HAL
open science

Décomposition spectrale de la C * -algèbre réduite d'un groupe de Lie semi-simple réel L'exemple de SL2(R)

Damien Rivet

▶ **To cite this version:**

Damien Rivet. Décomposition spectrale de la C * -algèbre réduite d'un groupe de Lie semi-simple réel L'exemple de SL2(R). Université Clermont Ferrand 2 Blaise Pascal. 2016. hal-04085185

HAL Id: hal-04085185

https://hal.science/hal-04085185

Submitted on 28 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition spectrale de la C^*-algèbre réduite d'un groupe de Lie semi-simple réel L'exemple de $SL_2(\mathbb{R})$

Damien Rivet

28 août 2016

Mémoire de Master 2
Sous la direction de Robert Yuncken

Université Blaise Pascal
Clermont-Ferrand

Table des matières

1 Les groupes de Lie semi-simples réels **5**
1.1 Les groupes de Lie : généralités 5
1.1.1 Définitions 5
1.1.2 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie 6
1.2 Les groupes de Lie semi-simples : structure 8
1.2.1 Décomposition d'Iwasawa 8
1.2.2 Sous-groupes paraboliques et décomposition de Langlands 9
1.2.3 Représentations K-admissibles 10

2 Induction parabolique et C^*-modules de Hilbert **11**
2.1 Les C^*-modules de Hilbert 11
2.2 Le module d'induction $\mathcal{E}(G/N)$ 12
2.3 Induction parabolique : l'approche classique 17
2.4 Induction parabolique : l'approche globale 19
2.5 Les opérateurs compacts sur les C^*-modules de Hilbert 20
2.6 Décomposition de $C_r^*(G)$ 22
2.7 Structure des composantes $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et conclusion 26

3 Le cas de $SL_2(\mathbb{R})$ **30**
3.1 Les différents (g, K)-modules simples 30
3.2 Les modules associés à la série principale 34
3.3 Unitarisabilité des $(\mathfrak{g}, K)$-modules 40
3.4 La série discrète 42
3.5 Le dual unitaire tempérée de $SL_2(\mathbb{R})$ 43

[9]

Résumé

Cet exposé a pour but de présenter une partie de la théorie des représentations des groupes de Lie semi-simples notamment le foncteur d'induction parabolique. On utilise pour cela les C^*-modules de Hilbert et on suit la construction présentée dans l'article [1]. On admet pour cela les principaux théorèmes concernant les représentations tempérées des groupes de Lie semi-simples. La première partie consiste en un énoncé des résultats généraux sur groupes de Lie semi-simples et de tous les objets nécessaires pour la suite, on ne donne aucune preuve explicite. La troisième partie est une illustration de la théorie autour du cas de $SL(2,\mathbb{R})$ et suit la construction proposée dans [6]. On y démontre à la main la plupart des résultats admis pour la théorie générale (la notation *admis** signifie qu'un résultat est démontré seulement pour $SL(2,\mathbb{R})$). Enfin la deuxième partie consiste en la construction de l'induction parabolique pour les modules de Hilbert et la décomposition spectrale de la C^*-algèbre réduite d'un groupe de Lie semi-simple réel associé à l'opérateur de Fourier.

Introduction

Lorsque l'on cherche à établir les liens entre un groupe localement compact G et son dual unitaire $\hat{G}$, un moyen puissant est l'étude de la C^*-algèbre de G $C^*(G)$. Si G est abélien ces liens s'expriment bien au moyen de la dualité de Pontryagin qui fournit une équivalence entre $C^*(G)$ et $C_0(\hat{G})$ et donne lieu à toute la théorie de l'analyse harmonique commutative. Cependant dès que G n'est plus abélien, $\hat{G}$ et bien moins homogène et n'a pas de structure naturelle de groupe. On peut malgré cela toujours étudier le célèbre opérateur $\mathcal{F}$ qui a une fonction $f \in L^1(G)$ associe une fonction $\hat{f}$ sur $\hat{G}$ telle que pour $\pi \in \hat{G}$

$$\hat{f}(\pi) = \pi(f).$$

Il s'agit alors, comme dans le cas abélien, de munir $\hat{G}$ d'une topologie convenable qui rend une telle fonction $\hat{f}$ continue et qui coïncide avec celle déjà définie quand G est abélien. C'est en fait la topologie de Fell, définie habituellement sur $C*\hat{}(G) = \hat{G}$, mais dans notre cas on va la retrouver à partir du dual de certains sous-groupes abéliens de G bien choisis.

Notre cas est celui où G est une groupe de Lie semi-simple réel. Il apparaît alors que l'étude des représentations de G peut être en grande partie ramenée à celle de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On se restreint également à la description de la la C^*-algèbre réduite de G, $C^*_r(G)$. On définit ainsi $\hat{G}_r = C^*_r\hat{}(G)$. Les représentations de G qui constituent $\hat{G}_r$ sont dites « tempérées » et elles se construisent toutes à partir du processus d'induction parabolique : Étant donné un sous-groupe parabolique $P = MAN$ de G, une représentation de carré intégrable σ de M et φ un caractère de A, on obtient une représentation $\sigma \otimes \varphi \otimes 1$ de P, avec laquelle on peut construire la représentation induite $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi \otimes 1$. On appelle la famille $(\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \phi \otimes 1)_{\varphi \in \hat{A}}$ P-série associée à σ. Un résultat profond, dû à Harish-Chandra, est le fait que $\hat{G}_r$ est la réunion (à équivalence près) des P-séries pour chaque sous-groupe parabolique $P = MAN$ et chaque représentation de carré intégrable (H_σ, σ) de M. Ainsi, la connaissance des représentations

de carré intégrable d'un tel groupe M (réductif) est un enjeu crucial, puisque c'est autour d'elles que se bâtit $\hat{G}_r$. De plus on remarque qu'une P-série dépend essentiellement du facteur de Levi $L = MA$ et qu'il existe plusieurs sous-groupe paraboliques de même facteur de Levi, on travaille ainsi souvent dans G/N.
La construction des P-séries ne donne en premier lieu qu'à une description point par point de $\hat{G}_r$ et il se trouve qu'une P-série dépend « continûment » du paramètre $\varphi \in \hat{A}$. Pour donner un sens à cela on va utiliser l'outil des C^*-modules de Hilbert, qui sont une généralisation des espaces de Hilbert, ils permettent de factoriser des familles de représentations : avec une représentation (H_σ, σ) de M comme précédemment, on peut aisément définir une structure de $C_r^*(L)$-module à gauche sur l'espace $\mathcal{H}_\sigma = C_0(\hat{A}, H_\sigma)$ qui est naturellement un $C_0(\hat{A})$-module à gauche et sur lequel on peut définir le « produit scalaire »point par point à valeur dans $C_0(\hat{A})$. De telle manière $\mathcal{H}_\sigma$ est appelé $C_0(\hat{A})$-module de Hilbert et sa structure de $C_r^*(L)$-module à gauche permet de le qualifier de « représentation »de $C_r^*(L)$. En suite, on construit le $C_r^*(L)$-module de Hilbert $\mathcal{E}(G/N)$, qui ne dépend que du choix d'un sous-groupe parabolique $P = MAN$, appelée **module d'induction**. Cela permet de construire le $C_0(\hat{A})$-module de Hilbert $\mathcal{E}(G/N) \otimes^*_{C\ r}(L)\mathcal{H}_\sigma$, qui est une représentation de $C_r^*(G)$. Par laquelle se factorise toutes les représentations de la P-série associée à σ.
Finalement, cela permet de ré-exprimer l'opérateur $\mathcal{F}$ de telle sorte que la fonction $\hat{f}$ sera une combinaison linéaire d'éléments de $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(H_\sigma))$, pour chaque choix possible d'un sous-groupe parabolique d'une classe de conjugaison d'un sous-groupe de Levi $L = MA$ et d'une classe de représentations $[\sigma]$ de M.

1 Les groupes de Lie semi-simples réels

Tous les résultats énoncés dans cette partie sont détaillés dans [7].

1.1 Les groupes de Lie : généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Un* ***groupe de Lie*** *réel un groupe G muni d'une structure de variété différentielle réel telle que les applications produit $G \times G \to G$ et inverse $G \to G$ sont C^∞.*

Remarque : Dans tout cet exposé, on parlera simplement de groupe de Lie pour désigner un groupe de Lie réel.

Définition 1.2. *Un* ***sous-groupe de Lie*** *H d'un groupe de Lie G, est un groupe de Lie, sous-groupe de G telle que l'inclusion $H \hookrightarrow G$ est une immersion.*

Définition 1.3. *Soit G et H des groupes de Lie, on appelle morphisme de groupe de G dans H une application $G \to H$ qui est un morphisme de groupe ainsi qu'une application C^∞.*

Définition 1.4. *Soit G un groupe de Lie, on appelle* ***représentation unitaire*** *de G la donnée d'un espace de Hilbert V et d'un morphisme de groupe $\pi : G \mapsto U(V)$ tel que pour tout $v \in V$ l'application*

$$g \mapsto \pi(g)v$$

est continue sur G.

Définition 1.5. *Soit G un groupe de Lie, (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations unitaires de G. On appelle* ***opérateur d'entrelacement*** *un opérateur borné $T : V_1 \to V_2$ tel que pour tout $g \in G$,*

$$T\rho_1(g) = \rho_2(g)T.$$

*S'il existe un tel T et qu'il est de plus isométrique, on parle d'****équivalence unitaire*** *entre V_1 et V_2.*

Définition 1.6. *On appelle* ***dual unitaire*** *d'un groupe topologique G l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalences unitaires de représentation irréductible de G.*

Proposition 1.7. *Soit G un groupe topologique, il existe une unique (à proportion près) mesure borélienne μ sur G telle que pour tout $f \in C_c(G)$ et $h \in G$*

$$\int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$$

On appelle μ la ***mesure de Haar*** *du groupe topologique G.*

Remarque : En général on notera simplement cette mesure $\mathrm{d}g$.

Proposition 1.8. *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1(G,\mu)$ munit du produit de convolution défini pour $f,h \in L^1(G,\mu)$*

$$f * h(x) = \int_G f(g)h(g^{-1}x)$$

et de l'involution

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})},$$

est une algèbre de Banach involutive.

Définition 1.9. *La C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G,\mu)$ est noté $C^*(G)$ et on l'appelle C^*-algèbre du groupe topologique G.*

Définition 1.10. *L'algèbre involutive $L^1(G,\mu)$ se plonge (algébriquement) dans $B(L^2(G))$ via l'action par convolution à gauche, on appelle C^*-algèbre réduite du groupe topologique G et on note $C^*_r(G)$ la sous-C^*-algèbre engendré par l'image de $L^1(G,\mu)$ dans $B(L^2(G))$.*

*On appelle **représentation de carré intégrable** de G les sous-représentations de la représentation régulière $L^2(G)$.*

Définition 1.11. *On appelle **représentation tempérée** de G les éléments de l'ensemble $\hat{G}_r = \hat{G} \cap \widehat{C^*_r(G)}$.*

Remarque : On rappelle qu'il existe une bijection naturelle entre $\hat{G}$ et $\widehat{C^*(G)}$ et une inclusion naturelle de $\widehat{C *_r (G)}$ dans $\widehat{C * (G)}$, ce qui assure le sens de la définition précédente.

1.1.2 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Définition 1.12. *Soit G un groupe de Lie, on appelle **algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$ de G l'espace tangent à G en l'identité : $\mathfrak{g} = T_eG$.*

Remarque : Plus précisément, on l'appelle ainsi lorsqu'il est muni d'une structure d'algèbre de Lie que l'on va définir.

Soit G un groupe de Lie et $g \in G$, l'application Ψ_g de conjugaison par G est une application C^∞ qui stabilise l'identité. Ainsi on définit

$$Ad(g) = D_e\Psi_g \ : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Proposition 1.13. *L'application $Ad : G \to End(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes de Lie.*

On définit alors

$$ad = D_eAd : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

et on note pour $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$[X,Y] = ad(X)(Y).$$

Proposition 1.14. *$(\mathfrak{g}, [,])$ est une algèbre de Lie.*

Proposition 1.15. *Soit G un groupe de Lie, H une sous-groupe de Lie de G, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Remarque : Pour le groupe de Lie $GL_n(\mathbb{R})$, le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ coïncide avec le commutateur.

Définition 1.16. *On appelle* ***groupe à un paramètre*** *d'un groupe de Lie G, un morphisme de groupe de Lie $\phi : \mathbb{R} \to G$*

Proposition 1.17. *Soit G un groupe de Lie, il existe une unique application C^∞ $\exp : \mathfrak{g} \to G$, telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ l'application*

$$t \mapsto \exp(tX)$$

est un sous-groupe à un paramètre de G et

$$D_0 \exp = id_{\mathfrak{g}}$$

Remarque : Lorsque G est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, cette application coïncide avec la définition classique de l'exponentielle.

Définition 1.18. *Soit G un groupe de Lie et (V, ρ) une représentation unitaire, on dit que $v \in V$ est* ***différentiable*** *si l'application*

$$g \mapsto \rho(g)v$$

est différentiable.

Proposition 1.19. *Le sous-ensemble V^∞ de V, constitué des vecteurs différentiables de V, est un sous-espace dense de V.*

Remarque : L'exemple fondamental est le cas de la représentation régulière de G, $L^2(G)$, où l'espace en question est $C^\infty(G)$, qui est bien dense dans $L^2(G)$.

On peut définir une application $\mathfrak{g} \to End_{\mathbb{R}}(V^\infty)$, que l'on note encore ρ définie pour $X \in \mathfrak{g}$et $v \in V^\infty$ par

$$\rho(X)v = \frac{d}{dt}_{|t=0} \rho(\exp(tX))v.$$

Proposition 1.20. *Le couple (V^∞, ρ) est une représentation de lalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

A l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on associe son algèbre de Lie complexifiée

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

Avec une inclusion naturelle $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On peut alors prolonger ρ à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité et obtenir une représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sur V^∞.

Si on note $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur V. Observons que de la relation

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \langle u, v \rangle \ \ \forall u, v \in H, \forall g \in G.$$

on déduit la relation suivante pour la représentation dérivée de $\mathfrak{g}$:

$$\langle \rho(X)u, v \rangle + \langle u, \rho(X)v \rangle \, \forall u, v \in V^\infty, \forall X \in \mathfrak{g}$$

Ainsi pour $X \in \mathfrak{g}_0$, on a $\rho(X) = -\rho(X)^*$.
Remarque : L'opérateur $\rho(X)$ est **non-borné**, il est seulement défini sur V^∞. On peut cependant définir l'involution * comme dans le cas borné. Si un tel opérateur T vérifie $T^* = T$ on dit également qu'il est auto-adjoint et si T admet deux vecteurs propres u et v de valeurs propres distinctes, alors on a $\langle u, v \rangle = 0$, comme dans le cas borné.

1.2 Les groupes de Lie semi-simples : structure

1.2.1 Décomposition d'Iwasawa

Définition 1.21. *Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple (resp. réductive, resp. nilpotente), on dit que G est* ***semi-simple*** *(resp.* ***réductif****, resp.* ***nilpotent****).*

Pour le reste de cette première partie, on suppose G connexe.

Proposition 1.22. *Soit G un groupe de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Il existe un automorphisme $\theta : G \to G$ tel que $\Theta^2 = 1$ et tel que le sous-groupe $K = \{g \in G, \Theta g = g\}$ est un sous-groupe de Lie compact maximal dans G.*

Remarque : Une telle application n'est pas unique et il en existe autant que de sous-groupes compacts maximaux (qui sont de la forme gKg^{-1}).
On définit pour $X \in \mathfrak{g}$, $\theta(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\Theta \exp(tX)$.

Proposition 1.23. *L'application θ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\theta^2 = 1$.*

Remarque : Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, $g \mapsto {}^t g^{-1}$ et $X \mapsto -{}^t X$, vérifient cette défintion. Dans ce cas $K = G \cap O_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta x = x\}$ et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta x = -x\}$.

Proposition 1.24. *On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K.*

Proposition 1.25. *Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ abélienne telle que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$.*

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on note $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \lambda(H)X\}$. Si $\lambda \neq 0$ et $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ alors λ est appelée **racine restreinte** de $\mathfrak{g}$. On note $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.26. *On a*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$,
2. $\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$,
3. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, *où* $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ *est réductive dans* $\mathfrak{g}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est semi-simple complexe, on peut donc définir Φ l'ensemble de ses racines (par rapport à la sous-algèbre de Lie torale $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$: On a une bijection $\Phi \to \Sigma$ qui correspond à la restriction à $\mathfrak{a}$. On peut ainsi munir Σ d'une structure de système de racines.
Choisissons l'ensemble Σ^+ des racines positives de Σ et notons $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$.
Soit $X = H + X_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} X_\lambda \in \mathfrak{g}$ avec $H \in \mathfrak{a}$, $X_0 \in \mathfrak{m}$, $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$. On peut écrire X sous la forme

$$X = X_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_{-\lambda} + \theta X_{-\lambda}) + H + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_\lambda - \theta X_{-\lambda}).$$

On a $\theta \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_{-\lambda} + \theta X_{-\lambda}) = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_{-\lambda} + \theta X_{-\lambda})$ donc $X_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_{-\lambda} + \theta X_{-\lambda}) \in \mathfrak{k}$, $H \in \mathfrak{a}$ et puisque $\theta X_{-\lambda} \in \mathfrak{g}_\lambda$ on a $\sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_\lambda - \theta X_{-\lambda}) \in \mathfrak{n}$. Ainsi,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Il n'est pas immédiat de déduire d'une décomposition de $\mathfrak{g}$ une décomposition au niveau du groupe G, mais on a le résultat suivant : Il existe des groupes de Lie A et N d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ tels que

Proposition 1.27. *(Décomposition de Iwasawa) On a $G = KAN$ et l'application*

$$\begin{aligned} K \times A \times N &\to G \\ (k, a, n) &\mapsto kan \end{aligned}$$

est un C^∞-difféomorphisme.

Remarque : Pour $G = SL(n, \mathbb{R})$, on a une telle décomposition en prenant $K = SO(n, \mathbb{R})$, A le groupe des matrices diagonales positives et N le groupe des matrices triangulaires supérieures et cette décomposition coïncide avec le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Le groupe M correspond quant à lui aux matrices diagonales d'entrées 1 ou -1.
On note de plus $M = Z_K(A)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ et on note que les groupes M et A normalisent N. Dans ce qui suit, les groupes que l'on vient de définir seront notés $M_\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ et $N_\mathfrak{p}$ pour rappeler qu'ils dépendent du choix d'une involution θ.

1.2.2 Sous-groupes paraboliques et décomposition de Langlands

Lorsqu'on fait le choix d'un sous-groupe maximal K et des racines positives Σ^+, on obtient donc des groupes $M_\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ et $N_\mathfrak{p}$ (d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$) et une décomposition de Iwasawa $G = KA_\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}$. On définit $P_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}$ le sous-groupe **parabolique minimal** de G relativement à K.

Remarque : Avec cette définition, $gP_\mathfrak{p}g^{-1}$ est le sous-groupe parabolique minimal assossié à gKg^{-1}.

Définition 1.28. *Un sous-groupe de Lie P de G qui contient un sous-groupe parabolique minimal est appelé sous-groupe* ***parabolique*** *de G.*

Soit P un sous-groupe parabolique relativement à K d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$. Évidemment $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{s}$, mais on a un résultat bien plus précis :

Proposition 1.29. *Il existe un sous-ensemble $\Gamma_\mathfrak{s}^+ \subset \Sigma^+$ tel que*

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n},$$

avec $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma_\mathfrak{s}^+} \mathfrak{g}_\lambda$,
$\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \cup \theta\mathfrak{s}$.

On note de plus $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap Z_\mathfrak{l}$.

Proposition 1.30. *Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ et pour tout $\lambda \in \Sigma^+ \backslash \Gamma_\mathfrak{s}$:*

$$\mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda} \subset \mathfrak{m}.$$

Il existe des groupes de Lie A, N et M d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}$ tels que

Proposition 1.31. *(décomposition de Langlands) On a $P = MAN$ et l'application*

$$\begin{aligned} M \times A \times N &\to P \\ (m, a, n) &\mapsto man \end{aligned}$$

est un C^∞-difféomorphisme.

Remarque : les groupes M, A et N dépendent ici du choix d'un sous-groupe parabolique, pour alléger les notations on omet de les noter M_P, A_P et N_P, de plus ils ne coïncident avec les groupes $M_\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ et $N_\mathfrak{p}$ que lorsqu'on a précisément $P = \mathrm{M}_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} N_\mathfrak{p}$.

1.2.3 Représentations K-admissibles

Soit G un groupe de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et K un sous-groupe compact maximal et $G = KA_\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}$ la décomposition d'Iwasawa correspondante.
Soit (V, ρ) une représentation unitaire de G, on note (V^∞, ρ) la représentation dérivée de $\mathfrak{g}$. L'espace V^∞ est stable par G, cependant dès lors que V n'est pas de dimension finie, V^∞ n'a pas de base dénombrable et cela rend son étude compliquée en tant que représentation de $\mathfrak{g}$, où le travail est purement algébrique. Contrairement à l'étude de la représentation V de G où les outils d'analyse hilbertienne simplifie les choses.

En particulier, (V^∞, ρ) est une représentation de K qui est un groupe compact, on peut ainsi décomposer V^∞ selon toutes ses sous-représentation π de K irréductibles :

$$V^\infty = \sum_\pi V_\pi^\infty.$$

On note $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles de K, on considère alors pour $\sigma \in \hat{K}$

$$V_\sigma = \sum_{[\pi]=\sigma} V_\pi^\infty,$$

Définition 1.32. *Si les espaces V_σ sont de dimensions finies, on dit que la représentation est **K-admissible**.*

on a donc $V^\infty = \sum_{\sigma \in \hat{K}} V_\sigma$. Enfin on note

$$V_K = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} V_\sigma.$$

On appelle V_K l'ensemble des vecteurs **K-finis**. Cet espace est stable $\mathfrak{g}$. Mais il ne l'est pas par G. Un tel module est appelé $(\mathfrak{g}, K)$-module.

On conclut ce paragraphe avec un résultat fondamental.

Théorème 1.33. *Soit (V, ρ) une représentation unitaire de G, V est irréductible si et seulement si V_K est un $(g_\mathbb{C}, K)$-module simple.*

Soit (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations unitaires irréductibles de G sont équivalentes si et seulement si les modules V_{1K} et V_{2K} sont équivalents.

2 Induction parabolique et C^*-modules de Hilbert

Comme on l'a annoncé dans l'introduction, les C^*-modules de Hilbert généralisent les espaces de Hilbert et ils sont bien adapté à la théorie des représentations : Si $\mathcal{H}$ est un C^*-module de Hilbert, on peut définir un analogue aux opérateurs sur un espace de Hilbert : l'espace $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés adjoitables de $\mathcal{H}$. Qui est une C^*-algèbre.
Etant donné C une C^*-algèbre et (H_i) une famille de représentation de C, il peut arriver que la famille (H_i) se factorise par un C^*-module de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout i on a des $*$-homomorphismes

$$C \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to B(H_i),$$

telle que la composée soit la représentation $C \to B(H_i)$. Et où l'espace $\mathcal{H}$ est beaucoup plus maniable que $\sum_i H_i$. On retrouvera de tels schémas lorsqu'on traitera le cas des P-séries, qui sont l'objet principal de cet exposé.

2.1 Les C^*-modules de Hilbert

Pour plus de détails sur les définitions, on renvoie à [9].

Définition 2.1. *Soit A une C^*-algèbre et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une structure de A-module à droite, compatible avec l'action de $\mathbb{C}$:*
$\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$, pour $x \in E$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
*On appelle **produit scalaire de A-module** une application*
$\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$ telle que :

$$\begin{aligned}
\langle x, \alpha y + \beta z\rangle &= \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x, z\rangle && x, y, z \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\\
\langle x, ya\rangle &= \langle x, y\rangle a && x, y \in E,\ a \in A,\\
\langle y, x\rangle &= \langle x, y\rangle^* && x, y \in E,\\
\langle x, x\rangle &\geq 0 \text{ et si } \langle x, x\rangle = 0 \text{ alors } x = 0 && x \in E.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'un élément $a \in A$ est dit positif (on note $a \geq 0$) si $a^* = a$ et si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$

Lemme 2.2. *Soit E un tel espace, pour $x, y \in E$ on a*

$$\langle y, x\rangle \langle x, y\rangle \leq \| \langle x, x\rangle \|_A \langle y, y\rangle .$$

Proposition 2.3. *L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in E$ par*

$$\|x\| = \| \langle x, x\rangle \|_A^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur E.

Définition 2.4. *Un tel espace E, complet par rapport à $\|.\|$, est appelé un C^*-**module de Hilbert** sur A ou plus simplement un A-module de Hilbert.*

Remarque : Un tel espace est donc un espace de Banach.

Définition 2.5. *Soit A une C^*-algèbre et $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ des A-modules de Hilbert, on note $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'espace des opérateurs continus T de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ qui possède un adjoint T^* tel que pour tout $v_1 \in \mathcal{H}_1$ et $v_2 \in \mathcal{H}_2$*

$$\langle Tv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, T^* v_2 \rangle .$$

On peut voir que si $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ alors il est A-linéaire :
$\forall v_1 \in \mathcal{H}_1, v_2 \in \mathcal{H}_2, \langle T(v_1 a), v_2 \rangle = a \langle v_1, T^* v_2 \rangle = \langle (Tv_1)a, v_2 \rangle$.

Définition 2.6. *Soit B et C des C^*-algèbres et $\mathcal{H}$ un C-module de Hilbert. Supposons de plus qu'on a un $*$-homomorphisme*

$$\phi \ : \ B \to B(\mathcal{H}),$$

*Alors $\mathcal{H}$ est appelé **correspondance** de B à C.*

De cette façon $\mathcal{H}$ est également muni d'une structure de B-module. Soit $\mathcal{E}$ un B-module de Hilbert, on peut définir le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes_B^{alg} \mathcal{H}$, qui comme la notation l'indique, est une objet principalement algébrique, que l'on va compléter à l'aide d'un produit scalaire bien choisi. On note $\langle \ , \ \rangle_B$ le produit scalaire de $\mathcal{E}$ et $\langle \ , \ \rangle_C$ celui de $\mathcal{H}$. On appelle produit scalaire intérieur sur $\mathcal{E} \otimes_B^{alg} \mathcal{H}$ l'application définie par

$$\langle e_1 \otimes v_1, e_2 \otimes v_2 \rangle = \langle v_1, \phi(\langle e_1, e_2 \rangle_B) v_2 \rangle_C .$$

Proposition 2.7. *L'application $\langle \ , \ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E} \otimes_B^{alg} \mathcal{H}$ à valeurs dans C. On note $\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{H}$ le C-module de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{E} \otimes_B^{alg} \mathcal{H}$ par rapport à la norme induite par $\langle \ , \ \rangle$.*

2.2 Le module d'induction $\mathcal{E}(G/N)$

On commence par un complément sur les mesures de Haar.

Proposition 2.8. *Soit G un groupe topologique et μ une mesure de Haar. Il existe un homomorphisme continu $\Delta : G \to R_+^*$ tel que pour tout $f \in C_c(G)$ et $h \in G$*

$$\int_G f(gh) \mathrm{d}\mu(g) = \Delta(h)^{-1} \int_G f(g) \mathrm{d}\mu(g)$$

*On appelle Δ la **fonction modulaire** associée à au groupe topologique G. Si $\Delta = 1$, on dit que G est **unimodulaire**.*

Proposition 2.9. *Soit G un groupe de Lie. Si G est réductif ou nilpotent, alors G est unimodulaire.*

Définition 2.10. *Soit H un groupe topologique X un espace topologique. On dit que X est un espace G-**homogène** si il est muni d'une action continue de H.*

Proposition 2.11. *Soit X un espace H-homogène tel que X/H soit paracompact. Alors il existe une fonction $\psi \in C(X)$ telle que pour tout $x \in X$*

$$\int_H f(g.x)\mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

On appelle une telle fonction ***section de Bruhat****.*

Commentaire : Cette définition est très approximative. Les sections de Bruhat sont des objets techniques puissants, mais dont la construction fait appel à des notions d'analyse poussée. On renvoie à [Bourbaki, Intégration 7, Partie 4, Proposition 8].

Soit maintenant G un groupe de Lie semi-simple $P = MAN$ un sous-groupe parabolique de G. On a vu que $L = MA$ normalise N.

Proposition 2.12. *Il existe un homomorphisme $\delta : L \to \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $l \in L$*

$$\int_N f(lnl^{-1})\mathrm{d}n = \delta(l)^{-1}\int_N f(n)\mathrm{d}n.$$

Remarque : On devrait en toute rigueur le noter δ_L mais on simplifie la notation.
On démontre ce résultat pour $SL_2(\mathbb{R})$ car il est essentiel pour la classification de ses représentations.

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in A$ Pour $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t^2 b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_N f(ana^{-1})\mathrm{d}n &= \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & t^2 b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}b \\ &= t^{-2} f(n)\mathrm{d}n.\end{aligned}$$

On trouve donc $\delta\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = t^2$ et $\delta(-1) = 1$, donc δ est bien un homomorphisme sur L. □

Considérons maintenant l'espace quotient G/N, On peut le munir de l'action de G par multiplication à gauche. Il est également muni d'une action par multiplication à droite par L, qui est bien définie car L normalise N :

$$(xN).l = xlN.$$

De cette façon, l'action à gauche et à droite commutent.

Proposition 2.13. *L'espace homogène G/N admet une mesure μ invariante par G à gauche : pour $g \in G$ on a*

$$\int_{G/N} f(gx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{G/N} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

De plus il existe un homomorphisme continu $\delta : L \to \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $l \in L$:

$$\int_{G/N} f(xl)\mathrm{d}\mu(x) = \delta(l)^{-1} \int_{G/N} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Démonstration. Soit ψ une section de Bruhat pour l'action de N sur G. On définit la mesure pour $F \in C_c(G/N)$ par

$$\int_{G/N} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(gN)\psi(g)\mathrm{d}g.$$

En majorant l'intégrale de gauche par

$$\int_{KMAN} f(kmaN)\psi(kman)\mathrm{d}k\mathrm{d}m\mathrm{d}a\mathrm{d}n = \int_{KMA} f(kmaN)\mathrm{d}k\mathrm{d}m\mathrm{d}a < \infty,$$

on voit que μ est bien définie. Cette définition ne dépend pas du choix de ψ. On a également pour $h \in G$

$$\begin{aligned}\int_{G/N} f(hx)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G f(hgN)\psi(g)\mathrm{d}g \\ &= \int_G f(gN)\psi(h^{-1}g)\mathrm{d}g\end{aligned}$$

Il faut maintenant remarquer que $\psi(h^{-1}.)$ est une section de Bruhat : On a pour $g \in G$

$$\int_N \psi(h^{-1}gn) = \int_N \psi((h^{-1}g)n) = 1.$$

Donc, puisque la définition de μ ne dépend pas du choix d'une section de Bruhat, on a bien

$$\int_{G/N} f(gx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{G/N} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

En suite on a pour $l \in L$

$$\begin{aligned}\int_{G/N} f(xl)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G f(glN)\psi(g)\mathrm{d}g \\ &= \int_G f(gN)\psi(gl)\mathrm{d}g \\ &= \delta(l)^{-1} \int_G f(gN)\psi(lg)\mathrm{d}g \\ &= \delta(l)^{-1} \int_{G/N} f(x)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

où la dernière ligne découle de la même observation que précédemment. □

On s'intéresse maintenant à l'espace $C_c(G/N)$. On peut naturellement le munir d'une action à droite par L : pour $l \in L$ et $f \in C_c(G/N)$,

$$(f.l)(xN) = \delta(l)^{-\frac{1}{2}} f(xl^{-1}N).$$

On étend alors cette action à $C_r^*(L)$, qu'on note par convolution : cela donne pour $f \in C_c(G/N)$ et $f_0 \in L^1(L)$

$$
\begin{aligned}
f * f_1(xN) &= \int_L f(xl^{-1}N)\delta(l)^{-\frac{1}{2}} f_1(l)dl. \\
&= \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xlN) f_0(l^{-1})dl.
\end{aligned}
$$

Pour h et f $\in \mathrm{C}_c(G/N)$, on définit

$$
\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)} \ : \ l \mapsto \delta(l)^{\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(x)} f(xl) \mathrm{d}\mu(x).
$$

Puisque f et h sont à support compact, il n'y a pas de problème de définition. L'action de L sur G/N est continue donc $\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)}$ est continue. De plus l'action de L sur G/N est propre, ainsi si on note K le support de f (compact), l'ensemble $\{l \in L | gK \cap K \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans L, et cet ensemble contient clairement le support de $\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)}$, donc $\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)} \in C_c(L)$.

Proposition 2.14. *L'application* $\langle \ , \ \rangle_{C_r^*(L)}$ *est un* $C_r^*(L)$*-produit scalaire sur* $C_c(G/N)$.

Démonstration. La $\mathbb{C}-$linéarité par rapport à la seconde variable est immédiate. On rappelle que l'involution sur $C_r^*(L)$ est définie, pour $f \in L^1(L)$, par $f^*(l) = \overline{f(l^{-1})}$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\langle h, f\rangle^*_{C_r^*(L)}(l) &= \overline{\delta(l^{-1})^{\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(x)} f(xl^{-1}) \mathrm{d}\mu(x)} \\
&= \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{f(xl^{-1})} h(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \delta(l) \int_{G/N} \overline{f(xll^{-1})} h(xl) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle f, h\rangle^*_{C_r^*(L)}(l).
\end{aligned}
$$

On calcule pour $f_0 \in C_c(L)$

$$
\begin{aligned}
\langle h, f * f_0\rangle_{C_r^*(L)}(l) &= \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(xl^{-1})} f * f_0(x) \\
&= \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(xl^{-1})} \int_L \delta(l')^{\frac{1}{2}} f(xl') f_0(l'^{-1}) \mathrm{d}l' \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}
$$

Puis

$$
\begin{aligned}
\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)} * f_0(l) &= \int_L \langle h, f\rangle_{C_r^*(L)}(l') f_0(l'^{-1}l) \mathrm{d}l' \\
&= \int_L \delta(l')^{-\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(xl^{-1})} f(x) f_0(l'^{-1}l \mathrm{d}l' \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \delta(l)^{-1} \int_L \delta(l'l^{-1})^{-\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(xl'^{-1}l^{-1})} f(x) f_0(l'^{-1} \mathrm{d}l' \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \int_L \delta(l')^{-\frac{1}{2}} \delta(l') \int_{G/N} \overline{h(xl^{-1})} f(xl') f_0(l'^{-1}) \mathrm{d}l' \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}
$$

On peut alors utiliser Fubini pour conclure que $\langle h, f * f_0\rangle_{C_r^*(L)}(l) = \langle h, f\rangle_{C_r^*(L)} * f_0(l)$.

Soit alors $(H, (,), \rho)$ une représentation unitaire de L, soit h et $f \in \mathrm{C}_c(G/N)$, ξ et $\eta \in H$. Et soit ψ une section de Bruhat pour L. On a

$$\begin{aligned}
(\rho(\langle h, f\rangle_{C_r^*(L)})\xi, \eta) &= \int_L \langle h, f\rangle_{C_r^*(L)}(l)(\rho(l)\xi, \eta) \\
&= \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{h(x)} f(xl)(\rho(l)\xi, \eta) \int_L \psi(xl')dl'dld\mu(x) \\
&= \int_{G/N} \psi(x) \int_L \delta(l') \int_L \overline{h(xl'^{-1})} f(xl'^{-1}l)(\rho(l)\xi, \eta)\delta(l)^{\frac{1}{2}} dl'dld\mu(x) \\
&= \int_{G/N} \psi(x) \int_{L\times L} \delta(l')^{\frac{1}{2}} \overline{h(xl'^{-1})}\delta(l')^{\frac{1}{2}} f(xl'^{-1}l)(\rho(l)\xi, \eta)\delta(l)^{\frac{1}{2}} dl'dld\mu(x).
\end{aligned}$$

En notant alors, pour $x \in G/N$, $\tilde{f}_x : l \mapsto \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xl)$. On obtient

$$\begin{aligned}
(\rho(\langle f, f\rangle_{C_r^*(L)})\xi, \eta) &= \int_{G/N} \psi(x) \int_L \tilde{f}_x^* * \tilde{f}_x(l)(\rho(l)\xi, \xi) \\
&= \int_{G/N} \psi(x)(\rho(\tilde{f}_x^* * \tilde{f}_x)\xi, \xi).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in G/N$, $\rho(\tilde{f}_x^* * \tilde{f}_x)$ est un opérateur positif. Puisque ψ est également postive cela assure que la quantité ci-dessus (bien définie car ψ est à support compact) est positive. $\langle f, f\rangle_{C_r^*(L)}$ est donc positif dans toute représentation de $C_r^*(L)$: c'est un élément positif de $C_r^*(L)$. Si l'on suppose de plus que ρ est fidèle et que $\rho(\langle f, f\rangle_{C_r^*(L)}) = 0$ alors pour tout $x \in G/N$, $\rho(\tilde{f}_x^* * \tilde{f}_x) = 0$ donc $\tilde{f}_x^* * \tilde{f}_x = 0$ et enfin $\tilde{f}_x = 0$. En particulier pour tout $x \in G/N$

$$\tilde{f}_x(1_L) = f(x) = 0.$$

Donc $f = 0$, ce qui conclut. □

On peut ainsi compléter $C_c(G/N)$ en un $C_r^*(L)$-module de Hilbert, noté $\mathcal{E}(G/N)$, on l'appelle le **module d'induction** assossié à P. On peut munir $\mathcal{E}(G/N)$ d'une structure de **représentation unitaire** de G, c'est-à-dire un morphisme de groupe $\pi : G \to U(\mathcal{E}(G/N))$ tel que pour tout $f \in \mathcal{E}(G/N)$, l'application $g \mapsto \pi(g)f$ est continue sur G. On définit donc pour $g \in G$ et $f \in C_c(G/N)$

$$(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x).$$

On vérifie alors que $\pi(g)$ est unitaire, ce qui découle immédiatement de l'invariance à gauche de μ :

$$\begin{aligned}
\langle \pi(g)f, \pi(g)f\rangle(l) &= \delta(l)^{\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{f(g^{-1}x)} f(g^{-1}xl)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle f, f\rangle(l).
\end{aligned}$$

On peut ainsi intégrer π en un $*$-homomorphisme $\phi : C_r^*(G) \to \mathfrak{B}(C_r^*(G/N))$

définie pour $f_0 \in C_c(G)$, $f \in C_c(G/N)$ par :

$$\phi(f_0)f(xN) = f_0 * f(xN) = \int_G f_0(g)f(g^{-1}xN)\mathrm{d}g.$$

Par densité on étend d'abord cette relation à tout $f \in \mathcal{E}(G/N)$ pour obtenir une application $C_c(G) \to B(C_r^*(G/N))$, qu'on étend par densité à $C_r^*(G)$. Ce qui munit $\mathcal{E}(G/N)$ d'une structure de correspondance de $C_r^*(G)$ à $C_r^*(L)$.

2.3 Induction parabolique : l'approche classique

A l'aide de la construction du module $\mathcal{E}(G/N)$ on va pouvoir reformuler le concept de représentation induite (plus précisément ici d'induction parabolique). Rappelons tout d'abord en quoi cela consiste.

Définition 2.15. *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et (V, π) une représentation de H, on appelle représentation induite l'espace*

$$\mathrm{Ind}_H^G V = \{f : G \to V | f(gh) = \pi(h)^{-1}f(g) \forall g \in G, \forall h \in H\},$$

que l'on peut également noter $\mathrm{Ind}_H^G \pi$.

Et on peut alors munir cet espace de la structure naturelle de représentation à gauche par G. Il est à noter ici que cette définition est purement algébrique et que dans notre cas où G et H sont des groupes topologiques, on demandera en général à de tels fonctions f d'être continues et à support compact sur G/H.
De plus, le cas qui nous intéresse vraiment est celui où V est une représentation unitaire de H, ce qui permet moyennant un terme de correction de compléter Ind_H^G en une représentation unitaire de G. On clarifie cela dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple et $P = MAN$ est un sous-groupe parabolique de G :
Soit φ un caractère de A et (H, σ) une représentation unitaire de carré intégrable de M, ainsi $\sigma \otimes \varphi$ est une représentation unitaire de $L \cong M \times A$; On peut donc prolonger cette représentation à $P = LN$ en une représentation triviale sur N. On note alors
$\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi \otimes 1 = \{f : G/N \to H | f(xma) = \delta(a)^{-\frac{1}{2}}\varphi(a)^{-1}\sigma(m)^{-1}f(x)\ \forall x \in G/N, \forall ma \in L\ et \|f\| < \infty\}$
où la norme ci-dessus est relative au produit scalaire défini par

$$\langle f, h\rangle = \int_{G/N} \langle f(x), h(x)\rangle\, \psi(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

avec ψ une section de Bruhat sur G/N. Cette définition ne dépend pas du choix de ψ. On appelle cette représentation l'induction parabolique de la représentation $\sigma \otimes \varphi$. L'ensemble de ces représentations pour φ parcourant $\hat{A}$ est appelée la **P-série de représentations** de G associée à σ.
Remarque : On peut étendre cette définition au cas où $(\mathcal{H}, \pi)$ est une représentation de L sur un C-module de Hilbert sur uneC^*-algèbre C et définir ainsi Ind_P^G. On conserve également la même définition pour le produit scalaire, qui cette fois est à valeur dans C.
On donne maintenant une nouvelle définition de l'induction parabolique, à partir de produits tensoriels de modules de Hilbert. Soit $\mathcal{H}$ une correspondance de

$C_r^*(L)$ à C. On définit

$$\mathrm{Ind}_P^G\mathcal{H} = \mathcal{E}(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} \mathcal{H},$$

qui est donc une correspondance de $C_r^*(G)$ à C.

Si $P = MAN$ un sous-groupe parabolique de G, (H_σ, σ) une représentation de carré intégrable, unitaire et irréductible de M et φ un caractère de A. Alors H_σ est une correspondance de $C_r^*(L)$ à $\mathbb{C}$. On veut dans ce qui suit démontrer l'équivalence des deux définitions que l'on a donné, à savoir l'équivalence unitaire entre $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ et $\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma$.

Proposition 2.16. *Les représentations de G, $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ et $\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma$ sont unitairement équivalentes.*

Démonstration. Soit $f \otimes v$ un élément de $C_c(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} H_\sigma$, la fonction de G/N dans H_σ

$$F : x \mapsto \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xl)\sigma \otimes \varphi(l)v\mathrm{d}l,$$

est continue et homogène par l'action de L :

$$\begin{aligned} F(xl) &= \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xl'l)\varphi \otimes \sigma(l)v \ \mathrm{d}l \\ &= \int_L \delta(l'^{-1}l)^{\frac{1}{2}} f(xl)\varphi \otimes \sigma(l'^{-1}l)v \ \mathrm{d}l \\ &= \delta(l')^{-\frac{1}{2}}\varphi \otimes \sigma(l')^{-1}F(x). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction F appartient à $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ et cela permet de définir une application linéaire $\Gamma : \mathcal{E}(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} \mathcal{H} \to Ind_P^G\sigma \otimes \varphi$, définie sur les tenseurs purs par

$$\begin{array}{lll} C_c(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} \mathbb{C}_\sigma & \longrightarrow & Ind_P^G\sigma \otimes \varphi \\ f \otimes v & \longmapsto & F \end{array}$$

Cette application entrelace l'action de G : l'action de G à gauche et de L à droite commutent, on a donc pour $g \in G$

$$\int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(g^{-1}xl)\sigma \otimes \varphi(l)v \ \mathrm{d}l = \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} (g.f)(xl)\sigma \otimes \varphi(l)v \ \mathrm{d}l.$$

Il reste à vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Lemme 2.17. *Les éléments de la forme $g \mapsto f(g)v$, $f \in C_c(G/N), v \in H_\sigma$ tels que*

$$f(xma)v = f(x)\delta(l)^{-\frac{1}{2}}\varphi(a)^{-1}\sigma(m)^{-1}v,$$

forment une partie totale dans $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$

Cela provient du fait que $C_c(G/N, H_\sigma) \cong C_c(G/N) \otimes H_\sigma$.

Pour finir on remarque que ψf est à support compact sur G/N, $\psi f \otimes v$ est donc un élément de $C_c(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} \mathbb{C}_\sigma$ et on a pour $x \in G/N$

$$\int_L \psi(xl)f(xl)\delta(l)^{\frac{1}{2}}\sigma \otimes \varphi(l)v \ \mathrm{d}l = f(x)\int_L \psi(xl) = f(x).$$

Donc $\psi f \otimes v$ est un antécédent de fv. De plus le calcul précédent nous assure que $\psi \tilde{f} \neq 0$, tant que $f \neq 0$. Cela nous montre que Γ^{-1}, est bien défini sur une partie dense de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}} \sigma \otimes \varphi$.
Il reste pour finir à vérifier que l'équivalence est unitaire, ce qui permettra de conclure que Γ est continu et donc se prolonge en l'isomorphisme recherché. Soit $f \in C_c(G/N)$ et $v \in H_\sigma$, on note $F = \Gamma f \otimes v$, on a
$\langle f \otimes v, f \otimes v \rangle = \langle v, \langle f, f \rangle .v \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle v, \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} \int_{G/N} \overline{f(x)} f(xl) \sigma \otimes \varphi(l) v \ \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}l \right\rangle \\
&= \int_{G/N} \overline{f(x)} \langle v, F(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle F, F \rangle &= \int_{G/N} \langle F(x), F(x) \rangle \, \psi(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{G/N} \left\langle \int_L \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xl) \sigma \otimes \varphi(l) v \ \mathrm{d}l, F(x) \right\rangle \psi(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_L \int_{G/N} \left\langle \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(xl) \sigma \otimes \varphi(l) v, F(x) \right\rangle \psi(x) \ \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}l \\
&= \int_L \delta(l)^{-1} \int_{G/N} \left\langle \delta(l)^{\frac{1}{2}} f(x) \sigma \otimes \varphi(l) v, F(xl^{-1}) \right\rangle \psi(xl^{-1}) \ \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}l \\
&= \int_L \int_{G/N} \overline{f(x)} \left\langle \delta(l)^{-\frac{1}{2}} \sigma \otimes \varphi(l) v, \delta(l)^{\frac{1}{2}} \sigma \otimes \varphi(l) F(x) \right\rangle \psi(xl^{-1}) \ \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}l \\
&= \int_L \int_{G/N} \overline{f(x)} \langle v, F(x) \rangle \, \psi(xl^{-1}) \ \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}l \\
&= \int_{G/N} \overline{f(x)} \langle v, F(x) \rangle \ \mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

Ce qui conclut. □

2.4 Induction parabolique : l'approche globale

Comme annoncé dans l'introduction, le traitement actuel que l'on a des P-séries via l'induction classique décrit les représentations seulement point par point. Il s'agit alors maintenant d'utiliser les C^*-modules en partant de l'observation suivante :
Si on choisit $P = MAN$ un sous-groupe parabolique et que l'on fixe une représentation $(H_\sigma, \langle \ , \ \rangle, \sigma)$ de carré intégrable de M, alors pour tout caractère φ de A, la représentation $\sigma \otimes \varphi$ de L est sur l'espace vectoriel $H_\sigma \otimes \mathbb{C} \cong H_\sigma$, et donc toute la famille $(\sigma \otimes \varphi)_{\sigma \in \hat{A}}$ est associée à l'espace H_σ. On remarque en plus que $C_r^*(L) \cong C_r^*(M) \otimes C_r^*(A) \cong C_r^*(M) \otimes C_0(\hat{A})$.
Et donc étant donné $\xi \in C_0(\hat{A}, H_\sigma)$ et $h \otimes f \in C_r^*(L) \cong C_r^*(M) \otimes C_0(A)$ on

peut définir l'élément de $C_0(\hat{A}, H_\sigma)$

$$(h \otimes f).\xi : \varphi \mapsto f(\varphi)\sigma(h).\xi(\varphi).$$

Il est clair que $h \otimes f$ est continue car $\varphi \mapsto f(\varphi)$ l'est (transformée de Fourier). On définit de cette façon une application linéaire sur l'espace vectoriel $C_0(\hat{A}, H_\sigma)$, qui se trouve être un $C_0(\hat{A})$-module de Hilbert :
Soit ξ et $\eta \in C_0(\hat{A}, H_\sigma)$, on définit

$$\langle \xi, \eta \rangle_{C_0(\hat{A})} \ : \ \varphi \ \mapsto \ \langle \xi(\varphi), \eta(\varphi) \rangle .$$

Il n'y a aucune difficulté à montrer qu'il s'agit bien d'un $C_0(\hat{A})$-produit scalaire. De plus $C_0(\hat{A}, H_\sigma)$ est complet car H_σ l'est. On le note ainsi $\mathcal{H}_\sigma$.
On peut maintenant voir que $h \otimes f$ agit comme un opérateur continu de $\mathcal{H}_\sigma$. En étendant cette action par linéarité puis par densité à $C_r^*(M) \otimes C_0(\hat{A})$. On obtient sur $\mathcal{H}_\sigma$ une structure de correspondance de $C_r^*(L)$ à $C_0(\hat{A})$. On peut ainsi définir l'induction parabolique globale avec le $C_0(\hat{A})$-module

$$Ind_P^G \mathcal{H}_\sigma = \mathcal{E}(G/N) \otimes_{C_r^*(L)} \mathcal{H}_\sigma,$$

qui cette fois ne dépend que du choix d'un groupe parabolique P et d'une représentation unitaire de carré intégrable σ de M.

2.5 Les opérateurs compacts sur les C^*-modules de Hilbert

Définition 2.18. *Soit $\mathcal{H}$ un A-module de Hilbert, on note $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel (fermé pour la norme opérateur) engendré par les opérateurs définis pour $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ par*

$$v_2 \otimes v_1 : v \mapsto v_2^*. \langle v_1, v \rangle .$$

Un tel opérateur $v_1 \otimes_A v_2^*$ possède un adjoint : $v_2 \otimes_A v_1^*$. On en déduit que $\mathfrak{K}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Remarque : Cette notion coïncide avec celle donnée dans le cadre des espaces de Hilbert, si H est un $\mathbb{C}$-module de Hilbert, alors $\mathfrak{K}(H)$ est l'algèbre des opérateurs compacts sur H au sens classique.

Ainsi, comme dans le cas des espaces de Hilbert, l'étude des opérateurs compacts est beaucoup plus simple que celle des opérateurs continus en général. Et le résultat suivant va nous être très utile pour étudier les représentations des groupes semi-simples.

Proposition 2.19. *L'action de $C_r^*(G)$ sur le $C_r^*(L)$-module de Hilbert $\mathcal{E}(G/N)$ se fait par opérateurs compacts :*

$$\phi(C_r^*(G)) \subset \mathfrak{K}(\mathcal{E}(G/N)).$$

Démonstration. Avant d'entamer la démonstration de ce résultat, on rappelle le résultat suivant : Si X est un espace localement compact, alors

$$C_0(X \times X) = C_0(X) \hat{\otimes} C_0(X),$$

où $C_0(X)\otimes C_0(X) \hookrightarrow C_0(X\times X)$ via l'application $f\otimes g \mapsto fg$. Et $C_0(X)\otimes C_0(X)$ est complété par rapport à la norme de $C_0(X\times X)$. Le théorème de Stone-Weirestrass nous assure alors l'égalité.

Soit maintenant $f_0 \in C_c(G)$ et $f \in C_c(G/N)$,

$$\begin{aligned} f_0 * f(g_1N) &= \int_G f_0(g)f(g^{-1}g_1N)\mathrm{d}g \\ &= \int_{G/N} k(x,y)f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Avec,

$$k(g_1N, g_2N) = \int_N f(g_1ng_2^{-1})\mathrm{d}n.$$

Pour vérifier on choisit une section de Bruhat ψ par rapport à N et on calcule

$$\begin{aligned} \int_{G/N} k(x,y)f(y)\mathrm{d}y &= \int_{G/N}\int_N f(g_1ng_2^{-1})f(g_2N)\mathrm{d}n\mathrm{d}g_2N \\ &= \int_G\int_N f(g_1ng_2^{-1})f(g_2N)\psi(g_2)\mathrm{d}n\mathrm{d}g_2 \\ &= \int_N\int_G f(g_1g^{-1})f(g^{-1}N)\psi(g^{-1}n)\mathrm{d}g\mathrm{d}n \\ &= \int_G f(g_1g^{-1})f(g^{-1}N)\mathrm{d}g \\ &= f_0 * f(g_1N) \end{aligned}$$

La fonction k vérifie pour tout $l \in L$, $k(xl, yl) = \delta(l)^{-1}k(x,y)$. Il s'agit alors de montrer que pour $h \in C_0(G/N \times G/N)$ avec la même homogénéité par l'action de L, l'opérateur T défini pour $f \in C_c(G/N)$ par

$$(Tf)(x) = \int_{G/N} h(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

est compact. D'après la remarque en début de preuve, il suffit de le montrer pour une fonction de la forme $h(x,y) = \int_L h_1(xl)h_2(yl)\delta(l)\mathrm{d}l$ avec $h_1, h_2 \in C_c(G/N)$ positives. On a donc pour $f \in C_c(G/N)$

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \int_{G/N} h(x,y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{G/N}\int_L h_1(xl)h_2(yl)\delta(l)f(y)\mathrm{d}l\mathrm{d}y \\ &= (h_1.\langle h_2, f\rangle_{C_r^*(L)})(x) \end{aligned}$$

donc T est l'opérateur compact $h_1 \otimes h_2^*$.

□

Pour pouvoir exploiter ce résultat on démontre également que :

Proposition 2.20. *Soit B et C des C^*-algèbres, $\mathcal{H}$ un C-module de Hilbert, si $\mathcal{H}$ est une correspondance de B à C tel que B agisse sur $\mathcal{H}$ par opérateurs compacts et si de plus $\mathcal{E}$ est un B-module et S est un opérateur compact de $\mathcal{E}$ alors $S \otimes I$ est un opérateur compact sur $\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{H}$.*

(voir [9], proposition 4.7)

corollaire 2.21. *Si $C_r^*(L)$ agit sur le module de Hilbert $\mathcal{H}$ par opérateurs compacts, alors $C_r^*(G)$ agit sur $\mathrm{Ind}_P^G\mathcal{H}$ par opérateurs compacts.*

Théorème 2.22. *(Admis*)*
Soit G un groupe réductif, $C_r^*(G)$ agit par opérateurs compacts sur toute représentation irréductible.

Le résultat général est dû à Harish-Chandra. On trouve ls références dans [1], 4.6.

Démonstration. Pour $G = SL(2,\mathbb{R})$, la décomposition $G = KAN$ donne lieu a une décomposition $C_c(G) = C_c(K) \otimes C_c(A) \otimes C_c(N)$. Soit alors (V,π) une représentation irréductible de G et $f = f_K * f_A * f_N \in C_c(G)$. Lors de la description des représentations de G, on voit que V en tant que représentation de K, est toujours une sous-représentation de la représentation régulière $L^2(K)$. On a de plus $C^*(K) \approx C_0(\mathbb{Z})$, donc $C^*(K)$ agit par opérateurs compacts sur sa représentation régulière : $\pi(f_K)$ est un opérateur compact donc c'est également le cas de $\pi(f) = \pi(f_K)\pi(f_A)\pi(f_N)$. □

Ainsi, ces résultats démontre que $C_r^*(G)$ agit sur $\mathrm{Ind}_P^G\mathcal{H}$ par opérateurs compacts.

Théorème 2.23. *(Admissibilité uniforme)(Admis*) Soit G un groupe de Lie semi-simple et K un sous-groupe compact de G et τ une représentation irréductible de K. Il n'existe qu'un nombre fini de classes de représentations irréductibles de carré intégrable de G dont la restriction à K contient τ comme sous-représentation.*

Démonstration. Ce théorème est dû à Harish-Chandra (références dans [1]). Pour $G = SL_2(\mathbb{R})$, et $K = SO_2(\mathbb{R})$ les représentations irréductibles de carré intégrable sont celles appartenant à la série discrète. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 0$ la représentation assossié de K n'apparait que dans les modules de plus bas poids $m \leq n$, donc un nombre fini de fois. Idem si $n < 0$ □

corollaire 2.24. *Soit $L = MA$ un sous-groupe de Levi de G et considérons la représentation $\oplus_\sigma H_\sigma$, indexée sur les classes de représentations de carré intégrable de M. Alors l'action de $C_r^*(M)$ sur $\oplus_\sigma H_\sigma$ est par opérateurs compacts.*

2.6 Décomposition de $C_r^*(G)$

Il s'agit maintenant de décomposer $C_r^*(G)$ selon ses représentations sur les modules introduits précédemment. On a besoin pour cela du théorème suivant.

Définition 2.25. *Soit $P_1 = M_1A_1N_1$ et $P_2 = M_2A_2N_2$, soit σ_1 une représentation de carré intégrable de M_1 et σ_2 une représentation de carré intégrable de M_2, on dit que les paires (P_1,σ_1) et (P_2,σ_2) sont associées s'il existe $g \in G$ tel que $gM_1A_1g^{-1} = M_2A_2$ et σ_2 est équivalente à la représentation de M_2 $\sigma_1 \circ \Psi_g$, où Ψ_g est la conjugaison par g.*
On définit ainsi une relation d'équivalence et on note sous la forme $[P,\sigma]$ une classe d'équivalence pour cette relation.

Théorème 2.26. *(Disjonction)(Admis*) Si (P_1, σ_1) et (P_2, σ_2) sont associées alors toute représentation paraboliquement induite $Ind_{P_1}^G \sigma_1 \otimes \varphi_1$ est équivalente à une représentation $Ind_{P_2}^G \sigma_2 \otimes \varphi_2$.*

Voir les références dans [1] 5.8. **Remarque** : Ce théorème implique qu'une représentation induite ne dépend en fait que du choix du facteur de Levi, et pas du groupe parabolique dans son ensemble.

Démonstration. Pour $G = SL_2(\mathbb{R})$, on voit que si P est le parabolique minimal classique et $P_0 = K_0 A_0 M_0$ un groupe parabolique associé, il est clair qu'une représentation $\mathrm{Ind}_{P_0}^G \sigma_0 \otimes \varphi_0$ n'est pas équivalente à une représentation de la série discrète, et donc est équivalente à une représentation $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi$. De plus ici $M = \{\pm 1\}$ donc central dans G, donc $M_0 = \{\pm 1\}$ et donc si $\sigma = 1$, $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi$ est constitué de fonctions paires, idem alors pour $\mathrm{Ind}_{P_0}^G \sigma_0 \otimes \varphi_0$ et donc $\sigma_0 = \sigma$. On procède de la même façon si $\sigma = -1$. □

Notation : Pour $P = MAN$ et σ une représentation de carré intégrable de M, on note $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ l'image de $C_r^*(G)$ dans $\mathfrak{K}\left(Ind_P^G C_0(\hat{A}, H_\sigma)\right)$.

Remarque : On veut décomposer $C_r^*(G)$ en $\bigoplus_{[P,\sigma]} C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$, mais il n'est pas clair pour l'instant que le théorème précédent s'applique à des modules de Hilbert, on va donc l'étendre au cas des modules $\mathfrak{K}\left(\mathrm{Ind}_P^G C_0(\hat{A}, H_\sigma)\right)$. Cela va nécessiter deux lemmes, qui seront également utile dans la suite pour décrire avec plus de clarté cette C^*-algèbre.

Lemme 2.27. *Soit X un espace localement compact, H un espace de Hilbert. On note $B = \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ et on considère $\mathcal{E}$ un B-module. On a un isomorphisme de $C_0(X)$-module de Hilbert*

$$\psi : \mathcal{E} \otimes_B C_0(X, H) \to C_0(X, \mathcal{E} \otimes_B H).$$

Démonstration. On définit ψ sur les tenseurs purs par $\psi(\eta \otimes f) \mapsto [F : x \mapsto \eta \otimes f(x)]$.
Cela définit bien un opérateur $C_0(X)$-linéaire. On a pour η, $\xi \in \mathcal{E}$ et $f, h \in C_0(X, H)$:

$$\begin{aligned}\langle \eta \otimes f, \xi \otimes h \rangle_{C_0(X)} &= \langle f, \langle \eta, \xi \rangle_B g \rangle_{C_0(X)} \\ &= [x \mapsto \langle f(x), \langle \eta, \xi \rangle_B g(x) \rangle_{\mathbb{C}}]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle \psi(\eta \otimes f), \psi(\xi \otimes h) \rangle_{C_0(X)} &= [x \mapsto \langle \eta \otimes f(x), \xi \otimes h(x) \rangle_{C_0(X)}] \\ &= [x \mapsto \langle f(x), \langle \eta, \xi \rangle_B g(x) \rangle_{\mathbb{C}}].\end{aligned}$$

Cela nous montre de plus que ψ est injective. Pour la surjectivité il suffit d'observer que $C_0(X, \mathcal{E} \otimes_B H) \cong C_0(X) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{E} \otimes_B H)$ et que donc les éléments de la forme $[x \mapsto \eta \otimes f(x)\xi]$ où $f \in C_0(X)$ et $\eta, \xi \in H$ forment une famille totale dans $C_0(X, \mathcal{E} \otimes_B H)$. □

Lemme 2.28. *Soit X un espace localement compact, H un espace de Hilbert. On a un $*$-isomorphisme :*

$$\Psi : \mathfrak{K}(C_0(X, H)) \to C_0(X, \mathfrak{K}(H)).$$

Démonstration. On définit Ψ sur les tenseurs purs par $\Psi(h\langle f,.\rangle_{C_0(X)}) = [x \mapsto h(x)\langle f(x),.\rangle_{\mathbb{C}}]$.
Cette application est bien linéaire et de plus

$$\begin{aligned}\Psi(h\langle f,.\rangle^*_{C_0(X)}) &= \Psi(f\langle h,.\rangle_{C_0(X)})\\ &= \Psi(h\langle f,.\rangle_{C_0(X)})^*.\end{aligned}$$

Pour $f\otimes h^*$ et $g\otimes e^* \in \mathfrak{K}(C_0(X,H))$ on a

$$\begin{aligned}f\otimes h^*\circ g\otimes e^* &= f\langle h, g\langle e,.\rangle\rangle\\ &= f\langle h,g\rangle\langle e,.\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(f\otimes h^*\circ g\otimes e^*) &= \Psi(f\langle h,g\rangle\langle e,.\rangle)\\ \text{donc}\qquad &= x\mapsto (f\langle h,g\rangle)(x)\langle e(x),.\rangle\\ &= x\mapsto (f(x)\langle h(x),g(x)\rangle)\langle e(x),.\rangle\\ &= \Psi(f\otimes h^*)\circ\Psi(g\otimes e^*),\end{aligned}$$

Ce qui montre que c'est un $*$-homomorphisme.
Enfin pour la surjectivité on utilise que $C_0(X,\mathfrak{K}(H)) \approx C_0(X)\otimes\mathfrak{K}(H)$ et donc que les éléments de la forme $x\mapsto v\langle f(x)w,.\rangle$ pour $f\in C_0(X)$ et $v,w\in H$ forment une famille totale dans $C_0(X,\mathfrak{K}(H))$.

□

Soit (σ,H_σ) une représentation unitaire irréductible de carré intégrable de M. On note encore $\mathcal{H}_\sigma = C_0(\hat{A},H_\sigma)$ et π la représentation associée de L sur $\mathcal{H}_\sigma$. Comme on l'a remarqué au moment de définir l'induction, on peut considérer l'espace $\mathrm{Ind}_P^G\pi$. Un résultat important de la théorie des représentations des groupes semi-simples est le fait que

$$\mathrm{Ind}_P^G\sigma\otimes\varphi \cong \mathrm{Ind}_{M\cap K}^K\sigma$$

en tant que représentations unitaires de K (le produit scalaire à droite est simplement la restriction du produit scalaire classique de $L^2(K,H_\sigma)$. On peut ensuite définir une représentation de G sur $\mathrm{Ind}_{M\cap K}^K\sigma$ de façon à ce que ces espaces soit équivalents en tant que représentations unitaires de G. On peut alors définir $\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap K}^K\sigma$ (en tant qu'espaces de Hilbert), de façon à ce que pour tout $\varphi\in\hat{A}$, la représentation $\mathrm{Ind}_P^G\sigma\otimes\varphi$ est définie sur l'espace de Hilbert $\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma$. On admet également que l'équivalence de représentation de K est encore valable pour

$$\mathrm{Ind}_P^G\mathcal{H}_\sigma \cong \mathrm{Ind}_{M\cap K}^K\mathcal{H}_\sigma.$$

On peut également reprendre les calculs de l'équivalence unitaire dans la section 2.2 pour vérifier que

$$\mathrm{Ind}_P^G\mathcal{H}_\sigma \cong \mathcal{E}(G/N)\otimes_{C_r^*(L)}\mathcal{H}_\sigma.$$

On a donc finalement l'équivalence de modules de Hilbert (et de représentation de K)

$$\mathcal{E}(G/N)\otimes_{C_r^*(L)}\mathcal{H}_\sigma \cong \mathcal{E}(K)\otimes_{C_r^*(K\cap M)}\mathcal{H}_\sigma.$$

Ainsi,grâce à un lemme précédent :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(K)\otimes_{C_r^*(K\cap M)}C_0(\hat{A},H_\sigma) &\cong C_0(\hat{A},\mathcal{E}(K)\otimes_{C_r^*(K\cap M)}H_\sigma)\\ &= C_0(\hat{A},\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma).\end{aligned}$$

On récapitule :

Proposition 2.29. *On a une équivalence de modules de Hilbert*

$$\mathrm{Ind}_P^G C_0(\hat{A}, H_\sigma) \cong C_0(\hat{A}, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma).$$

De cette façon on peut définir sur $C_0(\hat{A}, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$ la structure de représentations présente sur l'espace de gauche. Enfin

Proposition 2.30. *On a une équivalence de C^*-algèbre*

$$\mathfrak{K}(C_0(\hat{A}, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)) \cong C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)).$$

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 2.31. *Les représentations irréductibles de la C^*-algèbre $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$, vu comme des représentations irréductibles de G qui se factorisent par la surjection*

$$C_r^*(G) \to C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$$

sont exactement les composantes irréductibles de la série principale de représentations $Ind_P^G(\sigma \otimes \varphi)$, lorsque φ parcoure $\hat{A}$.

Définition 2.32. *Soit A et B des C^*-algèbres et $\varphi : A \to B$ un $*$-homomorphisme surjectif. On appelle* ***support*** *de φ le sous-ensemble de $\hat{A}$ constitué des classes de représentations qui se factorisent par φ.*

Soit $\rho \in \hat{A}$. Si il existe une représentation ρ_0 de B telle que $\rho = \rho_0 \circ \varphi$, on a alors $\ker(\rho) \supset \ker(\varphi)$. Inversement, si $\ker(\rho) \supset \ker(\varphi)$ et puisque $B \cong A/\ker\varphi$, alors ρ se factorise par φ.

Lemme 2.33. *Si $\varphi_1 : A \to B_1$ et $\varphi_2 : A \to B_2$ sont deux $*$-homorphismes surjectifs et que leurs supports sont disjoints, alors le $*$-homomorphisme*

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2 : \ A \to B_1 \oplus B_2$$

est surjectif.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $J_1 = \ker\varphi_1$ et $J_2 = \ker\varphi_2$ vérifient $J_1 + J_2 = A$. Pour cela on remarque que $J_1 + J_2$ est un idéal bilatère. Soit alors ρ une représentation irréductible de $A/(J_1 + J_2))$. Si on note π_i, la projection de A/J_i sur $A/(J_1 + J_2)$, alors $\rho \circ \pi_1 \circ \varphi_1$ et $\rho \circ \pi_2 \circ \varphi_2$ sont deux représentations équivalentes de A. Si on considère la classe de cette représentation irréductible, elle se factorise par φ_1 et φ_2, donc c'est nécessairement la représentation nulle, ceci implique bien que $A/(J_1 + J_2))$ est nul. □

Lemme 2.34. *Soit $\{\varphi_\alpha : A \to B_\alpha\}$ une famille de $*$-homomorphismes surjectifs, supposons que*

1. *Le support des homomorphismes φ_α soient deux à deux disjoints*
2. *La somme directe $\oplus_\alpha \varphi_\alpha$ envoie A dans $\oplus_\alpha B_\alpha$.*

Alors l'homomorphisme

$$\bigoplus_{\alpha} \varphi_\alpha : \ A \to \bigoplus_{\alpha} B_\alpha$$

est surjectif.

Voir [1] 5.13.

Pour conclure cette partie, on a besoin du théorème suivant

Théorème 2.35. *(Exhaustivité)(Admis*) Toute représentation tempérée de G est isomorphe à une sous-représentation d'une représentation de la série principale.*

Résultat de Harish-Chandra (références dans [1] 5.15). La preuve pour $SL_2(\mathbb{R})$ de ce théorème est précisément l'objet de la troisième partie.

Proposition 2.36. *L'homomorphisme de C^*-algèbres*

$$C_r^*(G) \to \bigoplus_{[P,\sigma]} C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$$

est bien défini et c'est un isomorphisme.

Démonstration. On considère P une sous-groupe parabolique, L un facteur de Levi de P et σ une représentation de carré intégrable de L. Notons $C_r^*(L)_{[\sigma]}$ l'image de $C_r^*(L)$ dans $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\sigma)$. D'après le théorème d'admissibilité uniforme on a une application

$$C_r^*(L) \to \bigoplus_{[\sigma]} C_r^*(L)_{[\sigma]}$$

et donc par associativité du produit tensoriel on a une application

$$C_r^*(G) \to \bigoplus_{[\sigma]} C_r^*(G)_{[P,\sigma]}.$$

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de classe d'équivalences de sous-groupes paraboliques, on en déduit que l'application de l'énoncé est bien définie. De plus chaque application $C_r^*(G) \to C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ est par définition surjective, donc on conclut la surjectivité par un des lemmes précédents.

Soit par ailleurs $f \in C_r^*(G)$ dont l'image est nulle dans chacun des $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$, alors f s'annule sur toutes les représentations issues de P-séries, et donc sur toute représentation tempérée de G, donc $f = 0$. □

2.7 Structure des composantes $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et conclusion

Il s'agit maintenant de déterminer quelle est la forme de $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ dans $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))$. Pour cela on rappelle qu'on définit que le groupe de Weyl (relatif au choix de L) de G comme

$$W = N_K(L)/K \cap L.$$

Etant donné une représentation tempérée σ de L et $w \in W$, $w.\sigma$ telle que défini dans la première partie est encore une représentation tempérée de L, on peut ainsi définir W_σ comme l'ensemble des éléments de w de W qui sont tels que $w.\sigma$ est équivalente à σ. On a par ailleurs le résultat suivant :

Proposition 2.37. *(Admis*)[1] Soit φ et $\varphi' \in, alors Ind_P^G \sigma \otimes \varphi$ est équivalent à $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi'$ si et seulement si il existe $w \in W_\sigma$ tel que $\varphi' = w.\varphi$. On note $U(w, \varphi)$ le morphisme de représentation associé. On a de plus que l'application $\hat{A} \to B(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$, $\varphi \mapsto U(w, \varphi)$ est continue pour tout $w \in W_\sigma$.*

Démonstration. Pour $SL_2(\mathbb{R})$ et par rapport au sous-groupe parabolique classique, on a $W \cong \mathbb{Z}$, et $W.\varphi = \{\varphi, \varphi^{-1}\}$ et on a établi que $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi$ était équivalente à $\mathrm{Ind}_P^G \sigma \otimes \varphi^{-1}$. Reprenons les notations habituelles pour les sous-groupes M, A, N et notons $\overline{N} = {}^tN$. Notons w l'élément non trivial de W. On donne la forme de l'opérateur d'entrelacement $U(w, \varphi)$: $\mathrm{Ind}_{LN}^G \sigma \otimes \varphi \to \mathrm{Ind}_{L\overline{N}}^G \sigma \otimes \varphi^{-1}$:

$$[U(w, \varphi)f](x) = \int_{\overline{N}} f(x\overline{n}) d\overline{n}.$$

Vérifions alors que $U(f) \in \mathrm{Ind}_{L\overline{N}}^G \sigma \otimes \varphi^{-1}$. Pour vérifier l'équivariance par rapport à M, il suffit de prendre $m = -1$ et il est clair que

$$[U(w, \varphi)f](-x) = -[U(w, \varphi)f](x).$$

Soit $a \in A$, on note $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Pour $\overline{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-2}b & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, en notant ν tel que $\varphi(a) = t^{1+\nu}$ on a

$$\begin{aligned}
[U(w, \varphi)f](xa) &= \int_{\overline{N}} f(xa\overline{n}) \mathrm{d}\overline{n} \\
&= \int_{\overline{N}} f(x(a\overline{n}a^{-1}a) \mathrm{d}\overline{n} \\
&= \varphi(a) \int_{\overline{N}} f(x(a\overline{n}a^{-1}) \mathrm{d}\overline{n} \\
&= t^{-1-\nu} \int_{\mathbb{R}} f(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-2}b & 1 \end{pmatrix}) \mathrm{d}b \\
&= t^{-1-\nu} t^2 \int_{\mathbb{R}} f(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}) \mathrm{d}b \\
&= \varphi^{-1}(a^{-1})[U(w, \varphi)f](x).
\end{aligned}$$

L'invariance par $\overline{N}$ provient simplement de l'utilisation d'une mesure de Haar :

$$\begin{aligned}
[U(w, \varphi)f](x\overline{n}_0) &= \int_{\overline{N}} f(x\overline{n}_0\overline{n}) \mathrm{d}\overline{n} \\
&= \int_{\overline{N}} f(x\overline{n}) d\overline{n}.
\end{aligned}$$

Cependant il n'est pas clair du tout que l'intégrale dans la définition de $U(w, \varphi)$ est convergente, et ce n'est verifié que pour les caractères φ dans un certain demi-espace de $\hat{A}$. On peut en suite prolonger analytiquement $\varphi \mapsto U(w, \varphi)$ à $\hat{A}$, mais cela demande une analyse plus raffiné. C'est pourquoi la définition qu'on vient de donner est seulement formelle. Mais dans la partie consacré à

$SL_2(\mathbb{R})$, on donne une famille continue d'opérateurs sur $\hat{A}$ qui entrelacent les représentations de l'algèbre de Lie associée, ce qui permet de montrer l'existence de $U(w,\varphi)$ (dont la définition ne serait pas nécessairement celle qu'on vient de donner). $\square$

On définit grâce à cela une action de W_σ sur le module $C_0(\hat{A}, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$ de la façon suivante :

$$(w.f)(\varphi) = U(w,\varphi)f(w^{-1}.\varphi).$$

On note U_w l'opérateur de $C_0(\hat{A}, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$ ainsi défini. La continuité de U_w résulte de

$$\begin{aligned}\|U_w f\| &= sup_{\varphi\in\hat{A}}\|U(w,\varphi)f(w^{-1}.\varphi)\| \\ &= sup_{\varphi\in\hat{A}}\|U(w,\varphi)\|\|f\|. \\ &= \|\|f\|,\end{aligned}$$

car ici les opérateurs d'entrelacements sont des isométries.

Soit $h \in C_r^*(G)$, on note T_h son image dans $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et soit $f \in C_0(\hat{A}, Ind_P^G H_\sigma)$ on a

$$\begin{aligned}(U_w T_h U_{w^{-1}} f)(\varphi) &= U(w,\varphi)(T_h U_{w^{-1}} f)(w^{-1}.\varphi) \\ &= U(w,\varphi)T_h(w^{-1}.\varphi)(U_{w^{-1}} f)(w^{-1}.\varphi) \\ &= U(w,\varphi)T_h(w^{-1}.\varphi)U(w^{-1},\varphi)f(\varphi) \\ &= U(w,\varphi)T_h(w^{-1}.\varphi)U(w,\varphi)^{-1}f(\varphi) \\ &= T_h(\varphi)f(\varphi) \\ &= (T_h f)(\varphi).\end{aligned}$$

Où l'avant dernière ligne résulte de la proposition précédente puisque $T_h(\varphi)$ est pour rappel défini par $Ind_P^G\sigma \otimes \varphi(h)$.

Finalement, on peut définir une action de W_σ sur $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(Ind_P^G H_\sigma))$ via $w.T = U_w T_h U_{w^{-1}}$ pour obtenir notre dernier théorème. Ainsi une fonction $f \in C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(Ind_P^G H_\sigma))$ est W_σ-invariante si, pour tout $\varphi \in \hat{A}$ et $\in W_\sigma$

$$f(w.\varphi) = U(w,\varphi)f(\varphi)(w.\varphi)^{-1}$$

. On note $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(Ind_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$ les éléments W_σ-invariants.

Théorème 2.38. *Soit G un groupe de Lie semi-simple, $P = LN$ un sous-groupe parabolique de G et σ une représentation tempérée de L, avec les notations précédentes on a*

$$C_r^*(G)_{[P,\sigma]} = C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}.$$

Démonstration. Il est clair d'après ce qui précède que $C_r^*(G)_{[P,\sigma]} \subset C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(Ind_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$. Pour la surjectivité on utilise le théorème de Stone-Weierstrass généralisé [3]. Il faut pour cela vérifier que $C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ est une sous-algèbre pleine : Soit π et π' deux représentations irréductibles de $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(Ind_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$ telles que $\pi|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et $\pi'|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ sont équivalentes. On sait de plus que $\pi|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et $\pi'|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ sont irréductibles et non triviales (voir [1] 6.6) et qu'il existe φ et φ' tels que $\pi|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ se factorise par $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ et $\pi'|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ se factorise par $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$. Dès lors, $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ et $\pi'|C_r^*(G)_{[P,\sigma]}$ et $\mathrm{Ind}_P^G\sigma \otimes \varphi$ admettent une sous-représentation commune (à équivalence près). Donc φ et φ' sont sont dans la même W_σ-orbite et π et π' sont nécessairement les représentation ev_φ et $ev_{\varphi'}$, qui sont équivalentes dans $C_0(\hat{A}, \mathfrak{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$.

$\square$

Conclusion pour G=SL$_2(\mathbb{R})$:
On note H_+ et H_- les espaces correspondants aux représentations de la série principale paire et impaire, et $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\hat{G}$ des classes de représentations de carré intégrable. Avec ces notations on a un $*$-isomorphisme

$$C_r^*(SL_2(\mathbb{R})) \cong \bigoplus_{[\pi]\in\mathcal{D}} \mathfrak{K}(H_\pi) \oplus C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{K}(H_+))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \oplus C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{K}(H_-))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

3 Le cas de $SL_2(\mathbb{R})$

Après avoir vu les théorèmes généraux sur les représentations unitaires des groupes semi-simples dans la partie précédente. On se propose ici de les démontrer "à la main" dans le cas de $G = SL_2(\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On reprend également les notations de la partie I pour les groupes K, A, N, M et P. On suit la construction proposée dans [6].

3.1 Les différents (g, K)-modules simples

On considère la base classique de $\mathfrak{g}$:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$e^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la partie qui suit, V désignera un $\mathfrak{g}$-module simple et on supposera l'existence d'un vecteur v_0 non trivial de poids $\lambda \in \mathbb{C}$ pour h, c'est-à-dire tel que $hv_0 = \lambda v_0$.
Puisque V est simple, v_0 engendre V. On note :

$$v_{k+1} = e^+ v_k, \ k \geq 0,$$
$$v_{k-1} = e^- v_k, \ k \geq 0.$$

Proposition 3.1. *Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que*

$$hv_k = (\lambda + 2k)v_k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$e^+ v_k = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda + 2(k+1))^2 + 2(\lambda + 2(k+1)))v_{k+1} = s_+(k), \quad k < 0.$$
$$e^- v_k = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda + 2(k-1))^2 - 2(\lambda + 2(k-1)))v_{k-1} = s_-(k), \quad k > 0.$$

Pour démontrer ces relations, on a besoin du résultat suivant :

Définition-Proposition 3.2. $\mathcal{C} = h^2 - 2h + 4e^+e^-$, *appelé* ***élément de Casimir****, est un élément central et non trivial de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Pour vérifier qu'il est non trivial, il suffit de calculer sa valeur dans la représentation naturelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et on constate qu'elle est non nulle. Par ailleurs on a bien
$[\mathcal{C}, h] = 0.$
$[\mathcal{C}, e^+] = 0.$
$[\mathcal{C}, e^-] = 0.$

□

Ainsi, vu comme endomorphisme de V, $\mathcal{C}$ est un morphisme de représentation, donc d'après le lemme de Schur $\mathcal{C}$ agit sur V par multiplication par un

scalaire μ. Ainsi, si v est un vecteur de poids η :

$$e^+e^-v = \frac{1}{4}(\mathcal{C}v - h^2v + 2hv) = \frac{1}{4}(\mu - \eta^2 + 2\eta)v.$$

Puis en écrivant

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= h^2 - 2h + 4e^+e^- \\ &= h^2 - 2h + 4[e^+, e^- + e^-e^+] \\ &= h^2 + 2h + e^-e^+,\end{aligned}$$

on a

$$e^-e^+v = \frac{1}{4}(\mathcal{C}v - h^2v - 2hv) = \frac{1}{4}(\mu - \eta^2 - 2\eta)v.$$

Démonstration. (proposition 3.1) Le premier est résultat est bien connu, de plus pour $k < 0$, v_{k+1} est de poids $\lambda + 2(k+1)$ et donc

$$e^+v_k = e^+e^-v_{k+1} = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda + 2(k+1))^2 + 2(\lambda + 2(k+1)))v_{k+1}.$$

De même, pour $k > 0$, on a

$$e^-v_k = e^-e^+v_{k-1} = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda + 2(k-1))^2 - 2(\lambda + 2(k-1)))v_{k-1}.$$

Il s'agit maintenant de voir que $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_k$. Soit v dans V. Puisque V est engendré par v_0, il existe $x \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que $v = xv_0$. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, x est combinaison linéaire d'éléments de la forme $(e^+)^n(e^-)^m h^k$ et on obtient immédiatement par la proposition précédente que $(e^+)^n(e^-)^m h^k v_0$ est proportionnel à v_{n-m}. Ainsi,

Théorème 3.3. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple, admettant un poids pour h, alors V est somme de ses sous-espaces de poids, qui sont de dimension 1.*

On s'intéresse maintenant à la forme de tels $\mathfrak{g}$-modules, qui dépend donc des paramètres λ et μ. Pour cela on va raisonner sur le noyau des éléments e^+ et e^-, vus comme des endomorphismes de ces modules.

Soit V un $\mathfrak{g}$-module tel que décrit précédemment,

Proposition 3.4. *On a*

$$\begin{aligned}&\dim\ker(e^+e^-) \leq 2 et \dim\ker(e^-e^+) \leq 2, \\ &\dim\ker(e^-) \leq 2, \\ &\dim\ker(e^+) \leq 2.\end{aligned}$$

Pour montrer le premier résultat, on constate que e^+e^- agit diagonalement sur la base (v_k). Donc $\ker(e^+e^-)$ admet une base constituées de vecteurs propres v_k. Avec la relation

$$e^+e^-v_k = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda + 2k)^2 + 2(\lambda + 2k))v_k,$$

on voit qu'il ne peut y avoir qu'au plus deux entiers k vérifiant $e^+e^-v_k = 0$. Pour finir on remarque que $\ker(e^-) \subset \ker(e^+e^-)$, ce qui donne la seconde relation. On traite de façon analogue les deux autres relations.

Proposition 3.5. *Supposons qu'il existe n tel que $e^+v_n = 0$, alors $V = \bigoplus_{k\leq n} \mathbb{C}v_k$.*

Il suffit pour cela de vérifier que $\bigoplus_{k\leq n} \mathbb{C}v_k$ est un sous-module de V. Soit $k \leq n$, et $x = (e^+)^m$. Si $m \leq n-k$ alors on a xv proportionnel à v_{k+m}. Si $m > n-k$ on a

$$xv = (e^-)^{m-(n-k)}(e^+)^{n-k}v_k = c.e^{m-(n-k)}v_n = 0,$$

donc dans les deux cas $xv \in \bigoplus_{k\leq n} \mathbb{C}v_k$. On peut appliquer ce résultat sans perte de généralité à tout élément de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, et à tout élément de $\bigoplus_{k\leq n} \mathbb{C}v_k$.
Remarque : Cela implique que $\dim\ker(e^+) = 1$. En effet si $v_n, v_m \in \ker(e^+)$, alors $V = \bigoplus_{k\leq n} \mathbb{C}v_k = \bigoplus_{k\leq m} \mathbb{C}v_k$ et donc $v_n = v_m$.

On obtient un résultat analogue : s'il existe n tel que $e^-v_n = 0$, alors $V = \bigoplus_{k\geq n} \mathbb{C}v_k$. Dès lors, s'il existe n tel que $e^+v_n = 0$ et m tel que $e^-v_m = 0$ alors $V = \bigoplus_{m\leq k\leq n} \mathbb{C}v_k$. Ce dernier cas correspond aux modules de dimensions finies, qui ne nous intéressent pas dans cet exposé car G n'admet aucune représentation unitaire de dimension finie non-triviale.
S'il existe n tel que $e^+v_n = 0$, on dit que V est un **module de plus haut poids**. Le vecteur v_n est appelé vecteur de plus haut poids. On le note alors w_0 et on note également $\lambda' = \lambda + 2n$ son poids pour h et $w_k = v_{n-k}$ pour $k \geq 0$. On a alors $e^-e^+w_0 = 0$ et on a

$$e^-e^+w_0 = \frac{1}{4}(\mu - (\lambda')^2 - 2(\lambda'))w_0,$$

d'où $\mu = (\lambda'+1)^2 - 1$.
On a donc vu le cas où $\dim\ \ker(e^+) > 0$, c'est en fait ici le seul cas possible, en effet si on a v_m avec $m \leq n$ tel que $e^+v_m = 0$, alors $V = \bigoplus_{k\leq m} v_k$ et donc $n = m$. On résume ce que l'on a vu :

Proposition 3.6. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple, tel que h admette au moins une valeur propre et tel que $\dim\ker(e^+) = 1$, il existe un vecteur de plus haut poids pour h noté v_0 de poids λ. Avec la notation*
$v_{k-1} = e^-v_k$ $k \leq 0$,
on obtient les relations

$$\begin{aligned} hv_k &= (\lambda + 2k)v_k, & k \leq 0,\\ e^+v_k &= k(\lambda - k + 1)v_{k-1}, & k \leq 0. \end{aligned}$$

On note $\overline{V}(\lambda)$ un tel module (à équivalence près).

On traite de façon analogue le cas $\dim\ker(e^-) = 1$:

Proposition 3.7. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple, tel que h admette au moins une valeur propre et tel que $\dim\ker(e^-) = 1$, il existe un vecteur de plus bas poids pour h v_0 de poids λ. Avec la notation*

$v_{k+1} = e^+ v_k \;\; k \leq 0,$
on obtient les relations

$$\begin{aligned} hv_k =& (\lambda + 2k)v_k, & k \leq 0, \\ e^- v_k =& -k(\lambda + k - 1)v_{k-1}, & k \leq 0. \end{aligned}$$

On note $V(\lambda)$ un tel module.

Remarque : On a supposé que V était irréductible pour obtenir de tels résultats. Donc $\dim\ker(e^+) \leq 1$ et $\dim\ker(e^-) \leq 1$. Donc si $V(\lambda)$ est irréductible alors $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. De même pour le cas où $V = \overline{V}(\lambda)$ on a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$.

On reprend les notations de la proposition 3.1. Supposons maintenant que $\dim\ker(e^+) = 0$ et $\dim\ker(e^-) = 0$, la première chose que l'on remarque est qu'il n'y a pas de vecteur maximal. On aimerait donc écrire les relation de **??** sous une forme plus symétrique, par exemple :

$$\begin{aligned} e^+ v_k &= (\nu^+ + k)v_{k+1}, k \geq 0, \\ e^- v_k &= (\nu^- - k)v_{k-1}, k \leq 0. \end{aligned}$$

De telles notations donnent

$$\begin{aligned} \lambda &= \nu^+ - \nu^- \\ \mathcal{C}v_0 &= (\nu^+ + \nu^-)(\nu^+ + \nu^- - 2)v_0 \\ \mu &= (\nu^+ + \nu^-)(\nu^+ + \nu^- - 2). \end{aligned}$$

La dernière équation ne laisse que 2 possibilités pour la valeur de $\nu^+ + \nu^-. Sionsupposeu^+ + \nu^- = 1 + \sqrt{\mu + 1}$, ce qui détermine alors ν^+ et ν^- en fonction de μ et λ. On vérifie bien que ces relations s'étendent pour $k \in \mathbb{Z}$. On note $U(\nu^+, \nu^-)$ un tel module (à équivalence près).
De par le raisonnement qu'on a fait précédemment, on voit qu'une représentation simple de $\mathfrak{g}$ est déterminé par la donnée d'un de ses poids λ pour h (si elle en admet un) et de μ, le scalaire par lequel agit l'élément de Casimir. Dès lors on remarque avec les relations

$$\begin{aligned} e^+ v_k &= (\nu^+ + k)v_{k+1}, k \in \mathbb{Z} \\ e^- v_k &= (\nu^- - k)v_{k-1}, k \in \mathbb{Z} \\ hv_k &= (\nu^+ - \nu^- + 2k)v_k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

que si l'on note, pour $n \in \mathbb{Z}$,
$\tau^+ = (\nu^+ + n)$ et $\tau^- = (\nu^- - n)$,
on a toujours $\mu = (\tau^+ + \tau^-)(\tau^+ + \tau^- - 2)$, et le vecteur v_n est de poids λ. On obtient donc que $U(\nu^+, \nu^-)$ est isomorphe à $U(\tau^+, \tau^-)$.

Remarque : On peut étendre la définition des modules $U(\nu^+, \nu^-)$ pour $\nu^+, \nu^- \in \mathbb{C}$ quelconques. On a le résultat évident (avec le raisonnement qui précède sur les noyaux de e^+ et e^-) que $U(\nu^+, \nu^-)$ est irréductible si et seulement si $\nu^+ \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et $\nu^- \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Proposition 3.8. *Soit ν^+, ν^-, τ^+ et τ^- dans $\mathbb{C}$, les modules $U(\nu^+, \nu^-)$ et $U(\tau^+, \tau^-)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que l'une des relation suivante est vraie*

$\tau^+ = (\nu^+ + n) \qquad et\ \tau^- = (\nu^- - n)$
$\tau^+ = (-\nu^+ - n) \quad et\ \tau^- = (\nu^+ + n + 2)$

Démonstration. Il reste à voir la réciproque, si l'on suppose $U(\nu^+, \nu^-) \approx U(\tau^+, \tau^-)$, alors d'une part $\nu^+ - \nu^-$ est un poids de $U(\tau^+, \tau^-)$ et donc il existe k tel que

$$(*)\ \tau^+ - \tau^- = \nu^+ - \nu^- + 2k.$$

Et d'autre part

$$(\nu^+ + \nu^-)(\nu^+ + \nu^- - 2) = (\tau^+ + \tau^-)(\tau^+ + \tau^- - 2),$$

et si l'on note $\nu = \nu^+ + \nu^-$ et $\tau = \tau^+ + \tau^-$ cela donne $\tau = \nu$ ou $\tau = -\nu - 2$, le premier cas donne directement (1) au vu de la relation $(*)$. Si on suppose maintenant

$$(**)\tau = -\nu - 2,$$

alors en calculant $(*) + (**)$ et $(*) - (**)$ on obtient
$2\tau^+ = -2\nu^- + 2k - 2$ et
$-2\tau^- = 2\nu^+ + 2k + 2$,
ce qui donne (2). □

Récapitulatif Dans ce qui précède, on a supposé que V était un $\mathfrak{g}$-module simple, admettant un poids pour h et on a déduit que V était de la forme $U(\nu^+, \nu^-)$, $V(\lambda)$ ou $\overline{V}(\lambda)$. Inversement on a

1. $U(\nu^+, \nu^-)$ est irréductible si et seulement si $\nu^+\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et $\nu^-\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.
2. $V(\lambda)$ est irréductible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$
3. $\overline{V}(\lambda)$ est irréductible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$.

Pour le vérifier il suffit d'observer $\ker(e^+)$ et $\ker(e^-)$. En précisant toute fois que si W est un sous-module de V, alors W contient un vecteur v_k. En effet soit $v \in W$ tel que

$$v = \sum_{j \leq n} \alpha_j v_j.$$

alors il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $hv - \beta v$ est un vecteur de taille au plus $n-1$ non nul (car on suppose $n > 1$ dans la base (v_j)). On continue par récurrence jusqu'à obtenir un vecteur de taille 1, qui est donc dans W.

3.2 Les modules associés à la série principale

On revient maintenant à l'étude de $G = SL(2, R)$. Soit H une représentation unitaire de G. Comme on l'a vu une telle représentation est en particulier une représentation unitaire de $K \approx \mathbb{S}^1$, qui admet donc au moins une sous-représentation de dimension 1 engendré par un certain $v \in H$. Ainsi le générateur infinitésimal de K qui est :

$$k_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admet v pour vecteur propre dans la représentation H^∞ de $\mathfrak{g}$, avec pour valeur propre in où n est entier. En posant $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$kv = nv.$$

On note maintenant

$$\mathrm{n}^+ = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$
$$n^- = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs k, n^+ et n^- forment ainsi une base de $\mathfrak{g}$ vérifiant

$$[k, n^+] = 2n^+,$$
$$[k, n^-] = -2n^-,$$
$$[n^+, n^-] = k.$$

Ces relations nous montrent qu'il existe un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui envoie la base (h, e^+, e^-) sur la base (k, n^+, n^-) et on peut appliquer les résultats vu précédemment pour les $\mathfrak{g}$-modules à cette base. **Note** : Dans la suite, les modules on désignera par $U(\nu^+, \nu^-)$ et $V(\lambda)$ les modules relatifs à la base (k, n^+, n^-). Qui sont donc des $(\mathfrak{g}, K)$-modules.
Soit φ un caractère de A et et H_φ la représentation de G de la série principale telle qu'on l'a vu précédemment. On rappelle que les $\mathfrak{g}$-modules associés aux représentations $H_\varphi^+ = \mathrm{Ind}_P^G 1 \otimes \varphi$ et $H_\varphi^- = \mathrm{Ind}_P^G - 1 \otimes \varphi$ sont

$$V_+^\varphi = \{f \in C^\infty(G/N), f(kaN) = (\varphi + \delta)(a)^{-1} f(kN) \ et \ f(-k) = f(k)\},$$

$$V_-^\varphi = \{f \in C^\infty(G/N), f(kaN) = (\varphi + \delta)(a)^{-1} f(kN) \ et \ f(-k) = -f(k)\}.$$

On se propose de décrire un peu plus explicitement ces ensembles pour étudier les $(\mathfrak{g}, K)$-modules associés. Observons qu'on a le difféomorphisme suivant du fait que G/N s'identifie naturellement à $K \times A$

$$\begin{aligned} G/N \cong & K \times A & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} & \longmapsto (u\cos\theta, u\sin\theta). \end{aligned}$$

Soit alors $s = 1 + it$ tel que $\varphi \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = u^t$. On définit

$$V_+^s = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}), f(u\cos\theta, u\sin\theta) = u^{-s} f(\cos\theta, \sin\theta), \ f(-x) = f(x)\},$$

$$V_-^s = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}), f(u\cos\theta, u\sin\theta) = u^{-s} f(\cos\theta, \sin\theta), \ f(-x) = -f(x)\}.$$

On munit ces espaces de la structure de représentation de G définie par

$$(g.f)(v) = f(g^{-1}.v),$$

où G agit sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ par restriction de l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$. On est naturellement amené à noter

$V^\varphi = V^\varphi_+ \oplus V^\varphi_-$,
$V^s = V^s_+ \oplus V^s_-$.

On a alors une application $\Psi : V^\varphi \longrightarrow V^s, telleque$
$(\Psi f)(u\cos\theta, u\sin\theta) = f\begin{pmatrix} u\cos\theta & -u^{-1}\sin\theta \\ u\sin\theta & u^{-1}\cos\theta \end{pmatrix}$.
L'opérateur Ψ est clairement un isomorphisme et on a $\Psi(V^\varphi_+) = V^s_+$ et $\Psi(V^\varphi_-) = V^s_-$.
C'est également un morphisme de représentation. Pour vérifier cela on observe d'abord que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(u\cos\theta, u\sin\theta) = (au\cos\theta + bu^{-1}\sin\theta, cu\cos\theta + du^{-1}\sin\theta).$$

Si on note alors ϕ et r tel que

$$(au\cos\theta + bu^{-1}\sin\theta, cu\cos\theta + du^{-1}\sin\theta) = (r\cos\phi, r\sin\phi),$$

on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\cos\theta & -u^{-1}\sin\theta \\ u\sin\theta & u^{-1}\cos\theta \end{pmatrix} N &= \begin{pmatrix} au\cos\theta + bu^{-1}\sin\theta & * \\ cu\cos\theta + du^{-1}\sin\theta & * \end{pmatrix} N \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\phi & * \\ r\sin\phi & * \end{pmatrix} N \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\phi & -r^{-1}\sin\phi \\ r\sin\phi & r^{-1}\cos\phi \end{pmatrix} N.\end{aligned}$$

où la dernière ligne est dûe au fait que l'application $K \times A \to G/N$ est injective. Ainsi si on note $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi(g^{-1}.f)\begin{pmatrix} u\cos\theta & -u^{-1}\sin\theta \\ u\sin\theta & u^{-1}\cos\theta \end{pmatrix} N &= r^{-s} f\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} N \\ &= r^{-s}(\Psi f)(\cos\phi, \sin\phi) \\ &= g^{-1}.\Psi f.\end{aligned}$$

Cela nous donne donc un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules entre V^+_φ et V^+_s. Et de la même façon on a un isomorphisme entre V^-_φ et V^-_s. Dans un premier temps on calcul l'action de h, e^+ et e^- sur V_s. Soit $f \in V_s$,

$$\begin{aligned}(e^+ f)(x,y) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.f)(x,y) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f\begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x,y) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f(x - ty, y) \\ &= -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Ainsi, comme opérateur de V_s, on a $e^+ = -y\frac{\partial}{\partial x}$. On obtient de même $e^- = -x\frac{\partial}{\partial y}$. On déduit alors l'opérateur associé à h par le calcul :

$$
\begin{aligned}
[-y\frac{\partial}{\partial x}, -x\frac{\partial}{\partial y}] &= y\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y}y\frac{\partial}{\partial x} \\
&= y\frac{\partial}{\partial y} + yx\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} \\
&= y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Donc dans cette représentation, $h = y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}$.

Notons maintenant, pour n entier

$$f_{n,s} : (u\cos\theta, u\sin\theta) = u^{-s}e^{in\theta}.$$

L'action de k_0 sur $f_{n,s}$ est facile à calculer :

$$
\begin{aligned}
k_0 f_{n,s}(u\cos\theta, u\sin\theta) &= \frac{d}{d\phi}_{|\phi=0}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}.f(u\cos\theta, u\sin\theta) \\
&= \frac{d}{d\phi}_{|\phi=0} f\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}.(u\cos\theta, u\sin\theta) \\
&= \frac{d}{d\phi}_{|\phi=0} f(u(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta), u(\sin\phi\cos\theta - \sin\phi\cos\theta)) \\
&= \frac{d}{d\phi}_{|\phi=0} f(u\cos(\theta+\phi), u\sin(\theta+\phi)) \\
&= u^{-s}\frac{d}{d\phi}_{|\phi=0} e^{in(\theta+\phi)} \\
&= inu^{-s}e^{in\theta}.
\end{aligned}
$$

Et donc

$$kf_{n,s} = nf_{n,s}.$$

Ainsi les $(\mathfrak{g}, K)$-modules assossiés à V_+^s et V_-^s sont

$$V_{+,K}^s = \bigoplus_{n\ pair} \mathbb{C}f_{n,s},$$

$$V_{-,K}^s = \bigoplus_{n\ impair} \mathbb{C}f_{n,s}.$$

Pour le calcul de l'action de n^+ et n^-, on observe qu'en prenant $(x, y) = (u\cos\theta, u\sin\theta)$, on a

$$
\begin{aligned}
f_{n,s}(x, y) &= u^{-s}(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= u^{-s-n}(u\cos\theta + iu\sin\theta)^n \\
&= \sqrt{x^2+y^2}^{-s-n}(x+iy)^n.
\end{aligned}
$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et en notant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, cela donne

$$f_{n,s}(x, y) = r^{-s-n}(x+iy)^n$$

On a alors

$$\frac{\partial f_{n,s}}{\partial x}(x, y) = nr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} + x(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n,$$

$$\frac{\partial f_{n,s}}{\partial y}(x,y) = inr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} + y(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n.$$

On a $2n^+ = h + i(e^+ + e^-)$ et donc $2n^+$ agit sur V_s par l'opérateur

$$-x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - i(x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
2n^+.f_{n,s}(x,y) =& -nxr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} - x^2(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n \\
&+ inyr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} + y^2(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n \\
&+ nxr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} - ixy(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n \\
&- inyr^{-s-n}(x+iy)^{n-1} - ixy(-s-n)r^{-s-n-2}(x+iy)^n \\
=&(n+s)r^{-s-(n+2)}(x+iy)^2(x+iy)^n \\
=&(n+s)f_{n+2,s}(x,y).
\end{aligned}$$

On procède de même pour n^- pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}
kf_{n,s} &= nf_{n,s} \\
n^+f_{n,s}(x,y) &= (\frac{n}{2} + \frac{s}{2})f_{n+2,s}(x,y) \\
n^-f_{n,s}(x,y) &= (\frac{n}{2} - \frac{s}{2})f_{n+2,s}(x,y)
\end{aligned}$$

Si l'on récrit les deux dernière ligne de la façon suivante :

$$n^+f_{2n,s}(x,y) = (n + \frac{s}{2})f_{2(n+1),s}(x,y),$$

$$n^-f_{2n,s}(x,y) = (n - \frac{s}{2})f_{2(n+1),s}(x,y).$$

Cela nous montre que $V^s_{+,K}$ est isomorphe au $(\mathfrak{g}, K)$-module $U(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$. De même avec

$$n^+f_{2n+1,s}(x,y) = (n + \frac{s+1}{2})f_{2(n+1),s}(x,y),$$

$$n^-f_{2n+1,s}(x,y) = (n - \frac{s-1}{2})f_{2(n+1),s}(x,y).$$

on voit que $V^s_{-,K}$ s'identifie à $U(\frac{s+1}{2}, \frac{s-1}{2})$.

Théorème 3.9. *Deux représentations G de la série principale $H^{e^\nu}_\sigma$ et $H^{e^{\nu'}}_{\sigma'}$ sont équivalentes si et seulement si $\nu = \pm\nu'$ et $\sigma = \sigma'$.*

Remarque : On rappelle, pour éviter les confusions, que ν est la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}$ associée au paramètre it lorsque $s = 1 + it$.

Démonstration. La condition $\sigma = \sigma'$ est évidemment nécessaire. Soit $s, s' \in \mathbb{C}$ associés à ρ, ρ', H^+_ρ et $H^+_{\rho'}$ sont équivalents si et seulement si $U(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}) \approx U(\frac{s'}{2}, \frac{s'}{2})$, ce qui est équivalent à

$$\frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \frac{s'}{2} + \frac{s'}{2} \text{ ou } \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = -(\frac{s'}{2} + \frac{s'}{2}) - 2.$$

Et puisque $s = 1 + it$ et $s' = 1 + it'$, cela donne

$$t = t' \text{ ou } t = -t'.$$

Si maintenant $U(\frac{s+1}{2}, \frac{s-1}{2}) \approx U(\frac{s'+1}{2}, \frac{s'-1}{2})$ on a

$$\frac{s+1}{2} + \frac{s-1}{2} = \frac{s'+1}{2} + \frac{s'-1}{2}$$

ou

$$\frac{s+1}{2} + \frac{s-1}{2} = -\frac{s'+1}{2} - \frac{s'-1}{2} - 2.$$

Ce qui conduit au même résultat que précédemment. □

Il sera utile dans la suite d'avoir la formule explicite pour les morphismes de représentations, on les calcule dans ce qui suit.

Soit $S_t : U(\frac{1+it}{2}, \frac{1+it}{2}) \to U(\frac{1-it}{2}, \frac{1-it}{2})$ un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. On note $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une base de $U(\frac{1+it}{2}, \frac{1+it}{2})$ et $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une base de $U(\frac{1-it}{2}, \frac{1-it}{2})$ telles que
$n^+v_j = (\frac{1+it+j}{2})v_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$
$n^-v_j = (\frac{1+it-j}{2})v_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$
$kv_j = 2jv_j$, $j \in \mathbb{Z}$
et
$n^+w_j = (\frac{1-it+j}{2})w_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$
$n^-w_j = (\frac{1-it-j}{2})w_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$
$kw_j = 2jw_j$, $j \in \mathbb{Z}$

S_t conserve les poids de k, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ il existe donc $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $T_s v_j = \lambda_j w_j$. On a

$$S_t n^+ v_j = n^+ S_t v_j$$

$$\lambda_{j+1}(\frac{1+it+j}{2})v_{j+1} =_j (\frac{1-it+j}{2})w_{j+1}$$

$$\lambda_{j+1} = \frac{1-it+j}{1+it+j}\lambda_j$$

$$\lambda_{j-1} = \frac{-it+j}{it+j}\lambda_j$$

On peut par ailleurs choisir $S_t v_0 = w_0$ quitte à multiplier S_t par un scalaire. Ainsi :

$$S_t v_j = \frac{(1-it)}{(1+it)}\frac{(1-it+1)}{(1+it+1)}\cdots\frac{(1-it+j)}{(1+it+j)}w_j,\ j > 0,$$

$$S_t v_j = \frac{-it}{it}\frac{(}{-it-1)}(it-1)\cdots\frac{(-it+j)}{(it+j)}w_j,\ j < 0.$$

On note alors $\xi^j_{t,+} = \lambda_j$ les fonctions de t obtenues ci-dessus.

En reprenant ces calculs pour un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules $R_t : U(\frac{it}{2} + 1, \frac{it}{2}) \to U(\frac{-it}{2} + 1, \frac{-it}{2})$ on obtient les fonctions $\xi^j_{t,-}$ sous la forme

$$R_t v_j = \frac{(it+1)}{(-it+1)}\cdots\frac{(it+j)}{(-it+j)}w_j\ j > 0,$$

$$R_t v_j = \frac{(-it-1)}{(it-1)}\cdots\frac{(-it+j)}{(it+j)}w_j\ j < 0.$$

3.3 Unitarisabilité des $(\mathfrak{g}, K)$-modules

Dans ce paragraphe on va donner une liste exhaustive des classes d'équivalences de représentations unitaires de G. Soit $(H, < .,. >)$ une représentation unitaire de G, on rappelle que

$$< xu, v > + < u, xv >= 0 \forall u, v \in H^\infty, \ \forall x \in \mathfrak{g}_0$$

C'est le cas de k, en effet on a

$$k^* = (-ik_0)^* = k^*.$$

Définition 3.10. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module, on dit que V est* ***unitarisable*** *s'il existe un produit scalaire sur V tel que*

$$< xu, v > + < u, xv >= 0 \forall u, v \in V, \ \forall x \in \mathfrak{g}_0.$$

Si V est également une représentation de G, alors on peut définir sur le complété $\overline{V}$ de V par rapport à $< .,. >$ une unique structure de représentation unitaire de G. Dès lors H est une représentation unitaire de G si et seulement si H^∞ est un $\mathfrak{g}$-module unitarisable. La classification de tous les $\mathfrak{g}$-modules unitarisables munis d'une structure de représentation de G nous permettrait donc la classification de toutes les représentations unitaires de G.

Lemme 3.11. *Soit $\nu^+, \nu^- \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ avec $\nu^+ - \nu^- \in \mathbb{Z}$. Le module $U(\nu^+, \nu^-)$ est unitarisable si et seulement si*

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} = \frac{(\nu^+ + j)}{j + 1 - \overline{\nu^-}} > 0.$$

Démonstration. Supposons que $U(\nu^+, \nu^-)$ est unitarisable avec un produit scalaire $< .,. >$. On pose

$$a_j =< v_j, v_j >$$

Comme on l'a vu, k est auto-adjoint, si $n \neq m$ on a donc

$$< v_n, v_m >= 0.$$

On a également

$$n^{+*} = \frac{1}{2}(h + i(e^+ + e^-))^* = -n^-.$$

Ce qui donne pour $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(\nu^+ + j)a_{j+1} &= (\nu^+ + j) < v_{j+1}, v_{j+1} > \\ &=< n^+ v_j, v_{j+1} > \\ &= - < v_j, n^- v_{j+1} > \\ &= -(j + 1 - \overline{\nu^-})a_j.\end{aligned}$$

Ansi puisque $a_j, a_{j+1} > 0$ on a

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} = \frac{(\nu^+ + j)}{j + 1 - \overline{\nu^-}} > 0.$$

Réciproquement, si on a cette relation de vérifiée, on pose $a_0 = 1$ et on définit les a_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par récurrence à partir de la relation

$$a_j = a_{j+1} \frac{(\nu^+ + j)}{j + 1 - \overline{\nu^-}}.$$

On définit maintenant une forme sesquilinéaire $<.,.>$ par

$< v_j, v_j > = a_j \ \forall j \in \mathbb{Z}$
$< v_j, v_m > = a_j \ \forall j \neq m$
On a $a_j > 0 \ \forall j \in \mathbb{Z}$ donc $< .,. >$ est un produit scalaire. Finalement en reprenant l'égalité

$$\begin{aligned}(\nu^+ + j)a_{j+1} &= (\nu^+ + j) < v_{j+1}, v_{j+1} > \\ &=< n^+ v_j, v_{j+1} > \\ &= - < v_j, n^- v_{j+1} > \\ &= -(j + 1 - \overline{\nu^-})a_j.\end{aligned}$$

On obtient que $n^{+*} = -n^-$. Pour finir on a $< kv_j, v_j > + < v_j, kv_j >=< -ik_0 v_j, v_j > + < v_j, -ik_0 v_j >= 0$. Et tout combinaison linéaire d'éléments anti-auto-adjoint l'est aussi. $U(\nu^+, \nu^-)$ est unitarisable.

□

Proposition 3.12. *Soit $\nu^+, \nu^- \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ avec $\nu^+ - \nu^- \in \mathbb{Z}$. Le module $U(\nu^+, \nu^-)$ est unitarisable si et seulement si l'une des deux conditions est réalisée*
$\nu^+ + \overline{\nu^-} = 1$.
$\nu^\pm \in \mathbb{R}$ et il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu^- - 1$ et $-\nu^+$ sont dans $]l - 1, l[$.

Démonstration. D'après la relation précédente

$$\Im\left(\frac{(\nu^+ + j)}{j + 1 - \overline{\nu^-}}\right) = 0,$$
$$\Re\left(\frac{(\nu^+ + j)}{j + 1 - \overline{\nu^-}}\right) > 0.$$

Ainsi

$$\Im((\nu^+ + j)(j + 1 - \nu^-)) = 0. \quad \text{Ce qui donne}$$

$(j + 1)\Im\nu^+ - (\Re\nu^+ \Im\nu^- + \Re\nu^- \Im\nu^+) - j\Im\nu^- > 0.$

$$j(\Im\nu^+ - \Im\nu^-) = \Im\nu^-(\Re\nu^+ - 1) + \Re\nu^- \Im\nu^+,$$

et ce résultat est valable pour tout j donc $(\Im\nu^+ - \Im\nu^-) = 0$ et

$$\Im\nu^-(\Re\nu^+ - 1) + \Re\nu^- \Im\nu^+ = 0 \ et \ \Im\nu^+ = \Im\nu^-.$$

D'où

$$\Im\nu^+(\Re\nu^+ + \Re\nu^- - 1) = 0,$$

Ce qui laisse les cas
$(i) \Re\nu^+ + \Re\nu^- - 1 = 0$
$(ii) \Im\nu^+ = \Im\nu^- = 0$

Le cas (i) donne bien $\nu^+ + \overline{\nu^-} = 1$. Pour le cas (ii), on a $\frac{(\nu^+ + j)}{j+1-\nu^-} > 0$. On obtient donc que $\nu^+ + j$ et $j + 1 - \nu^-$ sont du même signe pour tout j, ce qui donne la seconde partie du théorème. $\square$

3.4 La série discrète

On s'intéresse maintenant aux $\mathfrak{g}$-modules de la forme $V(\lambda)$ et $\overline{V}(\lambda)$. Pour qu'un tel module corresponde à une représentation de G, il faut nécessairement qu'il ait des poids entiers pour k_0 et donc que $\lambda \in \mathbb{Z}$. On traite l'unitarisabilité de ces modules de la même façon que précédemment.

Proposition 3.13. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le module $V(n)$ est unitarisable si et seulement si $n \geq 1$.*

Démonstration. Supposons que $V(n)$ est unitarisable par rapport à un produit scalaire $< .,. >$. On pose alors pour $j \geq n$

$$a_j =< v_j, v_j > .$$

On obtient pour $j \geq n$

$$\begin{aligned} a_{j+1} &=< n^+ v_j, v_{j+1} > \\ &= a_j . j(n+j-1). \end{aligned}$$

donc pour tout $j \geq n$, on a $j(n+j-1) > 0$. On en déduit que $n \geq 1$ Pour démontrer la réciproque, on suppose $n \geq 1$ et on pose $a_n = 1$ et on définit a_j pour tout $j > n$ par la relation

$$a_{j+1} = j(n+j-1)a_j.$$

On construit un produit scalaire $<,>$ avec les relations

$$< v_j, v_j > = a_j \ \forall j \geq n$$
$$< v_j, v_m > = a_j \ \forall j \neq m$$

On peut vérifier de la même façon que les éléments de $\mathfrak{g}_0$ sont anti-auto-adjoints. $\square$

De façon identique on a

Proposition 3.14. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le module $\overline{V}(n)$ est unitarisable si et seulement si $n \leq -1$.*

Il existe par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ une représentation unitaire H_n de G dont le $(\mathfrak{g}, K)$-module est isomorphe à $V(n)$ si $n \geq 1$ ou $\overline{V}(n)$ si $n \leq -1$. Pour le voir on a deux méthodes. Soit on construit une représentation H_n non unitaire et on peut faire cela en généralisant l'induction à des représentations de A non-unitaires. Puis construire un produit scalaire adapté. On peut aussi directement trouver une sous-représentation de la représentation adjointe $L^2(G)$: Les calculs sont faits dans [5] p.179-181. Cela permet de montrer que ces représentations sont de carré intégrable, ce qui justifie lappellation « série discrète ».

3.5 Le dual unitaire tempérée de $SL_2(\mathbb{R})$

Finalement, la classification que l'on a fait précédemment des représentations tempérées de $SL_2(\mathbb{R})$ et de leurs $(\mathfrak{g}, K)$-modules est exhaustive. On peut donc décrire le dual unitaire réduit de $SL_2(\mathbb{R})$.
On a traité le cas des modules $U(\nu^+, \nu^-)$, $V(n)$ et $\overline{V}(n)$, qui sont les seuls $(\mathfrak{g}, K)$-modules de dimension infinie. Il existe par ailleurs des modules de dimensions finies, mais $SL_2(\mathbb{R})$ n'admet aucune représentation unitaire de dimension finie (non triviale). Il faut enfin rajouter les deux propositions que l'on admet

Proposition 3.15. *Les représentations de la série principale de $SL_2(\mathbb{R})$ sont tempérées.*

Proposition 3.16. *Il n'existe aucune représentation tempérée de $SL_2(\mathbb{R})$ dont le $(\mathfrak{g}, K)$-module associé soit isomorphe à $U(\nu^+, \nu^-)$ tel qu'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu^- - 1$ et $-\nu^+$ sont dans $]l-1, l[$.*

Avec ces résultats, on peut donner une liste exhaustive des éléments de $\hat{G}_r$.

Théorème 3.17. *(Dual unitaire tempérée de $SL_2(\mathbb{R})$) Les représentations unitaires tempérées irréductibles (à équivalence près) de $SL_2(\mathbb{R})$ sont*

1. *La représentation triviale,*
2. *Les représentations de la série principale paire H_+^φ pour $\varphi \in \hat{A}$,*
3. *Les représentations de la série principale impaire H_-^φ pour $\varphi \in \hat{A}$,*
4. *Les représentations de la série discrète H_n pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Références

[1] Pierre Clare, Tyrone Crisp, Nigel Higson. Parabolic induction and restriction via C*-algebras and Hilbert C*-modules. 2014.

[2] Pierre Clare. Hilbert modules associated to parabolically induced representations of semisimple Lie groups. 2011.

[3] Jacques Dixmier. Les C*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars. Paris. 1969.

[4] Jacques Dixmier. Algèbres enveloppantes. Gauthier-Villars. Paris. 1974.

[5] Serge Lang. $SL_2(\mathbb{R})$. Springer-Verlag. 1985.

[6] Roger Howe, Eng Chye Tan. Non-abelian harmonic analysis : applications of $SL_2(\mathbb{R})$. Springer-Verlag. 1992.

[7] Anthony W. Knapp. Representation Theory of Semisimple Groups : An Overview Based on Examples. Princeton university press. 1986.

[8] William Fulton, Joe Harris. Representation Thory, a first course. Springer-Verlag. 1991.

[9] E. Christopher Lance. Hilbert C^*-modules, a toolkit for operator algebraists. London mathematical society, lecture note series 210. 1995.