] implique $\varphi\varphi\alpha = \varphi\alpha$ donc φ est l'identité si φ est surjective et Ω fini. Dans ce cas, [CO2] s'écrit $d\alpha\gamma = d\alpha\beta$, donc d ne dépend que de sa première coordonnée. D'après l' [exemple (g)], si d est surjective on a $d\alpha\beta = \alpha$ donc $a(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha)$.

Exemple (i). — Posons enfin $g\alpha\beta = \psi(\beta)$. [CO1] donne $\psi\psi(\gamma) = \psi(\gamma)$. Nous ne savons rien du cas général, même si a est bijective. Posons plus particulièrement $g\alpha\beta = \beta$. [CO2] est vraie. La loi d sur Ω satisfait à l'axiome [CO'3]. De plus, si a est bijective, les translations à droite pour d sont bijectives. Pour tous α , $d\alpha\alpha$ est un idempotent. Si ϵ est un idempotent pour d , $d\alpha\epsilon = \epsilon$, pour tout α . Donc en particulier, pour deux idempotents ϵ, ϵ' de $\epsilon\epsilon' = \epsilon$. Les parties de Ω où ϵ parcourt l'ensemble des d -idempotents sont disjointes (mais non à priori stables !) et ne contiennent qu'un idempotent $\epsilon = d\epsilon\epsilon$. Nous ne poussons pas plus avant ici cette étude qui sera reprise un peu plus loin. Notons que la structure sur Ω étudiée dans l' [exemple (e)] est un cas particulier de cette situation.

3.4. Associations standards

Tenant compte des exemples [(a) à (i)] ci-dessus, nous définissons les associations standards comme des associations cohérentes bijectives ainsi construites.

3.4.1. On se donne sur Ω une structure de semi-groupe à gauche bijective. Soit I l'ensemble des idempotents de ce semi-groupe que nous appellerons g -semi groupe. On sait que Ω , muni de cette structure, s'identifie à l'ensemble des couples (i', i'') , où $i' \in I$ et où i'' parcourt un groupe G (dit groupe de g), avec la multiplication

$$(i', i'')(j', j'') = (j', i''j'') ; i', j' \in I ; i'', j'' \in G$$

Nous noterons e'' l'élément neutre du groupe G .

On se donne ensuite une loi de semi-groupe à droite sur I , dite loi de h -semi groupe $i, j \rightarrow hij$. I , muni de cette structure, s'identifie lui aussi à un produit d'un groupe H par l'ensemble J des h -idempotents (i.e. idempotents du semi-groupe à droite I) avec la multiplication

$$(i, i')(j, j') = (i, hi'j') \quad i, j \in J ; i', j, j' \in H$$

(nous supposons en outre que la loi h est à translations à droite bijectives)

nous posons alors

$(i, i')(j, j') = (i, i'j'^{-1}) \quad i, j \in I ; i', j' \in H$ (le produit $i'j'^{-1}$ étant le produit de ces éléments pour la loi de groupe dans H) (autrement dit, si $x, y \in I$ δxy est défini par la condition $h \delta xy = x$)

3.4.2. Pour toute donnée des groupes G, H des ensembles I, J satisfaisant aux conditions précédentes, nous définissons une association a $\Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ par

$$a((i, i', i''), (j, j', j'')) = g((i, i', i''), (j, j', j'')) , \\ d((i, i', i''), (j, j', j''))$$

avec

$$\mathbf{3.4.3.} \quad g((i, i', i''), (j, j', j'')) = (j, j', i''j'')$$

$$\mathbf{3.4.4.} \quad d((i, i', i''), (j, j', j'')) = (i, i'j'^{-1}, i'') = (\delta((i, i')(j, j')), i'')$$

Pour tous $i, j \in J ; i', j' \in H ; i'', j'' \in G$.

On vérifie aisément qu'avec ces relations, a est une association cohérente bijective sur Ω . Nous dirons que a est l'association standard définie par le triple (G, H, J) .

3.4.5. Nous ne connaissons pas d'autres associations cohérentes bijectives que les associations standards, mais nous ignorons si elles sont toutes de ce type ou non. On a toutefois le résultat partiel suivant

3.4.6. PROPOSITION. — Soit g une structure de semi-groupe à gauche sur un ensemble Ω fini (donc à translations à gauche bijectives), I l'ensemble des idempotents du semi-groupe Ω . Dans ces conditions, il existe un groupe H , une structure de semi-groupe à droite sur I , de groupe H , telle que d , restreinte à I soit donnée par l'égalité

$$d((i, i', e''), (j, j', e'')) = (i, i'j'^{-1}, e'') \quad i, i' \in J ; j, j' \in H$$

3.4.7. DÉMONSTRATION. — Nous montrons d'abord que a , restreinte à I^2 , applique I^2 dans I et que d , sur I^2 est à translations à droites injectives (donc bijectives, puisque I est fini)

1°) Si i, j sont deux g -idempotents, dij est un g -idempotent car
 $g di gij dij = d gii j$ et comme i, j sont des g -idempotents
 on a $gij = i$ $g_{ii} = i$ donc $g dij di = dij$

2°) Si i, j, k sont trois éléments de I , la relation $dik = djk$
 implique $i = j$ en effet, dans $L(\Omega)$, les mots ikk et jkk sont tels
 que l'on ait

$$f(ikk) = g kk dkk dik = g kk dkk djk = f(jkk)$$

comme a est bijective, f est injective et on a $ikk = jkk$ dont $i = j$

3°) Si j, k sont deux idempotents on a donc d'après 1°, 2° : il
 existe $i \in I$, $dij = k$

La proposition 3.4.7 est alors conséquence du lemme

3.4.8. LEMME. — Soit a une association cohérente bijective sur un ensemble I telle que l'on ait $gij = j$ pour tous $i, j \in I$. Il existe alors une structure de semi-groupe à droite sur I , de groupe H telle que l'on ait

$$d(i, i')(j, j') = (i, i' j'^{-1}) \quad i, i' \in J; j, j' \in H \quad I = J \times H$$

La bijectivité de a entraîne que d est à translations à droite bijectives, comme on le voit immédiatement. Définissons alors hij comme l'unique élément de I tel que $d hij j = i$. Montrons d'abord que h est une loi associative.

Soient i, j, k trois éléments de I . On a successivement

$$d h_i h_i k h_i k = i$$

$$d h hij k k = hij$$

$$d dh hij k k = d hij j = i$$

3.4.9. $d dh hij k k d hj k k = i$. Or le premier membre de [3.4.9] s'écrit aussi $d h hij k hj k$ en vertu de l'axiome [CO'3] vérifié par d (puisque $gij = j$ [exemple (i)]). Comme les translations à droite par d sont bijectives, ceci entraîne

$$h i h j k = h hij k \quad h \text{ est une loi associative}$$

Supposons ensuite $hij = hi'j$. Alors, par définition $d hij j = i = d hi'j = i'$ donc h est à translations à droite injectives. I , pour h est donc un semi-groupe à droite. Il n'y a plus qu'à montrer que l'on peut redéfinir d à partir de h . Vérifions que si l'on pose

$h \delta_{ij} j = i$ on a $\delta_{ij} = d_{ij}$ ce qui achèvera la démonstration. Or, par définition

$$d_{ij} j = d_{ij} \quad \text{donc} \quad h d_{ij} j = i \quad \text{donc} \quad d_{ij} = \delta_{ij}$$

3.4.10. Remarque. On notera que les conditions $d_{ii} = i$ $h_{ii} = i$ sont équivalentes ; les d-idempotents et les h-idempotents coïncident.

3.5. Résultats partiels sur la détermination des associations cohérentes bijectives (suite).

3.5.1. Supposons, pour simplifier que $\Omega = \{(x, x') \mid x \in H \ x' \in G, H \text{ et } G \text{ étant des groupes finis et que l'on a } g(x, x') (y, y') = (y, x'y')\}$

Posons $d(x, x') (y, y') = \varphi(x, x', y, y')$, $\psi(x, x', y, y')$

On a déjà établi, puisque $d(x, e') (y, e') = (xy^{-1}, e')$

$$\varphi(x, e', u, e') = xy^{-1} \quad \psi(x, e', y, e') = e'$$

En interprétant les axiomes [CO2] et [CO3] on obtient d'abord que ψ ne dépend pas de x et que φ ne dépend pas de x' . En écrivant alors

$\psi(x', y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ on obtient les trois relations

$$(a) \quad \psi(x', z, y' z') \psi(y', z, z') = \psi(x' y', z, z') \text{ d'où on déduit}$$

$$(a_1) \quad \psi(e', y, y') = e'$$

$$(b) \quad \varphi(\varphi(x, z, y' z'), \varphi(y, z, z'), \psi(y', z, z')) = \varphi(x, y, y')$$

$$(c) \quad \psi(\psi(x', z, y' z'), \varphi(y, z, z') \psi(y', z, z')) = \psi(x', y, y')$$

On en déduit en particulier

$$(b_1) \quad \varphi(x, y, e') = xy^{-1}$$

Posons, provisoirement $\psi(x', z, y') = \psi_3(x', y')$. On a donc ((a))

$$\psi_3(x', y' z') \psi_3(y', z') = \psi_3(x' y', z') \text{ et } \psi_3(e', y') = e'$$

Utilisant (b) et (c) on obtient, si $z = e$

$$\Psi_e(\Psi_e(x', y'), \Psi_e(y', e')) = \Psi_e(x', y')$$

$$\psi_e(x', y') = \psi_e(x' y', e') (\psi_e y', e')^{-1} \text{ et en particulier}$$

$$\psi_e(\psi_e(x', e'), e') = \psi_e(x', e') \text{ donc si } \psi_e(x', e') = \tau x'$$

$\tau \tau x' = \tau x'$ si on admet $\tau x' = x'$ (il suffit pour cela que τ soit surjective) on en déduit d'abord $\psi_e(x', y') = x'$. En reportant dans (c) il vient

$$\varphi(\varphi(x', z, y') ; (y, z, e'), \psi(y', z, e')) = \varphi(x', y, y')$$

Si on fait $z' = e'$ donc $\psi_{yz}^{-1}(\psi_z(x', y'), \psi_z(y', e')) = \psi_y(x', y')$

D'où $\psi_y(x', y') = x'$ si $\psi_z x' e' = x'$ donc

$$\psi(x, x', y, y') = x'$$

Comme il est clair que $\varphi(x, y, y') = \varphi(x, y, y')$ implique $x = x_1$; posons

$\varphi_y(x, y') = \varphi(x, y, y')$. On a alors

$\varphi(\varphi_e(x, y'), \varphi_e(y, e'), y') = \varphi_y(x, y')$ donc $\varphi_y(\varphi_e(x, y'), y') = \varphi_y(x, y')$ d'où il vient

$$\varphi_e(x, y') = x$$

Si on pose $\varphi_y(e, y') = y^{-1}$

$\varphi(x, e, e') = \varphi(\varphi(x, z, z'), \varphi(e, z, z'), e')$ d'où $x = \varphi(x, z, z') z$

$$\varphi(x, z, z') = xz^{-1}$$

Les hypothèses $\varphi(z, x', e') = x'$ et $\varphi(e, x, y') = x^{-1}$ ont donc pour conséquence $d(x, x')(y, y') = (xy^{-1}, x')$ c'est-à-dire que a est standard

3.5.2. Remarquons pour terminer, ce qui est immédiat que pour tout $\alpha \in \Omega$, si a est cohérente bijective il existe $\beta = \alpha^n$ (puissance de α pour g) qui est un g -idempotent. Alors $d\beta\beta$ est un g -idempotent et un d -idempotent donc la loi $\gamma = d\beta\beta$ est associative.

3. Séries formelles rationnelles

Théorème de KLEENE.

Dans un magma libre avec association (cohérente bijective) standard ([§2, 3.4]) nous étudions les systèmes linéaires d'un côté, dont la résolution conduit à une double caractérisation des solutions :

1° - D'une part, comme séries formelles rationnelles, construites à partir des variables par les opérations de Ω , les opérations du module $A[[X]]$ et la quasi-inversion pour les lois associatives du modèle.

2° - Au moyen de représentations matricielles.

Nous n'avons donné des démonstrations que ce qui s'éloigne nettement de la démonstration classique [SCHÜTZENBERGER 1962].

1. Systèmes d'équations en séries formelles gauches.

1.1. Soient Ω, X , des ensembles finis, Λ le magma libre sur X , a une association cohérente bijective dans Ω . L'ensemble Γ des expressions gauches de Λ s'identifie au quotient de l'ensemble Σ de toutes les expressions par la relation d'équivalence

$\sigma \equiv \sigma'$ si et seulement si $f\sigma = f\sigma'$, f étant l'application d'association [§2, 1.3.4] de Σ sur Γ [§2, 1.3.5 prop.]

On peut munir Γ d'une structure de magma en posant $\bar{\alpha}\gamma\gamma' = f\alpha\gamma\gamma'$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. D'après le [§2, 1.3.7] cette définition est cohérente et Γ devient l'ensemble des expressions d'un magma dont l'ensemble d'opérations $\bar{\Omega} = \{\bar{\alpha}\}$, $\alpha \in \Omega$ est en correspondance bijective avec Ω . Nous n'utiliserons pas cette définition. Nous considérerons seulement les expressions de Σ , représentant les expressions gauches qui en sont les images par f , et nous écrirons

$$\alpha\beta\tau = \alpha\beta\ \alpha\beta\ \sigma\tau\ \text{pour tous } \alpha\ \beta \in \Omega \quad \sigma, \tau, \varphi \in \Sigma$$

1.2. De la même manière, nous noterons encore $\sum u_\sigma \sigma$, $\sigma \in \Sigma$ une série formelle qui représentera la série formelle gauche $\sum \bar{u}_\gamma \gamma$, où $\bar{u}_\gamma = \sum u_\sigma$, $f\sigma = \gamma$,

somme qui a un sens car σ et for sont de même longueur dans Σ et Ω est supposé fini ([1.1]).

Si u, v, w sont trois séries formelles, on a encore

1.2.1. $\alpha u \beta v w = g \alpha \beta d \alpha \beta u v w$ $\alpha, \beta \in \Omega$ d'après les définitions des deux membres ([§ 2, 2.2.7]).

1.3. Nous noterons ([2, 2.2.7])

1.3.1. $u_i = f_i(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n)$ un système d'équations en séries formelles, dont la solution se compose de séries formelles gauches, éventuellement représentées par des séries formelles quelconques de $A[[X]]$.

1.4. A partir de cet alinéa, a est une association standard ([§ 2, 3.4]) et Ω s'identifie au produit $J \times H \times G$. C'est l'élément neutre de H , e'' l'élément neutre de G . Si i est un h-idempotent quelconque

$a((i, e', e'') (i, e', e'')) = ((i, e', e''), (i, e', e''))$, ce qui signifie que les opérations α de cette forme, où i parcourt J sont des lois de compositions identifiant $\alpha \sigma \alpha \tau$ et $\alpha \alpha \sigma \tau$. Elles jouent un rôle essentiel dans ce qui suit. Nous les désignerons par le nom d'opérations fondamentales. L'ensemble des opérations fondamentales est en correspondance bijective avec J .

2. Séries formelles rationnelles.

2.1. Quasi inverses,

Soit u une série formelle, α une opération. On appelle quasi inverse de u pour α et on note u^α la série formelle définie par l'équation

$$2.1.1. \quad u^\alpha = u + \alpha u^\alpha u$$

u^α est donc la série formelle $u + \alpha u u + \alpha \alpha u u u + \dots + \alpha^n u^{n+1} + \dots$

2.1.2. Si $\alpha = (i, e', e'')$ est une opération fondamentale ([1.4]), nous notons u^i le quasi inverse de u pour cette loi

2.2. Définition des séries formelles rationnelles

2.2.1. Une série formelle u est *rationnelle* si elle appartient au plus petit des sous-ensembles K de $A[[X]]$ satisfaisant aux conditions suivantes

- (a) $x \in X \implies x \in K$
- (b) si $u \in K, v \in K, \lambda, \mu \in A \implies \lambda u + \mu v \in K$
- (c) si $u \in K, v \in K, \alpha \in \Omega \implies \alpha u v \in K$
- (d) $u \in K \implies u^i \in K$

On note R l'ensemble des séries formelles rationnelles

3. Systèmes d'équations linéaires à droite à coefficients rationnels : élimination.

3.1. Définition

Un système linéaire à droite à coefficients rationnels est un système de la forme (L) $u_i = r_i + \sum_{\alpha, j} S_{\alpha, j} u_j$ où $r_i, S_{\alpha, j}$ sont des séries formelles rationnelles ([2,2]) dites coefficients du système (L).

3.2. Etude de l'équation (E) $u = r + \sum(i, i', i'') S_{i, i', i''} u$
 $(i, i', i'') \in J \times H \times G = \Omega ; r, S_{i, i', i''} \in R.$

3.2.1. Nous cherchons d'abord à déterminer des séries formelles $v_{i, i', i''}(j, j', j'')$ parcourant Ω , telles que l'on ait

(i) $u = r + \sum(j, j', j'') v_{i, i', i''} r$. C'est la réduction de l'équation (E).

On doit avoir $u = r + \sum(i, i', i'') S_{i, i', i''} r + \sum(i, i', i'') S_{i, i', i''} \sum(j, j', j'') v_{i, i', i''} r$, donc encore ([1.2.1]).

$$u = r + \sum(i, i', i'') S_{i, i', i''} r + \sum(j, j', j'') (i, i' j'^{-1}, i'')$$

$$S_{i, i', i''} v_{i, i', i''} r$$

d'où en identifiant

$$(ii) \quad v_{k, k', k''} = S_{(k, k', k'')} + \sum (i, i' j'^{-1}, i'') S_{i, i', i''} v_{i, i', i''} \text{ avec } (j, j', i'' j'') = (K, K', K'')$$

ou encore

$$(iii) \quad v_{K, K', K''} = S_{k, k', k''} + \sum_{i, i', i''} (i, i' K'^{-1}, K'' j''^{-1})$$

$S_{i, i', K'' j''^{-1}} v_{K, K', i''}$ (i, i') parcourant $J \times H$ et $j'' \in G$.

Pour tous $(k, k', k'') \in \Omega$, $v_{k, k', k''}$ est donc solution d'un système linéaire droit à coefficients rationnels.

Ecrivons l'équation (iii) sous une autre forme

$$(iv) \quad v_{k, k', k''} = S_{k, k', k''} + \sum_{i, i'} (i, i' n'^{-1}, e'') S_{i, i', e''} v_{K, k', k''} + \sum_{i, i', i'' \neq h''} (i, i' K'^{-1}, K'' j''^{-1}) S_{i, i', K'' j''^{-1}} v_{K, K', i''}$$

Ceci conduit à l'étude d'une forme particulière de l'équation (E).

(v) $u = r + \sum_{(i, i')} (i, i', e'') s_{i, i', e''} u$. Si nous cherchons à la mettre sous la forme réduite

(vi) $u = r + \sum_{i, i', i''} v_{i, i', i''} r$, on voit qu'il y a deux cas distincts à envisager

$$(vii) \quad v_{i, i', e''} = S_{i, i', e''} + \sum (i, i' j'^{-1}, e'') s_{i, i', e''} v_{i, i', e''}$$

$$(viii) \quad v_{i, i', i''} = \sum_{i, i'} (i, i' j'^{-1}, e'') s_{i, i', e''} v_{i, i', i''}, \text{ ce qui prouve que } j'' \neq e''$$

$v_{i, i', i''} = 0$ si $j'' \neq e''$. Autrement dit, la mise sous forme réduite de l'équation (v) ne fait pas intervenir la troisième coordonnée des éléments de Ω . On peut donc l'omettre provisoirement et se ramener au cas particulier

3.2.2. (ix) $u = r + \sum_{(i, i')} (i, i') S_{i, i'} u$ $i, i' \in J \times H$ $r; S_{i, i'} \in R$ la formule réduite est

(x) $u = r + \sum_{i,i'} (j,j') v_{i,i'}$ et les $v_{i,i'}$ satisfont au système

(xi) $v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum_{i,i'} (i,i' j'^{-1}) S_{i,i'} v_{i,i'}$ qui est, en fait, une famille d'équations du type (ix), ceci conduit à poser

(xii) $v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum_{k,k'} (k,k') v_{i,i',k,k'} s_{i,i'}$, forme réduite de (xi), pour une donnée de couple (j, j') .

Il vient successivement $v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum (i,i' j'^{-1}) S_{i,i'} (S_{i,i'} + \sum_{k,k'} (k,k') v_{i,i',k,k'} s_{i,i'})$

$v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum_{i,i'} (i,i' j'^{-1}) S_{i,i'} S_{i,i'} + \sum_{i,i'} (k,k') i,i' j'^{-1} k'^{-1} S_{i,i'} v_{i,i',k,k'} S_{i,i'}$, donc

(xiii) $v_{i,i',k,k'} = S_{k,k',i'} + \sum_{i,i'} (i,i' j'^{-1} k'^{-1}) S_{i,i'} v_{i,i',k,k'}$.

Mais on a aussi, d'après l'équation (xi)

(xiv) $v_{k,k',i'} = S_{k,k',i'} + \sum_{i,i'} (i,i' j'^{-1} k'^{-1}) s_{i,i'} v_{k,k',i'}$

donc

(xv) $v_{i,i',k,k'} = v_{k,k',i'}$

$v_{i,i'}$ est donc solution du système linéaire à gauche

(xvi) $v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum_{K,K'} (k,k') v_{k,k',i'} S_{i,i'}$, ce que nous écrivons encore

core

(xvii) $v_{i,i'} = S_{i,i'} + (j,e') v_{i,i'} S_{i,i'} + \sum_{(K,K') \neq (i,e')} (k,k') v_{k,k',i'} S_{i,i'}$

Comme plus haut, nous sommes conduits à étudier une forme particulière de l'équation gauche semblable à (ix)

(ix)' $u = r + \sum_{(i,i')} u S_{i,i'}$, c'est-à-dire l'équation

3.2.3. (xviii) $u = r + \sum_i (j, e') u S_i$, $r, S_i \in R$

Nous l'écrivons, sous forme réduite

(xix) $u = r + \sum_{i,i'} (i,i') r v_{ii'}$, ce qui s'écrit aussi

$u = r + \sum_i (j, e') r S_i + \sum_i (j, e') \sum (i, i') r v_{ii'} S_i$. Or si \bar{a} est l'application inverse de a on a $\bar{a}((i,i')(j,j')) = ((j,j'i'), (i,i'))$ ce qui prouve que l'on a aussi

(xx) $u = r + \sum_i (j,e') r S_i + \sum_{i,i'} (i,j'i') r(j,e') v_{i,i'} S_i$ et par suite

(xxi) $v_{i,e'} = S_i + v_{i,e'} S_i$ donc $v_{i,e'} = S_i^{-1} [[2.1.2]$ et $v_{i,i'} = 0$.

Si $(i,i') \neq (j,e')$. On voit donc, à ce stade, que si r, S_i sont des séries formelles rationnelles l'équation (xviii) a pour solution

$u = r + \sum_i (j,e) r S_i^{-1}$, qui est une série formelle rationnelle ([déf.2.2.1 (b), (c), (d)]).

3.2.4. Revenons, maintenant, à l'étude des équations du système (xvii). En appliquant les résultats précédents on a $S_i = S_{i,i} S_i = 0$ si $j' \neq j$ donc $v_{i',e'} = 0$ si $j' \neq j$ et $r = S_{i,i}$ finalement

(xxii) $v_{i,i'} = S_{i,i'} + \sum_{(k,k') \neq (i,e')} (K,K') v_{K,k'i} S_{i,i'} + (j,e') S_{i,i'} S_{i,i}^{-1} + (j,e') \sum_{((K,k') \neq (i,e'))} (K,K') v_{K,K'i} S_{i,i'} S_{i,i}^{-1}$. Donc, en tenant compte du fait que $a(j,e')(K,K') = (K,K')(j,e')$ et en posant $t_{i,i'} = S_{i,i'} + (j,e') S_{i,i'} S_{i,i}^{-1}$ ($t_{i',i} \in R$).

(xxiii) $v_{i,i'} = t_{i,i'} + \sum_{(K,K') \neq (i,e')} (K,K') v_{K,K'i} t_{i,i'}$. En reportant cette valeur de $v_{i,i'}$ dans les autres équations du système (xvii), on obtient, pour $(K,K') \neq (j,j')$

$$v_{K,K'} = S_{K,K'} + \sum_{(\ell,\ell') \neq (i,i',K'-1)} (\ell,\ell') v_{\ell,\ell'K} S_{K,K'} + (j,j'K'^{-1})$$

$$(t_{i,i'} + \sum_{(m,m') \neq (i,\ell')} (m,m') v_{m,m'i} t_{i,i'}) S_{i,i'K'-1}$$

c'est-à-dire, après transformations

$$v_{K,K'} + S_{K,K'} + (j,j'k'^{-1}) t_{i,i'} S_{i,i'k'^{-1}} + \sum_{(\ell,\ell') \neq (i,i'k'^{-1})} (\ell,\ell') v_{\ell,\ell'K} (S_{K,K'} + (j,j'k'^{-1}) t_{i,i'} S_{i,i'k'^{-1}})$$

$$v_{\ell,\ell'K} (S_{K,K'} + (j,j'k'^{-1}) t_{i,i'} S_{i,i'k'^{-1}})$$

donc, en posant $\bar{S}_{K,K'} = S_{K,K'} + (j,j'K'^{-1}) t_{i,i'} S_{i,i',K'^{-1}}$

$$(xxiv) \quad v_{K,K'} = \bar{S}_{K,K'} + \sum_{\ell,\ell'} (\ell, \ell') v_{\ell,\ell',K'} \bar{S}_{K,K'}(\ell,\ell') \neq (j,e') \dots \\ \dots \bar{S}_{K,K'} \in R$$

Ceci prouve que l'élimination de l'inconnue $v_{i,i'}$ dans le système (xvii) ((xxiv)) ayant les mêmes propriétés. On peut donc itérer le procédé et on obtient finalement le résultat suivant

3.2.5. Si les coordonnées du système (xi) (puisque sa solution est celle du système (xvii)) sont rationnelles, sa solution est encore une série formelle rationnelle. Posant $v_{ii} = r_{ii} \in R$ on voit que le système (ix) a pour solution

(xxv) $u = r + \sum (j,j') r_{i,i'} r_{i,i'}$, ne dépendant que de r et de $S_{i,i'}$. De même la solution du système (v) peut s'écrire

$$(xxvi) \quad u = r + \sum_{(i,i')} (i,i',e'') r_{i,i',e''} r, \text{ les } r_{i,i',e''} \text{ étant rationnels.}$$

3.2.6. Revenons alors à l'équation (v) et écrivons

$$v_{K,u',u''} S_{K,k',K''} + \sum_{(i,i')} (j,j',e'') r_{i,i',e''} S_{K,K',K''} + \sum_{\ell,\ell',\ell'' \neq k''} \ell,\ell',k'' e''^{-1} \\ (s_{k',K',\ell''^{-1}}) + \sum_{(i,i')} (j,j'\ell'^{-1}, \ell'') r_{i,i',\ell''} S_{\ell,\ell',K',K''\ell''^{-1}} v_{K,K',\ell''}, \text{ ce} \\ \text{qui peut encore s'écrire}$$

(xxvii) $v_{K,K',K''} = \bar{S}_{K,K',K''} + \sum_{\ell,\ell',\ell'' \neq K''} (\ell,\ell',K''\ell''^{-1}) \tau(\ell,\ell',\ell'') v_{K,K',\ell''}$
où les séries $\bar{S}_{K,K',K''}$ et $\tau_{K,K',K''}$ sont rationnelles, sous les hypothèses faites. On voit alors aisément, par un calcul analogue, que si $j'' \neq k''$ $v_{K,K',j''}$ est solution d'une équation du type (iv), où n'intervient plus $v_{K,K',K''}$, mais seulement les inconnues $v_{K,K',\ell''}$, $\ell'' \in G$, $\ell'' \neq K''$. On est donc conduit, par éliminations successives à une équation du type ci-dessous

$$(xxviii) \quad v_{K,K',e''} = r_{K,K',e''} + \sum_{\ell,\ell'} (\ell,\ell',e'') t_{\ell,\ell',e''} v_{\ell,\ell',e''}$$

ce qui n'est pas autre chose qu'une équation du type (v), dont la solution est rationnelle, dès que $r_{K,K',e''}$ et $t_{\ell,\ell',e''}$ sont rationnels.

Résumant

3.2.7. LEMME. — La solution de l'équation (E) s'obtient à partir des coefficients $r; s_{i,i',i''}$ par un nombre fini d'opérations des types [2.2.1 (b), (c), (d)] et est donc rationnelle si ces coefficients sont eux-mêmes des séries formelles rationnelles.

3.3. Soit maintenant un système linéaire (à droite) quelconque (L). Appliquant le [lemme 3.2.7] à la dernière équation, on voit que l'élimination de l'inconnue u_n conduit à un nouveau système, dont les coordonnées sont encore rationnelles. Par conséquent

3.3.1. PROPOSITION. — Toute coordonnée de la solution d'un système linéaire à droite à coefficients rationnels est une série formelle rationnelle.

4. Représentations matricielles associées aux séries formelles rationnelles.

4.1. PROPOSITION. — Soit $u \in \mathbf{R}$, une série formelle rationnelle. Il existe une représentation matricielle gauche ρ_u ([§2, 2.3]) telle que l'on ait, pour tout $\sigma \in \Sigma$,

$$4.1.1. \quad u_\sigma = \rho_u^{\circ} \sigma_{1,n}$$

4.2. Démonstration de la [proposition 4.1]

Il s'agit de montrer que, si u est une série formelle rationnelle, on peut lui associer une représentation matricielle convenable. D'après la définition de \mathbf{R} ([2.2]) il suffit donc de construire

- 1°) ρ_x , pour tout $x \in X$
- 2°) si $u, v \in \mathbf{R}$; si ρ_u et ρ_v sont supposées construites; si $\lambda, \mu \in \mathbf{A}$ sont deux scalaires, trouver $\rho_{\lambda u + \mu v}$
- 3°) Si $u, v \in \mathbf{R}$; si ρ_u et ρ_v sont connues; $\alpha \in \Omega$, construire $\rho_{\alpha u v}$
- 4°) Enfin, si ρ_u existe, pour un $u \in \mathbf{R}$, si (i, e', e'') est une opération fondamentale, construire ρ_{u_i} , représentation associée au quasi inverse de u . Nous procéderons dans cet ordre, en tenant compte du fait que, d'après les définitions, $\rho_u \sigma$ est connue pour toute expression σ , dès que l'on connaît $\rho_u x, x \in X$.

4.2.1. Représentations matricielles associées aux variables.

Soit $x \in X$. On cherche pour $\sigma \in \Sigma$ une famille $\rho_x^\sigma = (\rho_x^\alpha \sigma) \alpha \in \Omega \cup \{0\}$, où chaque $\rho_x^\alpha \sigma$ est une matrice à $n = n(x)$ lignes et n colonnes. Cette famille doit être telle que $\rho_x^\sigma \sigma_{1,n} = 0$ si $\sigma \neq x$; $\rho_x^\sigma x_{1,n} = 1$. (1 étant l'élément unité de l'anneau A). Nous poserons $n = n(x) = 1$ $\rho_x^\sigma x = (1)$ $\rho_x^\sigma \sigma = (0)$, si $\sigma \neq x$. La vérification est triviale.

4.2.2. Représentation matricielle associée à une combinaison linéaire.

Soient $u = \sum_{\sigma} \rho_u^\sigma \sigma_{1,n}$ $v = \sum_{\tau} \rho_v^\tau \tau_{1,n}$, τ ; $n = n(u)$; $n' = n(v)$.

Posons $w = \lambda u + \mu v$ $\lambda, \mu \in A$. Nous cherchons ρ_w^α et $n'' = n(w)$ tels que $w = \sum_{\varphi} \rho_w^\alpha \varphi_{1,n''}$, avec $\rho_w^\alpha \varphi_{1,n''} = \lambda \rho_u^\alpha \varphi_{1,n} + \mu \rho_v^\alpha \varphi_{1,n'}$.

Nous prendrons $n'' = n + n' + 2$ et nous définirons en écrivant, pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in \Omega$, que $\rho_w^\alpha x$ est la matrice (d) ci-dessous

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & \lambda \rho_u^\alpha x_{1,1} & \dots & \lambda \rho_u^\alpha x_{1,n} & \rho_v^\alpha x_{1,1} & \dots & \rho_v^\alpha x_{1,n'} & \lambda \rho_u^\alpha x_{1,n} + \mu \rho_v^\alpha x_{1,n} \\
 0 & \rho_u^\alpha x_{1,1} & \dots & \rho_u^\alpha x_{1,n} & 0 & \dots & 0 & \rho_u^\alpha x_{1,n} \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 \text{(d)} & 0 & \rho_u^\alpha x_{n,1} & \dots & \rho_u^\alpha x_{n,n} & 0 & \dots & 0 & \rho_u^\alpha x_{n,n} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_v^\alpha x_{1,1} & \dots & \rho_v^\alpha x_{1,n'} & \mu \rho_v^\alpha x_{1,n'} \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_v^\alpha x_{n',1} & \dots & \rho_v^\alpha x_{n',n'} & \mu \rho_v^\alpha x_{n',n'} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{array}$$

On a, par construction, $\rho_w^\alpha x_{1,n''} = \lambda \rho_u^\alpha x_{1,n} + \mu \rho_v^\alpha x_{1,n'}$. On vérifie

4.2.3. Représentation matricielle d'un "produit",

Les notations étant celles de [4.2.2], soit $\alpha \in \Omega$ une opération quelconque. On cherche une représentation matricielle convenable associée à la série "produit de u et de v pour α " i.e, $w = uv$. Soit ρ_w^α cette représentation. On doit avoir si $\sigma = \alpha \tau \varphi$; $\tau, \varphi \in \Sigma$, $w_\sigma = u_\tau v_\varphi$ et si $\sigma \in \Sigma$

n'est pas de cette forme $w_\sigma = 0$. Autrement dit ρ_w doit être choisie telle que

$\rho_w^\circ \sigma_{1,n} = \rho_u^\circ \tau_{1,n} \rho_v^\circ \phi_{1,n}$, si $\sigma = \alpha \tau \phi$, $\rho_w^\circ \sigma_{1,n} = 0$ dans le cas contraire.

Nous ne ferons ici aucune hypothèse sur la structure de Ω pour les lois g et d autre que leur donnée et le fait que Ω est le cardinal fini. (en fait la démonstration peut s'étendre au cas où Ω est dénombrable, sous des hypothèses convenables (cf. [ROUBAUD 1965 a n° 1] et aussi [§ 7]). Ordonnons Ω de manière à ce que $\alpha = \alpha_1$, $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \dots, \alpha_p\}$. Posons

$\bar{g}_q = \alpha_q$, $g_q^1 = \bar{d}(\alpha, \alpha_q)$, $h_q^\circ = \bar{g}(\alpha, \alpha_q)$, puis, pour tout r , $1 \leq r \leq p$
 $g_q^r = \bar{d}(\alpha_1, g_q^{r-1})$, $h_q^r = \bar{g}(\alpha_1, g_q^r)$. Comme Ω est fini, les suites g_q^r, h_q^r peuvent être considérées comme périodiques à partir d'un rang commun m_q , et de période commune e_q . On a donc $g_q^{m_q + e_q} = g_q^{m_q}$ de même $h_q^{e_q + m_q} = h_q^{m_q}$ pour tout q , $1 \leq q \leq p$. Posons enfin $\bar{m} = \max(m_q)$, $\bar{e} = \text{ppcm}(e_q)$. $\bar{V} = \bar{m} + \bar{e}$ il est clair que pour tout entier $\lambda \geq 0$

$$g_q^{\bar{V} + \lambda} = g_q^{\bar{m} + \lambda} \quad \text{et} \quad h_q^{\bar{V} + \lambda} = h_q^{\bar{m} + \lambda}$$

Soit ensuite d un entier, $0 < d \leq p$, et construisons les matrices $\rho_w^d x$, $x \in X$. Ce seront des matrices carrées (n'', n'') , où n'' sera l'entier $n(p\bar{v} + 1)$; p, \bar{v} ayant les significations qui viennent d'être données.

Soient les entiers i , $1 \leq i \leq n$; j , $1 \leq j \leq n$; k , $0 \leq k \leq \bar{v} - 1$; ℓ , $0 \leq \ell \leq \bar{v} - 1$, q , $1 \leq q \leq p$; r , $0 \leq r \leq p$. Pour tout q , soit k_q l'entier ainsi défini : si $k < m_q$, $k_q = k$; $k \leq m_q$ soit k'_q le plus petit entier congru à $k - m_q$ modulo e_q et soit $k_q = m_q + k'_q$.

Ceci étant, la matrice $\rho_w^d x$ sera de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A_d x \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_d x \quad \text{où } A_d x \text{ est une matrice } \begin{pmatrix} n(p\bar{v} + 1) \\ n(p\bar{v} + 1) \end{pmatrix}$$

$C_d x$ est la matrice $\rho_v^d x$.

4.2.3.1. Dans $A_d x$ nous explicitons l'élément de la ligne d'indice $i(p\bar{v} + 1) + (q - 1)\bar{v} + k + 1$ et de la colonne d'indice $j(p\bar{v} + 1) + (r - 1)\bar{v} + \ell + 1$ comme suit

1° si $\ell \neq k + 1$, cet élément est 0, pour tout d

2° si $\ell = k + 1$ on distinguera deux cas : ou bien $d = h_r^k$, et l'élément correspondant est $\rho_u^r x_{ij}$, ou bien $d \neq h_r^k$ et l'élément de la matrice A_d correspondante est nul.

4.2.3.2. Toujours dans $A_d x$, un élément de la ligne d'indice $i(p\bar{v} + 1) + 1$ est nul s'il n'est pas dans la colonne d'indice $j(p\bar{v} + 1) + (r - 1)\bar{v} + 2$. Dans ce dernier cas, il est nul s'il n'y a pas un q tel que $d = h_q^1$, sinon c'est $\rho_u^q x_{ij}$.

4.2.3.3. Enfin, tous les éléments de la matrice $B_d x$ sont nuls à l'exception de ceux de sa première colonne. Dans cette colonne, un élément de la ligne $i(p\bar{v} + 1) + (q - 1)\bar{v} + k + 1$ est égal à $\rho_u^q x_{i,n}$ si $d = g_q^k$ sinon c'est 0. Enfin, les éléments de la ligne d'indice $i(p\bar{v} + 1) + 1$ sont les $\rho_u^d x_{i,n}$ respectivement si $d = \alpha_1$, sinon, encore, 0. ρ_w^d étant ainsi définie, pour tout d , il est clair, par construction, que l'on a $\rho_w^d x_{1,n} = 0$, pour tout x . Supposons ensuite que $\sigma = \alpha, xy; x, y \in Y$.

Ecrivons $\rho_n^d x$ comme la somme

$$\begin{pmatrix} A_d x & 0 \\ 0 & d x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_d x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\rho_w^d \sigma_{1,n} xy = \rho_w^1 x \rho_w^d y =$

$$\begin{pmatrix} A_1 x A_0 y & 0 \\ 0 & \rho_v^d \alpha_1 xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_1 x B_0 y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_1 x \rho_v^d y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seule la troisième matrice contribue à la formation de l'élément

$\rho_w^d \sigma_{1,n} = \rho_u^d x_{1,n} \rho_v^d y_{1,n}$, par construction. Si maintenant $\sigma = \alpha_q xy$, $q \neq 1$, il est clair aussi que l'on aura $\rho_w^d \alpha_q xy_{1,n} = 0$.

La vérification des conditions posées au début de cet alinéa, vraies donc pour les expressions de longueur ≤ 2 , se fait ensuite par récurrence sur la longueur des expressions. Ce sont, comme en [3] des calculs simples, mais fastidieux.

4.2.4. *Représentation matricielle associée au quasi-inverse d'une série formelle.* Avec les notations de [4.2.3], on pose cette fois $w = u^\alpha$ et soit encore ρ_w la représentation matricielle cherchée. Cette fois, d'après la définition de w , $w = u_{\sigma_1} \dots u_{\sigma_{n+1}}$ si σ est égal à $\alpha^m \sigma_1 \dots \sigma_{m+1}$, sinon $w = 0$ ce qui, traduit pour ρ_w donne l'égalité

$\rho_w^\circ \sigma_{1,n} = \rho_u^1 \sigma_{1,1,n} \dots \rho_u^1 \sigma_{m,1,n} \rho_u^\circ \sigma_{m+1,1,n}$ ou 0, selon le cas conservant toujours les notations de [4.2.3]; $g_q^r, h_q^r, m_q, e_q, \bar{e}, \bar{m}, \bar{V}$, étant définis comme précédemment et i, j, k, ℓ, r, k_q des entiers ayant les mêmes propriétés; la définition de $\rho_w^d x$ sera cette fois

$$n^w = n(w) = n(p\bar{v} + 1) \rho_w^d x \text{ est somme de deux matrices } A_x^d \text{ et } B_x^d$$

4.2.4.1. Dans $A^d x$ un élément de la ligne $i(p\bar{v} + 1) + (q - 1)\bar{v} + k + 1$ et de la colonne $j(p\bar{v} + 1) + (r - 1)\bar{v} + \ell + 1$ est 0 si $\ell \neq k + 1$, pour tout d . Si $\ell = k + 1$ $d = h_r^k$ c'est $\rho_u^r x_{ij}$, sinon c'est 0.

4.2.4.2. Dans $A^d x$ toujours, l'élément de la ligne $i(p\bar{v} + 1) + 1$ est nul sauf dans la colonne $j(p\bar{v} + 1) + (r - 1)\bar{v} + 2$ et pour $d = h'_q$, où il est égal à $\rho_u^d x_{ij}$

4.2.4.3. Les éléments de la matrice $B^d x$ sont nuls sauf dans la première colonne où seul est non nul l'élément de la ligne $i(p\bar{v} + 1) + 1$ qui vaut $\rho_u^\circ x_{1n}$.

Les vérifications sont omises.

5. Le théorème de Kleene.

5.1. Système d'équations linéaires strictes.

Un système d'équations linéaires à droite à coefficients rationnels est dit strict s'il satisfait à la condition suivante

5.1.1. Pour tous i, j, α les coefficients $r_i, s_{\alpha,j}$ sont des monômes.

5.2. **Théorème de Kleene.** — Soit $u \in A[[X]]$ une série formelle : les trois conditions suivantes sont équivalentes

(i) $u \in R$; i.e u est rationnelle

(ii) u est la première coordonnée de la solution d'un système linéaire à droite strict

(iii) il existe une représentation matricielle ρ_u telle que

$$u_\sigma = \rho_u^\circ \sigma_{1,n}$$

5.3. Démonstration. — Nous avons établi aux numéros [3] et [4] les deux implications (ii) \Rightarrow (i) et (i) \Rightarrow (iii) il reste à montrer que (iii) \Rightarrow (ii). Supposons donc que $u = \sum \rho_u^\circ \sigma_{1,n}$ et montrons que u est solution d'un système linéaire à droite strict.

$$\text{Posons} \quad u_i = \sum_x \rho_u^\circ x_{i,n} x + \sum_{\alpha,j} \alpha \sum_x \rho_u^\alpha x_{i,j} x u_j$$

Il est clair que l'on a $u_i^{(0)} = \sum_x \rho_u^\circ x_{i,n} x$ donc $u_i^{(0)} = \sum_x \rho_u^\circ x_{i,n} x$ ce qui prouve que u_i coïncide avec u à l'ordre 1. D'autre part, $u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \sum_{\alpha,j} \alpha \sum_x \rho_u^\alpha x_{ij} u_j^{(0)} = u_i^{(0)} + \sum_{\alpha,j} \alpha \sum_x \rho_u^\alpha x_{ij} x \sum_y \rho_u^\circ y_{j,n} y$ donc

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \sum_{\alpha,j} \sum_{x,y} \rho_u^\alpha x_{ij} \rho_u^\circ y_{jn} \alpha xy = u_i^{(0)} + \sum_\alpha \rho_u^\circ \alpha xy_{i,n}$$

ce qui prouve la coïncidence de n et u_i jusqu'à l'ordre 2. La démonstration s'achève par récurrence.

6. Exemple.

Comme illustration de ce qui précède, nous traiterons, sur un exemple très simple un problème qui est à la base de la démonstration [théorème 5.2].

Soit $\Omega = \{\alpha, e\}$ avec l'association $a: d(\alpha, \beta) = \alpha, g(\alpha, \beta)$ étant la loi de groupe à deux éléments avec e élément neutre. C'est une association cohérente bijective.

Soit $X = \{x, y, z, t\}$ $A = \mathbf{Z}$ et posons

$u = x + \alpha y x \quad v = z + \alpha t v$. Nous cherchons à obtenir $w = \alpha uv$ comme solution d'un système linéaire strict ([5.1])

$$\text{on a} \quad u^{(0)} = x \quad u^{(1)} = x + \alpha y x \quad u^{(2)} = x + \alpha y x + \alpha y \alpha y x$$

$$v^{(0)} = z \quad v^{(1)} = z + \alpha t z \quad v^{(2)} = z + \alpha t z + \alpha t \alpha t z$$

Si α était une loi associative, il suffirait de poser $\bar{w} = \alpha x u + \alpha y \bar{w}$ et on aurait $\bar{w}^{(0)} = 0$ $\bar{w}^{(1)} = \alpha x z = w^{(0)}$ $\bar{w}^{(2)} = \alpha x v^{(1)} + \alpha y \alpha x z = \alpha x z + \alpha x \alpha z + \alpha y \alpha x z$ et comme, dans ce cas $\alpha y x z$ et $\alpha y \alpha x z$ sont égaux $\bar{w}^{(2)}$ et $w^{(2)}$ coïncideraient jusqu'à l'ordre 2 et on prouverait aisément $\bar{w} = w$. Or, pour l'association a considérée sur Ω on a $a(e, \alpha) = (\alpha, \alpha)$ donc $\alpha y x z$ et égal à $e y \alpha x z$. Ceci nous conduit à poser

$$\bar{w} = \alpha x v + e y \bar{w}$$

$$\bar{\bar{w}} = \alpha x v + e y \bar{w}$$

\bar{w} étant donc première coordonnée d'un système linéaire strict à 3 équations

$$\bar{w} = \alpha x v + e y (\alpha x v + e y w) = \alpha x v + e y \alpha x v + e y e y \bar{w}$$

si l'on veut $\bar{w} = w$ il faut que $u v$ soit aussi solution de cette équation or $u v = \alpha(x + \alpha y x + \alpha y \alpha y u) v$ est vraie car on a bien

$$u = x + \alpha y x + \alpha y \alpha y u .$$

4. SÉRIES FORMELLES ALGÈBRIQUES.

THÉORÈME de R. JUNGEN - SCHÜTZENBERGER.

Ce paragraphe définit et étudie les séries formelles algébriques dans les magmas avec association.

Outre les propriétés de clôture élémentaires, on étudie le produit hadamarien de deux séries algébriques et on démontre une généralisation d'un théorème dû à M. P. Schützenberger [SCHÜTZENBERGER 1962].

1. Systèmes d'équations algébriques.

1.1. Définition.

Un système d'équations en séries formelles algébriques dans le magma avec association $\Lambda(X)$ est un système \mathcal{S} [2,2,8 au § 2] où pour tout i la série formelle f_i est un polynôme Π_i (§ 2, 2.1.1). Nous écrivons, conformément à nos conventions

1.1.1. $u_i = \Pi_i(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) \Pi_i$ polynôme de $A[XU Y]$. Si μ_i est un monôme de Π_i , les expressions de \sum_X figurant dans μ_i sont les coefficients du système. On a immédiatement

1.1.2. LEMME. — *Les coordonnées de la solution d'un système algébrique à coefficients algébriques (i.e. obtenu en substituant des séries formelles algébriques aux coefficients d'un système algébrique) sont encore algébriques.*

1.2. Proposition.

- 1° si u et v sont algébriques, $u + v$ est algébrique
- 2° si u et v sont algébriques, αuv est algébrique ; $\alpha \in \Omega$
- 3° si u est algébrique $\Lambda \in A$ Λu est algébrique
- 4° si u est algébrique $\alpha \in \Omega$ u^α est algébrique.

La démonstration est immédiate à partir des définitions.

1.2.1. Il est clair que tout système linéaire à droite strict ([§ 3, n° 5.1]) est un système algébrique. Donc, les séries formelles rationnelles sont des séries algébriques, d'après le théorème de Kleene ([§ 3 théorème 4.1]).

1.3. Séries formelles linéaires.

Les séries formelles linéaires sont solution des systèmes d'équations algébriques satisfaisant à la condition suivante

1.3.1. Dans tout monôme de Π_1 , figure une seule inconnue, i.e. variable de Y .

2. Produit hadamarien de séries formelles.

2.1. Définition.

Soient $u = \sum u_\sigma \sigma$, $\sigma \in \Sigma$; $v = \sum v_\tau \tau$, $\tau \in \Sigma$ deux séries formelles. On appelle produit hadamarien de u par v et on note $u \circ v = w$ le morphisme $\sum w_\phi \phi$, $\phi \in \Sigma$ où $w_\phi = \sum u_\sigma v_\tau$.

2.2. Théorème de R. Jungen-Schützenberger.

2.2.1. Si $u = \sum u_\sigma \sigma$, $\sigma \in \Sigma$ est algébrique et $v = \sum v_\tau \tau$, $\tau \in \Sigma$ est une série formelle rationnelle ([§ 3]), le produit hadamarien $u \circ v$ est algébrique. En outre si u est rationnelle $u \circ v$ est rationnelle.

2.2.2. DÉMONSTRATION. — Soit m un entier ≥ 1 et $A^m[[X \cup Y]]$ le produit de m copies du magma des séries formelles en les variables de la somme disjointe $X \cup Y$, où Y est un ensemble fini à m éléments $\{y_1, \dots, y_m\} = Y$.

Pour tout m -uple $(u) = (u_1, \dots, u_m)$ de séries de $A[[X \cup Y]]$ i.e. $u \in A^m[[X \cup Y]]$ soit f_u le morphisme de magmas défini par $f_u x = x$, $x \in X$ $f_u g_i = u_i$ de $\sum_{X \cup Y} \rightarrow A[[X \cup Y]]$. On l'étend à $A^m[[X \cup Y]]$ en posant $f_u r = \sum_{\sigma} r_\sigma f_u \sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Il est clair en outre que si $r, s, t \in A[[X \cup Y]]$ $\alpha, \beta \in \Omega$ $f_u \alpha r \beta sr = f_u \alpha \beta d \alpha \beta rst$.

Soit $K_\Omega[[X]]$ le magma des $p+1$ -uples de matrices ($\text{card } \Omega = p$) à coefficients dans $A[[X]]$. Toute application $\mu: K \rightarrow K_\Omega[[X]]$ se prolonge en un morphisme de magmas $A^m[[X]] \rightarrow K_\Omega^m[[X]]$ de manière évidente.

Si $u \in A^m[[X]]$ définissons $f_{\mu u} : A^m[[X \cup Y]] \rightarrow K^m_{\Omega}[[X]]$ en posant $f_{\mu u} x = \mu x$ si $x \in X$ et $f_{\mu u} y_i = \mu u_i$ si $y_i \in Y$.

Il est clair que si $\sigma \in \Sigma_{X \cup Y}$ on a $\mu f_u \sigma = f_{\mu u} \sigma$ donc si v est un élément quelconque de $A^m[[X \cup Y]]$ on a aussi, par prolongement

$\mu f_u v = f_{\mu u} v$. Autrement dit, on a la commutativité du diagramme (δ) ci-dessous

$$(\delta) \quad \begin{array}{ccc} A^m[[X]] & \longrightarrow & K^m_{\Omega}[[X]] \\ \uparrow f_u & \nearrow f_{\mu u} & \\ A^m[[X \cup Y]] & & \end{array}$$

Soient alors $Z = \{z_{j,i,i'}^q\}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i, i' \leq n$ ($\text{card } X = n$) $0 \leq q \leq p$ $m n^2 (p+1)$ nouvelles variables et définissons $v : A[[X \cup Y]] \rightarrow K^m_{\Omega}[[X \cup Y]]$ en prolongeant les données $v x = \mu x$ $(v y_j)^q = (z_{j,i,i'}^q)$ (i, i' variant de 1 à n).

Définissons ensuite $f_{v u} : A[[X \cup Z]]$ dans $A[[X]]$ à partir de

$$f_{v u} x = x \quad x \in X \quad f_{v u} z_{j,i,i'}^q = (v u_j^q)^{q'} \quad z_{j,i,i'}^q \in Z$$

$f_{v u}$ s'étend aisément en un homomorphisme $K^m_{\Omega}[[X \cup Y]] \rightarrow K^m_{\Omega}[[X]]$ en posant pour $\mathfrak{M} \in K^m_{\Omega}[[X \cup Z]]$ $f_{v u}^{q'} \mathfrak{M}^q = ((f_{v u}^{q'} \mathfrak{M}^q)_{i,i'})$

Si $\sigma \in \Sigma_{X \cup Y}$ on a, il est aisé de le vérifier à partir des définitions

$$f_{v u} \sigma = f_{v u} v \sigma \quad \text{et ceci demeure pour toute donnée } v \in A^m[[X \cup Y]]$$

$f_{\mu v} v = f_{v u} v v$. Soit alors \bar{v} la solution du système d'équations défini par v . On a évidemment, d'après les définitions données

$$\mu \bar{v} = \mu f_{\bar{v}} v \quad \text{car } \bar{v} = f_{\bar{v}} v \quad \text{donc aussi}$$

$\mu \bar{v} = f_{\mu \bar{v}} v$, comme on l'a vu. Il est clair que μ et v coïncident sur $A^m[[X]]$ donc

$$\mu \bar{v} = v \bar{v} = f_{\mu \bar{v}} v = f_{v \bar{v}} v v$$

Ceci étant, considérons les $m n^2 (p+1)$ éléments $w_{j,i,i',q} = (v v_j^q)_{i,i'}$ de $A[[X \cup Z]]$. Ils constituent un système d'équations en les séries formelles de $X \cup Z$ satisfaisant aux conditions habituelles si v y satisfait.

Il est clair en outre que si \bar{w} est la solution de ce système, on a

$$\bar{w}_{j,i,i',q} = (\mu \bar{v}_j^q)_{i,i'}$$

Si v définit un système algébrique tous les éléments des matrices $v v_j^q$ sont des Ω -polynômes donc w est un système algébrique et les $(\mu \bar{v}_j^q)_{i,i'}$ sont donc des séries formelles algébriques.

Posons alors si ρ est la représentation matricielle associée à v , série formelle rationnelle $\mu x_{i,i}^q = \rho^q x_{i,i}, x$

Il vient $u \circ v = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \rho^{\circ} \sigma_{1,n} \sigma, \sigma \in \sum_X$ donc

$u \circ v = \sum_{\sigma} u_{\sigma} u^{\circ} \sigma_{1,n} = \mu^{\circ} u_{1,n}$. D'où le résultat, u s'identifiant à \bar{v} , avec les notations ci-dessus.

La démonstration est donc achevée, sauf la vérification de la dernière assertion, que nous laissons au lecteur et qui se fait aisément, en employant les méthodes du [§ 3].

5. GRAMMAIRES de CONSTITUANTS dans les MAGMAS LIBRES.

Trois voies s'offrent pour généraliser aux magmas les définitions usuelles de grammaires de constituants et langages. Dans la première, on ne fait aucune hypothèse sur les opérations de Ω et on calque étroitement le modèle classique. La difficulté essentielle vient alors des grammaires linéaires d'un côté qui ne sont stables par aucune des opérations usuelles et qui ne sont pas susceptibles de caractérisation du type "Kleene".

Dans une deuxième approche, on récupère "autant d'associativité que possible" par une association cohérente bijective sur Ω et l'on obtient une symétrie à peu près parfaite avec les résultats classiques. Mais, ce faisant, on impose de sérieuses contraintes aux opérations.

Une troisième définition, où intervient la notion de productions avec récaténation (ou transformation), fournit un outil plus souple qui semble-t-il permettra de combiner les avantages des deux premiers modes d'approche.

Cette approche sera étudiée ailleurs ([ROUBAUD 1967]).

1. Grammaires de constituants dans les magmas libres.

1.1. Définitions.

Soit Ω un ensemble, V_T un ensemble fini. Notons Λ_T le magma libre de variables V_T et d'opérations Ω . Une grammaire de constituants sur le magma Λ est un quadruple $G = (V, V_T, S, \mathcal{R})$; $V_T \subset V$, vocabulaire V_T étant le vocabulaire terminal et son complémentaire non vide, le vocabulaire non terminal. Les expressions terminales sont les expressions Σ_T du magma Λ_T . Une expression du magma Λ sur V est dite non-terminale. L'ensemble des expressions non-terminales est noté Σ , Σ_N note l'ensemble des expressions du magma libre sur V_N . S est un élément distingué de V_N , dit symbole initial. Nous considérerons toujours V_N comme ensemble pointé en S . \mathcal{R} est un ensemble fini de couples (σ_N, σ) d'expressions de Λ , σ_N étant un élément de Σ_N . Ce sont les règles de production de la grammaire.

1.2. Types de grammaires.

Nous distinguerons, comme d'habitude, trois types principaux

1.2.1. $G = (V, V_T, S, \mathcal{R})$ est de type 1 si l'axiome (α_1) est vérifié (α_1) pour toute règle de production de G , définie par le couple (σ_N, σ) on a $|\sigma_N| \leq |\sigma|$ ($|\sigma|$ étant la longueur du mot σ de $L(V \cup \Omega)$).

1.2.2. Une grammaire de type 2 satisfait à l'axiome $\alpha_2)$ (α_2) pour toute règle $\rho = (\sigma_N, \sigma) \in \mathcal{R}$ on est dans l'un des deux cas suivants

$$1^\circ \quad \sigma_N = \alpha \sigma^1_N \beta \ x_N \ \sigma^2_N ; \ \sigma = \alpha \sigma^1_N \beta \ \tau \ \sigma^2_N \quad \alpha, \beta \in \Omega ; \ \sigma^1_N, \dots \\ \dots \ \sigma^2_N \in \Sigma_N ; \ x_N \in V_N ; \ \tau \in \Sigma$$

$$2^\circ \quad \sigma_N = \alpha \beta \ \sigma^1_N \ x_N \ \sigma^2_N ; \ \sigma = \alpha \beta \ \sigma^1_N \ \tau \ \sigma^2_N$$

1.2.3. Une grammaire CF est une grammaire de type 2 où l'on a

$$\sigma^1_N = \sigma^2_N = \emptyset$$

1.2.4. Remarque. — Il est clair qu'une grammaire de type 2 est aussi de type 1.

1.3. Dérivations.

1.3.1. Dérivations directes.

Si τ, φ sont des expressions de Σ , on dira que φ dérive directement de τ selon la grammaire G par la règle de production $\rho = (\sigma_N, \sigma)$, s'il existe deux expressions σ_1, σ_2 de Σ et deux opérations α, β de Ω telles que

$$\text{ou bien } \tau = \alpha \sigma_1 \beta \ \sigma_N \ \sigma_2 ; \ \varphi = \alpha \sigma_1 \beta \ \sigma \ \sigma_2$$

$$\text{ou bien } \tau = \alpha \beta \ \sigma_1 \ \sigma_N \ \sigma_2 ; \ \varphi = \alpha \beta \ \sigma_1 \ \sigma \ \sigma_2$$

on écrira $\tau \xrightarrow{\rho} \varphi$ ou $\tau \xrightarrow{G} \varphi$ ou même $\tau \longrightarrow \varphi$, si possible.

1.3.2. Dérivations : La relation de dérivation selon G est la relation réflexive et transitive dans Σ déduite de la relation de dérivation directe on la notera $\tau \xrightarrow{G} \varphi$, par exemple. Il est clair que $\tau_2 \xrightarrow{G} \varphi_1$ et

$\tau_2 \xrightarrow{G} \varphi_2$ impliquent, si $\alpha \in \Omega$ $\alpha \tau_1, \tau_2 \xrightarrow{G} \alpha \varphi_1, \varphi_2$.

1.4. Langages.

1.4.1. Un langage sur l'ensemble X , Ω étant donné est un ensemble d'expressions du magma Λ_X , donc une partie de Σ_X . Ses éléments sont les phrases du langage.

1.4.2. Langage engendré par une grammaire G . C'est la partie \mathcal{L}_G de Σ_T , ainsi définie $\sigma \in \mathcal{L}_G$ si et seulement si $S \xrightarrow{G} \sigma$.

1.4.3. Une partie \mathcal{L} de Σ_T est un langage de type 1 (resp. de type 2 CF) s'il existe une grammaire G de type 1 (resp. type 2, CF) telle que \mathcal{L} s'identifie à \mathcal{L}_G .

1.5. Grammaires équivalentes ; morphismes de grammaires.

1.5.1. Deux grammaires sont équivalentes si elles engendrent le même langage.

1.5.2. Soient G, G' deux grammaires $G = (V, V_T, S, \mathcal{R})$; $G' = (V', V'_T, S', \mathcal{R}')$ un morphisme φ de Ω -magmas $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ sera un morphisme de grammaires si

1° φ restreint à Σ_T est l'identité

2° $\varphi S = S'$ (c'est donc sur V_N un morphisme d'ensembles pointés)

3° Pour toute règle (σ_N, σ) de G , ou bien $(\varphi(\sigma_N), \varphi(\sigma))$ est une règle de G' , ou bien $\varphi(\sigma_N) = \varphi(\sigma)$

Les morphismes de grammaires se composent et définissent une catégorie $\mathcal{G}(\Omega; V_T)$.

On notera que si φ est un morphisme $G \rightarrow G'$, on a $\mathcal{L}_G \subset \mathcal{L}_{G'}$.

(On se reportera utilement à la thèse déjà citée de K. Friant pour les démonstrations qui se transposent aisément dans ce cadre).

1.6. Réduction des grammaires de type 1.

Les résultats de [FRIANT § 3 et 4], avec les modifications nécessaires, se transposent. Ainsi

1.6.1. Une grammaire est syntaxique si tout second membre d'une règle de production σ appartient soit à Σ_T soit à Σ_N . On distingue alors des règles terminales et des règles non terminales.

1.6.2. Une règle de production $\rho = (\sigma_N, \sigma)$ est d'ordre n , si dans σ figurent n symboles de V . Une grammaire est d'ordre n si toutes ses règles sont d'ordre au plus n .

1.6.3. Une grammaire normale est une grammaire syntaxique d'ordre 2 où il n'y a pas de règles non terminales de la forme (x_N, y_N) , $x_N, y_N \in V_N$.

1.6.4. Une grammaire préserve la longueur si pour toute règle (σ_N, σ) où $\sigma_N \neq S$, σ ne contient pas le symbole initial et $|\sigma_N| = |\sigma|$.
Enfin,

1.6.5. Une grammaire est linéaire bornée si elle est d'ordre 2, préserve la longueur et si pour toute règle $(S, \alpha x_N y_N)$ on a $x_N = S$, $y_N \neq S$, avec ces définitions on a les deux lemmes suivants.

1.6.6. LEMME. — Toute grammaire de type 1 est équivalente à une grammaire normale de type 1.

1.6.7. LEMME. — Toute grammaire de type 1 est équivalente à une grammaire linéaire bornée de type 1.

On démontre enfin

1.6.8. PROPOSITION. — L'ensemble des langages de type 1 coïncide avec l'ensemble des langages de type 2.

1.7. Langages CS et CF. Propriétés élémentaires de clôture.

1.7.1. DÉFINITION. — On appelle langages CS les langages définis par les grammaires de type 1 (ou de type 2 d'après la [proposition 1.6.8]). On démontre aisément.

1.7.2. PROPOSITION. — La classe des langages CS (resp CF) est stable par l'opération de réunion.

1.7.3. PROPOSITION. — La classe des langages CS (resp CF) est stable par toute opération de Ω , i.e. si \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont deux langages CS (resp CF) la partie $\alpha \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 = \{\sigma \in \Sigma_T \mid \sigma = \alpha \sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \in \mathcal{L}_1, \sigma_2 \in \mathcal{L}_2\}$ est encore un langage CS (resp CF).

1.7.4. Nous n'avons pas de résultat concernant les opérations de prolongement et par suite d'intersection et de quotient dans ces classes de langage mais il est à présumer que les démonstrations de Friant [FRIANT 1966 § 7] demeurent,

1.8. Langages CF et systèmes d'équations .

On peut, comme dans le cas classique ([§ 0, n° 4]) associer à toute partie L de $\Lambda(X)$ une série formelle, dite caractéristique dans $\mathbb{Z}[[X]]$, u_L définie par $u_{L,\sigma} = 1$ si $\sigma \in L$ $u_{L,\sigma} = 0$ dans le cas contraire. Ces coefficients sont évidemment positifs. Réciproquement toute série u , à coefficients positifs $u = \sum_{\sigma} u_{\sigma} \sigma$, $\sigma \in \Sigma$ définit une partie de Σ , dite support de u , notée $\text{supp}(u)$, en posant $\sigma \in \text{Supp}(u) \Leftrightarrow u_{\sigma} \neq 0$. Les opérations usuelles sur les séries s'interprètent de manière évidente comme opérations de clôture sur les supports et l'on a encore

1.8.1. PROPOSITION. — *L'ensemble des langages CF dans Σ_T s'identifie à l'ensemble des solutions des systèmes algébriques à coefficients positifs ([§ 4]) dans $\mathbb{Z}[[V_T]]$.*

En particulier, ceci implique que la classe des langages CF est stable par quasi inversion.

1.8.2. On peut encore définir les grammaires régulières [§ 0 n° 8] et les grammaires linéaires. Cependant, la classe des langages réguliers n'a pratiquement aucune des propriétés classiques du cas associatif ce qui ôte, en grande partie, de l'intérêt à cette notion.

2. Grammaires dans les magmas avec association.

2.1. Données.

On se donne cette fois un magma avec association cohérente bijective standard a ([§ 3]).

Toutes les définitions et résultats précédents demeurent dans ce cadre. En outre

2.2. Grammaires régulières et linéaires .

2.2.1. Une grammaire linéaire est une grammaire CF où, pour toute production $\rho = (\sigma_N, \sigma)$ l'expression $\sigma \in \Sigma$ ne "contient" qu'un symbole non

terminal x_N . Compte tenu de la relation d'association dans Σ , toute expression σ figurant au second membre d'une règle de production est de la forme $\alpha \beta \sigma^1_T x_N \sigma^2_T$; $\alpha, \beta \in \Omega$; $\sigma^1_T, \sigma^2_T \in \Sigma_T$; $x_N \in V_N$.

2.2.2. Une grammaire régulière (ou linéaire d'un côté) est une grammaire linéaire où pour toute production on a $\sigma^2_T = \emptyset$ ou bien, pour toute production $\sigma^1_T = \emptyset$ (avec les notations de [2.2.1]).

2.2.3. Dans la correspondance établie en [1.8] entre langages et séries formelles et qui est encore valable dans ce cadre, les langages réguliers correspondent aux systèmes linéaires (à droite). On obtient donc (|§ 3 et 4|).

2.2.4. PROPOSITION. — *La classe des langages réguliers est stable par réunion, par les opérations de α , par quasi-inversion et par intersection. De plus l'intersection d'un langage CF et d'un langage régulier est un langage CF.*

2.2.5. D'après les résultats du [§ 3] les langages linéaires à droite et à gauche coïncident, si a est une association standard.

6. AUTOMATES FINIS.

Les parties régulières, les états, les automates finis, déterministes ou non, peuvent être définis naturellement dans les magmas avec association. Nous donnons succinctement ces développements ne démontrant que ce qui n'est pas absolument routinier; ils conduisent à diverses définitions équivalentes d'une famille de parties de l'ensemble des expressions, proche de la forme traditionnelle du théorème de Kleene [§3].

1. Relations d'état.

1.1. Soit Σ l'ensemble des expressions du magma libre de variables X et d'opérations Ω . Soit L une relation d'équivalence dans Σ , a une association cohérente bijective sur Ω .

1.1.1. DÉFINITION. — On appelle α -relation d'état associée à L , pour $\alpha \in \Omega$ la relation d'équivalence E_α ainsi définie

$$\sigma E_\alpha \tau \text{ si et seulement si } \alpha \sigma \varphi L \alpha \tau \varphi \text{ pour tout } \varphi \in \Sigma \\ (\sigma, \tau \in \Sigma)$$

1.1.2. On voit immédiatement que la relation $\sigma E_\alpha \tau$ implique la relation $\alpha \beta \sigma \varphi E_{\alpha \beta} \alpha \beta \tau \varphi$, pour toute expression φ de Σ et tout $\beta \in \Omega$. Nous dirons que la relation E_α est compatible à droite pour α dans le magma avec association \wedge . Une famille $\varepsilon = (E_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ de relations d'équivalences sera dite compatible à droite si, pour tout α , E_α est compatible à droite pour α au sens précédent. Soit ε une famille compatible à droite et soit E la relation $E = \bigcap_{\alpha \in \Omega} E_\alpha$. On a alors

$$\sigma E \tau \Rightarrow \alpha \sigma \varphi E \alpha \tau \varphi, \text{ pour tout } \varphi \in \Sigma$$

En effet soit γ, δ le couple d'opérations de Ω tel que $a(\gamma, \delta) = (\beta, \alpha)$ β étant une opération quelconque. On a $\sigma E \tau \Rightarrow \sigma E_\gamma \tau \Rightarrow$

$$d\gamma \delta \sigma \varphi E_{\gamma \delta} d\gamma \delta \tau \varphi = \alpha \sigma \varphi E_\beta \alpha \tau \varphi \text{ ce qui prouve notre assertion.}$$

Nous dirons que E est Ω -compatible à droite ou simplement compatible à droite.

1.1.3. PROPOSITION. — Pour que les relations d'équivalence E_α soient finies (E_α est la relation d'état associée à L pour α) il faut et il suffit qu'il existe des relations d'équivalence P_α finies, plus fines que L et α -compatibles à droite dans le magma Λ . On sait alors que L est représentable.

La condition est suffisante : $\sigma P_\alpha \tau \Rightarrow d \alpha \beta \sigma \varphi P_{\sigma \alpha \beta} d \alpha \beta \tau \varphi \forall \varphi \forall \beta$
 $\Rightarrow d \alpha \beta \sigma \varphi L d \alpha \beta \tau \varphi \forall \varphi$ donc $P_\alpha \Rightarrow E_{d \alpha \beta}$

La condition est nécessaire. Soit ε une famille compatible à droite de relations E_α d'état associées à L et finies et posons $P_\alpha = L \bigcap_{\beta} E_{d \alpha \beta}$, où β parcourt Ω . Il est clair alors que P est finie, plus fine que L . En outre $\sigma P_\alpha \tau \Rightarrow \sigma E_{d \alpha \sigma \beta \gamma} \tau \Rightarrow d d \alpha \sigma \beta \gamma d \beta \gamma \sigma \varphi E_{\sigma d \alpha \sigma \beta \gamma} d \beta \gamma$
 $d d \alpha \sigma \beta \gamma d \beta \gamma \tau \varphi = d \alpha \beta \sigma \varphi E_{d \sigma \alpha \beta \gamma} d \alpha \beta \tau \varphi, \gamma \in \Omega$ d'autre part
 $\sigma P_\alpha \tau \Rightarrow \sigma E_{d \alpha \beta} \tau \Rightarrow d \alpha \beta \sigma \varphi L d \alpha \beta \tau \varphi$ donc
 $\sigma P_\alpha \tau \Rightarrow d \alpha \beta \sigma \varphi (L \bigcap_{\gamma} E_{d \sigma \alpha \beta \gamma}) d \alpha \beta \tau \varphi \Rightarrow d \alpha \beta \sigma \varphi P_{\sigma \alpha \beta} d \alpha \beta \tau \varphi$, par définition de la relation $P_{\sigma \alpha \beta}$.

1.1.4. Si $\bar{a} = (\bar{g}, \bar{d})$ désigne la bijection inverse de a et si on pose $\sigma E_\alpha^g \tau$ si et seulement si pour tout $\psi \in \Sigma$ $\alpha \psi \sigma L \alpha \psi \tau$ on définit la relation d'état à gauche pour α associée à L et on a une propriété de compatibilité à gauche qui s'exprime $\sigma E_\alpha^g \tau \Rightarrow \bigwedge \bar{\alpha} \beta \psi \sigma E_{\sigma \alpha \beta}^g d \alpha \beta \psi \tau$.

Le lecteur transposera «à gauche» les définitions et la [proposition 1.1.3] données ci-dessus dans le cas «à droite». Si une confusion est possible nous noterons E_α^d les relations d'état à droite.

1.2. Congruences.

1.2.1. DÉFINITION. — Une relation d'équivalence C dans Σ est une congruence si elle satisfait à la condition

$$\sigma C \tau \Rightarrow \sigma' C \tau' \Rightarrow \alpha \sigma \sigma' C \alpha \tau \tau'$$

1.2.2. Si C est une congruence, le quotient Σ_C est muni canoniquement d'une structure de Ω -magma et l'application canonique est un morphisme

de Ω -magmas $\sigma \rightarrow \bar{\sigma} \quad \Sigma \rightarrow \Sigma_C$. En outre, il est clair que $\alpha \bar{\sigma} \beta \bar{\tau} \bar{\varphi} = g\alpha\beta \ d\alpha\beta \ \bar{\sigma} \bar{\tau} \bar{\varphi}$, donc Σ_C est un magma avec l'association a.

1.2.3. Soit L une relation dans Σ , $\varepsilon = (E_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ la famille des α -relations d'état associées à L , $E = \bigcap_\alpha E_\alpha$, comme précédemment. Posons T la relation définie par $\sigma T \tau$ si et seulement si $\sigma \varepsilon \tau$ et $\alpha \varphi \sigma E \alpha \varphi \tau$ pour tout $\varphi \in \Sigma$.

1.2.4. PROPOSITION. — La relation T est la congruence la moins fine qui soit plus fine que la relation d'état E associée à L .

T est plus fine que E par définition. D'autre part $\sigma T \tau \Rightarrow \alpha \varphi \sigma E \alpha \varphi \tau \Rightarrow \beta \alpha \varphi \sigma \psi E \beta \alpha \varphi \tau \psi = g\bar{\beta}\alpha \varphi d\bar{\beta}\alpha \sigma \psi E \ g\bar{\beta}\alpha \varphi d\bar{\beta}\alpha \tau \psi$ donc aussi $\beta \varphi \alpha \sigma \psi E \beta \varphi \alpha \tau \psi$ et par suite $\alpha \sigma \psi T \alpha \tau \psi$. T est donc Ω -compatible à droite. On démontre de même que T est Ω -compatible à gauche ([1.1.4]). Soit alors $\alpha T \tau$ et $\sigma' T \tau'$. Si $\alpha \in \Omega$ on a $\alpha \sigma \sigma' T \alpha \tau \tau' T \alpha \tau \tau'$ d'après les deux résultats ci-dessus. T est une congruence.

Soit C une congruence plus fine que E . Alors $\alpha C \tau$ implique $\sigma T \tau$. En effet $\sigma C \tau$ entraîne évidemment $\alpha \varphi \sigma C \alpha \varphi \tau$ donc $\alpha \varphi \sigma E \alpha \varphi \tau$ et aussi $\sigma E \tau$ donc $\sigma T \tau$ par définition de T .

1.2.5. PROPOSITION. — Pour que E soit finie il faut et il suffit que T le soit.

La condition est évidemment suffisante E étant moins fine que T . Réciproquement supposons E finie et soit f_σ^α l'application de $\Sigma_E \cup \{0\}$ (Σ_E quotient de Σ par E) dans lui-même définie pour tout σ par $f_\sigma^\alpha(\bar{\varphi}) = \alpha \bar{\varphi} \bar{\sigma}$ (définition qui a un sens par suite de la propriété [1.1.2] de E) et $f_\sigma^\alpha(0) = \bar{\sigma}$. Si $f_\sigma^\alpha = f_\tau^\alpha$ on a pour $\varphi \in \Sigma$ $f_\sigma^\alpha(\bar{\varphi}) = f_\tau^\alpha(\bar{\varphi})$ donc $\alpha \varphi \sigma E \alpha \varphi \tau$ et d'autre part $\sigma E \tau$ donc $\sigma T \tau$. Réciproquement $\sigma T \tau$ implique clairement $f_\sigma^\alpha = f_\tau^\alpha$. T est donc fini car le quotient Σ_T suivant T est de cardinal au plus égal à celui de $\text{Hom}(\Omega \times (\Sigma_E \cup \{0\}), \Omega \times (\Sigma_E \cup \{0\}))$ et l'ensemble $\Omega \times (\Sigma_E \cup \{0\})$ est supposé fini.

1.2.6. PROPOSITION. — Pour que la relation L soit représentable ([proposition 1.1.3]) il faut et il suffit que L soit moins fine qu'une congruence K finie.

La condition est suffisante : si K est une congruence plus fine que L et finie la relation d'état E associé à L est finie moins fine que K . En effet $\sigma K \tau$ entraîne, pour toute expression $\varphi \alpha \sigma \varphi K \alpha \tau \varphi$ donc $\alpha \sigma \varphi L \alpha \tau \varphi$ donc par définition $\sigma E_{\alpha} \tau$ pour tout α , donc $\sigma E \tau$. Réciproquement, la condition est nécessaire si L est représentable. Les relations T (proposition [1.2.4]) et $M = T \rho L$ le sont aussi. Il suffit alors de prouver que la relation T_M associée à L est plus fine que L , ce qui est facile.

1.2.7. Le lecteur reconstituera sans peine les propriétés élémentaires des relations représentables en généralisant convenablement les énoncés de [JAULIN 1963 p. 11-15].

2. Parties régulières.

2.1. Définition.

Les parties régulières d'un magma avec association \wedge sont les classes d'équivalence des relations représentables ([1.1.3]) dans Σ .

2.1.1. Il est facile de voir que l'intersection finie et la réunion finie de parties régulières sont régulières. Le complémentaire d'une partie régulière est une partie régulière.

2.1.2. Les parties finies de Σ sont régulières. Il suffit de montrer que $\{\sigma\} \sigma \in \Sigma$ est régulière. Soit l'expression gauche représentant Σ dans le magma avec association $\sigma = \alpha_n \dots \alpha_1 x_1 \dots x_{n+1}$ et soit P l'équivalence dont les classes sont $\{x_1\}, \{\alpha_1 x_1 x_2\}, \dots, \{\alpha_1 \dots \alpha_i x_1 x_2 \dots x_{i+1}\}, \dots, \{\sigma\}$ et le complémentaire de la réunion des ensembles précédents. Soit L la relation dont les classes sont $\{\sigma\}$ et $\bigcup_{\Sigma} \{\sigma\}$. Il est clair que P est plus fine que L et d'autre part il est facile de montrer que P est compatible à droite ([1.1.2]). D'où le résultat ([prop. 1.1.3]).

2.1.3. Soient M, N deux parties de $\Sigma, \alpha \in \Omega$. Soit αMN la partie de Σ formée des expressions de la forme $\alpha \sigma_M \sigma_N, \sigma_M \in M, \sigma_N \in N$. Soit M^α l'itérée de M pour l'opération α , i.e. $M^\alpha = M \cup \alpha MM \cup \alpha M \alpha MM \cup \dots$

2.1.4. DÉFINITION. — On appelle expression régulière toute expression bien formée à l'aide des opérations de réunion de produit suivant α ($\alpha \in \Omega : M, N \rightarrow \alpha MN$) et d'itération suivant α .

2.2. Expressions régulières et séries formelles rationnelles.

2.2.1. Les développements du [§ 3] sur les séries formelles rationnelles sont encore valables si l'on remplace partout l'anneau A par le semi-anneau $K = \{0, 1\}$. La correspondance entre supports des séries formelles et série formelle caractéristique d'une partie des expressions montre alors, dans le cas d'une association standard a

2.2.2. PROPOSITION. — Si $\text{supp } u$ désigne le support de u , car L la série formelle caractéristique de L les deux applications supp et car sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des expressions régulières de Σ et l'ensemble des séries formelles rationnelles à coefficients dans K .

2.2.3. Comme nous l'avons noté au [§ 5, 2.2.3], et d'après ce qui précède on voit que les langages réguliers s'identifient aussi aux expressions régulières.

2.2.4. D'après la définition des grammaires régulières [§ 5, 2.2.2] les productions non terminales y sont de la forme $(u_i, \alpha \sigma_{\alpha, i, j} u_j)$ avec $\sigma_{\alpha, i, j} \in \Sigma_T$. Il y a un nombre fini de productions et en outre on peut supposer [§ 3] que les $\sigma_{\alpha, i, j}$ sont des variables de v_T , soient $x_{\alpha, i, j}$. Posons $x_{\alpha, i, j} = \wedge_{\alpha, i, j} x$, $x \in X$ $\wedge_{\alpha, i, j} = 1$ si $x_{\alpha, i, j} = x$; sinon $\wedge_{\alpha, i, j} = 0$ et, pour les règles terminales si $(u_i, x_{i, 0})$ est une règle $x_{i, 0} = \wedge_{i, 0} x$ avec la même convention. Considérons alors la grammaire dont les productions sont de la forme $(u_i^j, \alpha \wedge_{\alpha, i, j} x u_j^i)$ si $\wedge_{\alpha, i, j} = 1$ et $(u_i^j, \wedge_{i, 0}^j x)$ avec $\wedge_{i, 0}^j = 1$ si $\wedge_{i, 0} = 1$.

Si $\wedge_{\alpha, i, j} = 0$ $(u_i^j, \alpha x u)$ sera une production. On voit assez facilement que cette grammaire nouvelle est équivalente à la grammaire donnée et qu'elle possède la propriété suivante : pour tout non-terminal u , tout $\alpha \in \Omega$ et tout $x \in X$ il existe un et un seul non-terminal v tel que $(u, \alpha xv)$ soit une production. En ordonnant les non-terminaux de manière

convenable, en écrivant le système linéaire associé et la représentation matricielle qui en découle on voit que celle-ci possède la propriété suivante.

2.2.5. (P) Pour tous α, x, i il existe un j unique tel que $\rho_{x,i,j}^\alpha = 1$
 $\alpha \in \Omega \cup \{0\}$; $x \in X$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Donc, dans le cas où $A = K$, on peut compléter le théorème § 3, 5.2 par la condition équivalente suivante.

2.2.6. (iV) il existe une représentation matricielle ρ_u telle que $u_\sigma = \rho u^\sigma \sigma_{1,n}$ et possédant la propriété P.

3. Automates.

3.1. Définition.

Soient Ω, X, U des ensembles finis $\Omega' = \Omega \cup \{0\}$ a une association cohérente bijective $\Omega^2 \rightarrow \Omega^2$, Σ l'ensemble des expressions du magma libre avec association sur X . Un Ω -automate, ou automate est défini par la donnée d'une application $\rho: X \rightarrow \text{Hom } \Omega', \text{Hom } U, U \quad x \rightarrow \rho_x^\alpha$
 Si $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \dots, \alpha_p\}$ ρ associe donc à tout $x \in X$ une suite $(\rho_x^0, \dots, \rho_x^q, \dots, \rho_x^p)$ d'applications de U dans lui-même. Si U a n éléments ρ_x^q définit une matrice n, n à coefficients 0 ou 1.

3.1.1. Avec cette définition, la donnée d'un Ω -automate est équivalente à celle d'une représentation matricielle ayant la propriété (P) ([2.2.5]).

3.1.2. Langage d'un automate : soit Ω, X, U un automate. On dit que U est l'ensemble des états. Si $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ le langage de l'automate par rapport à l'état initial u_1 et à l'état final u_n est l'ensemble des $\sigma \in \Sigma$ telles que $\rho^\sigma \sigma_{1,n} = 1$. C'est donc très exactement le support de la première coordonnée de la solution du système linéaire à droite associé à ρ . Sans privilégier la première coordonnée u_1 nous dirons aussi que le support de la i ème coordonnée est un langage d'automate.

3.2. Langages d'automate et parties régulières.

Soit $X \xrightarrow{\ell} \text{Hom}(\Omega'(\text{Hom } U, U))$ un automate fini et soit L la relation dans $\Sigma \sigma L \tau$ si et seulement si $\rho_{\sigma}^{\alpha} = \rho_{\tau}^{\alpha}$ pour tout α . Il est clair alors que Σ_L est fini ($\text{Hom } \Omega', \text{Hom}(U, U)$ est fini) donc que L est représentable. Réciproquement si L est représentable la famille ε des relations E_{α} (donc aussi la relation E) est finie et Ω -compatible à droite. Soit $U = \Sigma_E U \{0\}$ et pour $x \in X, \alpha \in \Omega$ soit $\rho_x^{\alpha}(\sigma) = \overline{\alpha \sigma x}, \rho_x^{\alpha}(0) = \bar{x}$. On définit ainsi un automate fini. On a $\rho_{\sigma}^{\alpha}(\bar{\varphi}) = \alpha \bar{\varphi} \bar{\sigma}$ et on voit aisément que la relation $\rho_{\sigma}^{\alpha} = \rho_{\tau}^{\alpha}$ n'est alors autre que la congruence T associée à E . Finalement

3.2.1. PROPOSITION. — *Les langages des automates finis s'identifient aux parties régulières de l'ensemble Σ des expressions.*

3.3. Automates non déterministes.

Un automate non déterministe est défini par la donnée d'une application $X \xrightarrow{\ell} \text{Hom } \Omega'(\text{Hom}_{\text{corr}}(u, U))$ où $\text{Hom}_{\text{corr}}(u, u)$ désigne l'ensemble des correspondances de U dans U , ensemble des morphismes dans la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les correspondances.

On voit sans peine que la donnée d'un automate non déterministe correspond à la donnée d'une représentation matricielle quelconque ; donc d'après ce qui a été vu plus haut ([2.2.6]), il y a identité entre les langages des automates déterministes (finis) et les parties régulières.

3.4. En résumé, nous avons au cours des paragraphes précédents défini de différentes manières une famille de parties de l'ensemble des expressions Σ d'un magma libre avec association : soit à l'aide de grammaires linéaires à droite, soit à l'aide de systèmes d'équations soit encore à l'aide de représentations matricielles (c'est-à-dire d'automates finis, déterministes ou non). Ces parties, les parties régulières qui sont les classes

d'équivalence des relations représentables sont donc aussi caractérisées par le fait que le magma quotient (avec association) qui peut être associé à toute partie de Σ et que nous appellerons le magma des états, est fini. L'ensemble de ces résultats généralise donc point par point les résultats classiques sur les parties régulières et automates finis.

3.5. On peut bien entendu, généraliser aussi la notion d'automate de Mealey et d'application séquentielle ([JAULIN 1963 § 1]). Nous ne le ferons pas ici.

7. DOMAINE D'APPLICATION. GÉNÉRALISATIONS.

1. Domaine d'application : morphismes rationnels et algébriques dans les types d'A-algèbres.

Soit θ un type d'A-algèbres complètes (à une dimension) sur un ensemble I , ι un objet-base (i.e. un élément de I) μ un objet composé (i.e. un mot de $L(I)$). Une syntaxe dans $\text{Hom } \mu, \iota$ consistera en la donnée

1° - d'un sous-ensemble fini X de morphismes de $\text{Hom } \mu, \iota$. Ce seront les variables (par exemple un sous-ensemble de l'ensemble des projections).

2° - Soit Ω un ensemble d'opérations muni d'une association cohérente (nous la supposons standard).

Une réalisation de Ω dans $\text{Hom } \mu, \iota$ consiste en la construction d'un ensemble Σ d'expressions, image de l'ensemble des expressions du Ω -magma libre sur l'ensemble X ainsi obtenu : on définit αxy pour $\alpha \in \Omega, x, y \in X$ comme un morphisme arbitraire de $\text{Hom } \mu, \iota$ (il est clair que le cas le plus utile sera celui où l'on dispose d'un procédé effectif de construction de αxy par composantes homogènes à partir des composantes homogènes de x et y et d'un nombre fini de morphismes auxiliaires donnés, par composition (i.e. substitution de séries formelles dans d'autres séries formelles)).

On prolonge à Σ en définissant $\alpha\beta xyz$ de la même manière puis $\alpha\beta yz$ comme $\alpha\beta d\alpha\beta xyz$. On prolonge enfin à $A[[X]]$ par bilinéarité. Le mécanisme mis en place aux paragraphes précédents permet alors de définir les notions de morphismes algébriques et rationnels dans $\text{Hom } \mu, \iota$ relativement aux données X et Ω et à la réalisation choisie, l'existence des solutions des systèmes d'équations étant assurée par le théorème des fonctions implicites [§ 1].

2. Construction de types d'A-algèbres sur des types.

2.1. Le type SEG.

Le type d'algèbre le plus important pour les applications est le type SEG ([BENZÉCRI 1964]). Rappelons brièvement que SEG [§0 n° 3]

est un type dont les objets-base sont en correspondance bijective avec les entiers et qui est défini par des morphismes générateurs qui sont les liaisons, projections et imbrications binaires. C'est donc un «type défini par générateurs et relations». Dans sa thèse ([GUEJ 1966]) Guedj a défini la notion de «série formelle à n -insertions» ce qui correspond à la construction d'un type de Z -algèbres à partir de SEG. Comme l'a montré Benzécri ([BENZÉCRI 1966]) il est possible de définir une graduation canonique sur les morphismes de SEG, le degré d'un morphisme μ étant la matrice a_{ij} d'entiers où a_{ij} est «le nombre de fois que le morphisme μ opérant sur une liste en utilise le j -ème signe (à n_j insertions) pour composer le i -ème mot de la liste but (le i -ème mot ayant loi, m_i insertions)» μ étant un morphisme du mot n_1, \dots, n_p de $L(N)$ dans le mot m_1, \dots, m_q .

Il est clair que l'on obtiendra une structure type d'A-algèbre sur SEG en prenant pour ensemble $\text{Hom } \mu, \iota$ le module des combinaisons linéaires formelles à coefficients dans A et en y prolongeant les graduations, tous les morphismes générateurs et toutes les relations entre morphismes générateurs étant avec le choix fait plus haut des degrés, multilinéaires. Ceci est un cas particulier d'une autre caractérisation des types d'A-algèbres, que nous donnons au numéro suivant.

2.2. Caractérisation des types d'A-algèbres.

Nous avons signalé au [§ 1] que l'on pouvait définir un type d'A-algèbres sur des anneaux commutatifs unitaires quelconques. Il suffit pour cela d'ajouter aux axiomes ce qui est donné comme conséquence au [§ 1], à savoir les [lemmes 2.1 et 2.2.1] de ce paragraphe. Si l'on ne tient pas compte des graduations, un type d'A-algèbres est défini par la donnée de structures d'A-modules sur les objets de I . On peut alors définir la catégorie K des types d'algèbres sur des anneaux variables (nous laissons au lecteur le soin de formuler cette définition) et cette catégorie est munie d'un foncteur d'oubli canonique dans la catégorie des anneaux. On a alors le résultat suivant qui généralise ([LAZARD 1955 prop. 4.2]).

2.2.1. PROPOSITION. — *La sous-catégorie de K formée des types d'A-algèbres (et où les morphismes sont ceux qui sont compatibles avec les graduations) est fibrée et cofibrée sur les anneaux.*

Réciproquement si π est un objet de K (sur l'anneau A) tel que toute flèche de source A dans la catégorie des anneaux se relève en une

flèche cocartésienne de source π , π peut être muni d'une structure (non nécessairement unique d'ailleurs) de type d'A-algèbres.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette proposition : indiquons seulement que si $\varphi: A \rightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux Π est un type sur A , le type Π' sur A' «image inverse» de A s'obtient en prenant pour ensemble de morphismes $\text{Hom}_{\Pi, \mu, \iota}$ le produit tensoriel du A -module. $\text{Hom}_{\Pi, \mu, \iota}$ par A' sur A au moyen de φ et à le graduer convenablement.

On peut définir les objets de K par générateurs et relations (le lecteur vérifiera aisément cette assertion en utilisant les résultats de [BENABOU 1966]). Dans un cas particulier important (englobant le cas de SEG [2.1]) est celui où les générateurs et relations sont multilinéaires. La catégorie alors obtenue peut être canoniquement munie d'une structure de type d'A-algèbres.

3. Généralisations.

3.1. Le but initial de ce travail était de formaliser certains aspects de la notion de «transformation linguistique» telle qu'elle apparaît dans les publications de Chomsky et de son école sur la théorie de la syntaxe [cf. par exemple CHOMSKY 1964]. En l'état actuel des recherches il semble qu'il serait utile de pouvoir adopter la démarche suivante : suivant Benzécri [cf. BENZÉCRI 1966 et GUEDJ 1966] il faut distinguer composition et expression, «mêlées» dans le mode traditionnel de grammaire générative. On obtient ainsi la composante générative du modèle. A ce niveau, il faut abandonner, s'il se peut, toute hypothèse d'associativité, à la fois dans la composition et dans l'expression. Cette généralisation de la composition (qui n'offre aucune difficulté, car elle est déjà virtuellement dans ce qui précède) conduirait à une catégorie dont les objets seraient les expressions d'un Ω -magma libre (des «arbres») et les morphismes les règles d'une grammaire non associative. Le foncteur d'expression transformerait les opérations du magma en opérations sur les morphismes au sens du n° 1 ou plus précisément (ce qui serait plus efficace) en morphismes d'un type opérant sur les morphismes d'un $\text{Hom}_{\mu, \iota}$ par composition (dans la catégorie). Il est clair que dans cette hypothèse on ne rencontrera «jamais» des types (sauf ceux construits dans ce but) où l'on ait l'égalité : $\alpha\beta\gamma z = \alpha\beta\gamma xz$. Il faut donc remplacer cette condition d'associativité par celle, plus faible, où l'on suppose seulement l'existence d'une

relation entre ces deux expressions (comme nous l'avons esquissé au [§ 2]). C'est d'ailleurs de cette manière qu'interviendra la notion de transformation qui doit être considérée comme une réécriture d'un arbre i.e. une «récaténation». Dans un travail ultérieur (cf [ROUBAUD 1967]) nous étudierons la notion correspondante de «grammaire avec récaténation» qui est le cadre naturel de cette généralisation. En résumé nous nous proposons d'étendre les résultats du présent travail au modèle comportant

1° - au niveau de la composition des opérations n -aires non partout définies,

2° - au niveau de l'expression des SEG-oïdes libres avec générateurs et relations permettant «d'incorporer» des contraintes «négatives» (l'identité de Jacobi dans le type d'A-algèbre correspondant à la structure d'Algèbre de Lie s'interprétant dans ce contexte comme l'interdiction d'écrire simultanément dans un langage les trois phrases représentées par ces crochets qui y figurent).

3.2. Signalons pour terminer que des généralisations au cas «infini» (i.e. Ω , X , infinis) sont possibles, [ROUBAUD 1965 a]. Malheureusement, à l'exception du cas des associations cohérentes standards les calculs se révèlent exagérément compliqués.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENABOU (J.). — Lois de composition dans les catégories, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 771-774.
- [2] BENABOU (J.). — Thèse Faculté des Sciences de Paris (1966).
- [3] BENZECRI (J.P.). — Cours de linguistique, deuxième leçon. Faculté des Sciences de Rennes, Laboratoire de calcul (1964).
- [4] BENZECRI (J.P.). — Grammaires commutatives (1966).
- [5] CHOMSKY (N.) & MILLER (G.A.). — *Formal properties of grammars*, Handbook of Mathematical psychology, II, 12 John Wiley, New York (1963), 323-418.
- [6] CHOMSKY (N.). — *Aspects of the theory of syntax*, MIT. Presse (1965).
- [7] FABIAN (V.). — Structural unambiguity of formal languages, *Czechoslovak Math. J.*, XIV-3 (1965), 394-431.
- [8] FRIANT (J.). — Langages CS, Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Paris (1966).
- [9] GINSBURG (S.) & RICE (H.G.). — Two families of languages related to Algol, *J. Assoc. Comput. Mach.*, IX-3 (1962), 350-371.
- [10] GINSBURG (S.) & SPANIER (E.H.). — Quotients of context-free languages, SDC Technical Memorandum, 738 (1962).
- [11] GUEDJ (D.). — Grammaires de constituants généraux, Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Paris (1966).
- [12] JAULIN (B.). — Introduction à la théorie des automates, Comptes rendus du groupe d'études d'automatique non numérique, exposés 1-3, (1963).
- [13] KROHN (K.B.) & RHODES (J.L.). — Algebraic theory of machines - I prime decomposition Theorem for finite semi-groups and machines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 116 (1965), 450-465.
- [14] KURODA (S.Y.). — Classes of languages and linear-bounded automata, XMM / 20-10 / 3 AI (1963).
- [15] LANDWEBER (P.S.). — Three Theorems on Phrase structures grammars of type 1, *Information and Control*, 6 (1963), 131-136.
- [16] LAZARD (M.). — Lois de groupes et analyseurs, *Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure*, 72 / 4 (1965), 299-400.
- [17] ROUBAUD (J.). — Types d'A-Algèbres discrètes complètes - Un théorème des fonctions implicites, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 261 (1965), 3005-3007.
- [18] ROUBAUD (J.). — Sur un théorème de M.P. Schützenberger, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 261 (1965), 3265-3267.

- [19] ROUBAUD (J.). — Algèbre catégorique pour la linguistique, Comptes rendus du groupe d'études d'automatique non numérique, Paris (1967).
- [20] SCHUTZENBERGER (M.P.). — On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13/6 (1962), 885-890.
- [21] SCHUTZENBERGER (M.P.) & CHOMSKY (N.). — *The algebraic theory of context-free languages in computer programming and formal systems*, North Holland Publ. Co, Amsterdam (1963), 118-161.

Reçu en novembre 1968
Faculté des Sciences de
l'Université de Rennes.

