



HAL
open science

Les propriétés probabilistes des solutions fondamentales d'un système parabolique

H Milicer Gruzewska

► To cite this version:

H Milicer Gruzewska. Les propriétés probabilistes des solutions fondamentales d'un système parabolique. Annales de l'ISUP, 1964, XIII (1), pp.3-12. <hal-04085113>

HAL Id: hal-04085113

<https://hal.science/hal-04085113v1>

Submitted on 28 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

LES PROPRIÉTÉS PROBABILISTES DES SOLUTIONS FONDAMENTALES D'UN SYSTÈME PARABOLIQUE

H. MILICER GRUZEWSKA

0 - SOMMAIRE -

On résout ici quelques questions liées à la matrice des solutions fondamentales d'un système parabolique d'équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients höldériens.

Un tel système, du second ordre, fut étudié en 1960, [1], et le système d'ordre plus élevé ($2b > 2$) en 1962, [2]. Ainsi on sait que les sommes des lignes de la matrice des solutions fondamentales d'un système parabolique sont les solutions fondamentales des équations paraboliques. Elles satisfont aux équations de Smoluchowski et sont normées si le système est sans termes linéaires. Mais la question du signe de ces sommes restait ouverte. On savait cependant que la solution fondamentale de l'équation parabolique de second ordre, sans terme linéaire, était la fonction de passage du processus stochastique [3], [4] et [4'].

On démontre ici que dans le cas de l'équation d'ordre $2b > 2$ la solution fondamentale ne conserve pas son signe, elle n'est donc qu'une fonction de passage généralisée. On présente alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de passage généralisée soit la solution fondamentale d'une équation parabolique.

1/ Soit le système :

$$L_u^{x,y} = P(x,y ; D)u - E \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, N) \quad (1,1)$$

où E est la matrice unitaire :

$$P(x,y ; D) = \sum_{\alpha \leq |k| \leq 2b} A_{\alpha\beta}^{(k)}(x,y) D^k, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (1,2)$$

$$D = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n,$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n, \quad 0 \leq y \leq y' = \text{const.}; \quad A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y),$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, N, \quad \text{et} \quad u = (u_1, \dots, u_N)$$

avec
$$u_i = u_i(x, y), \quad i = 1, \dots, N$$

sont définis dans le produit cartésien R de l'espace euclidien E_n à n dimensions et de l'intervalle fini :

$$R = (E_n * < 0, y' >)$$

On suppose : (I) le système *P-parabolique* dans R , c'est-à-dire, qu'il existe une constante $\delta > 0$, telle que toutes les racines $\lambda = \lambda(x, y, \sigma)$ de l'équation :

$$\det_{\alpha, \beta=1, \dots, N} \left\{ \left(\sum_{|k|=2b} A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y) (i\sigma)^k \right) - \lambda E \right\} = 0$$

avec

$$(i\sigma)^k = \prod_{j=1}^n (i\sigma_j)^{k_j}, \quad \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = 1$$

et où E est la matrice unitaire, satisfont à l'inégalité :

$$\text{Re } \lambda(x, y, \sigma) < -\delta$$

pour chaque $(x, y) \in R$;

(II) les coefficients $A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in R$ sont réels, bornés, uniformément continus, comme fonctions de y , et *uniformément hõlderiens*, comme fonctions de x , à savoir :

$$|A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y) - A_{\alpha\beta}^{(k)}(x', y)| \leq C |x - x'|^h, \quad (x, y) \in R,$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, N; \quad \text{où } C > 0 \text{ et } 0 < h \leq 1$$

sont des constantes indépendantes de y .

Les solutions $u = (u_1, \dots, u_N)$, $(x, y) \in R$ sont réelles, bornées exponentiellement, c'est-à-dire : $|u| \exp(-c|x|^q) \leq \text{const.}$ avec

$$q = \frac{2b}{2b-1} \text{ et } c > 0 \text{ constant; comme fonctions de } x, u \in e^{2b+h} \text{ et,}$$

comme fonction de y , $u \in \mathcal{C}^1$, $0 < h' < 1$, dans $(E_n * (0, y' >))$, c'est-à-dire les dérivées de toutes les composantes $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, N$ du vecteur $u(x, y)$ par rapport à x existent jusqu'à l'ordre $2b$ et sont hôldériennes et les dérivées premières par rapport à y existent et sont continues dans $(E_n * (0, y >))$, cf. [5].

On a démontré [2] l'existence d'une liaison entre les coefficients $A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y)$, ($\alpha, \beta = 1, \dots, N$) et les moments moyens par rapport à l'accroissement de la variable linéaire de la solution fondamentale Γ du système (1,1) :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{k! \Delta y} \int (\xi - x)^k \Gamma_{\alpha\beta}(x, y; \xi, y - \Delta y) d\xi = \begin{cases} 0, & |k| > 2b \\ A_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y), & 0 < |k| \leq 2b \end{cases} \quad (1,3)$$

$$y > \Delta y > 0, \quad x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k! = k_1! \dots k_n!$$

En outre, on a démontré, dans le même article, que la somme de chaque ligne de la matrice des solutions fondamentales :

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta(x, y; \xi, \eta), \quad y > \eta; \quad x, \xi \in E_n \quad (1,4)$$

est la solution fondamentale de l'équation, dont les coefficients $a_\alpha^{(k)}$ sont les sommes de chaque ligne de la matrice des coefficients du système (1,1), à savoir :

$$a_\alpha^{(k)} = \sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| \leq 2b$$

dès que les coefficients $a_\alpha^{(2b)}$ permettent d'affirmer que l' α ème équation est P-parabolique d'ordre $2b$ (l'hypothèse III).

Nous savons [1], [4] que les solutions P_α satisfont aux équations de Smoluchowski :

$$P_\alpha(x, y; \xi, \eta) = \int P_\alpha(x, y; \zeta, \theta) P_\alpha(\zeta, \theta; \xi, \eta) d\zeta \quad (1,6)$$

et que, lorsqu'en plus les coefficients des membres linéaires sont nuls, elles vérifient :

$$\int P_\alpha(x, y; \xi, \eta) d\xi = 1 \quad (1,7)$$

dès que :

$$\sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) = 0 \quad (1, 8)$$

On dit alors qu'elles sont *entièrement normées*.

On peut démontrer que la solution fondamentale entièrement normée est *normée*, c'est-à-dire qu'on a, pour chaque fonction intégrable $g(x)$ et telle que : $|g(x)| \exp(-\beta|x|_q^q) < \infty$, où $0 < \beta$ est une constante convenable (voir [5]) :

$$\int P_{\alpha}(x, y ; \xi, \eta) g(\xi) d\xi \longrightarrow g(x), \quad y \longrightarrow \eta$$

en tout point de continuité de la fonction $g(x)$. En effet, c'est une conséquence immédiate du fait que la solution fondamentale P_{α} est soumise à l'inégalité (2, 3).

Nous savons aussi que pour une équation (ou système) du second ordre, la fonction P_{α} , entièrement normée, est non-négative; elle peut être interprétée comme une "fonction de passage", [1], [4].

Dans le cas général ($2b > 2$), nous dirons que la solution P_{α} , entièrement normée, est la *fonction de passage généralisée*. Nous verrons qu'elle ne peut pas conserver son signe. Il est évident, à cause de la formule (1, 7), que la fonction P_{α} ne peut pas être non-positive. On démontrera aussi qu'elle ne peut être non-négative.

Rappelons ici les hypothèses de Feller [3] concernant la fonction de passage au cas où $2b = 2$.

$$1/ \quad D P(x, y ; \xi, \eta) \quad \text{et} \quad D^2 P(x, y ; \xi, \eta)$$

existent et sont continues pour

$$x, \xi \in E_n, \quad y < \eta,$$

$$2/ \quad \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi| > \delta} P(x, y ; \xi, y + \Delta y) d\xi \longrightarrow 0, \quad x, \xi \in E_n, \quad \delta > 0, \\ \Delta y \rightarrow 0$$

$$3/ \quad \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi| \leq \delta} (\xi - x)^1 P(x, y ; \xi, y + \Delta y) d\xi \longrightarrow a^{(1)}(x, y), \\ \Delta y \rightarrow 0$$

$$4/ \quad \frac{1}{2! \Delta y} \int_{|x-\xi| \leq \delta} (\xi - x)^2 P(x, y ; \xi, y + \Delta y) d\xi \longrightarrow a^{(2)}(x, y) \\ \Delta y \rightarrow 0$$

Remarque 1,1 - Chez Feller on a, comme d'habitude dans la théorie des processus stochastiques, $P(x, y; \xi, \eta)$ avec $y < \eta$; l'équation parabolique est alors avec le signe "+" avant la dérivée $\partial P / \partial y$.

La condition 2/ est souvent remplacée par la suivante :

$$2' / \quad \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi|>\delta} (\xi - x)^2 P(x, y; \xi, y - \Delta y) d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0, \quad \delta > 0$$

et alors les hypothèses 3/ et 4/ peuvent être remplacées par :

$$3' / \quad \frac{1}{\Delta y} \int (\xi - x)^1 P(x, y; \xi, y - \Delta y) d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} a^{(1)}(x, y)$$

et

$$4' / \quad \frac{1}{2! \Delta y} \int (\xi - x)^2 P(x, y; \xi, y - \Delta y) d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} a^{(2)}(x, y)$$

la condition 2'/ entraîne la condition 2/.

Mais la fonction $P = P_a(x, y; \xi, \eta)$, définie par la formule (1,4), et à cause des formules (1,3) et (1,8), satisfait aux hypothèses 1/ avec $y > \eta$, 3'/ et 4'/ . On démontrera au par.2 qu'elle satisfait aussi à l'hypothèse 2'/ . Il résulte qu'elle ne peut être non-négative. En effet, si elle était non-négative, alors satisfaisant aux conditions 1/, 2'/, 3'/ et 4'/ elle devrait être, d'après le théorème de Kolmogoroff, la solution fondamentale de l'équation de Kolmogoroff, qui est de second ordre, sans terme linéaire. Par conséquent, à cause de la première des formules (1,3), qui est valable aussi pour $2b = 2$, ses moments moyens d'ordre plus élevé que le second devrait être identiquement égaux à zéro, contrairement à l'hypothèse III.

2/ Grâce aux hypothèses I et II, nous pouvons alors établir quelques propriétés de la solution P_a .

Lemme 2-1 -

$$i_1 = \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi|>\delta} |\xi - x|^{2b} |P_a(x, y; \xi, y - \Delta y)| d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0, \quad \delta > 0 \quad (2,1)$$

et

$$i_2 = \frac{1}{\Delta y} \int |\xi - x|^{2b} |P_a(x, y; \xi, y - \Delta y)| d\xi \leq \text{const.} \quad (2,2)$$

Démonstration - Nous faisons intervenir l'évaluation bien connue de la solution fondamentale du système parabolique [5].

$$P_{\alpha}(x, y; \xi, y - \Delta y)$$

est alors borné par :

$$|P_{\alpha}(x, y; \xi, y - \Delta y)| < C(\Delta y)^{\frac{n}{2b}} \exp \left[-c \left(\frac{|x - \xi|}{(\Delta y)^{\frac{1}{2b}}} \right)^q \right] \quad (2, 3)$$

$q = \frac{2b}{2b-1}$, C et c étant des constantes positives.

Posons :

$$|x - \xi| = r \quad ; \quad r \cdot (\Delta y)^{-\frac{1}{2b}} = u$$

et nous trouvons :

$$i_1 < C_1(\Delta y)^{\frac{n}{2b}-1} \int_{r>\delta} r^{n-1+2b} \exp \left[-c \left(\frac{r}{(\Delta y)^{\frac{1}{2b}}} \right)^q \right] dr = \quad (2, 4)$$

$$C_1 \int_{u>\delta(\Delta y)^{\frac{1}{2b}}}^1 u^{n-1+2b} \exp(-c u^q) du \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0,$$

$C_1 > 0$, $\delta > 0$.

De même on trouve :

$$i_2 < C_2 \int_0^{\infty} u^{n-1+2b} \exp(-c u^q) du \leq \text{const.}, \quad (2, 4')$$

c. q. f. d. .

Remarque 2,1 - Il est bon de noter que $|P_{\alpha}(x, y; \xi, \eta)|$ n'est pas la solution fondamentale de l'équation en question, car $|P_{\alpha}| \neq P_{\alpha}$, si P n'est pas non-négative.

Lemme 2,2 - La formule (2,1) étant admise pour la fonction P_{α} , on trouve les formules suivantes :

$$i = \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi|>\delta} |\xi - x|^{|k|} |P_{\alpha}(x, y; \xi, y - \Delta y)| d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0, \quad |k| \leq 2b, \quad \delta > 0 \quad (2, 5)$$

Démonstration - Soit $M\delta > 1$, M étant constant. Nous obtenons facilement :

$$i < \frac{1}{\Delta y} \int_{|x-\xi|>\delta} (M\delta)^{2b-|k|} |\xi - x|^{|k|} |P_\alpha| d\xi \leq \quad (2,6)$$

$$\frac{M^{2b-k}}{\Delta y} \int_{|x-\xi|>\delta} |\xi - x|^{2b} |P_\alpha| d\xi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0, \quad |k| \leq 2b, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il résulte des lemmes (2,1) et (2,2) que la fonction $P_\alpha(x,y;\xi,y-\Delta y)$ satisfait à la formule 2' du §1. Ce résultat et la conclusion du §1 donnent le théorème :

Théorème 2,1 - La solution fondamentale de l'équation P -parabolique à coefficients holdériens et continus (hypothèse II), sans termes linéaires, d'ordre plus élevé que le second, change de signe. Elle n'est pas donc une fonction de passage (elle n'est qu'une fonction de passage généralisée).

On a ainsi démontré que les sommes des lignes de la matrice fondamentale du système parabolique soumis aux hypothèses I, II et III sans termes linéaires et d'ordre plus élevé que le second change de signe.

3/ On démontrera la réciproque du théorème (1,1), [2], à savoir :

Théorème 3,1 - Si (I') les dérivées de la fonction de passage généralisée :

$$P_\alpha(x, y; \xi, \eta) = P; D^k P(x, y; \xi, \eta), \quad |k| \leq 2b$$

existent, sont continues et bornées pour

$$x, \xi \in E_n, \quad y > \eta + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

(II') si l'on a les formules (2,1) et (2,2) et les égalités :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{k! \Delta y} \int (\xi - x)^k P(x, y; \xi, y - \Delta y) d\xi = a^{(k)}(x, y), \quad 0 < |k| \leq 2b \quad (3,1)$$

où les coefficients $a^{(k)}$ sont soumis aux hypothèses II et III, alors la fonction de passage généralisée $P(x, y; \xi, \eta)$ est la solution fondamentale de l'équation P -parabolique d'ordre $2b$, sans termes linéaires.

Démonstration - La fonction P étant la fonction de passage généralisée, on a les formules suivantes :

$$\int P(x, y; \xi, \eta) d\xi = 1 \quad (3,2)$$

$$\int P(x, y; \zeta, \theta) P(\zeta, \theta; \xi, \eta) d\zeta = P(x, y; \xi, \eta) \quad (3,3)$$

Ecrivons la formule (3,3) en posant $\theta = y - \Delta y > \eta$ et retranchons d'une telle formule (3,3) la fonction $P(x, y - \Delta y; \xi, \eta)$. A cause de l'égalité (3,2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} j &= \int P(x, y, \zeta, y - \Delta y) [P(\zeta, y - \Delta y; \xi, \eta) - P(x, y - \Delta y; \xi, \eta)] d\zeta \\ &= P(x, y; \xi, \eta) - P(x, y - \Delta y; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3,4)$$

Pour évaluer $j/\Delta y$, on représentera la différence entre parenthèses de la formule (3,4) par la somme partielle de la série de Taylor d'ordre $2b$, à savoir :

$$\begin{aligned} P(\zeta, y - \Delta y, \xi, \eta) - P(x, y - \Delta y; \xi, \eta) = \\ \sum_{l=1}^{2b} \frac{1}{l!} \left[(\zeta_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + (\zeta_n - x_n) \frac{\partial}{\partial z_n} \right]^{(l)} P(z, y - \Delta y; \xi, \eta) \Big|_{z=x} + \\ + 0(1) |\zeta - x|^{2b}, \end{aligned} \quad (3,5)$$

$0(1) \rightarrow 0$, $|\zeta - x| \rightarrow 0$ et $0(1) \leq \text{const.}$, $\zeta, x \in E_n$, $y - \Delta y > \eta$, l'hypothèse I' étant admise.

Considérons d'abord l'intégrale :

$$j_1 = \frac{1}{\Delta y} \int |0(1)| |\zeta - x|^{2b} |P(x, y; \zeta, y - \Delta y)| d\zeta$$

et écrivons-là comme la somme des intégrales j_2 et j_3 étendues respectivement aux domaines : $|\zeta - x| \leq \delta$ et $|\zeta - x| > \delta$, $\delta > 0$. A cause de la formule (2,2) on trouve :

$$0 \leq \lim_{\Delta y \rightarrow 0} j_2 < |0(1)| \cdot \text{const.}, \quad 0(1) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

Il résulte de la formule (2,1) que

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} j_3 = 0, \quad \delta > 0$$

On a donc :

$$0 \leq \lim_{\Delta y \rightarrow 0} |j_1| \leq |0(1)|, \quad 0(1) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

mais le nombre δ est un nombre arbitraire positif ; ainsi :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} j_1 = 0$$

Cette dernière formule, ainsi que les formules (3,5), (3,1) et (3,4), démontrent que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \pi(x, y ; D) P \quad (3,6)$$

où :

$$\pi(x, y ; D) = \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} a^{(k)}(x, y) D^k \quad (3,6')$$

On a aussi la formule (3,2). La fonction $P(x, y ; \xi, \eta)$ est donc la solution fondamentale de l'équation P-parabolique sans termes linéaires, c. q. f. d..

Remarque 3,1 - Il est facile de voir que la démonstration de la formule (2,2) avec l'exposant 2 au lieu de $2b$ ($b > 1$) est en défaut pour la fonction P_a - la solution fondamentale de l'équation convenable d'ordre $2b$. On peut démontrer que la limite d'une telle intégrale n'existe pas.

En tenant compte des théorèmes antérieurs, on a :

Théorème 3,2 - La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de passage généralisée soit la solution fondamentale d'une équation P-parabolique d'ordre $2b$, à coefficients höldériens et continus (hypothèse II), est qu'elle satisfasse aux hypothèses I' et II' et aux formules (2,2) et (2,1). Cette fonction de passage généralisée est une fonction de passage si et seulement si l'ordre de l'équation est égale à deux ($2b = 2$).

TRAVAUX CITES

- [1] H. MILICER GRUZEWSKA - Les propriétés probabilistes de la solution d'un système parabolique d'équations à coefficients höldériens. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, S. II, 9, (1960), 1-34.
- [2] id. - Quelques propriétés des solutions fondamentales du système parabolique d'équations, *Publ. Séminaire Géométrie Univ. Neuchâtel*, S. 1, fasc.3, p.1, (1963).
- [3] W. FELLER - Zur Theorie des stochastischen Processes, *Math. Ann.*, 113, 113-160, (1936).
- [4] H. MILICER GRUZEWSKA - Sur la solution de l'équation parabolique normale aux coefficients höldériens qui est une probabilité conditionnelle de processus stochastique, Partie II, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 9, (1960), 383-390.
- [4'] id. id. - Une application de la méthode des substitutions aux processus stochastiques, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 12, (1963), 63-66.
- [5] D.G. ARONSON - On the initial value problem for parabolic systems of diff. equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65, (1959), 310-318.
- S.D. EIDELMAN - Sur quelques applications des matrices fondamentales des solutions des systèmes paraboliques (en russe), *Tieoroetioscheskaia i prikladnaia matiematika*, vyp. I, Lwowsk. Uniw. (1958), 99-149.
- W. POGORZELSKI - Etude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique aux dérivées partielles, *Ricerca di Matematica*, 7, (1958), 153-185.

Rakowiecka 6, m 35, b.C.

Warszawa 12

Pologne

Reçu le 1er Octobre 1962

Révisé le 13 Septembre 1963