



HAL
open science

Analyse canonique

J. Moulen

► **To cite this version:**

| J. Moulen. Analyse canonique. Annales de l'ISUP, 1969, XVIII (2), pp.113-147. hal-04087066

HAL Id: hal-04087066

<https://hal.science/hal-04087066v1>

Submitted on 2 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

6. ANALYSE CANONIQUE

J. MOULEN

Introduction.

Un des problèmes étudiés en analyse multidimensionnelle normale est celui de décrire de la façon la plus simple les liaisons existant entre deux groupes de variables, éléments d'un vecteur distribué selon une loi : $N(m, V)$. La résultante des relations existant entre les variables est saisie par les coefficients de corrélation présentés par les variables associées deux à deux. De cet ensemble de corrélations, rien ne se dégage de clair en général.

L'analyse canonique propose une solution au problème de la description la plus simple des relations entre les deux groupes, sans s'attacher aux relations des variables entre elles au sein de chaque groupe.

Cette description se présente sous la forme de combinaisons linéaires des variables de chaque groupe, indépendantes et en nombre au plus égal au nombre de variables figurant dans le groupe le moins nombreux. Le calcul des corrélations des variables avec ces combinaisons linéaires fait connaître le rôle joué par chacune des variables dans ce système minimal de relations. Dans le premier chapitre, nous rappellerons le principe de cette méthode d'analyse.

Il faut reconnaître que ces combinaisons linéaires constituent une solution artificielle, par construction, et il est probable que les relations décelées doivent recevoir une interprétation symbolique, comme les relations mises en évidence par l'analyse factorielle, par exemple. Ceci étant, lorsque les relations trouvées se prêtent à une interprétation logique en accord avec l'objet de l'analyse, il n'est guère probable que ces relations, bien que de construction purement mathématique et selon un modèle simple, puissent être attribuées à un simple effet du hasard.

La plus grande corrélation canonique concerne souvent un facteur général de dimension. Les autres racines apportent chacune des informations d'intensité plus faible que la première mais d'interprétation quelquefois plus intéressante.

Encore convient-il de s'assurer que les corrélations canoniques obtenues soient significatives : la généralisation d'un pseudo déterminant introduit par S.N. Roy a permis d'obtenir la fonction de répartition marginale de la corrélation canonique la plus grande.

Vient ensuite le problème de la construction des seuils de significativité de la plus grande corrélation canonique.

Les exemples d'application de l'analyse canonique sont encore peu nombreux. Seule y est envisagée, en général, l'utilisation de la plus grande racine canonique. Le premier exemple d'exploration et d'utilisation des autres racines canoniques que nous connaissons est celui de M.S. Ledermann dans ses analyses de la mortalité selon la cause du décès (1964). Dans nos applications, on a pu constater que les relations les plus intéressantes sont apportées par certaines des corrélations autres que la plus grande.

Chop
Anal

x_1
 x_2

cov

V₁
V₂
V₁

tel

k

Chapitre 1

Analyse canonique : Rappel succinct - Interprétation des racines canoniques.

Considérons dans l'espace $R_{p_1 - p_2}$ le vecteur aléatoire

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \dots \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}$$

\underline{x}_1 est un vecteur $(p_1, 1)$

\underline{x}_2 est un vecteur $(p_2, 1)$

Supposons \underline{x} centré et de variance V . La matrice de variances-covariance V est mise sous la forme

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & | & V_{12} \\ \hline & & \\ V_{21} & | & V_{22} \end{bmatrix}$$

V_{11} est la matrice de variances-covariances des éléments du groupe \underline{x}_1 .

V_{22} est la matrice de variances-covariances des éléments du groupe \underline{x}_2 .

V_{12} est la matrice de covariance des éléments du groupe \underline{x}_1 avec les éléments du groupe \underline{x}_2 .

Dans l'analyse canonique, on cherche deux combinaisons linéaires

$$\xi = \underline{a}' \underline{x}_1$$

$$\eta = \underline{b}' \underline{x}_2$$

telles que leur corrélation $\rho(\xi, \eta)$ soit maximum sous les contraintes

$$\text{Var}(\xi) = k^2 \quad \text{et} \quad \text{Var}(\eta) = k'^2$$

k et k' étant deux constantes positives.

Par définition, $\rho(\xi, \eta) = \frac{\underline{a}' V_{12} \underline{b}}{k k'}$

Pour simplifier, on pose généralement $k = k' = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité.

Dans ces conditions, le problème est le suivant :

Maximiser $\rho = \underline{a}' V_{12} \underline{b}$

sous les contraintes $\begin{cases} \underline{a}' V_{11} \underline{a} = 1 \\ \underline{b}' V_{22} \underline{b} = 1 \end{cases}$

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange donne :

$$\Psi = \underline{a}' V_{12} \underline{b} - \frac{\lambda}{2} (\underline{a}' V_{11} \underline{a} - 1) - \frac{\Gamma}{2} (\underline{b}' V_{22} \underline{b} - 1).$$

En exprimant que les dérivées partielles de Ψ par rapport à \underline{a} et \underline{b} sont nulles, on obtient les deux équations vectorielles suivantes :

$$(I) \begin{cases} V_{12} \underline{b} - \lambda V_{11} \underline{a} = 0 & (1) \\ V_{21} \underline{a} - \Gamma V_{22} \underline{b} = 0 & (2) \end{cases}$$

\underline{b} est déterminé d'une manière unique en fonction de \underline{a} et de Γ par la formule suivante obtenue en prémultipliant la deuxième équation par

$$\frac{1}{\Gamma} V_{22}^{-1}$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\Gamma} V_{22}^{-1} V_{21} \underline{a} \tag{3}$$

Compte tenu de cette relation, la première équation s'écrit :

$$(V_{11}^{-1} V_{12} V_{22}^{-1} V_{21} - \lambda \Gamma I) \underline{a} = 0 \tag{4}$$

\underline{a} est le vecteur propre associé à la racine caractéristique $\theta = \lambda \Gamma$ de la matrice $V_{11}^{-1} V_{12} V_{22}^{-1} V_{21}$.

Signification statistique d'une valeur propre $\theta = \lambda \Gamma$

Prémultiplions les équations (1) et (2) respectivement par \underline{a}' et \underline{b}' . Du fait que ξ et η sont de variables réduites, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\rho = \lambda = \Gamma \quad (5)$$

La valeur propre $\theta = \lambda \Gamma$ est donc la corrélation canonique ρ^2 .

REMARQUE :

La variable canonique ξ_1 est la combinaison linéaire de \underline{x}_1 de variance 1 dont la corrélation multiple avec \underline{x}_2 est maximale.

La matrice $V_{11}^{-1} V_{12} V_{22}^{-1} V_{21}$ possède p_1 racines caractéristiques réelles, soit :

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p_1}$ en ordre décroissant.

Il leur correspond p_1 vecteurs « \underline{a} », et autant de vecteurs « \underline{b} », donc p_1 variables canoniques ξ_i pour le groupe \underline{x}_1 et p_1 variables canoniques η_i pour le groupe \underline{x}_2 .

On montre, sans difficulté, que la racine « $r + 1$ » n'est autre que la première racine canonique dans l'espace conditionnel \underline{x}_3 ; avec

$$\underline{x}'_3 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r),$$

c'est-à-dire la plus grande racine canonique associée aux deux vecteurs :

$$\underline{x}_{1.3} = \underline{x}_1 / \underline{x}_3 \quad (\underline{x}_1 \text{ étant donné } \underline{x}_3)$$

et
$$\underline{x}_{2.3} = \underline{x}_2 / \underline{x}_3 \quad (\underline{x}_2 \text{ étant donné } \underline{x}_3).$$

Chapitre 2

Généralisation du pseudo déterminant de S.N. ROY

Lorsque la matrice de variances covariances V est connue, les p_1 corrélations canoniques $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p_1}$ sont des valeurs certaines. Dans la pratique, V est inconnue et estimée à partir des observations. Soit Σ l'estimation de V . On effectue la même décomposition :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & | & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & | & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Les corrélations canoniques sont estimées par les racines de l'équation suivante :

$$|\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} - \theta I| = 0$$

Les θ_i dépendent de l'échantillon et sont donc considérées comme les observations des variables aléatoires. Ainsi, le problème de leur distribution a été posé.

Sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{x} & \text{ suit une loi multinormale} \\ V_{12} & = 0 \text{ dans la population parente,} \end{aligned}$$

Fischer (1939), Roy (1939), Hsu (1939) ont simultanément établi la distribution conjointe des variables θ_i .

Posons :

$$\begin{aligned} s & = \min(p_1, p_2) \\ m & = \frac{1}{2} |p_2 - p_1 - 1| \\ n & = \frac{1}{2} |N - p_2 - p_1 - 2| \\ 1 & \geq \theta_s \geq \theta_{s-1} \geq \dots \geq \theta_1 > 0 \end{aligned}$$

La distribution conjointe des θ_i estimations des ρ_i^2 se ramène à la forme suivante :

$$P(\theta_s, \theta_{s-1}, \dots, \theta_1) = C(s, m, n) \prod_{i=1}^s \theta_i^m (1-\theta_i)^n \prod_{i>j} (\theta_i - \theta_j)$$

où $C(s, m, n)$ est une constante dépendant des paramètres s, m et n et donnée par la formule :

$$C(s, m, n) = \prod_{i=1}^{s/2} \prod_{i=1}^s \frac{\Gamma(2m + 2n + 2 + i)}{\Gamma\left(\frac{2m + i + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n + i + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}$$

Cette distribution fait intervenir une fonction g de la forme

$$g(x_s, x_{s-1}, \dots, x_1) = \prod_{i=1}^s x_i^q (1-x_i)^r \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Le produit $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$ est le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} x_s^{s-1} & x_s^{s-2} & \dots & x_s & 1 \\ x_{s-1}^{s-1} & x_{s-1}^{s-2} & \dots & x_{s-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{s-1} & x_1^{s-2} & \dots & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

multiplions la 1ère ligne de ce déterminant par $x_s^q (1-x_s)^r$

puis la 2ème ligne par $x_{s-1}^q (1-x_{s-1})^r$ etc, et la dernière ligne par $x_1^q (1-x_1)^r$.

On obtient $g(x_1 \dots x_s)$ sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} x_s^{q+s-1} (1-x_s)^r & x_s^{q+s-2} (1-x_s)^r & \dots & x_s^q (1-x_s)^r \\ x_{s-1}^{q+s-1} (1-x_{s-1})^r & x_{s-1}^{q+s-2} (1-x_{s-1})^r & \dots & x_{s-1}^q (1-x_{s-1})^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{q+s-1} (1-x_1)^r & x_1^{q+s-2} (1-x_1)^r & \dots & x_1^q (1-x_1)^r \end{vmatrix}$$

L'intégrale de $g(x_1 \dots x_s)$ dans le domaine

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s \leq x < 1$$

s'obtient en intégrant chaque terme du déterminant par rapport à la variable qui intervient. Le terme général de cette intégrale mise sous la forme du pseudo déterminant est :

$$\int_0^{x_{s-i+2}} x_{s-i+1}^{q+s-j} (1-x_{s-i+1})^r dx_{s-i+1}$$

avec $i = 1, 2, \dots, s$
 $j = 1, 2, \dots, s$
 $x_{s+1} = x$

Posons :

$$q + s - j = q_{s-j+1}$$

L'intégrale précédente s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \int_0^x x_s^{q_s} (1-x_s)^r dx_s & \int_0^x x_s^{q_{s-1}} (1-x_s)^r dx_s & \dots & \int_0^x x_s^{q_1} (1-x_s)^r dx_s \\ \int_0^{x_s} x_{s-1}^{q_s} (1-x_{s-1})^r dx_{s-1} & \int_0^{x_s} x_{s-1}^{q_{s-1}} (1-x_{s-1})^r dx_{s-1} & \dots & \int_0^{x_s} x_{s-1}^{q_1} (1-x_{s-1})^r dx_{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{x_2} x_1^{q_s} (1-x_1)^r dx_1 & \int_0^{x_2} x_1^{q_{s-1}} (1-x_1)^r dx_1 & \dots & \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^r dx_1 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant ne peut être développé que selon un ordre donné correspondant à l'écriture de l'intégrale multiple qu'il représente en réalité, d'où son appellation de « pseudo déterminant ».

Nous le noterons avec S.N. Roy :

$$U(x; q_s, q_{s-1}, \dots, q_1)$$

A une constante multiplicative près, ce pseudo déterminant est la fonction de répartition de la plus grande racine canonique. En effet, la distribution marginale de x_s est bien

$$C(s, m, n) \int_0^x \int_0^{x_s} \dots \int_0^{x_2} g(x_s, x_{s-1}, \dots, x_1) dx_s dx_{s-1} \dots dx_1$$

Généralisation du pseudo déterminant de Roy :

Le pseudo déterminant précédent est un cas particulier du pseudo déterminant général suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^x x_s^{q_s} (1-x_s)^{r_s} f_s(x_s, t) dx_s \dots \int_0^x x_s^{q_1} (1-x_s)^{r_1} f_1(x_s, t) dx_s \\ \int_0^{x_s} x_{s-1}^{q_{s-1}} (1-x_{s-1})^{r_s} f_s(x_{s-1}, t) dx_{s-1} \dots \int_0^x x_{s-1}^{q_1} (1-x_{s-1})^{r_1} f_1(x_{s-1}, t) dx_{s-1} \\ \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_s} f_s(x_1, t) dx_1 \dots \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x_1, t) dx_1 \end{array} \right|$$

Nous le notons :

$$U(x; q_s, r_s, f_s; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1)$$

On suppose :

$$q_j > -1 \quad \forall j$$

$$r_j > -1 \quad \forall j$$

$f_j(x, t)$ bornée pour $x \in [0, 1 - \epsilon]$
 $t \in [0, 1]$

De plus, les dérivées partielles successives de f_j par rapport à x sont bornées.

Posons pour simplifier les notations :

$$I(x; q_s, r_s, f_s; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1) =$$

$$\int_0^x x_s^{q_s} (1-x_s)^{r_s} f_s(x_s, t) dx_s \int_0^{x_s} x_{s-1}^{q_{s-1}} (1-x_{s-1})^{r_{s-1}} f_{s-1}(x_{s-1}, t) dx_{s-1} \dots$$

$$\dots \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x_1, t) dx_1$$

Par exemple, dans le cas de trois racines canoniques non nulles, le pseudo déterminant se développe sous la forme suivante :

$$U(x; q_3, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) =$$

$$= I(x; q_3, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1)$$

$$- I(x; q_3, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2)$$

$$- I(x; q_2, r_2, f_2; q_3, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1)$$

$$+ I(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1; q_3, r_3, f_3)$$

$$+ I(x; q_1, r_1, f_1; q_3, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2)$$

$$- I(x; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2; q_3, r_3, f_3)$$

Nous reviendrons plus loin sur le développement du pseudo déterminant dans le cas plus général de s corrélations canoniques.

Pour l'intégration, on utilise les lemmes suivants ;

LEMME 1

avec $I_0(x)$

La démonstration des lemmes suivants

LEMME 2

$I(x)$

+

+

où

DEMONSTRATION

On pose

LEMME 1 (de S.N. Roy

$$I(x; q, r, f) = (q + r + 1)^{-1} \left[-I_0(x; q, r + 1, f) \right. \\ \left. + I(x; q, r + 1, \frac{\partial f}{\partial x}) \right. \\ \left. + q I(x; q - 1, r, f) \right]$$

avec $I_0(x, a, b, f) = x^a (1 - x)^b f(x)$.

La démonstration de ce terme de Roy est analogue à celles des autres lemmes suivants :

LEMME 2

$$I(x'; q, r, H, f) = (q + r + 1)^{-1} \left\{ -I_0(x'; q, r + 1, H, f) + \right. \\ \left. + I(x'; q, r + 1, H', f) + q I(x'; q - 1, r, H, f) + \right. \\ \left. + I(x'; q, r + 1, H, f') \right\}$$

où

$$I(x'; q, r, H, f) = \int_0^{x'} x^q (1 - x)^r H(x) f(x, t) dx$$

$$\text{et } f' \text{ est en réalité } \frac{\partial f}{\partial x}.$$

DEMONSTRATION :

L'intégrale du premier membre de l'égalité peut s'écrire :

$$\int_0^{x'} \frac{x^q}{(1 - x)^q} (1 - x)^{r+q} H(x) f(x, t) dx$$

On pose $(1 - x)^{r+q} dx = dv$

$$x^q (1-x)^{-q} H(x) f(x,t) = u$$

On obtient :

$$du = q x^{q-1} (1-x)^{-q} H(x) f(x,t) dx + q x^q (1-x)^{-q-1} H(x) f(x,t) dx + x^q (1-x)^{-q} d H(x) f(x,t) + x^q (1-x)^{-q} H(x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx .$$

$$\text{et } [u v]_0^{x'} = - \frac{1}{q+r+1} I_0(x'; q, r+1, H, f)$$

On achève facilement la démonstration.

LEMME 3.

Pseudo déterminant d'ordre deux.

$$\begin{aligned} U(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) &= \\ &= (q_2 + r_2 + 1)^{-1} \left\{ - I_0(x; q_2, r_2 + 1, f_2) I(x; q_1, r_1, f_1) + \right. \\ &\quad + 2 I(x; q_2 + q_1, r_2 + r_1 + 1, f_2 f_1) \\ &\quad + q_2 U(x; q_2 - 1, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \\ &\quad \left. + U(x; q_2, r_2 + 1, f_2; q_1, r_1, f_1) \right\} \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

Développons U :

$$U = I(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) - I(x; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2)$$

La première de ces deux intégrales est

$$\int_0^x x_2^{q_2} (1-x_2)^{r_2} f_2(x,t) dx_2 \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x,t) dx_1$$

Posons alors

$$H(x)_2 = \int_0^x x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x, t) dx_1$$

L'intégrale considérée se met sous la forme

$$\int_0^x x_2^{q_2} (1-x_2)^{r_2} f_2(x_2, t) H(x_2) dx_2$$

Appliquons le lemme 2 à cette intégrale

Les égalités suivantes sont évidentes :

$$-I_0(x; q_2, r_2 + 1, H, f_2) =$$

$$= -I_0(x; q_2, r_2 + 1, f_2) I(x; q_1, r_1, f_1)$$

$$I(x; q_2, r_2 + 1, f_2, H') = I(x; q_2 + q_1, r_2 + r_1 + 1, f_2 \cdot f_1)$$

$$q_2 I(x; q_2 - 1, r_2, f_2, H) = q_2 I(x; q_2 - 1, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1)$$

$$I(x; q_2, r_2 + 1, f_2', H) = I(x; q_2, r_2 + 1, f_2'; q_1, r_1, f_1)$$

Considérons maintenant le terme

$$\int_0^x x_2^{q_2} (1-x_2)^{r_2} f_2(x_2, t) dx_2 \quad \int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x_1, t) dx_1$$

Appliquons le lemme de Roy à l'intégrale

$$\int_0^{x_2} x_1^{q_1} (1-x_1)^{r_1} f_1(x_1, t) dx_1$$

nous obtenons la décomposition suivante :

$$(q_2 + r_2 + 1)^{-1} [- I_0(x_2 ; q_2, r_2 + 1, f_2) + I(x_2 ; q_2, r_2 + 1, f'_2) + q_2 I(x_2 ; q_2 - 1, r_2, f_2)]$$

Portons cette expression dans le deuxième terme du développement de U, terme qui s'écrit alors :

$$(q_2 + r_2 + 1)^{-1} [I(x ; q_2 + q_1, r_2 + r_1 + 1, f_2 f_1) - I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_2, r_2 + 1, f'_2) - q_2 I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_2 - 1, r_2, f_2)]$$

En combinant les deux intégrales, on achève facilement la démonstration du lemme 3.

INTEGRALE U D'ORDRE s :

Nous considérons maintenant le pseudo déterminant U d'ordre s.

$$U(x ; q_s, r_s, f_s ; \dots, q_1, r_1, f_1)$$

Remarquons tout d'abord :

$$U = \sum_p (-1)^i I(x ; q_s^*, r_s^*, f_s^* ; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

où

$$(q_s^*, r_s^*, f_s^*), (q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*) \dots (q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

est une permutation de

$$(q_s, r_s, f_s) \dots (q_1, r_1, f_1) .$$

$$i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ suivant que la permutation considérée est paire ou impaire ; } P \text{ étant l'ensemble de ces permutations (au nombre de } s! \text{) }$$

Cette remarque généralise bien le précédent développement que nous avons donné pour $s = 3$ et $s = 2$.

Considérons alors l'intégrale

$$I(x; q^*, r^*, f^*; q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

supposons que dans cette intégrale, $q_v^* = q_s$ avec tout d'abord $v \neq s$ et $v \neq 1$.

Nous avons donc :

$$I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_{v+1}^*, r_{v+1}^*, f_{v+1}^*; q_s, r_s, f_s; q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots \\ \dots q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

posons :

$$I(x_{v+1}; q_s, r_s, f_s; q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*) = \\ = I(x_{v+1}; q_s, r_s, f_s; H)$$

L'application du lemme 2 à cette intégrale donne :

$$I(x_{v+1}; q_s, r_s, f_s; H) = \\ = (q_s + r_s + 1)^{-1} \left\{ -I_0(x_{v+1}; q_s, r_s + 1, f_s; H) + \right. \\ \left. + I(x_{v+1}; q_s, r_s + 1; f_s; H') \right. \\ \left. + q_s I(x_{v+1}; q_s - 1, r_s, f_s; H) \right. \\ \left. + I(x_{v+1}; q_s, r_s + 1, f'_s; H) \right\}$$

Reconstituons maintenant l'intégrale entière en utilisant ce développement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_{v+1}^*, r_{v+1}^*, f_{v+1}^*; q_s, r_s, f_s; q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots \\
 & \quad q_1^*, r_1^*, f_1^*) = (q_s + r_s + 1)^{-1} \left[-I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots \right. \\
 & \quad q_{v+1}^* + q_s, r_{v+1}^* + r_s + 1; f_s \cdot f_{v+1}^*; q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots f_1^*) \\
 & \quad + I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_{v+1}^*, r_{v+1}^*, f_{v+1}^*; q_s + q_{v-1}^*, r_s + r_{v-1}^* + 1, \\
 & \quad f_s f_{v-1}^*; q_{v-2}^*, r_{v-2}^*, f_{v-2}^*, \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*) \\
 & \quad q_s I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_{v+1}^*, r_{v+1}^*, f_{v+1}^*; q_s - 1, r_s, f_s; \\
 & \quad q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*) + I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots; \\
 & \quad \left. q_{v+1}^*, r_{v+1}^*, f_{v+1}^*; q_s, r_s + 1, f_s; q_{v-1}^*, r_{v-1}^*, f_{v-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*) \right]
 \end{aligned}$$

ceci pour $v \neq s$ et $v \neq 1$

Pour $v = s$: on a l'intégrale

$$\begin{aligned}
 & I(x; q_s, r_s, f_s; q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*; \dots, q_q^*, r_1^*, f_1^*) = \\
 & \quad = I(x; q_s; r_s, f_s; H)
 \end{aligned}$$

avec $H = I(x_s; q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*; \dots; q_q^*, r_1^*, f_1^*)$

les $q_i^* \neq q_s \quad \forall_i$

Une nouvelle application du lemme 1 donne :

$$\begin{aligned}
 & I(x; q_s, r_s, f_s; H) = \\
 & = (q_s + r_s + 1)^{-1} \left[-I_0(x; q_s, r_s + 1, f) I(x; q_{s-1}^*, r_{s-1}^* \right. \\
 & \quad \left. f_{s-1}^*; \dots; q_1^*, r_1^*, f_1^*) \right. \\
 & \quad \left. + I(x; q_s + q_{s-1}^*, r_s + r_{s-1}^* + 1, f_s f_{s-1}^*; \right. \\
 & \quad \left. q_{s-2}^*, r_{s-2}^*, f_{s-2}^*; \dots, q_q^*, r_1^*, f_1^*) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ q_s I(x; q_s - 1, r_s, f_s; q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

$$+ I(x; q_s, r_s + 1, f_s; q_{s-1}^*, r_{s-1}^*, f_{s-1}^*; \dots, q_1^*, r_1^*, f_1^*)]$$

Pour $v = 1$

C'est-à-dire : q_s, r_s, f_s interviennent dans la dernière intégrale qui est alors

$$\int_0^{x_2} x_1^{q_s} (1 - x_1)^{r_s} f_s(x_1, t) dx_1$$

en appliquant le lemme de Roy, on obtient la décomposition suivante :

$$I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_2^*, r_2^*, f_2^*; q_s, r_s, f_s) =$$

$$= (q_s + r_s + 1)^{-1} [-I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_3^*, r_3^*, f_3^* ;$$

$$q_2^* + q_s, r_2^* + r_s + 1, f_s, f_2^*) +$$

$$+ q_s I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_2^*, r_2^*, f_2^*; q_s - 1, r_s, f_s)$$

$$I(x; q_s^*, r_s^*, f_s^*; \dots, q_2^*, r_2^*, f_2^*; q_s, r_s + 1, f_s)]$$

EXEMPLE : CAS DE TROIS CORRELATIONS CANONIQUES.

(1) pour $v \neq 1$ et $v \neq s$, c'est-à-dire pour $v = h$ on obtient deux termes en recopiant la décomposition générale précédente :

$$- I(x; q_3^* + q_3, r_3 + r_3^* + 1, f_3, f_3^*; q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

$$+ I(x; q_3^*, r_3^*, f_3^*; q_3 + q_1^*, r_3 + r_1^* + 1, f_3, f_1^*)$$

On a deux permutations $q_2 q_3 q_1$

et $q_1 q_3 q_2$

La première est impaire et la seconde est paire.

La première intégrale donne donc :

$$\begin{cases} I(x; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - I(x; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1; q_2, r_2, f_2) \end{cases}$$

La deuxième intégrale donne :

$$\begin{cases} - I(x; q_2, r_2, f_2; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1) \\ + I(x; q_1, r_1, f_1; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2) \end{cases}$$

Le terme général comportant q_3 en facteur devient :

$$q_3 I(x; q_3^*, r_3^*, f_3^*; q_3 - 1, r_3, f_3; q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

ce qui donne avec les deux permutations :

$$\begin{cases} - q_3 I(x; q_2, r_2, f_2; q_3 - 1, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1) \\ + q_3 I(x; q_1, r_1, f_1; q_3 - 1, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2) \end{cases}$$

Le terme du développement général comportant f'_s est :

$$I(x; q_3^*, r_3^*, f_3^*; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

d'où les deux intégrales :

$$\begin{cases} - I(x; q_2, r_2, f_2; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_1, r_1, f_1) \\ + I(x; q_1, r_1, f_1; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_2, r_2, f_2) \end{cases}$$

Pour $v = 3$:

(a₀) On voit aisément que le terme en I_0 donne la quantité suivante :

$$\begin{cases} - I_0(x; q_3, r_3 + 1, f_3) U(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \end{cases}$$

(a) Le terme en I avec $q_3 + q^*$:

$$\left\{ I(x; q_3^* + q_2, r_3 + r_2^* + 1, f_3 f_2^*; q_1^*, r_1^*, f_1^*) \right.$$

Les deux permutations étant :

$$q_3 \ q_2 \ q_1 \text{ paire}$$

$$q_3 \ q_1 \ q_2 \text{ impaire}$$

On en tire les deux intégrales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(x; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - I(x; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1; q_2, r_2, f_2) \end{array} \right.$$

(b) terme avec q_3 en facteur :

$$q_3 I(x; q_3 - 1, r_3, f_3; q_2^*, r_2^*, f_2^*; q_1^*, r_1^*, f_1^*)$$

avec les deux intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 I(x; q_3 - 1, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - q_3 I(x; q_3 - 1, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2) \end{array} \right.$$

puis le terme comportant f'_3 permet d'écrire les intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(x; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - I(x; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2) \end{array} \right.$$

Pour $v = 1$

Les deux permutations possibles sont :

$$q_2 \ q_1 \ q_3 \text{ paire}$$

$$q_1 \ q_2 \ q_3 \text{ impaire}$$

On obtient successivement les termes généraux du développement et les intégrales qui en sont déduites :

(a) $- I(x ; q_3^*, r_3^*, f_3^* ; q_2^* + q_3, r_2^* + r_3 + 1, f_3 f_2^*)$

$$\left\{ \begin{array}{l} - I(x ; q_2, r_2, f_2 ; q_1 + q_3 ; r_1 + r_3 + 1, f_3 f_1) \\ + I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_2 + q_3 ; r_2 + r_3 + 1, f_3 f_2) \end{array} \right.$$

(b) $q_3 I(x ; q_3^*, r_3^*, f_3^* ; q_2^*, r_2^*, f_2^* ; q_3 - 1, r_3, f_3)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_3 I(x ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1 ; q_3 - 1, r_3, f_3) \\ - q_3 I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_2, r_2, f_2 ; q_3 - 1, r_3, f_3) \end{array} \right.$$

(c) $I(x ; q_3^*, r_3^*, f_3^* ; q_2^*, r_2^*, f_2^* ; q_3, r_3 + 1, f_3')$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I(x ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1 ; q_3, r_3 + 1, f_3') \\ - I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_2, r_2, f_2 ; q_3, r_3 + 1, f_3') \end{array} \right.$$

En conclusion, on peut décomposer le pseudo déterminant d'ordre 3 de la manière suivante :

(a₀) $\left\{ - I_0(x ; q_3, r_3 + 1, f_3) U(x ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1) \right.$

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} 2 I(x ; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2 ; q_1, r_1, f_1) \\ - 2 I(x ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1 ; q_2, r_2, f_2) \\ - 2 I(x ; q_2, r_2, f_2 ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1) \\ + 2 I(x ; q_1, r_1, f_1 ; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2) \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} q_3 I(x; q_3 - 1, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - q_3 I(x; q_3 - 1, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2) \\ - q_3 I(x; q_2, r_2, f_2; q_3 - 1, r_3, f_3; q_1, r_1, f_1) \\ + q_3 I(x; q_1, r_1, f_1; q_3 - 1, r_3, f_3; q_2, r_2, f_2) \\ + q_3 I(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1; q_3 - 1, r_3, f_3) \\ - q_3 I(x; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2; q_3 - 1, r_3, f_3) \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} I(x; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1) \\ - I(x; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2) \\ - I(x; q_2, r_2, f_2; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_1, r_1, f_1) \\ + I(x; q_1, r_1, f_1; q_3, r_3 + 1, f'_3; q_2, r_2, f_2) \\ + I(x; q_2, r_2, f_2; q_1, r_1, f_1; q_3, r_3 + 1, f'_3) \\ - I(x; q_1, r_1, f_1; q_2, r_2, f_2; q_3, r_3 + 1, f'_3) \end{array} \right.$$

(a) peut encore s'écrire :

$$\begin{array}{l} 2 \left| \begin{array}{ll} I(x; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2) & I(x; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1) \\ I(x_3; q_2, r_2, f_2) & I(x_3; q_1, r_1, f_1) \end{array} \right| \\ -2 \left| \begin{array}{ll} I(x; q_2, r_2, f_2) & I(x; q_1, r_1, f_1) \\ I(x_3; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2) & I(x_3; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1) \end{array} \right| \end{array}$$

NOTATION :

Lorsque nous remplaçons la ligne i du pseudo déterminant $U(x; q_s, r_s, f_s; \dots; q_1, r_1, f_1)$ par la ligne $(Q_s, R_s, F_s; \dots; Q_1, R_1, F_1)$ et que les autres lignes sont conservées, nous obtenons un nouveau pseudo déterminant que nous notons :

$$U(x; Q_s, R_s, F_s; \dots; Q_1, R_1, F_1)^{(1)} \quad (\text{notation de Pillai}).$$

Avec cette notation, (a) devient :

$$\begin{aligned}
 & 2 U (q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2 ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1)^{(1)} \\
 & - 2 U (q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2 ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1)^{(2)} \\
 = & 2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} U (q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2 ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1)^{(i)}
 \end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que (b) s'écrit :

$$q_3 U (x ; q_3 - 1, r_3, f_3 ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1)$$

et que (c) s'écrit :

$$U (x ; q_3, r_3 + 1, f'_3 ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1)$$

RESULTAT

Dans le cas de trois racines canoniques, le pseudo déterminant général reçoit la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
 & U (x ; q_3, r_3, f_3 ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1) = \\
 = & (q_3 + r_3 + 1)^{-j} [I_0 (x ; q_3, r_3 + 1, f_3) U (x ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1) + \\
 + & 2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} U (x ; q_3 + q_2, r_3 + r_2 + 1, f_3 f_2 ; q_3 + q_1, r_3 + r_1 + 1, f_3 f_1)^{(i)} \\
 & + q_3 U (x ; q_3 - 1, r_3, f_3 ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1) \\
 & + U (x ; q_3, r_3 + 1, f'_3 ; q_2, r_2, f_2 ; q_1, r_1, f_1)] \\
 = & (q_3 + r_3 + 1)^{-1} [A^{(3)} + B^{(3)} + q_3 C^{(3)} + D^{(3)}]
 \end{aligned}$$

En se servant de la méthode utilisée par S.N. Roy dans le cas particulier

$$\begin{cases} r_i = r \Psi_i \\ f_j = 1 \Psi_j \end{cases}$$

Nous obtenons, pour s racines canoniques, et de la même manière que dans le cas de 3 racines, le résultat suivant qui généralise la décomposition de Roy-Pillai.

$$\begin{aligned}
 & U(x; q_s, r_s, f_s; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1) = \\
 & = -1 I_0(x; q_s, r_s + 1, f_s) U(x; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} U(x; q_s + q_{s-1}, r_s + r_{s-1} + 1, f_s f_{s-1}; \dots; q_s + q_1, r_s + r_1 + 1, f_s f_1) \\
 & + q_s U(x; q_s - 1, r_s, f_s; q_{s-1}, f_{s-1}, r_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1) \\
 & + 1 U(x; q_s, r_s + 1, f'_s; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1)
 \end{aligned}$$

Ainsi que nous venons de l'indiquer, le développement de S.N. Roy correspond au cas particulier où $r_i = r \forall i$ et $f_j(x, t) = 1 \forall j$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 & U(x; q_s, r; q_{s-1}, r; \dots; q_1, r) = \\
 & = -(q_s + r + 1)^{-1} I_0(x; q_s, r + 1) U(x; q_{s-1}, r; q_{s-2}, r; q_1, r) \\
 & + 2 (q_s + r + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} U(x; q_s + q_{s-1}; q_s + q_{s-2}; \dots \\
 & \quad \dots q_s + q_1; 2r + 1) \\
 & + q_s (q_s + r + 1)^{-1} U(x; q_s - 1, r; q_{s-1}, r; \dots; q_1, r)
 \end{aligned}$$

C'est ce développement que Pillai utilise dans une thèse soutenue au département de Statistique de l'Université de la Caroline du Nord, pour calculer une expression approchée de la fonction de répartition de la plus grande racine canonique de chacun des cas distincts suivants :

$$s = 2; 3; 4; 5; 6.$$

Pillai a donné une généralisation du pseudo déterminant de Roy généralisation qui revient à multiplier la fonction

$$g(x_s \dots x_1) = \prod_{i=1}^s x_i^q (1 - x_i)^r \prod_{i > j} (x_i - x_j)$$

par la quantité $\prod_{i=1}^s e^{t x_i}$

Cette généralisation n'a encore reçu aucune application, et contrairement aux apparences, n'a pas servi à l'auteur pour établir les formules approchées de la distribution de la plus grande racine canonique. Il se place en effet, dans le cas où $t = 0$, ce qui le ramène au pseudo déterminant de S.N. Roy.

Signalons à toutes fins utiles, et bien que nous n'en ayons pas l'usage, un autre pseudo déterminant étudié par Pillai, et noté W .

On peut démontrer aisément que cette généralisation de Pillai, ainsi que son déterminant W se déduisent du développement établi dans le cas général, par un simple choix des fonctions f_j et en imposant aux paramètres q_j et r_j quelques relations.

$$\begin{aligned} \text{En effet, posons : } r_i &= r \nabla i \\ f_j(x) &= e^{t x} \nabla j \end{aligned}$$

On a alors :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = t f(x, t)$$

Simplifiant les notations par :

$$I(x; q, r, f) = I(x; q, r, t)$$

on retrouve le développement de Pillai.

Pour le cas de son théorème sur le pseudo déterminant W que publia Pillai en décembre 1965, il nous suffira de poser :

$$\begin{aligned} a_j &= q_j \nabla j \\ b &= 2 a_j + r_j + 2 = \text{cte} \nabla j \end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} q_j &= q + j - 1 \\ r_j &= r - 2 j \end{aligned}$$

et de ch

me des
détermi

qui est

w

W =

et de choisir pour les fonctions f_j , la forme suivante

$$f_j(x_i, t) = (1 - x_i)^{a_j} e^{-t} \frac{x_i}{1 - x_i}$$

Après changement de variable pour se ramener à la deuxième forme des intégrales β on retrouve le développement dû à Pillai du pseudo-déterminant W .

Le terme général du déterminant de base de l'intégrale W donne

$$\frac{y_1^{a_j}}{(1 + y_1)^b} e^{-ty_1} dy_1$$

qui est le terme w_{ij} du déterminant de base de l'intégrale W

$$w_{ij} = \int_0^{y_{i+1}} \frac{y_1^{a_j}}{(1 + y_1)^b} e^{-ty_1} dy_1$$

$$j = s, s-1; \dots 1$$

$$u = s, s-1; \dots 1$$

$$y_1 \in] 0, \infty [$$

$$\int_0^y y_s^{a_s} e^{-ty_s} / (1 + y_s)^b dy_s \dots \int_0^y y_s^{a_1} e^{-ty_s} / (1 + y_s)^b dy_s$$

$$W = \int_0^{y_{i+1}} y_1^{a_s} e^{-ty_1} / (1 + y_1)^b dy_1 \dots \int_0^{y_{i+1}} y_1^{a_1} e^{-ty_1} / (1 + y_1)^b dy_1$$

$$\int_0^{y_2} y_1^{a_s} e^{-ty_1} / (1 + y_1)^b dy_1 \dots \int_0^{y_2} y_1^{a_1} e^{-ty_1} / (1 + y_1)^b dy_1$$

Remarquons :

$$q_s + r_s + 1 = b - a_s - 1$$

$$I_0(x; q_s, r_s + 1, f_s) \text{ donne } F_0(y; a_s, b - 1, -t)$$

avec

$$F_0(y; a_s, b - 1, -t) = \frac{y^{a_s} e^{-ty}}{(1+y)^{b-1}}$$

de même, il est évident que :

$$U(x; q_{s-1}, r_{s-1}, f_{s-1}; \dots; q_1, r_1, f_1) \text{ devient}$$

$$W(y; a_{s-1}, b, -t; \dots; a_1, b, -t)$$

Posons :

$$\int_0^{y_{i+1}} y_1^{a_s + a_j} (1 + y_1)^{-2b+1} e^{-2ty_1} dy_1 =$$

$$= F(y_{i+1}, a_s + a_j, 2b - 1, -2t)$$

$$U(x; q_s + q_{s-1}, r_s + r_{s-1} + 1, f_s f_{s-1}, \dots, q_s + q_1, r_s + r_1 + 1, f_s f_1) \text{ (i)}$$

devient donc

$$W(y; a_s + a_{s-1}, 2b - 1, -2t; \dots, a_s + a_1, 2b - 1, -2t) \text{ (i)}$$

En outre, il est évident que

$$I(x; q_s, r_s + 1, f'_s) = -q_s I(x; q_s, r_s, f_s) - t I(x; q_s, r_s - 1, f_s)$$

et la quantité $-t U(x; q_s, r_s - 1, f_s; \dots; q_1, r_1, f_1)$ donne :

$$-t W(x; q_s, b - 1, -t; q_{s-1}, b, -t; \dots; q_1, b, -t)$$

Par des transformations analogues, on déduit de la décomposition générale, le théorème suivant de Pillai :

$$W(y; a_k, b; a_{k-1}, b; \dots; a_1, b; -t) = \\ = (b - a_k - 1)^{-1} (p^{(k)} + Q^{(k)} + a_k R^{(k)} - t S^{(k)})$$

avec

$$p^{(k)} = -F_0(y; a_k, b-1, -t) W(y; a_{k-1}, b; \dots; a_1, b; -t)$$

$$Q^{(k)} = 2 \sum_{j=k-1}^1 F(y; a_k + a_j; 2b-1, -2t) *$$

$$* W(y; a_{k-1}, b; \dots; a_{j+1}, b; a_{j-1}, b; \dots; a_1, b; -t)$$

$$R^{(k)} = W(y; a_k - 1, b; a_{k-1}, b; \dots; a_1, b; -t)$$

$$S^{(k)} = W(y; a_k, b-1, a_{k-1}, b; \dots; a_1, b; -t)$$

Chapitre 3

Distribution approchée de la plus grande racine canonique.

Distribution exacte de la plus grande racine canonique.

La fonction de répartition de la plus grande racine canonique dans le cas où x_1 et x_2 sont indépendants, est donnée, à une constante près, par le pseudo déterminant :

$$\begin{aligned}
 &U(x; q+s-1, r; q+s-2, r; \dots, q, r) = \\
 &= -\frac{1}{q+s+r} I_0(x; q+s-1, r+1) U(x; q+s-2, r; \dots; q, r) \\
 &+ \frac{2}{q+s+r} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} U(x; 2(q+s)-3; 2r+1; \dots \\
 &\quad \dots 2(q+s)-4, 2r+1; 2q+s-1, 2r+1)^{(i)}
 \end{aligned}$$

obtenu à partir du pseudo déterminant général en posant :

$$\begin{aligned}
 q_s &= q+s-1 \\
 &\vdots \\
 q_1 &= q \\
 f_i &= r \quad \forall i \\
 f_j &= 1 \quad \forall j
 \end{aligned}$$

Cette distribution exacte a une forme compliquée, et le nombre de termes croît d'une façon si rapide qu'il rend impossible son écriture même, dès que s dépasse 6, s étant la dimension du plus petit des deux vecteurs intervenant dans une analyse canonique.

Distribution approchée et Formules de Pillai.

Jusqu'en décembre 1965, on ne disposait que des expressions approchées valables pour $s \leq 6$. De plus, pour chaque valeur de s , les

formules
visager
lait en et
les calcul
acte, av
approxim
intervient

E
pour tout
démonstr
récurr
J.P. PA
sions de

Pour les

Pr ($\theta_s <$

Pour les

Pr ($\theta_s <$

avec :

($m+n$

où k

k

que la

formules étaient totalement différentes. Il n'était donc pas possible d'envisager l'étude des cas comportant des valeurs de s plus élevées. Il fallait en effet, pour chaque nouvelle valeur de s , recommencer entièrement les calculs complexes de l'établissement de la fonction de répartition en acte, avant d'entreprendre l'approximation par la méthode de Pillai. Cette approximation consiste essentiellement à négliger les termes où $(1-x)$ intervient à une puissance supérieure à $2r+1$.

En décembre 1965, Pillai donne des formules approchées valables pour toute valeur de s . Nous reprenons ces formules sans en donner la démonstration. L'objet de ce chapitre est de présenter les formules de récurrence que nous avons dû établir lorsque nous avons entrepris, avec J.P. PAGES, de programmer, pour calculateur électronique, les expressions de Pillai.

Les formules de Pillai sont les suivantes :

Pour les cas où s est pair :

$$\Pr(\theta_s \leq x) \neq 1 + \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i k_{m+s-i} x^{m+s-i} (1-x)^{n+1}$$

Pour les cas où s est impair :

$$\Pr(\theta_s \leq x) \neq \frac{I(x; m, n)}{\beta(m+1, n+1)} + \sum_{i=1}^s (-1)^i k_{m+s-i} I_0(x; m+s-i, n+1)$$

avec :

$$(m+n+s-i+1) k_{m+s-i} = \left[\frac{C(s, m, n)}{C(s-1, m, n)} \binom{s-1}{i-1} \prod_{j=1}^i \left(\frac{2m+s-j+1}{2m+2n+2s-j+1} \right) + \right. \\ \left. - (m+s-i+1) k_{m+s-i+1} \right]$$

où $k_{m+s} = 0$

$$k_{m+s-1} = \frac{C(s, m, n)}{(m+n+s) C(s-1, m, n)}$$

L'expression de $C(s, m, n)$ étant celle donnée plus haut, ainsi que la définition des paramètres $s; m, n$.

Calcul des seuils de significativité pour le cas où s est pair.

Choissant un seuil de probabilité α

(par exemple $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$), nous cherchons le point de significativité pour les corrélations canoniques, soit x_α tel que

$$\Pr(\theta_s \leq x_\alpha) = 1 - \alpha$$

Ceci revient à résoudre l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i k_{m+s-i} x^{m+s-i} (1-x)^{n+1} + \alpha = 0$$

Posons :

$$k_{m+s-i} = \frac{C(s, m, n)}{C(s-1, m, n)} k'_{m+s-i}$$

On a :

$$k'_{m+s-1} = \frac{1}{m+n+s}$$

$$k'_{m+s} = 0$$

Posons ensuite, et cela pour simplifier les notations :

$$\frac{C(s, m, n)}{C(s-1, m, n)} = C'(s, m, n)$$

Nous obtenons l'égalité suivante :

$$C'(s, m, n) = \frac{\prod^{1/2} \Gamma(m+s+n+1) \Gamma(m+n+s+1/2)}{\Gamma(m+n+1+s') \Gamma(m + \frac{s+1}{2}) \Gamma(n + \frac{s+1}{2}) \Gamma(s')}$$

avec $s = 2s'$

La formule de récurrence suivante est facile à obtenir :

$$C'(s, m+1, n) = \frac{(m+n+s+1)(m+n+s+1/2)}{(m+n+s'+1)(m+s'+1/2)} C'(s, m, n)$$

Avec :

$$C'(s, 0, n) = \frac{(2n+s+1)(2n+s+2) \dots (2n+2s)}{2 \cdot (s-1)!}$$

Posons maintenant :

$$A''(i, m) = \binom{s-1}{i-1} \prod_{j=1}^{s-1} \left\{ \frac{(2m+s-j+1)n}{2m+2n+2s-j+1} \right\}$$

$$k''_{m+s-i} = \frac{n^i}{C'(s, m, n)} \quad k''_{m+s-i}$$

On obtient :

$$A''(i+1, m) = \frac{s-i}{i} \cdot \frac{(2m+s-i+1)}{(2m+2n+2s-i+1)} \cdot A''(i, m)$$

$$A''(2, m) = (s-1) \frac{(2m+s)n}{2m+2n+2s}$$

$$k''_{m+s-i} = \frac{n}{m+n+s-i+1} \left[A''(i, m) - (m+s-i+1) k''_{m+s-i+1} \right]$$

$$\text{avec } k''_{m+s-1} = \frac{n}{m+n+s}$$

Ces formules faciles à obtenir nous ont été indispensables dans la réalisation du programme de calcul électronique.

REMARQUE :

Considérons à nouveau les formules approchées de Pillai

On constate que :

pour $x = 1$ et $2s' = s$, on a

$\Pr (\theta_s \leq x) = 1$ ce qui est normal

mais pour $x = 0$ et $s = 2s'$ également, on a $\Pr (\theta_s \leq 0) = 1$

Ceci montre que ces formules ne sont pas valables sur tout l'intervalle $[0, 1]$, mais seulement pour les grandes valeurs de probabilités, c'est-à-dire pour les probabilités voisines de 1, comme l'indique Pillai. C'est pour cette raison que nous avons systématiquement recherché, parmi les multiples racines éventuelles de l'équation

$$\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i k_{m+s-i} x^{m+s-i} (1-x)^{n+1} + \alpha = 0$$

celle qui est la plus grande. Nous pensons ainsi nous être mis dans des conditions de validité des approximations de Pillai. Pour localiser cette plus grande racine, nous avons cherché la plus grande racine du polynome dérivé, racine telle que le polynome

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i k_{m+s-i} x^{m+s-i} (1-x)^{n+1} + \alpha \text{ soit négatif.}$$

Un autre avantage de ce polynome dérivé $f'(x)$ est de comporter $x^m (1-x)^{n+1}$ en facteur, ce qui nous permet de réduire le degré de cette équation.

On peut alors établir l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i A''(i, m) (nx)^{s-i} + (m+i) k''_{m+1} = 0 \right\} \quad [1]$$

C'est cette dernière équation qui a été utilisée. [2]

[3]

[4]

CONCLUSION

Ce travail est une mise au point des travaux relatifs à la significativité de la plus grande racine canonique.

La significativité des autres racines canoniques s'en déduit :

On considère la deuxième racine comme la plus grande corrélation canonique de la variable conditionnelle obtenue en maintenant constant le couple (ξ, η) des premières variables canoniques ; et ainsi de suite... il faut donc ici modifier les valeurs des paramètres s, m, n , entrées des abaques.

Au cours de la revue des travaux relatifs à la détermination de la fonction de répartition de la plus grande racine canonique nous nous sommes trouvés en face de deux pseudo-déterminants différents. Les éléments de ces déterminants sont des intégrales ; le premier W a été étudié par PILLAI (PILLAI 1965) ; le deuxième U encore noté β a été introduit par S.N. ROY. Dans cette étude nous avons présenté ces deux pseudo-déterminants comme des cas particuliers d'une formulation plus générale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON (T.W.) - 1957. « *Introduction to multivariate statistical analysis* ». J. Wiley.
- [2] DUGUE (D.) - *Traité de statistique théorique et appliquée* ». Masson.
- [3] FISHER (R.A.) - 1939. « *The sampling distribution of some statistics obtained from non-linear equations* ». *Ann. Eugen.* London 9.
- [4] HECK (D.L.) - 1960. « *Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root* ». *Ann. of Math. Stat.* 31.

- [5] HSU (P.L.) – 1939. « On the distribution of roots of certain determinantal equations ». *Ann. Eugenics* V. 9. [18]
- [6] HURON (R.) – *Cours de statistique mathématique*. Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Année 1963-1964. [19]
- [7] DELTHEIL (R.) et HURON (R.) – 1959. « *Statistique mathématique* ». C.A.C. Paris. [20]
- [8] KENDALL (M.G.) – « *The advanced theory of statistics* ». Griffin-London. [21]
- [9] KENDALL (M.G.) – 1957. « *A course in multivariate analysis* ». Griffin - London. [22]
- [10] LEDERMANN (S.) – 1964. « Alcool, Alcoolisme, Alcoolisation ». *Cahier de l'Institut National d'Etudes démographiques*. [23]
- [11] LEDERMANN (S.) – *Cours de 3ème cycle sur l'Analyse multivariée et applications*. Année 1964-1965. [24]
- [12] LEFEVRE (J.) et RICORDEAU (G.) – 1966. « *Corrélations génétiques entre les performances laitières et la conformation dans les races montbéliarde et normande* ». IXème Congrès International de Zootechnie - Edimbourg, Août 1966. [25]
- [13] NANDA (D.N.) – 1948. « Distribution of a root of a determinantal equation ». *Ann. Math. Stat.* V. 19. [26]
- [14] PILLAI (K.C.S.) – 1954. « *On some distribution problems in multivariate analysis*. Institute of Statistics University of North Carolina.
- [15] PILLAI (K.C.S.) – 1955. « *Some non test criteria in multivariate analysis* ». *Ann. Math. Stat.* 26.
- [16] PILLAI (K.C.S.) – 1956 a. « *On the distribution of the largest or the smallest root of a matrix in multivariate analysis* ». *Biometrika* 43.
- [17] PILLAI (K.C.S.) – 1956 b. « *Some results useful in multivariate analysis* ». *Ann. Math. Stat.* 27.

- [18] PILLAI (K.C.S.) et BANTEGUI (G.) – 1959. « On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis ». *Biometrika* 51.
- [19] PILLAI (K.C.S.) – 1964. « On the distribution of the largest of seven roots of a matrix in multivariate analysis ». *Biometrika* 51.
- [20] PILLAI (K.C.S.) – « On the distribution of the largest characteristic root of a matrix in multivariate analysis ». *Biometrika* 52.
- [21] ROUVIER (R.) et RICARD (F.H.) – 1965. « Etude des mesures de conformation du poulet ». *Ann. Zootech. Inst. Nat. de la Recherche Agronomique*. 14 (2) 191-212 et 14 (2) 227.
- [22] ROUVIER (R.) et RICARD (F.H.) – 1966. « Etude des mesures de conformation du poulet. III. Analyse de la variabilité phénotypique des mensurations de carcasse de coquelets Bresse-Pile ». *Ann. Zootech.* 15, 67-84.
- [23] RICARD (F.H.) – 1966. *Ann. Zootech.* 15 (sous presse).
- [24] ROY (S.N.) – 1945. « The individual sampling distribution of the maximum, the minimum and any intermediate of the p-statistics on the nul hypotheses ». *Sankhya* - 7, 138-58.
- [25] ROY (S.N.) – 1957. « *Some aspects of multivariate analysis* ». J. Wiley - New-York.
- [26] SEAL (H.) – 1964. « *Multivariate statistical Analysis for biologists* ». Methven - London.