



HAL
open science

Recollements de processus de Markov

Philippe Courrèges, Pierre Priouret

► **To cite this version:**

Philippe Courrèges, Pierre Priouret. Recollements de processus de Markov. Annales de l'ISUP, 1965, XIV, pp.275-377. hal-04084844

HAL Id: hal-04084844

<https://hal.science/hal-04084844>

Submitted on 28 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

RECOLLEMENTS DE PROCESSUS DE MARKOV

Philippe COURRÈGE et Pierre PRIOURET

L'objet principal du présent travail est d'établir le théorème de recollement des processus de Markov *continus* (théorème 2.4.2, 2ème partie ci-dessous). Historiquement, ce théorème a déjà été utilisé par divers auteurs (Levy, Doob, Ito et Gangolli en particulier) pour construire des processus de diffusion sur les variétés : on trouve dans l'article de Doob sur le mouvement Brownien dans un espace de Green (voir Doob [5]) l'idée de l'utilisation d'une suite croissante de temps d'arrêt (par exemple les temps successifs de sortie de l'un ou l'autre de deux ouverts dans le cas du recollement de deux processus, voir le n° 2.1.3 ci-dessous) le long de laquelle il s'agit de montrer que le caractère markovien peut être prolongé. Par ailleurs, Ito et Gangolli ont donné des démonstrations de ce même théorème dans le cas où les processus sont obtenus comme solutions d'équations intégrales stochastiques (voir Ito [10] et Gangolli [7]). On reprend ici l'idée de Doob en se plaçant dans le cas de processus de Markov à valeurs dans un espace polonais quelconque (au plus généralement un sous-espace borélien d'un espace compact métrisable, voir le n° 1.0.1 à ce sujet).

Dans la 1ère partie se trouvent présentés, de façon indépendante des diverses situations de recollement examinées ensuite, divers résultats préliminaires de prolongement le long d'une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt : on établit d'abord une variante du théorème de Tulcea qui permet de construire des mesures convenable sur la tribu $\bigvee_n \hat{F}_n$ (n° 1.1.1). On étudie ensuite les divers mode de prolongement de ces mesures à la tribu \hat{F}_∞ , en les caractérisant au moyen d'une version régulière de la probabilité conditionnelle $P_x\{X_{T_\omega} \in M / \bigvee_n F_{T_n}\}$ (n° 1.2.6 et 1.2.9). On étudie enfin le prolongement de la propriété de Markov (n° 1.3.1), et celui de la propriété de quasi continuité à gauche (n° 1.4.2).

Pour résoudre les nombreuses difficultés de mesurabilité que présentent ces questions, on fait un usage intensif des résultats fi-

gurant dans [4] ; résultats qui ont, d'ailleurs été obtenus à cet usage.

Dans la 2ème partie on étudie, à partir de la première, d'abord le recollement des processus arrêtés (théorèmes 2.1.2, 2.1.4, 2.2.1, 2.2.3 et 2.3.1) ; on en déduit ensuite celui des processus continus et le résultat principal de ce travail (théorème 2.4.2). Remarquons que c'est seulement dans ce dernier cas que le terme de recollement peut prendre exactement le sens qu'il a en théorie des Faisceaux (voir les n° 2.0.8 et 2.4.1 à ce sujet).

Toutefois, le recollement des processus arrêtés, bien que moins significatif du passage du local au global que celui des processus continus - puisqu'on doit y partir de processus *donnés sur l'espace entier* et arrêtés au sortir des ouverts considérés, et non pas seulement des processus induits sur les ouverts - apparaît, dans la procédure employée, ici comme une étape naturelle pour parvenir au théorème de recollement des processus continus.

En appendice 1 on examine les relations entre le théorème de prolongement établi dans la 1ère partie et certains résultats sur les limites projectives de mesures ; tandis qu'en appendices 2 et 3 sont reprises les démonstrations de certaines propriétés des processus de Markov importantes ici.

A la suite d'une première rédaction de ce travail (été 1964) traitant directement du cas des processus continus, P.A. MEYER nous amena et nous aida à étudier aussi celui des processus continus à droite arrêtés, et nous signala une démonstration de la propriété de Markov forte du processus recolé utilisant l'équivalence, récemment établie par lui (voir [11]), de cette propriété et de la continuité à droite des fonctions excessives sur les trajectoires (1). Nous le remercions vivement.

Nous remercions aussi Monsieur G. CHOQUET pour ses conseils et encouragements au cours de ce travail.

 (1) Nous avons préféré cependant conserver, en la simplifiant, la démonstration directe (voir le § 1.3) qui permet de ne manipuler que des processus de Markov et jamais les semi-groupes associés.

Table des matières

	Pages
1ère partie - Quelques propriétés de prolongement le long d'une suite croissante de temps d'arrêt	279
§ 1.0 - Terminologie et notations	279
§ 1.1 - Construction de mesures le long d'une suite déterminante de temps d'arrêt	285
§ 1.2 - Construction de mesures après une suite déterminante de temps d'arrêt	289
§ 1.3 - Prolongement de la propriété de Markov le long d'une suite déterminante de temps d'arrêt	306
§ 1.4 - Prolongement de la quasi-continuité à gauche au moyen d'une suite déterminante de temps d'arrêt	311
2ème partie - Recollements de processus de Markov	317
§ 2.0 - Notations et préliminaires sur les processus de Markov	317
§ 2.1 - Recollement de deux processus fortement Markoviens arrêtés	324
§ 2.2 - Recollement d'une suite quelconque de processus fortement markoviens arrêtés	337
§ 2.3 - Recollement d'une suite quelconque de processus standards arrêtés	344
§ 2.4 - Recollements de processus fortement Markoviens continus	355
Appendice 1 - Limites projectives de mesures et Théorème 1.1.1	364

Appendice 2 - Continuité à droite des tribus définitives ...	Pages 369
Appendice 3 - Temps d'arrêt de la famille (G_t^*)	370
Appendice 4 - Prolongement d'un processus fortement markovien en un processus non interrompu	373

PREMIÈRE PARTIE

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE PROLONGEMENT LE LONG D'UNE SUITE CROISSANTE DE TEMPS D'ARRÊT

Bien que présentés formellement de façon indépendante des diverses situations de recollement étudiées dans la 2ème partie, les développements présentés dans cette 1ère partie constituent essentiellement des lemmes d'où découlent les résultats de la 2ème partie⁽¹⁾. On recommande au lecteur de prendre connaissance du déroulement des idées de cette dernière avant d'aborder la lecture détaillée des techniques introduites ci-dessous.

1. 0. - Terminologie et notations

1.0.1 - Fonction aléatoire $X = (\Omega, \omega_s, (X_t))$ - Adoptant la terminologie et les notations introduites dans [4], on désigne, dans toute cette partie, par (E, \mathcal{B}) un espace mesurable tel que $\{x\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in E$ et

$$\Delta_E = \{(x, x) \mid x \in E\} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \quad \text{et par } X = (\Omega, \omega_s, (X_t)_{t \in R_t})$$

une fonction aléatoire à cimetière à valeurs dans (E, \mathcal{B}) ⁽²⁾, progressivement mesurable⁽³⁾, admettant une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt et une famille (θ_t) d'opérateurs de translation⁽⁴⁾, et possédant la propriété de raccordement⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

(1) On donnera dans un travail ultérieur d'autres applications en particulier à la construction de processus à gradins et au prolongements de processus de Markov "au-delà de la durée de vie"(voir l'appendice 4).

(2) Voir [4] n° 0.3.

(3) Voir [4] n° 0.5.

(4) Voir [4] n° 0.4.

(5) Voir [4] n° 5.1.

(6) Voir [4] appendice 2.

On suppose, de plus, que X possède la *propriété complète de raccordement* (1) : pour toute suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels ≥ 0 , et toute suite $(\omega_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Ω telles que

$$X_{t_n - t_{n-1}}(\omega_n) = X_0(\omega_{n+1}) \quad \text{pour chaque } n \geq 1,$$

il existe un élément ω de Ω tel que

$$\theta_{t_{n-1}}(\omega) \sim \omega_n (R_{t_n - t_{n-1}}^X) \quad \text{pour chaque } n \geq 1.$$

Pour chaque $t \in [0, +\infty]$, on désigne respectivement par F_t , \hat{F}_t et F_{t+} les tribus F_t^X , \hat{F}_t^X et F_{t+}^X (2) ; et, pour chaque sous-ensemble U de E , on désigne par σ_U le temps de sortie de U pour X (3). En particulier, σ_E désigne la durée de vie de X .

Enfin, on appelle *famille d'opérateurs de meurtre de X* (1) une famille $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'applications de Ω dans Ω telle que

$$X_s(m_t(\omega)) = X_s(\omega) \quad \text{pour tout } s < t$$

$$X_s(m_t(\omega)) = \delta \quad \text{pour tout } s \geq t$$

1.0.2 - Diffusions de E_δ dans Ω - Si G est une tribu sur Ω , une diffusion de E_δ dans (Ω, G) est une application $x \rightarrow P_x$ dans l'ensemble des mesures de probabilité sur G telle que, pour chaque $A \in G$, l'application $x \rightarrow P_x(A)$ est mesurable lorsqu'on munit E_δ de la tribu \mathcal{B}_δ complétée universelle de la tribu $\mathcal{B}_\delta^{(4)}$.

Comme d'ordinaire, si $\Psi \in B(\Omega, G)$ (5), on notera $E_x(\Psi)$ l'espérance mathématique $\int \Psi dP_x$, et si μ est une mesure de probabilité sur \mathcal{B}_δ , P_μ la probabilité $A \rightarrow \int \mu(dx) P_x(A)$ sur \overline{G} , et E_μ l'espérance mathématique correspondante.

(1) Voir les exemples et la remarque du n° 1.0.7 ci-dessous.

(2) Voir [4] n° 0.3.

(3) Voir [4] appendice 2.

(4) Voir [4] n° 0.1 et 0.3.

(5) Si (U, \mathcal{U}) est un espace mesurable, $B(U, \mathcal{U})$ désigne l'ensemble des fonctions numérique sur U , \mathcal{U} -mesurables et bornées.

Notons que, si, pour chaque $x \in E_\delta$, on prolonge P_x à la tribu \bar{G} complétée universelle de $G^{(1)}$, on définit une diffusion de E_δ dans (Ω, \bar{G}) .

On dit qu'une diffusion (P_x) de E_δ dans (Ω, G) est normale si $G \supset E_0$ et $P_x \{X_0 = x\} = 1$ pour tout $x \in E_\delta$.

1.0.3 - Temps terminaux - On appelle *temps terminal* (de X) un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) tel que :

$$(1.0.1) \quad T(\omega) = t + T(\theta_t(\omega))$$

pour tout (t, ω) tel que $t < T(\omega)$.

On dit que T est un *temps terminal strict* si de plus,

$$(1.0.2) \quad T(\omega) = t + T(\theta_t(\omega))$$

pour tout (t, ω) tel que $t \leq T(\omega)$.

Si $U \subset E$ est tel que σ_U soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , σ_U est un temps terminal strict de X .

1.0.4 - Suites déterminantes de temps d'arrêt - Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite (quelconque) de temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ (2). Posons :

$$(1.0.3) \quad T_0 = 0$$

$$(1.0.4) \quad T_{n+1} = T_n + S_{n+1} \circ \theta_{T_n} \quad (n \geq 0).$$

En vertu du lemme 4.3 de [4], on définit ainsi une suite croissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) (3) qui est appelée la *suite déterminante associée à la suite (S_n)* . Une suite $(T'_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) est dite déterminante

(1) Voir [4] n° 0.1.

(2) Voir [4] n° 0.2.

(3) Si, pour tout n , S_n est un temps d'arrêt de la famille (F_t) , il en est de même de T_n .

s'il existe une suite (S_n) dont (T_n') est la suite déterminante associée(1).

On désignera par T_∞ le temps d'arrêt $\sup_n T_n$. Si, pour tout n , $S_n \leq \sigma_U$ (où $U \subset E$) on a aussi $T_\infty \leq \sigma_U$, à cause de la relation $\{t \leq \sigma_U\} \subset \{\sigma_U = t + \sigma_U \circ \theta_t\}$ ($t \in \mathbb{R}_+$).

1.0.5 - Suites déterminantes terminales - Une suite déterminante $(T_n)_{n \geq 0}$ est dite *terminale*, si, pour tout $n \geq 0$, il existe un entier ≥ 0 $\varphi(n)$ tel que, pour tout $p \geq 0$,

$$(1.0.5) \quad T_{n+p} = T_n + T_{\varphi(n)+p} \circ \theta_{T_n} \quad (2)$$

Deux cas se présenteront essentiellement correspondant à $\varphi(n) = 0$ et $\varphi(n) = n$ ($n \geq 0$, $p \geq 0$)(3).

LEMME - Si (T_n) est une suite déterminante terminale, pour chaque $n \geq 0$ on a :

$$(1.0.6) \quad T_\infty = \sup_p T_p = T_n + T_\infty \circ \theta_{T_n}$$

$$(1.0.7) \quad g \in B(\Omega, \bigvee_p \hat{F}_{T_p})^{(4)} \implies g \circ \theta_{T_n} \in B(\Omega, \bigvee_p F_{T_p}).$$

En effet, d'une part, on obtient (1.0.6) en faisant tendre p vers $+\infty$ dans (1.0.5). D'autre part, soient $g \in B(\Omega, \hat{F}_{T_p})$, et $n \geq 0$; d'après le lemme 4.2 de [4], $\alpha_{T_{\varphi(n)+p} \circ \theta_{T_n}}(\omega) \sim \theta_{T_n} \circ \alpha_{T_{n+p}}(\omega)$ (\mathbb{R}_+^*); donc (théorème 2.4 et lemme 1.2 de [4]),

$$g \circ \theta_{T_n} = g \circ \alpha_{T_{\varphi(n)+p} \circ \theta_{T_n}} = g \circ \theta_{T_n} \circ \alpha_{T_{n+p}};$$

ce qui montre que

$$g \circ \theta_{T_n} \in B(\Omega, \hat{F}_{T_{n+p}});$$

d'où le lemme.

(1) On dira alors aussi que (T_n') est une suite déterminante (en omettant "de temps d'arrêt").

(2) En faisant $p = 1$, on voit que la suite (T_n) est associée à la suite (S_n) , où $S_n = \varphi(n-1)$ ($n \geq 1$).

(3) Voir ci-dessous les n° 2.1.3 et 2.2.2.

(4) Voir le n° 1.0.2 note (5).

1.0.6 - Cas topologique : Espaces B.C.D. ; fonctions aléatoires continues à droite - Dans tout ce travail, on appelle *espace B.C.D.* un espace topologique homéomorphe à un sous-espace borélien d'un espace compact métrisable.

Si E est un tel espace, on lui associe toujours l'espace mesurable (E, \mathcal{B}) obtenu en le munissant de sa tribu Borélienne $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E^{(1)}$, et on munit l'espace $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ ($\delta \notin E$) de l'unique topologie prolongeant celle de E et faisant de δ un point isolé (2).

Si E est un espace B.C.D., on dit que la fonction aléatoire X à valeurs dans (E, \mathcal{B}) (n° 1.0.1) est (du type) *continu à droite* si, pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $s \longrightarrow X_s(\omega)$ de R_+ dans E_δ est continue à droite. Pour chaque ouvert U de E , σ_U est alors un temps terminal strict de X (3).

On dit que X est *du type de Hunt* (resp *du type continu*) si pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $s \longrightarrow X_s(\omega)$ de R_+ dans E_δ est continue à droite et pourvue d'une limite à gauche $X_t^-(\omega)$ (resp continue) en chaque point $t \in R_+$ tel que $X_t(\omega) \neq \delta$ (4).

1.0.7 - Exemples habituels de fonction aléatoire X -

A) Fonction aléatoire typique(5) continue à droite - E est un espace B.C.D., X est typique et Ω est l'ensemble des applications de R_+ dans E_δ continues à droites et absorbées par δ .

B) Fonctions aléatoire typique de Hunt (resp continue) - E est un espace B.C.D., X est typique et Ω est l'ensemble des applications de R_+ dans E_δ , continues à droite, pourvues de limites à gauche (resp continues) en chaque point $t \in R_+$ tel que $X_t(\omega) \neq \delta$, et absorbées par δ .

(1) E étant séparé et ayant une base dénombrable d'ouverts, les conditions $\{x\} \in \mathcal{B}$ ($x \in E$) et $\Delta_E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ postulées au n° 1.0.1 sont ainsi satisfaites.

(2) Lorsque E est un espace localement compact à base dénombrable (LCD) et non compact, cette topologie diffère de la topologie compacte d'Alexandrov dont E_δ est habituellement pourvu. Cette divergence ne porte pas à conséquence ici à cause du caractère local des propriétés envisagées.

(3) Voir [4] appendice 2.

(4) Si X est du type continu, X est du type de Hunt.

(5) Voir [4] appendice 1.

C) **Fonction aléatoire typique à gradins** - X est typique (1), et Ω est l'ensemble des applications ω de R_+ dans E_δ pour lesquelles il existe une suite croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ de nombres ≥ 0 , et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E_δ tels que, $t_0 = 0$, $\sup_n t_n = \sigma(\omega)$ et $X_t(\omega) = a_n$ pour tout $n \geq 0$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

A') **Fonction aléatoire typique continue à droite non interrompue** - E est un espace B.C.D., X est typique et $\Omega \setminus \{\omega_\delta\}$ est l'ensemble des applications de R_+ dans E (et plus E_δ comme dans l'exemple A) ci-dessus) continues à droite.

On vérifie sans difficultés que, dans les exemples A) B) et C), X possède la *propriété complète de raccordement* et une famille (canonique) d'opérateurs de meurtre.

Dans l'exemple A'), X possède encore la *propriété complète de raccordement*, mais ne possède pas de famille d'opérateurs de meurtre.

REMARQUE 1 - Examinons l'exemple B') où E est un espace B.C.D., X est typique et Ω est l'ensemble des applications continues de R_+ dans E . Il est clair que X ne possède plus alors la propriété complète de raccordement (dans l'exemple A' c'était le fait d'admettre des discontinuités de 2ème espèce à gauche pour les trajectoires qui permettait la propriété complète de raccordement).

REMARQUE 2 - Un lecteur intéressé surtout par le cas de l'un ou l'autre de ces exemples ou bien rebuté par la considération de fonctions aléatoires non typiques peut fort bien considérer X comme l'une des fonctions aléatoires typiques ci-dessus (exemples A), B), C) ou A') ; pour l'exemple A') faire attention cependant au § 2.3 (voir la remarque du n° 2.3.4 et le n° 2.2.8)).

(1) Le caractère topologique de E est inutile ici.

1.1. Construction de mesures le long d'une suite déterminante de temps d'arrêt

1.1.1 - THEOREME ⁽¹⁾ - Soient $(S)_{n \geq 1}$ une suite de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite déterminante ⁽²⁾ associée à (S_n) , et pour chaque $n \geq 1$, (P_x^n) une diffusion normale de E_δ dans (Ω, \hat{F}_{S_n}) ⁽²⁾.

Alors, il existe une diffusion (P_x) de E_δ dans $(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$ ⁽⁴⁾, et une seule telle que :

(1.1.1) (P_x) est normale ⁽⁵⁾.

(1.1.2) $P_x \{ \theta_{T_n}^{-1}(A) / F_{T_n} \} = P_{x_{T_n}}^{n+1}(A) \quad P_x . P.S$

pour tout $x \in E_\delta$, $n \geq 0$ et $A \in \hat{F}_{S_{n+1}}$ ⁽⁵⁾.

Ce résultat peut être considéré comme un théorème d'existence de limite projective de mesures (voir à ce sujet l'appendice 1 n° A1.3). Nous allons ici l'établir à partir du théorème classique de Tulcea (voir [9] et le n° 1.1.4 ci-dessus), au moyen des deux lemmes suivants :

1.1.2 - LEMME - Avec les notations et hypothèses du théorème 1.1.1, pour qu'une diffusion (P_x) de E_δ dans $(\Omega, \bigvee_n F_{T_n})$ satisfassent aux relations (1.1.1) et (1.1.2), il faut et il suffit que, pour tout $p \geq 1$, toute fonction $\Phi \in B(\Omega^p, \bigotimes_{k=1}^p \hat{F}_{S_k})$ ⁽⁶⁾, et tout $x \in E_\delta$,

(1) Avec les notations et hypothèses fixées au n° 1.0.1 ci-dessus : en particulier, X possède la propriété complète de raccordement.
 (2) Voir le n° 1.0.4 ci-dessus.
 (3) Voir le n° 1.0.2 ci-dessus.
 (4) $\bigvee_n F_{T_n}$ désigne la tribu sur Ω engendrée par $\bigcup_n F_{T_n}$ (voir [4] n° 0.1).
 (5) On notera que $\theta_{T_n}^{-1}(A \in F_{T_{n+1}})$ d'après le théorème 4.5 de [4].
 (6) Voir le n° 102, note (5).

$$(1.1.3) \int_{\Omega} \Phi(\omega, \theta_{T_1}(\omega), \dots, \theta_{T_{p-1}}(\omega)) P_x(d\omega) =$$

$$p \int_{\Omega} P_x^1(d\omega_1) \int_{\Omega} P_{x_{S_1}}^2(d\omega_2) \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} P_{x_{S_{p-1}}}^p(d\omega_p) \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p).$$

En effet, on montre que la condition est nécessaire par récurrence sur P en remarquant d'une part (pour $p = 1$) que les relations $P_n\{X_0 = x\} = 1$, et (1.1.2) entraînent que P_x et P_x^1 coïncident sur la tribu $\hat{F}_{S_1}(1)$; d'autre part que la fonction $\omega \longrightarrow \Phi(\omega, \theta_{T_1}(\omega), \dots, \theta_{T_{p-1}}(\omega))$ est \hat{F}_{T_p} -mesurable en vertu du théorème 4.5 de [4]. Inversement, pour montrer que la condition est suffisante, on vérifie d'abord que la relation $P_x^1\{X_0 = x\} = 1$ et la coïncidence de P_x et P_x^1 sur \hat{F}_{S_1} , entraînent la relation $P_x\{X_0 = x\} = 1$, et la relation (1.1.2) pour $n = 0$. Il suffit ensuite, en vertu du théorème 4.5 de [4] (2) de vérifier que, si

$$\Phi \in B\left(\Omega^n, \bigotimes_{k=1}^n F_{S_k}\right) \quad \text{et} \quad \Psi \in B(\Omega, \hat{F}_{S_{n+1}}),$$

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega, \theta_{T_1}(\omega), \dots, \theta_{T_{n-1}}(\omega)) \Psi(\theta_{T_n}(\omega)) P_x(d\omega) =$$

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega, \theta_{T_1}(\omega), \dots, \theta_{T_{n-1}}(\omega)) E_{x_{T_n}}^{n+1}(\Psi) P_x(d\omega),$$

relation qui résulte immédiatement de (1.1.3).

1.1.3 - LEMME - Soient $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , et $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite déterminante associée.

Désignons par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des suites $(\omega_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Ω telles que, pour tout $n \geq 1$, $X_{S_n}(\omega_n) = X(\omega_{n+1})$, et par \tilde{F} la tribu induite sur $\tilde{\Omega}$ par la tribu produit $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \hat{F}_{S_k}$. Alors, il existe une application γ de $\tilde{\Omega}$ dans Ω , mesurable pour les tribus \tilde{F} et $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$ respectivement, et telle que, pour tout $n \geq 1$ et

$$\Phi \in B\left(\Omega^n, \bigotimes_{k=1}^n F_{S_k}\right)$$

(1) d'où il résulte que l'hypothèse de normalité de (P_x^1) , faite dans le théorème, est nécessaire.

(2) ce théorème entraîne que $\hat{F}_{T_n} = \overline{\bigvee_{k=1}^n \theta_{T_{k-1}}^{-1}(\hat{F}_{S_k})}$.

$$(1.1.4) \quad \Phi(\gamma(\tilde{\omega}), \theta_{T_1}(\gamma(\tilde{\omega})), \dots, \theta_{T_{n-1}}(\gamma(\tilde{\omega}))) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

pour tout $\tilde{\omega} = (\omega_k)_{k \geq 1} \in \tilde{\Omega}$.

Soit $\tilde{\omega} = (\omega_k)$ un élément de $\tilde{\Omega}$; posons $t_0 = 0$, et $t_n = \sum_{k=1}^n S_k(\omega_k)$; on a, $X_{t_n - t_{n-1}}(\omega) = X_{S_n}(\omega_n) = X_0(\omega_{n+1})$, par définition de $\tilde{\Omega}$; donc, en vertu de la propriété complète de raccordement (1) que possède X (n° 1.0.1), il existe un élément ω de Ω tel que, pour chaque $n \geq 1$,

$$(1.1.5) \quad X_{s+t_{n-1}}(\omega) = X_s(\omega_n) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t_n - t_{n-1}.$$

Montrons par récurrence que, pour chaque $n \geq 1$, $T_n(\omega) = t_n$, et $X_s(\theta_{T_{n-1}}(\omega)) = X_s(\omega_n)$ pour tout $s \leq S_n(\omega_n) = t_n - t_{n-1}$: d'abord, la relation (1.1.5), avec $n = 1$, entraîne que $X_s(\omega) = X_s(\omega_1)$ pour tout $s \leq t_1 = S_1(\omega_1)$; donc ([4] théorème 1.3) que

$$T_1(\omega) = S_1(\omega) = S_1(\omega_1) = t_1.$$

Supposons ensuite que $T_n(\omega) = t_n$ et $X_s(\theta_{T_{n-1}}(\omega)) = X_s(\omega_n)$ pour $s \leq t_n - t_{n-1}$; on a, d'après la relation (1.1.5), si $s \leq S_{n+1}(\omega_{n+1}) = t_{n+1} - t_n$,

$$X_s(\theta_{T_n}(\omega)) = X_{s+T_n}(\omega) = X_{s+t_n}(\omega) = X_s(\omega_{n+1});$$

donc, $\theta_{T_n}(\omega) \sim \omega_{n+1} (R_{S_{n+1}}^x)$ ([4] théorème 1.3); d'où il résulte que $S_{n+1}(\theta_{T_n}(\omega)) = S_{n+1}(\omega_{n+1})$, donc aussi que

$$T_{n+1}(\omega) = T_n(\omega) + S_{n+1}(\theta_{T_n}(\omega)) = t_n + t_{n+1} - t_n = t_{n+1},$$

ce qui achève la récurrence annoncée.

Ainsi, $\theta_{T_{n-1}}(\omega) \sim \omega_n (R_{S_n}^x)$ pour chaque $n \geq 1$. Il en résulte ([4] théorème 1.4) que, si $\Phi \in B(\Omega^n, \prod_{k=1}^n F_{S_k})$,

$$\Phi(\omega, \theta_{T_1}(\omega), \dots, \theta_{T_{n-1}}(\omega)) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_n).$$

Faisant alors décrire $\tilde{\Omega}$ à $\tilde{\omega}$ et désignant, pour chaque $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, par $\gamma(\tilde{\omega})$ un des éléments $\omega \in \Omega$ ayant la propriété (1.1.5), on définit (2) une application γ de $\tilde{\Omega}$ dans Ω ayant la

(1) Cette propriété intervient essentiellement ici. Voir à ce sujet l'appendice 1, n° A1.2, C).

(2) Si la fonction aléatoire X est typique ([4] appendice 1), l'axiome du choix n'intervient pas ici, car la propriété de raccordement permet alors

la propriété (1.1.4) annoncée. De plus, la mesurabilité de γ en résulte, à cause de la relation

$$\hat{F}_{T_n} = \overline{\bigvee_{k=1}^n \theta_{T_{k-1}}(\hat{F}_{S_k})}.$$

1.1.4 - On peut alors établir comme suit le théorème 1.1.1 au moyen du théorème de Tulcáa (voir [9]) :

A cause de la relation $\hat{F}_{T_n} = \overline{\bigvee_{k=1}^n \theta_{T_{k-1}}(\hat{F}_{S_k})}$, la mesure P est entièrement déterminée sur la tribu \hat{F}_{T_n} par la relation (1.1.3) (lemme 1.1.2) ; l'unicité résulte donc de ce lemme.

Établissons maintenant l'existence de (P_x) : en vertu du théorème de Tulcáa, il existe pour chaque $x \in E_\delta$, une mesure de Probabilité Q_x sur l'espace produit $(\Omega^{n*}, \bigotimes_{k=1}^n \hat{F}_{S_k})^{(1)}$ telle que :

$$(1.1.6) \int \tilde{\Phi} dQ_x = \int_{\Omega} P_x^1(d\omega_1) \int_{\Omega} P_{x_{S_1}^2(\omega_1)}(d\omega_2) \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} P_{x_{S_{n-1}}^n(\omega_{n-1})}(d\omega_n) (\omega_1, \dots, \omega_n),$$

pour tout $n \geq 1$ et $\Phi \in B(\Omega^n, \bigotimes_{k=1}^n \hat{F}_{S_k})$ (où $\tilde{\Phi}((\omega_k)) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_n)$).

Désignons, pour chaque $n \geq 1$, par $\tilde{\Omega}_n$ l'ensemble des $(\omega_k) \in \Omega^{n*}$ tels que

$$X_{S_n}(\omega_n) = X_o(\omega_{n+1}). \quad \text{On a,}$$

$$\tilde{\Omega}_n \in \bigotimes_{k=1}^n \hat{F}_{S_k} \quad \text{et,}$$

$$Q_x(\tilde{\Omega}_n) = \int_{\Omega} P_x^1(d\omega_1) \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} P_{x_{S_{n-1}}^n(\omega_{n-1})}(d\omega_n) \int_{\Omega} P_{x_{S_n}^{n+1}(\omega_n)}(d\omega_{n+1}) 1_{\Delta_{E_\delta}}(X_{S_n}(\omega_n), X_o(\omega_{n+1}))$$

$$= 1, \quad \text{puisque } P_y^{n+1}\{X_o = y\} = 1 \quad \text{par hypothèse.}$$

Suite de la note 2 de la page précédente :

de déterminer entièrement une trajectoire $\gamma(\tilde{\omega})$ privilégiée : pour $s < t_\infty = \text{Sup}_n t_n$, la relation (1.1.5) détermine $X_s(\gamma(\tilde{\omega}))$; si la suite (t_n) est stationnaire, on peut (par exemple) prendre $X_s(\gamma(\tilde{\omega})) = X_{t_n}(\gamma(\tilde{\omega}))$ pour $s \geq t_\infty$; si non, prendre $X_s(\gamma(\tilde{\omega})) = \delta$ pour $s \geq t_\infty$.

(1) N^* désigne l'ensemble des entiers ≥ 1 .

Ainsi, $\tilde{\Omega} = \bigcap_{n \geq 1} \tilde{\Omega}_n \in \bigotimes_{k=1}^{\infty} \hat{F}_{S_k}$, et $Q_x(\tilde{\Omega}) = 1$, pour chaque $x \in E_\delta$.

Désignant alors par \tilde{Q}_x la mesure de probabilité sur \tilde{F} obtenue en prolongeant par complétion ([4] n° 0.1) la mesure induite sur \tilde{F} par Q_x , il reste à prendre pour P_x l'image de Q_x par l'application γ (n° 1.1.3) : les relations (1.1.4) et (1.1.6) assurent que (1.1.3) est satisfaite, et la relation (1.1.6) que (P_x) est une diffusion comme (Q_x) .

Le théorème 1.1.1 est ainsi établi.

1.2. Construction de mesures après une suite déterminante de temps d'arrêt

Dans ce paragraphe, on se propose de prolonger à la tribu \hat{F}_∞ les mesures (P_x) ($x \in E_\delta$) introduites par le théorème 1.1.1 sur la tribu $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$, en partant d'une version régulière $\pi(\omega, \Gamma)$ de la probabilité conditionnelle $P_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{T_n}\}$.

Avant d'introduire de telles versions régulières (voir le n° 1.2.2 ci-dessous), on va préciser certains modes de raccordement de la fonction aléatoire X .

1.2.1 - Modes de raccordement de la fonction aléatoire X (1) - Désignant par \mathfrak{T} l'ensemble des temps d'arrêt $\leq \sigma_\xi$ de la famille (\hat{F}_t) , on appelle *mode de raccordement de X* une famille $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ où $B_T \subset \Omega$ et $M_T \subset \Omega \times E_\delta$, vérifiant, pour chaque $T \in \mathfrak{T}$, les relations (1.2.1) à (1.2.4) ci-dessous :

$$(1.2.1) \quad \{T = +\infty\} \subset \Omega \setminus B_T \subset \{T \geq \sigma_\xi\} \quad \text{et} \quad M_T \subset B_T \times E_\delta ;$$

Pour toute suite croissante (T_n) d'éléments de \mathfrak{T} telle que $T = \sup_n T_n$,

$$(1.2.2) \quad B_T \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}, \quad \text{et} \quad M_T \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta ;$$

(1) Voir le n° 1.0.1 ci-dessus.

Si, de plus, (T_n) est une suite déterminante terminale(1), et si $\omega \in \bigcap_p \{T_p < T\}$, alors, pour chaque $n \geq 0$

$$(1.2.3) \quad \omega \notin B_T \implies \theta_{T_n}(\omega) \notin B_T \quad \text{et}$$

$$\omega \in B_T \implies \theta_{T_n}(\omega) \in B_T \quad \text{et} \quad \{y | (\omega, y) \in M_T\} = \{y | (\theta_{T_n}(\omega), y) \in M_T\}^{(2)}$$

Enfin, pour tout $(\omega, y) \in M_T$, il existe $\omega_1 \in \Omega$ tel que

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} X_s(\omega_1) &= X_s(\omega) && \text{pour tout } s < T(\omega) \text{ et,} \\ X_s(\omega_1) &= y && \text{pour tout } s \geq T(\omega) \quad (s \in R_+). \end{aligned}$$

Si $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ est un mode de raccordement de X , on dira aussi que X admet le mode de raccordement $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$.

REMARQUE - L'intérêt technique de la notion de mode de raccordement apparaîtra ci-dessous à partir du n° 1.2.5. Pour illustrer immédiatement une définition quelque peu formelle, on renvoie d'abord aux exemples courants étudiés aux n° 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4.

On peut ensuite dire ceci : T étant un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , le couple (B_T, M_T) circonscrit la latitude avec laquelle la connaissance d'une trajectoire ω pour le passé infini-simal avant T représenté par la $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$ -mesurabilité (relation 1.2.2) jointe à la stationnarité (relation 1.2.3) conditionne la possibilité de modifier ω à partir de l'instant $T(\omega)$ en l'arrêtant (relation 1.2.4) en un point de l'espace.

En fait, dans chaque énoncé, un seul instant T interviendra ; ce qui permettrait de ne définir qu'un "mode de raccordement de X à l'instant T " comme un couple (B_T, M_T) vérifiant les relations (1.2.1) à (1.2.4). On a tout de même introduit la famille $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ tout entière, car, d'une part, dans les exemples courants (n° 1.2.2 à 1.2.4), elle apparaît comme naturelle, d'autre part les énoncés ultérieurs en sont simplifiés.

(1) Voir le n° 1.0.5 ci-dessus.

(2) On notera que, d'après le caractère terminal de (T_n) , pour chaque $n \geq 0$, $\omega \in \bigcap_p \{T_p < T\} \implies \theta_{T_n}(\omega) \in \bigcap_p \{T_p < T\}$, et

$$\omega \in \bigcup_p \{T_p < T\} \implies \theta_{T_n}(\omega) \in \bigcup_p \{T_p < T\}.$$

1.2.2 - Mode de raccordement libre - Posant $B_T^l = \{T < +\infty\}$ et $M_T^l = B_T^l \times E_\delta$, pour chaque $T \in \mathfrak{T}$, on dit que X admet le mode de raccordement libre, si $(B_T^l, M_T^l)_{T \in \mathfrak{T}}$ est un mode de raccordement de X (1).

Par exemple, dans le cas topologique(2), si X est la fonction aléatoire typique continue à droite(3) à valeurs dans E , X admet le mode de raccordement libre. Par contre, si X est la fonction aléatoire typique de Hunt(3) (on continue), X n'admet pas le mode de raccordement libre : si $y \neq \delta$, l'existence de ω_1 exige celle de $X_T^-(\omega)$.

1.2.3 - Mode de raccordement continu - On suppose que E est un espace B.C.D. et que X est continue à droite(2), et on pose :

$$B_T^c = \{\omega \mid \omega \in \Omega, T(\omega) < +\infty \text{ et } X_T^-(\omega) = \lim_{\substack{s \uparrow T \\ s < t}} X_s(\omega) \text{ existe dans } E_\delta\},$$

et $M_T^c = \{(\omega, y) \mid \omega \in B_T^c \text{ et } "y = X_T^-(\omega) \text{ ou } y = \delta"\}$.

On dit alors que X admet le mode de raccordement continu si $(B_T^c, M_T^c)_{T \in \mathfrak{T}}$ est un mode de raccordement de X .

Etablissons immédiatement que les fonctions aléatoires habituelles du type de Hunt admettent le mode de raccordement continu :

LEMME - On suppose que E est un espace B.C.D.

1/ Si X est du type continu à droite(4), et si (T_n) est une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , $B_{T_\infty}^c$ et $M_{T_\infty}^c$ vérifient la relation (1.2.2).

Si, de plus, la suite (T_n) est terminale, $B_{T_\infty}^c$ et $M_{T_\infty}^c$ vérifient aussi la relation (1.2.3).

(1) Autrement dit, si, pour tout $(\omega, y) \in \{T < +\infty\} \times E_\delta$, et tout T , il existe $\omega_1 \in \Omega$ tel que $X_s(\omega_1) = X_s(\omega)$ si $s > T(\omega)$ et $X_s(\omega_1) = y$ si $s > T(\omega)$ ($s \in R_+$).

(2) Voir le n° 1.0.6.

(3) Voir [4] appendice 1 et le n° 1.0.7 ci-dessus.

(4) Voir le n° 1.0.6.

- 2/ Si X est du type de Hunt, $\Omega \setminus B_T^c \subset \{T \geq \sigma_\varepsilon\}$ pour chaque T .
- 3/ La fonction aléatoire typique de Hunt et la fonction aléatoire typique continue⁽¹⁾ à valeurs dans (E, \mathcal{B}) admettent le mode de raccordement continu.

En effet, d'abord la propriété 2/ résulte de ce que $X_t^-(\omega)$ existe pour chaque $t < \sigma_\varepsilon(\omega)$ puisque X est supposée du type de Huet. Pour établir la propriété 1/ désignons par K un espace compact métrisable contenant E_δ comme sous-espace borélien, et par ρ une distance définissant la topologie de K ; et posons

$$B = \{ \omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } \lim_{\substack{s \uparrow T_\omega(\omega) \\ s < T_\omega(\omega)}} X_s(\omega) \text{ existe dans } K \}.$$

on a, puisque K est complet et X continu à droite :

$$(1.2.5) \quad \begin{aligned} B \cap \bigcap_p \{T_p < T_\omega\} &= \bigcap_K \bigcup_n \bigcap_{p \geq n} \bigcap_{r, r' \in Q} \left\{ \omega \mid T_n(\omega) \leq r \leq r' < T_p(\omega) \Rightarrow \right. \\ &\quad \left. \rho(X_r(\omega), X_{r'}(\omega)) < \frac{1}{K} \right\}, \text{ et} \\ B \cap \bigcup_p \{T_p < T_\omega\} &= \bigcap_K \bigcup_n \bigcap_{r, r' \in Q} \left\{ \omega \mid T_\omega(\omega) - \frac{1}{n} \leq r \leq r' < T_\omega(\omega) \Rightarrow \right. \\ &\quad \left. \rho(X_r(\omega), X_{r'}(\omega)) < \frac{1}{K} \right\}^{(2)}. \end{aligned}$$

d'où on déduit, par exemple au moyen du théorème 1.4 de [4], que $B \in \bigvee_n F_{T_n}$. Posons alors,

$$Y(\omega) = \lim_{\substack{s \uparrow T_\omega(\omega) \\ s < T_\omega(\omega)}} X_s(\omega) \text{ si } \omega \in B, \text{ et } Y(\omega) = \delta \text{ si } \omega \notin B.$$

Utilisant alors des relations analogues à (1.2.5) on déduit, de la continuité à droite de X et du théorème 1.4 de [4], que Y est mesurable de $(\Omega, \bigvee_n F_{T_n})$ dans (K, \mathcal{B}_K) . Il en résulte d'abord que $B_T^c = \{T < +\infty\} \cap B \cap \{Y \in E_\delta\} \in \bigvee_n F_{T_n}$; ensuite que

$$\{(\omega, X_{T_\omega}^-(\omega)) \mid \omega \in B_T^c\}$$

(1) Voir le n° 1.0.7.

(2) Q désigne l'ensemble des nombres rationnels ≥ 0 .

$$= \bigcap_n \{ (\omega, y) \mid \omega \in B_{T_\infty}^c \text{ et } \rho(y, Y(\omega)) \leq \frac{1}{n} \} \in \bigvee_n F_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta ;$$

donc aussi que $M_{T_\infty}^c \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta$. En outre, la relation (1.2.3) est facile à vérifier si (T_n) est terminale.

Enfin, la propriété 3/ résulte des propriétés 1/ et 2/ et du caractère typique des fonctions aléatoires considérées.

REMARQUE - Posons, pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $B_T^h = B_T^c$, et $M^h = B_T^h \times E_\delta$, on déduit du lemme ci-dessus que le terme $(B_T^h, M_T^h)_{T \in \mathcal{T}}$ est un mode de raccordement de la fonction aléatoire typique de Hunt à valeurs dans E . Ainsi, le mode de raccordement continu apparaît comme trop restrictif pour les fonctions aléatoires du type de Hunt (1). Toutefois c'est ce mode qui convient pour l'étude de la quasi-continuité à gauche (voir le § 1.4 ci-dessous).

1.2.4 - Mode de raccordement à gradins - On suppose que X est une fonction aléatoire à gradins, et on pose, pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $B_T^g = \{ \omega \mid \omega \in \Omega, T(\omega) < +\infty \}$ et la trajectoire de ω n'a qu'un nombre fini de sauts sur $[0, T(\omega)[$, $M_T^g = B_T^g \times E_\delta$. Si $(B_T^g, M_T^g)_{T \in \mathcal{T}}$ est un mode de raccordement de X , on dit que X admet le mode de raccordement à gradins.

On établit, par un cheminement analogue à celui du lemme 1.2.3 que la fonction aléatoire typique à gradins à valeurs dans (E, \mathcal{B}) admet le mode de raccordement à gradins.

1.2.5 - Répartitions conditionnelles après une suite croissante de temps d'arrêt - Soient (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) telle que

$$\sup_n T_n = T_\infty \leq \sigma_\varepsilon ; \quad \text{et} \quad (B_{T_n}, M_{T_n})_{T_n \in \mathcal{T}}$$

un mode de raccordement de $X(2)$.

On appelle *répartition conditionnelle (de X) après (T_n)* une probabilité de passage $(\omega, \Gamma) \longrightarrow \pi(\omega, \Gamma)$ de $(\Omega, \bigvee_n F_{T_n})$ dans

(1) Il est, par contre, exactement adopté au cas continu.

(2) Voir le n° 1.2.1 ci-dessus.

$(E_\delta, \mathcal{B}_\delta)$. On dit que la répartition conditionnelle π est régie par le mode de raccordement $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ (1), si les propriétés suivantes sont satisfaites, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$(1.2.6) \quad \omega \notin B_{T_\omega} \implies \pi(\omega, \{\delta\}) = 1$$

$$(1.2.7) \quad \omega \in B_{T_\omega} \cap \bigcup_p \{T_p = T_\omega\} \implies \pi(\omega, \{X_{t_\omega}(\omega)\}) = 1$$

$$(1.2.8) \quad \omega \in B_{T_\omega} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\omega\} \implies \pi(\omega, \{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\omega}\}) = 1$$

EXEMPLE 1 - La répartition conditionnelle de meurtre immédiat après (T_n) : $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ étant quelconque, posons pour $\omega \in \Omega$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$\pi_m(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(X_{T_\omega}(\omega)) \quad \text{si } \omega \in \bigcup_p \{T_p = T_\omega\}$$

$$\pi_m(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(\delta) \quad \text{si } \omega \in \bigcap_p \{T_p < T_\omega\}.$$

EXEMPLE 2 - La répartition conditionnelle de bloquage après (T_n) :

Supposons que X soit du type de Hunt, et que $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ soit le mode continu, et posons, pour $\omega \in \Omega$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$\pi_a(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(X_{T_\omega}(\omega)) \quad \text{si } \omega \in \bigcup_p \{T_p = T_\omega\} \text{ ou } \omega \notin B_{T_\omega}^c$$

$$\pi_a(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(X_{T_\omega}^-(\omega)) \quad \text{si } \omega \in B_{T_\omega}^c \cap \bigcap_p \{T_p < T_\omega\}.$$

le théorème de prolongement après (T_n) s'énonce alors :

1.2.6 - THEOREME - Soient (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) telle que $\sup_n T_n = T_\omega \leq \sigma_\varepsilon$, $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ un mode de raccordement de X (2), et (P_x) une diffusion de E_δ dans $(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$.

Alors, si π est une répartition conditionnelle après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ (3), il existe une diffusion (\bar{P}_x) et une seule de E_δ dans (Ω, \hat{F}_ω) telle que, pour chaque $x \in E_\delta$,

(1) Si $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{T}}$ est le mode de raccordement libre (resp continu, à gradins) on dit que π' est libre (resp continue, à gradins).

(2) Voir le n° 1.2.1.

(3) Voir le n° 1.2.5.

(1.2.10) \overline{P}_x prolonge P_x

(1.2.11) $\alpha_{T_\infty}(\overline{P}_x) = \overline{P}_x$

(1.2.12) $\overline{P}_x(\{\omega \mid \omega \in B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \text{ et } (\omega, X_{T_\infty}(\omega)) \notin M_{T_\infty}\}) = 0$

(1.2.13) $\overline{P}_x\{X_{T_\infty} \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{T_n}\} = \pi(\cdot, \Gamma) P_x$ P.S pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$.

1.2.7 - REMARQUE - Si (B_T, M_T) est le mode de raccordement libre, la relation (1.2.12) est identiquement vérifiée.

Si X est du type de Hunt et si $(B_T, M_T)_{T \in \mathbb{R}}$ est le mode de raccordement continu, cette relation s'écrit :

$$\overline{P}_x(\{\forall_p T_p < T_\infty, X_{T_\infty}^- \text{ existe, } X_{T_\infty} \neq X_{T_\infty}^- \text{ et } X_{T_\infty} \neq \delta\}) = 0,$$

et exprime ainsi la propriété de quasi-continuité à gauche de la mesure \overline{P}_x (voir ci-dessous le n° 1.4.1) pour la suite (T_n) . En particulier, si X est du type continu, cette condition est identiquement vérifiée.

1.2.8 - Démonstration du théorème 1.2.6 - Fixons d'abord un point $x \in E_\delta$. La relation (1.2.13) à obtenir suggère de considérer la mesure \tilde{P}_x sur $(\Omega \times E_\delta, \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta)$ définie par

$$\tilde{P}_x(M) = \int P_x(d\omega) \int \pi(\omega, dy) 1_M(\omega, y) \text{ pour } M \in \overline{\bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta}.$$

Posons,

$$C_1 = (\Omega \setminus B_{T_\infty}) \times \{\delta\},$$

$$C_2 = \{(\omega, X_{T_\infty}(\omega)) \mid \omega \in B_{T_\infty} \cap \bigcup_p \{T_p = T_\infty\}\},$$

$$C_3 = ((B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}) \times E_\delta) \cap M_{T_\infty}, \text{ et}$$

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

On a, $C \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta$ et $\tilde{P}_x(C) = 1$. En effet, d'une part, C_1, C_2 et C_3 sont dans $\bigvee_n \hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta$ à cause de la propriété (1.2.2) de

1.2.7, 1.2.8.

$(B_{T_\omega}, M_{T_\omega})$, de la relation $C_2 = \bigcup_P \{(\omega, y) \mid \omega \in B_{T_\omega} \cap \{T_P = T_\omega\} \text{ et } 1_{\Delta_{E_\delta}}(y, X_{T_P}(\omega)) = 1\}$, et de la relation $\Delta_{E_\delta} \in \mathcal{B}_\delta \otimes \mathcal{B}_\delta$ (n° 1.0.1).
 D'autre part,

$$\tilde{P}_x(C_1) = \int_{\Omega \setminus B_{T_\omega}} P_x(d\omega) \pi(\omega, \{\delta\}) = P_x(\Omega \setminus B_{T_\omega}) \text{ d'après (1.2.6) ;}$$

$$\tilde{P}_x(C_2) = \int_{B_{T_\omega} \cap \bigcup_P \{T_P = T_\omega\}} P_x(d\omega) \pi(\omega, \{X_{T_\omega}(\omega)\}) = P_x(B_{T_\omega} \cap \bigcup_P \{T_P = T_\omega\}) \text{ d'après (1.2.7) ;}$$

$$\tilde{P}_x(C_3) = \int_{B_{T_\omega} \cap \bigcap_P \{T_P < T_\omega\}} P_x(d\omega) \pi(\omega, \{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\omega}\}) = P_x(B_{T_\omega} \cap \bigcap_P \{T_P < T_\omega\}),$$

d'après (1.2.8), d'où $P_x(C) = \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_x(C_i) = 1$.

Définissons alors une application Φ de $\Omega \times E_\delta$ dans Ω en posant : $\Phi(\omega, y) = \omega_\delta$ si $(\omega, y) \notin C$, et,

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \delta) &= \omega && \text{si } \omega \in \Omega \setminus B_{T_\omega} \\ \Phi(\omega, X_{T_\omega}(\omega)) &= \alpha_{T_\omega}(\omega) && \text{si } \omega \in B_{T_\omega} \cap \bigcup_P \{T_P = T_\omega\} \\ \Phi(\omega, y) &= \omega_1 && \text{si } (\omega, y) \in C_3, \end{aligned}$$

où ω_1 est un élément de Ω qui réalise le prolongement de ω par y selon la propriété (1.2.4) de $(B_{T_\omega}, M_{T_\omega})$. Par simple vérification(1), on montre, d'une part, que, pour chaque $s \in R_+$, $X_s \circ \Phi$ est mesurable de $(\Omega \times E_\delta, \sqrt[n]{\hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta})$ dans $(E_\delta, \mathcal{B}_\delta)$, donc que Φ est mesurable de $(\Omega \times E_\delta, \sqrt[n]{\hat{F}_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta})$ dans (Ω, \hat{F}_ω) ; et d'autre part que,

$$(1.2.14) \quad \alpha_{T_\omega}(\Phi(\omega, y)) \sim \Phi(\omega, y) \quad (R_\omega)$$

pour tout $(\omega, y) \in C$, et

$$(1.2.15) \quad \alpha_{T_n}(\Phi(\omega, y)) \sim \alpha_{T_n}(\omega) \quad (R_\omega^x)$$

pour tout $(\omega, y) \in C$, et tout $n \geq 0$; d'où on déduit ([4] théorème 1,3),

 (1) En utilisant, les relations (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) et la $\sqrt[n]{F_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta}$ -mesurabilité de C_1, C_2, C_3 établie ci-dessus.

$$(1.2.16) \quad T_n(\Phi(\omega, y)) = T_n(\omega) \quad \text{pour tout } (\omega, y) \in C \text{ et } n \in N \cup \{\infty\}.$$

Désignons alors par \bar{P}_x la mesure sur (Ω, \hat{F}_∞) image de \tilde{P}_x par Φ .

La famille $(\bar{P}_x)_{x \in E_\delta}$ ainsi définie répond à la question. En effet, soit $A \in \hat{F}_\infty$; on a : $\bar{P}_x(A) = \tilde{P}_x(C \cap \Phi^{-1}(A))$. On en déduit d'abord que (\bar{P}_x) est une diffusion de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) , puisque (\tilde{P}_x) en est une de E_δ dans $(\Omega \times E_\delta, \bigvee_n F_{T_n} \otimes \mathcal{B}_\delta)$. Fixant de nouveau $x \in E_\delta$, on a ensuite

$$\begin{aligned} \bar{P}_x(\alpha_{T_\infty}^{-1}(A)) &= \tilde{P}_x(C \cap \Phi^{-1}(\alpha_{T_\infty}^{-1}(A))) = \tilde{P}_x(C \cap \Phi^{-1}(A)) \\ &= \bar{P}_x(A) \quad \text{d'après (1.2.14)}; \end{aligned}$$

d'où la relation (1.2.11). La relation (1.2.12) étant une conséquence immédiate des définitions de \bar{P}_x , de Φ et de la relation (1.2.8), il reste à établir (1.2.10) et (1.2.13). Pour cela, soient

$$\Gamma \in \mathcal{B}_\delta, \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad B \in \hat{F}_{T_n};$$

Posons $A = \{X_{T_\infty} \in \Gamma\} \cap B$, et calculons $\bar{P}_x(A)$ en intégrant par rapport à \tilde{P}_x sur C_1, C_2 et C_3 ; on a,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x(C_1 \cap \Phi^{-1}(A)) &= 1_\Gamma(\delta) P_x((\Omega \setminus B_{T_\infty}) \cap B) \quad \text{d'après (1.2.1),} \\ &= \int_{(\Omega \setminus B_{T_\infty}) \cap B} P_x(d\omega) \pi(\omega, \Gamma). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x(C_2 \cap \Phi^{-1}(A)) &= \int_{B_{T_\infty} \cap \bigcup_{p \geq n} \{T_p = T_\infty\}} P_x(d\omega) 1_A(\Phi(\omega, X_{T_\infty}(\omega))) = P_x(B_{T_\infty} \cap \bigcup_{p \geq n} \{T_p = T_\infty\} \cap \alpha_{T_\infty}^{-1}(A)) \\ &= \sup_{p \geq n} P_x(B_{T_\infty} \cap \{T_p = T_\infty\} \cap \{X_{T_p} \in \Gamma\} \cap B), \end{aligned}$$

puisque $B \in F_{T_n}$ entraîne $\alpha_{T_p}^{-1}(B) = B$ pour $p \geq n$, donc que

$$\begin{aligned} \{T_p = T_\infty\} \cap \alpha_{T_\infty}^{-1}(B) &= \{T_p = T_\infty\} \cap \alpha_{T_p}^{-1}(B) = \{T_p = T_\infty\} \cap B; \\ &= \int_{B_{T_\infty} \cap \bigcup_{p \geq n} \{T_p = T_\infty\} \cap B} P_x(d\omega) \pi(\omega, \Gamma) \quad ; \quad \text{enfin,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x(C_3 \cap \Phi^{-1}(A)) &= \int_{B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}} P_x(d\omega) \int_{\{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\infty}\}} \pi(\omega, dy) 1_A(\Phi(\omega, y)) \\ &= \int_{B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}} P_x(d\omega) \int_{\{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\infty}\}} \pi(\omega, dy) 1_\Gamma(y) 1_B(\alpha_{T_n}(\omega)), \end{aligned}$$

puisque $X_{T_\omega}(\Phi(\omega, y)) = y$ si $(\omega, y) \in C_3$, et que

$\alpha_{T_n}(\Phi(\omega, y)) \sim \alpha_{T_n}(\omega) (R_\omega^x)$ si $(\omega, y) \in C$ (relation 1.2.15);

$$= \int_{B_{T_\omega} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\omega\} \cap B} P_x(d\omega) \pi(\omega, \Gamma).$$

D'où, en regroupant les trois termes :

$$\bar{P}_x(\{X_{T_\omega} \in \Gamma\} \cap B) = \int_B P_x(d\omega) \pi(\omega, \Gamma).$$

Cette relation, valable pour $B \in \overline{\bigcup_n F_{T_n}}$, l'est aussi pour $B \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}$, et finalement pour $B \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}$. On en déduit les relations (1.2.10) et (1.2.13) et le théorème.

1.2.9 - Construction de répartitions conditionnelles terminales - Soit (T_n) une suite déterminante terminale⁽¹⁾. On dit qu'une répartition conditionnelle π après (T_n) ⁽²⁾ est terminale si, pour chaque $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$

$$(1.2.17) \quad \pi(\theta_{T_n}(\omega), \Gamma) = \pi(\omega, \Gamma).$$

On a alors le résultat suivant qui montre, en particulier, l'existence de répartitions conditionnelles terminales :

THEOREME - Soient (T_n) une suite déterminante terminale⁽¹⁾ telle que $T_\infty = \sup_n T_n \leq \sigma_\varepsilon$, $(B_T, M_T)_{T \in \mathbb{E}}$ un mode de raccordement de X , et (P_x) une diffusion de E_δ dans $(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$, telle que, pour tout $x \in E_\delta$,

$$(1.2.18) \quad E_x\{g \circ \theta_{T_p} / \hat{F}_{T_p}\} = E_{x_{T_p}}\{g\} \quad P_x \text{ P.S}$$

pour chaque $p \geq 0$ et $g \in B(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$ ⁽²⁾.

(1) Voir le n° 1.0.5.

(2) $g \circ \theta_{T_n}$ est $\bigvee_n F_{T_n}$ -mesurable à cause du lemme 1.0.5.

1/ Si π est une répartition conditionnelle⁽¹⁾ après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{G}}$ et terminale, la diffusion (\bar{P}_x) introduite par le théorème 1.2.6 est telle que, pour tout $x \in E_\delta$,

$$(1.2.19) \quad \bar{E}_x \{g \circ \theta_{T_p} / \hat{F}_{T_p}\} = \bar{E}_{x_{T_p}} \{g\} \quad \bar{P}_x \text{ P.S}$$

pour chaque $p \geq 0$ et $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$.

2/ Inversement, si E est un espace B.C.D., et si (\bar{P}_x) est une diffusion de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) vérifiant, pour chaque $x \in E_\delta$, les relations (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12)⁽²⁾ ainsi que la relation (1.2.19)⁽³⁾, alors, il existe une répartition conditionnelle π après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathcal{G}}$ et terminale pour laquelle la relation (1.2.13) est satisfaite, pour chaque $x \in E_\delta$.

1.2.10 - Démonstration du théorème 1.2.9 : propriété markovienne de (\bar{P}_x) relativement au temps d'arrêt T_p ($p \geq 0$) - Fixons $x \in E_\delta$ et $p \geq 0$, et soient $f \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$, et $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$. Il s'agit de montrer que, sous l'hypothèse que π est terminale et que la relation (1.2.18) est satisfaite, on a

$$(1.2.20) \quad \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g \circ \theta_{T_p}\} = \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot \bar{E}_{x_{T_p}} \{g\}\}.$$

D'abord, puisque $\alpha_{T_\infty}(\bar{P}_x) = \bar{P}_x$, on a

$$\begin{aligned} \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g \circ \theta_{T_p}\} &= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \circ \alpha_{T_\infty} \cdot g \circ \theta_{T_p} \circ \alpha_{T_\infty}\} \\ &= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g \circ \alpha_{T_\infty} \circ \theta_{T_p}\} \end{aligned}$$

en vertu du lemme 4.2 de [4] et de la relation $T_\infty = T_p + T_\infty \circ \theta_{T_p}$ (lemme 1.0.5). Il suffit donc d'établir la relation (1.2.20) pour $g \in B(\Omega, \hat{F}_{T_\infty})$. Or, il résulte du théorème 2.4 de [4], que

$$\hat{F}_{T_\infty} = \overline{(\bigvee_n \hat{F}_{T_n}) \vee X_{T_\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\delta)}$$

(1) Voir le n° 1.2.5.

(2) Voir le n° 1.2.6 ci-dessus.

(3) Ou encore seulement, pour chaque $p \geq 0$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$.

(1.2.19') $\bar{P}_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \hat{F}_{T_p}\} = \bar{P}_{x_{T_p}} (\{X_{T_\infty} \in \Gamma\}) \quad \bar{P}_x \text{ P.S.}$

[en effet, $\{X_s^{T_\infty} \in \Gamma\} = \left(\bigcup_n \{X_s \in \Gamma, s < T_n\} \right) \cup \left(\bigcap_n \{X_{T_\infty} \in \Gamma, s \geq T_n\} \right)$,
donc $\{X_s^{T_\infty} \in \Gamma\} \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \vee X_{T_\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\delta)$]. Il suffit donc aussi d'établir la
relation (1.2.20) pour g de la forme $g_1 \cdot \varphi \circ X_{T_\infty}$ où

$$g_1 \in B(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n}) \quad \text{et} \quad \varphi \in B(E_\delta, \mathcal{B}_\delta).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g_1 \circ \theta_{T_p} \cdot \varphi \circ X_{T_\infty} \circ \theta_{T_p}\} \\ = \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g_1 \circ \theta_{T_p} \cdot \varphi \circ X_{T_\infty}\}, \end{aligned}$$

puisque $X_{T_\infty} \circ \theta_{T_p} = X_{T_\infty}$ d'après la relation 1.0.6 (lemme 1.0.5) ;

$$= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g_1 \circ \theta_{T_p} \cdot \pi(\cdot, \varphi)\}$$

en vertu de la relation (1.2.13) qui lie π et \bar{P}_x , et de la $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$ -
mesurabilité de g_1 (lemme 1.0.5 relation (1.0.7)) ;

$$= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot g_1 \circ \theta_{T_p} \cdot \pi(\theta_{T_p}, \varphi)\}$$

d'après le caractère terminal de π ;

$$= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot \bar{E}_{x_{T_p}} \{g_1 \cdot \pi(\cdot, \varphi)\}\}$$

d'après l'hypothèse (1.2.18) ;

$$= \bar{E}_x \{f \circ \alpha_{T_p} \cdot \bar{E}_{x_{T_p}} \{g_1 \cdot \varphi \circ X_{T_\infty}\}\},$$

de nouveau d'après la relation (1.2.13). D'où la relation (1.2.20) et
la première partie du théorème (1.2.9).

1.2.11 - Démonstration du théorème 1.2.9 : construction de π - Suppo-
sant que E est un espace B.C.D., désignons par K un espace
compact métrisable dont E_δ est un sous espace borélien, par
 β une base dénombrable de la topologie de K stable par inter-
sections et réunions finies et telle que $K \in \beta$, et par \mathcal{O} l'algèbre
de parties de K engendrée par β (1). \mathcal{O} est identique à l'ensemble
des réunions finies d'ensembles de la forme $U \setminus (K \setminus V)$ où $U \in \beta$

(1) \mathcal{O} engendre la tribu borélienne \mathcal{B}_K de K .

et $V \in \beta$. Il en résulte, d'une part que \mathcal{O} est dénombrable, d'autre part qu'il existe un ensemble dénombrable \mathcal{C} de parties compactes de K tel que tout élément $D \in \mathcal{O}$ soit réunion d'une suite croissante (C_n^0) d'éléments de \mathcal{C} . Désignons par \mathcal{O}' l'algèbre de parties de K engendrée par $\mathcal{C} \cup \mathcal{O}$. \mathcal{O}' est aussi dénombrable

Désignons alors par α la probabilité de passage de $(E_\delta, \overline{\mathcal{B}}_\delta)$ dans (K, \mathcal{B}_K) définie par :

$$\alpha(x, \Gamma) = \overline{P}_x (\{X_{T_\infty} \in \Gamma\}) \quad (x \in E_\delta, \Gamma \in \mathcal{B}_K).$$

En vertu de l'hypothèse (1.2.19) (ou (1.2.19')), on a :

$$(1.2.21) \quad \overline{P}_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \hat{F}_{T_p}\} = \alpha(X_{T_p}, \Gamma) \quad \overline{P}_x \text{ P.S}$$

pour chaque $p \geq 0$, $x \in E_\delta$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_K$; et il résulte du théorème de convergence des martingales que, pour chaque $x \in E_\delta$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_K$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}, \Gamma)$ existe \overline{P}_x presque sûrement sur Ω et que,

$$(1.2.22) \quad \overline{P}_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \bigvee_p \hat{F}_{T_p}\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}, \Gamma) \quad \overline{P}_x \text{ P.S.}$$

C'est cette limite qu'il s'agit de régulariser pour obtenir π . Pour cela, désignons par Ω' l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\omega), D')$ existe pour tout $D' \in \mathcal{O}'$, et par Ω'' l'ensemble des $\omega \in \Omega'$ tels que, pour chaque $D \in \mathcal{O}$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\omega), D) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ C \subset D}} \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\omega), C).$$

Posons alors

$$\pi_1(\omega, D') = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\omega), D') \quad \text{si } \omega \in \Omega''$$

$$\pi_1(\omega, D') = 1_{0,(\delta)} \quad \text{si } \omega \notin \Omega''.$$

Pour chaque $\omega \in \Omega$, $\pi_1(\omega, \cdot)$ est une fonction d'ensembles définie et additive sur \mathcal{O}' , telle que $\pi_1(\omega, K) = 1$ et régulière sur \mathcal{O} par rapport à la classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$. C'est alors un résultat classique que la restriction de $\pi_1(\omega, \cdot)$ à \mathcal{O} se prolonge, et ceci de façon unique, en une mesure de probabilité $\pi_2(\omega, \cdot)$ sur la tribu borélienne \mathcal{B}_K de K .

Le terme π_2 ainsi défini est une probabilité de passage de $(\Omega, \bigvee_p \hat{F}_{T_p})$ dans (K, \mathcal{B}_K) et on a, pour chaque $x \in E_\delta$, et $\Gamma \in \mathcal{B}_K$,

1.2.11.

$$(1.2.23) \quad \bar{P}_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \hat{F}_{T_p}\} = \pi_2(\cdot, \Gamma) \quad \bar{P}_x \text{ P.S.}$$

En effet, d'une part, pour chaque $\Gamma \in \mathcal{O}$, donc aussi pour chaque $\Gamma \in \mathcal{B}_x$, l'application $\omega \rightarrow \pi_2(\omega, \Gamma)$ est $\bigvee_p \hat{F}_{T_p}$ -mesurable, puisque $\Omega'' \in \bigvee_p \hat{F}_{T_p}$, à cause de la dénombrabilité de \mathcal{O}' , et que $\alpha(X_{T_p}, \Gamma)$ est \hat{F}_{T_p} -mesurable. D'autre part, $\bar{P}_x(\Omega'') = 1$, puisque $\bar{P}_x(\Omega') = 1$, d'après le théorème de convergence des martingales, et que, pour chaque $D \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \sup_n \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}, C_n^0) d\bar{P}_x^{(1)} &= \sup_n \lim_{p \rightarrow \infty} \int \alpha(X_{T_p}, C_n^0) d\bar{P}_x \\ &= \sup_n \bar{P}_x \{X_{T_\infty} \in C_n^0\} \quad \text{d'après (1.2.21)} \\ &= \bar{P}_x \{X_{T_\infty} \in D\} \\ &= \int_{\Omega'} \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}, D) d\bar{P}_x \quad \text{d'après (1.2.22)}. \end{aligned}$$

Enfin, de la relation $\bar{P}_x(\Omega'') = 1$, et de (1.2.22), il résulte que

$$\bar{P}_x \{X_{T_\infty} \in \Gamma / \bigvee_p F_{T_p}\} = \pi_2(\cdot, \Gamma) \quad \bar{P}_x \text{ P.S.}$$

pour chaque $\Gamma \in \mathcal{O}$; donc aussi pour chaque $\Gamma \in \mathcal{B}_x$. D'où la relation (1.2.23).

Pour chaque $x \in E_\delta$, on en déduit d'abord que

$$(1.2.24) \quad \pi_2(\cdot, E_\delta) = 1 \quad P_x \text{ P.S.}$$

On en déduit ensuite que les relations (1.2.6), (1.2.7) et (1.2.8) sont satisfaites P_x presque sûrement par π_2 ; en effet, d'une part,

$$\int_{\Omega \setminus B_{T_\infty}} P_x(d\omega) \pi_2(\omega, \{\delta\}) = \bar{P}_x(\Omega \setminus B_{T_\infty} \cap \{X_{T_\infty} = \delta\}) = \bar{P}_x(\Omega \setminus B_{T_\infty}),$$

en vertu de (1.2.23) et de (1.2.1) (n° 1.2.1); d'autre part,

(1) Où (C_n^0) est une suite d'éléments de \mathcal{C} croissant vers D .

$$\begin{aligned} \int_{B_{T_\infty} \cap \{T_p = T_\infty\}} P_x(d\omega) \pi_2(\omega, \{X_{T_\infty}(\omega)\}) &= \int_{B_{T_\infty} \cap \{T_p = T_\infty\}} P_x(d\omega) \pi_2(\omega, \{X_{T_p}(\omega)\}) \\ &= \bar{P}_x(B_{T_\infty} \cap \{T_p = T_\infty\} \cap \{\omega \mid X_{T_\infty}(\omega) = X_{T_p}(\omega)\}) \\ &= \bar{P}_x(B_{T_\infty} \cap \{T_p = T_\infty\}) \end{aligned}$$

pour chaque $p \geq 0$, d'après (1.2.23) ; enfin,

$$\begin{aligned} \int_{B_{T_\infty} \cap \{T_p < T_\infty\}} P_x(d\omega) \pi_2(\omega, \{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\infty}\}) \\ &= \bar{P}_x(B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \cap \{\omega \mid (\omega, X_{T_\infty}(\omega)) \in M_{T_\infty}\}) \\ &= \bar{P}_x(B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}) \quad \text{d'après (1.2.23) et (1.2.12).} \end{aligned}$$

Il reste alors à obtenir le caractère terminal. Pour cela, remarquons que, pour tout $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$, et $\Gamma \in \mathcal{B}_X$,

$$(1.2.25) \quad \pi_2(\omega, \Gamma) = \pi_2(\theta_{T_n}(\omega), \Gamma).$$

En effet, il résulte du caractère terminal de la suite (T_n) que les trois relations suivantes sont équivalentes :

$$\omega \in \Omega', \quad \exists n \theta_{T_n}(\omega) \in \Omega', \quad \forall n \theta_{T_n}(\omega) \in \Omega',$$

et que si elles sont satisfaites, $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\omega), \Gamma) = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(X_{T_p}(\theta_{T_n}(\omega)), \Gamma)$ pour tout $n \geq 0$ et $\Gamma \in \mathcal{O}'$. On en déduit que

$$\omega \in \Omega'' \iff \exists n \theta_{T_n}(\omega) \in \Omega'' \iff \forall n \theta_{T_n}(\omega) \in \Omega'',$$

et la relation (1.2.25).

Désignons alors par Ω''' l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que :

$$- \pi_2(\omega, E_\delta) = 1$$

$$- \omega \in B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \implies \pi_2(\omega, \{y \mid (\omega, y) \in M_{T_\infty}\}) = 1,$$

et posons, pour chaque $\omega \in \Omega$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$\pi(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(X_{T_\infty}(\omega)) \quad \text{si } \omega \in \bigcup_p \{T_p = T_\infty\},$$

$$\pi(\omega, \Gamma) = \pi_2(\omega, \Gamma) \quad \text{si } \omega \in B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \cap \Omega''''$$

$$\pi(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(\delta) \quad \text{si } \omega \in (B_{T_\infty} \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}) \setminus \Omega'''' , \text{ ou}$$

$$\text{si } \omega \in \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \setminus B_{T_\infty}.$$

π est une répartition conditionnelle après (T_n) qui répond à la question. En effet, d'abord, π est une probabilité de passage de $(\Omega \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$ dans $(E_\delta, \mathcal{B}_\delta)$ car $\Omega''' \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}$; ensuite, pour chaque $x \in E_\delta$, π_2 satisfaisant les relations (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8) et (1.2.24) P_x P.S., on a $\pi(\cdot, \Gamma) = \pi_2(\cdot, \Gamma)$ P_x P.S. pour chaque $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$; donc π satisfait (1.2.13) comme π_2 (relation (1.2.23)).

Enfin, π satisfait les relations (1.2.6), (1.2.7) et (1.2.8), par définition et en vertu de (1.2.1) ⁽¹⁾; et π est terminale à cause de (1.2.25) et (1.2.3), puisque (1.2.3) ⁽¹⁾ entraîne que, pour chaque $n \geq 0$, $\omega \in \Omega''' \implies \theta_{T_n}(\omega) \in \Omega'''$ et $\omega \notin \Omega''' \implies \theta_{T_n}(\omega) \notin \Omega'''$. Le théorème 1.2.9 est ainsi établi.

1.2.12 - Répartitions conditionnelles de sortie - Soient (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) et U une partie de E appartenant à \mathcal{B} telle que $T_\infty = \sup T_n \leq \sigma_U$. Une répartition conditionnelle au sortir de U après (T_n) est une répartition conditionnelle π après T_n ⁽²⁾ telle que,

$$(1.2.25) \quad \pi(\omega, U) = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

On peut alors compléter comme suit le théorème 1.2.6 pour une répartition conditionnelle de sortie :

THEOREME - Avec les notations et hypothèses du théorème 1.2.6, soit U un sous ensemble de E appartenant à \mathcal{B}

On suppose que $T_\infty \leq \sigma_U$, que π est une répartition conditionnelle au sortir de U après (T_n) et que la diffusion (P_x) est normale ⁽³⁾. Alors, pour chaque $x \in E_\delta$,

$$(1.2.26) \quad T_\infty = \sigma_U \quad P_x \text{ P.S.},$$

$$(1.2.27) \quad \alpha_{\sigma_U}(\bar{P}_x) = \bar{P}_x.$$

(1) Voir le n° 1.2.1.

(2) Voir le n° 1.2.5; le mode de raccordement de X n'intervient pas ici.

(3) Voir le n° 1.0.2.

Pour tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$, et toute application H de Ω dans $[0, +\infty]$, \hat{F}_∞ -mesurable,

$$g \circ \theta_H = \bar{E}_{x_H} \{g\} \bar{P}_x \quad \text{P.S. sur } \{H \geq T_\infty\}.$$

En effet, les relations 1.2.25 et 1.2.13 entraînent que

$$X_{T_\infty} \notin U \quad \bar{P}_x \quad \text{P.S.};$$

d'où les relations (1.2.25) et (1.2.27).

Pour établir la relation (1.2.28), remarquons d'abord que, pour chaque $x \in E_\delta$, la relation $P_x \{X_0 = x\} = 1$ entraîne l'existence d'un élément ω_x de Ω tel que $X_0(\omega_x) = x$. Posant

$$\bar{\omega}_x = \alpha_0(\omega_x),$$

on a, pour chaque $\omega \in \Omega$, $\alpha_0(\omega) \sim \bar{\omega}_{x_0(\omega)} (R_\infty^x)$; il en résulte que,

$$(1.2.29) \quad \bar{P}_x = \varepsilon_{\bar{\omega}_x}$$

pour chaque $x \notin U$; en effet, si $A \notin \hat{F}_\infty$,

$$\begin{aligned} P_x(A) &= \bar{P}_x(\alpha_{\sigma_0}^{-1}(A)) = \bar{P}_x(\alpha_{\sigma_0}^{-1}(A) \cap \{X_0 \notin U\}) \\ &= \bar{P}_x(\alpha_0^{-1}(A)) = 1_A(\bar{\omega}_x). \end{aligned}$$

Désignons alors par $\hat{\Omega}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$\alpha_{T_\infty}(\omega) \sim \omega (R_\infty^x);$$

on a, d'après (1.2.11), $\bar{P}_x(\hat{\Omega}) = 1$ pour tout $x \in E_\delta$ (1). Soit

$$\omega \in \hat{\Omega} \cap \{H \geq T_\infty\};$$

on a,

$$X_s(\theta_H(\omega)) = X_{s+H(\omega)}(\omega) = X_{s+H(\omega)}(\alpha_{T_\infty}(\omega)) = X_{T_\infty}(\omega)$$

pour tout $s \in R_+$, donc $\theta_H(\omega) \sim \bar{\omega}_{x_{T_\infty}(\omega)} (R_\infty^x)$, et

$$g(\theta_H(\omega)) = g(\bar{\omega}_{x_{T_\infty}(\omega)});$$

(1) Au cas où $\hat{\Omega}$ n'appartiendrait pas à \hat{F}_∞ , il suffirait de prolonger \bar{P}_x à la tribu $\mathcal{G} = \{A \mid A \subset \Omega \text{ et } \alpha_{T_\infty}^{-1}(A) \in \hat{F}_\infty\}$ au moyen de la relation $\alpha_{T_\infty}(\bar{P}_x) = \bar{P}_x$, et remarquer que $\hat{\Omega} \in \mathcal{G}$, puisque $\alpha_{T_\infty}^{-1}(\hat{\Omega}) = \Omega$.

d'où la relation (1.2.28), puisque $g(\bar{\omega}_x) = \bar{E}_x(g)$ si $x \notin U$, et que $\bar{P}_x \{X_{T_\omega} \notin U\} = 1$.

1. 3. Prolongement de la propriété de Markov le long d'une suite déterminante de temps d'arrêt

1.3.1 - THEOREME⁽¹⁾ - Soient $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite déterminante associée (2) à (S_n) , et (P_x) une diffusion normale de E_δ dans (Ω, \hat{F}_ω) (3).

On suppose que, pour chaque $n \geq 1$ et $x \in E_\delta$, il existe un temps terminal S_n^x tel que :

$$(1.3.1) \quad S_n^x = S_n \quad P_x \quad P.S.,$$

$$(1.3.2) \quad E_y \{g \circ \theta_{S_n^x} / \hat{F}_{S_n^x}\} = E_{x_{S_n^x}} \{g\} \quad P_y \quad P.S.$$

pour tout $y \in E_\delta$, et $g \in B(\Omega, \hat{F}_\omega)$,

$$(1.3.3) \quad E_x \{1_{\{v < S_n^x\}} g \circ \theta_v / F_{v+}\} = 1_{\{v < S_n^x\}} E_{x_v} \{g\} \quad P_x \quad P.S.$$

pour tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_{S_n^x})$ et tout temps d'arrêt V de la famille (\hat{F}_t) .

Alors, pour tout $x \in E_\delta$ et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\omega)$, d'une part,

$$(1.3.4) \quad E_x \{1_{\{v < T_\omega\}} g \circ \theta_v / F_{v+}\} = 1_{\{v < T_\omega\}} E_{x_v} \{g\} \quad P_x \quad P.S.$$

pour tout temps d'arrêt V de la famille (F_{t+}) (4); d'autre part,

$$(1.3.5) \quad E_x \{g \circ \theta_{T_n} / \hat{F}_{T_n}\} = E_{x_{T_n}} \{g\} \quad P_x \quad P.S. \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

1.3.2 - REMARQUE - On peut énoncer de façon imagée le théorème 1.2.1 en disant que, si la diffusion (P_x) possède, $(P_x$ -presque sûrement pour chaque x), pour chaque n ,

(1) Avec les notations fixées au n° 1.0.1.

(2) Voir le n° 1.0.4.

(3) Voir le n° 1.0.3.

(4) Sans chapeau; voir ci-dessous la remarque du n° 2.0.3.

- La propriété de Markov par rapport aux S_n (relation (1.3.2)) ;

- La propriété de Markov avant S_n (relation (1.3.3)),

alors, (P_x) possède la propriété de Markov avant T_∞ (relation (1.3.4)), et la propriété de Markov par rapport aux T_n (relation (1.3.5)).

1.3.3 - On va d'abord montrer que (P_x) possède la propriété de Markov avant S_n .

LEMME - Sous les hypothèses du théorème 1.3.1, pour tout temps d'arrêt V de la famille (\hat{F}_{t+}) , tout $x \in E_\delta$ et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$,

$$(1.3.6) \quad E_x \{ 1_{\{V < s_n\}} g \circ \theta_V / F_{V+} \} = 1_{\{V < s_n\}} E_{x_V} \{ g \} \quad P_x \text{ P.S.}$$

En effet, il suffit d'établir cette relation pour g F_∞ -mesurable ; donc aussi (voir [4] théorème 4.4) pour g de la forme

$$g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot g_2 \circ \theta_{s_n^x} \quad \text{où} \quad g_1 \in B(\Omega, \hat{F}_\infty) \quad \text{et} \quad g_2 \in B(\Omega, F_\infty).$$

Soit alors $f \in B(\Omega, F_{V+})$; on a (d'après (1.3.1)),

$$\int_{\{V < s_n\}} f \cdot g \circ \theta_V \, dP_x = \int_{\{V < s_n^x\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \circ \theta_V \cdot g_2 \circ \theta_{s_n^x} \circ \theta_V \, dP_x.$$

mais, S_n^x étant terminal, sur $\{V < S_n^x\}$, on a :

$$S_n^x = V + S_n^x \circ \theta_V ;$$

donc aussi

$$\theta_{s_n^x} \circ \theta_V = \theta_{s_n^x},$$

et

$$\alpha_{s_n^x} \circ \theta_V = \theta_V \circ \alpha_{s_n^x}$$

(voir [4] lemme 4.2) ; et, par ailleurs $f \cdot 1_{\{V < s_n^x\}}$ est $F_{s_n^x}$ -mesurable, ainsi que $g_1 \circ \theta_V \circ \alpha_{s_n^x}$ (voir [4] théorème 1.4 et lemme 2.3) ; ainsi, d'après (1.3.2),

$$\int_{\{v < s_n\}} f \cdot g \circ \theta_v \, dP_x = \int_{\{v < s_n^x\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{s_n^x} \, E_{X_{s_n^x}} \{g_2\} \, dP_x .$$

$$= \int_{\{v < s_n^x\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \circ \theta_v \, E_{X_{s_n^x} \circ \theta_v} \{g_2\} \, dP_x$$

puisque, sur $\{V < S_n^x\}$, $X_{s_n^x} \circ \theta_v = X_{v+s_n^x} \circ \theta_v = X_{s_n^x}$.

$$= \int_{\{v < s_n^x\}} f \cdot (g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot E_{X_{s_n^x}} \{g_2\}) \circ \theta_v \, dP_x .$$

$$= \int_{\{v < s_n^x\}} f \, E_{X_v} \{g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot E_{X_{s_n^x}} \{g_2\}\} \, dP_x ,$$

d'après l'hypothèse (1.3.3), puisque $g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot E_{X_{s_n^x}} \{g_2\}$ est $\hat{F}_{s_n^x}$ -mesurable.

mais $E_y \{g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot E_{X_{s_n^x}} \{g_2\}\} = E_y \{g_1 \circ \alpha_{s_n^x} \cdot g_2 \circ \theta_{s_n^x}\}$,

d'après l'hypothèse (1.3.2) ; d'où

$$\int_{\{v < s_n\}} f \cdot g \circ \theta_v \, dP_x = \int_{\{v < s_n\}} f \cdot E_{X_v} \{g\} \, dP_x , \quad \text{et le lemme.}$$

1.3.4 - Etablissons ensuite *la propriété de Markov par rapport à T_n* (relation (1.3.5)) en procédant par *récurance sur n* (1). La propriété est immédiate pour $n = 0$ en vertu de la normalité de (P_x) ; supposons qu'elle est vraie pour $n = p$, et montrons que, pour $f \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$, $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$,

$$(1.3.7) \quad E_x \{f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}}\} = E_x \{f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot E_{X_{T_{p+1}}} \{g\}\} .$$

En vertu du théorème 4.4 de [4], il suffit d'établir cette relation pour f de la forme $f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \theta_{T_p}$ où

$$f_i \in B(\Omega, \hat{F}_\infty) \quad (i = 1, 2) .$$

On a alors

$$E_x \{f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}}\} = E_x \{f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \alpha_{s_{p+1}} \circ \theta_{T_p} \cdot g \circ \theta_{s_{p+1}} \circ \theta_{T_p}\}$$

(1) On notera que l'hypothèse (1.3.3) n'intervient pas ici.

en vertu de la relation $T_{p+1} = T_p + S_{p+1} \circ \theta_{T_p}$, et du lemme 4.2 de [4].

$$= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot E_{X_{T_p}} \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{S_{p+1}} \} \} .$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Mais $E_y \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{S_{p+1}} \} = E_y \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}^y} \cdot g \circ \theta_{S_{p+1}^y} \}$,

d'après la relation (1.3.1) ; donc, d'après (1.3.2),

$$\begin{aligned} &= E_y \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}^y} \cdot E_{X_{S_{p+1}^y}} \{ g \} \} \\ &= E_y \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}} \cdot E_{X_{S_{p+1}}} \{ g \} \} , \end{aligned}$$

de nouveau d'après (1.3.1). Ainsi

$$\begin{aligned} E_x \{ f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}} \} &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot E_{X_{T_p}} \{ f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}} \cdot E_{X_{S_{p+1}}} \{ g \} \} \} \\ &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \alpha_{S_{p+1}} \circ \theta_{T_p} \cdot E_{X_{S_{p+1}} \circ \theta_{T_p}} \{ g \} \} , \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence ; d'où le résultat, puisque

$$\alpha_{S_{p+1}} \circ \theta_{T_p} = \theta_{T_p} \circ \alpha_{T_{p+1}} , \quad \text{et} \quad X_{S_{p+1}} \circ \theta_{T_p} = X_{T_{p+1}} .$$

1.3.5 - Etablissons enfin la relation (1.3.5) : il suffit de montrer (1) que, si $f \in B(\Omega, F_{v+})$, $g \in B(\Omega, F_{\infty})$ et $n \geq 0$,

$$(1.3.8) \quad \int_{\{T_n \leq v < T_{n+1}\}} f \cdot g \circ \theta_v \, dP_x = \int_{\{T_n \leq v < T_{n+1}\}} f \cdot E_{X_v} \{ g \} \, dP_x .$$

Pour cela, appliquons le corollaire 5.5 du théorème 5.3 de [4] au temps d'arrêt V relativement aux temps d'arrêt

$$T = T_n , \quad S = S_{n+1} \quad \text{et} \quad U = T_n + S_{n+1} \circ \theta_{T_n} = T_{n+1} ,$$

et désignons respectivement par V_n et \bar{V}_n les termes V^* et \bar{V}^* introduits par ce corollaire. On a alors :

(1) En vertu du lemme A3.1 (appendice 3) et des théorèmes 1.4 et 3.4 de [4], pour chaque $x \in E_s$, l'ensemble $\{T_n \leq v < T_{n+1}\}$ ne diffère d'un ensemble de la tribu F_{v+} que par un ensemble P_x -négligeable.

$\{T_n \leq V < T_{n+1}\} = \{V_n < +\infty\}$, et $V_n = V$ sur $\{T_n \leq V < T_{n+1}\}$,

et nous avons à montrer que :

$$(1.3.9) \quad \int_{\{V_n < +\infty\}} f \cdot g \circ \theta_{V_n} dP_x = \int_{\{V_n < +\infty\}} f \cdot E_{X_{V_n}} \{g\} dP_x .$$

Désignons par \bar{f}_n la fonction numérique sur $\Omega \times \Omega$, $F_{T_n} \otimes F_{\infty}$ -mesurable qui réalise la décomposition de la fonction F_{∞} -mesurable f par rapport à T_n et qui est nulle sur $\{\omega, \omega' \mid X_{\omega}(\omega') \neq X_{T_n}(\omega)\}$ (voir [4] corollaire 2 du théorème 4.4, et n° 5.2). On a, en vertu de la propriété (C*) ([4] corollaire 5.4),

$$(1.3.9) \quad \int_{\{V_n < +\infty\}} f \cdot g \circ \theta_{V_n} dP_x = \int_{\{T_n \leq V\}} P_x(d\omega) \bar{f}_n(\omega, \theta_{T_n}(\omega)) 1_{\{\bar{V}_n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\}}(\theta_{T_n}(\omega)) g \circ \theta_{V_n}(\omega) dP_x .$$

Nous allons transformer cette intégrale en conditionnant par rapport à \hat{F}_{T_n} ; pour cela, remarquons d'une part que la relation

$$V_n(\omega) = T_n(\omega) + \bar{V}_n(\omega, \theta_{T_n}(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

entraîne que

$$g \circ \theta_{V_n}(\omega) = g(\theta_{\bar{V}_n(\omega, \theta_{T_n}(\omega))}(\theta_{T_n}(\omega))) ;$$

d'autre part que la fonction $(\omega, \omega_1) \longrightarrow g(\theta_{\bar{V}_n(\omega, \omega_1)}(\omega_1))$ est $F_{T_n} \otimes \hat{F}_{\infty}$ mesurable [en effet, cette fonction est composée de g qui est F_{∞} -mesurable, de $(u, \omega) \longrightarrow \theta_u(\omega)$ qui est mesurable pour les tribus $\mathcal{B}_{R_T} \otimes F_{\infty}$ et F_{∞} d'après la mesurabilité de X (n° 1.0.1), et de $(\omega, \omega_1) \longrightarrow (\bar{V}_n(\omega, \omega_1), \omega_1)$ qui est mesurable pour les tribus $F_{T_n} \otimes \hat{F}_{\infty}$ et $\mathcal{B}_{R_T} \otimes F_{\infty}$]. On peut donc appliquer au 2ème membre de (1.3.9) la relation (1.3.5), ce qui donne :

$$(1.3.10) \quad \int_{\{V_n < +\infty\}} f \cdot g \circ \theta_{V_n} dP_x = \int_{\{T_n \leq V\}} P_x(d\omega) E_{X_{T_n}(\omega)} \{1_{\{\bar{V}_n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\}} \bar{f}_n(\omega, \cdot) g \circ \theta_{V_n(\omega, \cdot)}\} .$$

Mais, en vertu de la propriété (e*) (corollaire 5.4 de [4]), pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $1_{\{\bar{V}_n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\}} \bar{f}_n(\omega, \cdot)$ est $\hat{F}_{\bar{V}_n(\omega, \cdot)}$ -mesurable ; on peut donc appliquer, pour chaque ω , le lemme 1.3.3 au terme $E_{X_{T_n}(\omega)} \{1_{\{\bar{V}_n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\}} \bar{f}_n(\omega, \cdot) g \circ \theta_{V_n(\omega, \cdot)}\}$, d'où

 (1) $1_{\{\bar{V}_n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\}}$ désignant l'indicatrice, dans Ω , de l'ensemble $\{\omega_1 \mid \bar{V}_n(\omega, \omega_1) < S_{n+1}(\omega_1)\}$.

$$(1.3.1) \int_{\{v_n < +\infty\}} f \cdot g \circ \theta_{v_n} dP_x = \int_{\{\tau_n < v\}} P_x(d\omega) E_{X_{\tau_n(\omega)}} \{1_{\{\bar{v}_n(\omega, \cdot) < s_{n+1}\}} \bar{f}_n(\omega, \cdot) E_{X_{\bar{v}_n(\omega, \cdot)}} \{g\}\}$$

D'où le résultat cherché, en déconditionnant par \hat{F}_{τ_n} par une nouvelle utilisation de (1.3.5), après avoir remarqué que la mesurabilité de X entraîne la $F_{\tau_n} \otimes F_{\infty}$ -mesurabilité de

$$(\omega, \omega_1) \longrightarrow X_{\bar{v}_n(\omega, \omega_1)}(\omega_1).$$

Le théorème 1.3.1 est ainsi établi.

1.4. Prolongement de la quasi-continuité à gauche au moyen d'une suite déterminante de temps d'arrêt

Dans tout le paragraphe 1.4, on suppose que E est un espace B.C.D. (1) et que X est une fonction aléatoire du type de Hunt admettant le mode de raccordement continu (2).

1.4.1 - **Quasi continuité à gauche de X** - Si P est une mesure de Probabilité sur $(\Omega, \hat{F}_{\infty})$, on dit que X est quasi continue à gauche par rapport à P si, pour toute suite croissante (V_p) de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , on a, en posant $V_{\infty} = \sup_p V_p$:

$$(1.4.1) \quad P \{V_{\infty} < \sigma_E, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_{\infty}}\} = 0.$$

1.4.2 - **THEOREME** - Soient $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite de temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) telle que $S_n \leq \sigma_E$ pour tout $n \geq 1$, et (T_n) la suite déterminante associée à (S_n) . Soit, d'autre part, (P_x) une diffusion de E_S dans $(\Omega, \hat{F}_{\infty})$.

On suppose que, pour chaque $x \in E_S$, les relations suivantes sont satisfaites :

(1) Voir le n° 1.0.6.

(2) Voir les n° 1.2.1 et 1.2.3.

(3) Voir les n° 1.2.6 et 1.2.9.

$$(1.4.3) \alpha_{T_\infty}(P_x) = P_x$$

$$(1.4.4) P_x(\{\omega \mid \omega \in B_{T_\infty}^c \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\} \text{ et } (\omega, X_{T_\infty}(\omega)) \notin M_{T_\infty}^c\}) = 0 \quad (1)$$

$$(1.4.5) P_x\{g \circ \theta_{T_p} / \hat{F}_{T_p}\} = E_{x_{T_p}}\{g\} \quad P_x \text{ P.S. pour tout } p \geq 0 \text{ et tout } g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty).$$

$$(1.4.6) \text{ Pour tout } n \geq 1, X \text{ est quasi continu à gauche par rapport à la mesure } \alpha_{S_n}(P_x).$$

Alors, pour chaque $x \in E_\delta$, X est quasi continue à gauche par rapport à la mesure P_x .

1.4.3 - REMARQUE (2) - On peut énoncer le théorème 1.4.2 de façon imagée comme suit : on suppose que la diffusion (P_x) :

- possède la propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt (T_p) ($p \geq 0$) (relation 1.4.5) ;

- est quasi continue à gauche avant S_n pour chaque n (relation (1.4.6)).

- est quasi continue à gauche en T_∞ (relation (1.4.4)).

Alors (P_x) est quasi continue à gauche.

1.4.4 - Afin d'établir le théorème 1.4.2, considérons d'abord une suite croissante (V_p) de temps d'arrêt de la famille $(F_{t,+})$ (3), et commençons par montrer que pour chaque $K \geq 1$ et $x \in E_\delta$,

$$(1.4.7) \quad P_x\{V_\infty < \sigma_\varepsilon, V_\infty \leq T_K, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\} = 0.$$

$\underline{n} \geq 0$ étant fixé, désignons, pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, par $V_p^n(\dots)$ l'unique application de $\Omega \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$ réalisant la

(1) Où $(B_T^c, M_T^c)_{T \in \mathbb{T}}$ désigne le mode de raccordement continu de X : voir n° 1.2.3 ci-dessus (ne pas confondre B_∞^c avec $\Omega \setminus B_\infty$).

(2) A composer à la remarque 1.3.2.

(3) Sans chapeaux.

décomposition de V_p par rapport au temps d'arrêt T_n (voir [4] théorème 5.3 ; en particulier, $\overline{V}_p^n(\omega, \omega') = 0$ si $T_n(\omega) = +\infty$). Posant alors

$$(1.4.8) \quad W_p^n(\omega, \omega') = \overline{V}_p^n(\omega, \omega') \wedge S_{n+1}(\omega'),$$

on définit, pour chaque $p \in N \cup \{+\infty\}$, une application $F_{T_n} \otimes F_\infty$ mesurable de $\Omega \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$ de telle sorte que :

$$(1.4.9) \quad \sup_{p \in N} W_p^n = W_\infty^n,$$

et, pour chaque $p \in N \cup \{+\infty\}$ et $\omega \in \Omega$,

$$(1.4.10) \quad W_p^n(\omega, \cdot)$$

est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_{t,+})$ et

$$(1.4.11) \quad (T_n(\omega) \vee V_p(\omega)) \wedge T_{n+1}(\omega) = T_n(\omega) + W_p^n(\omega, \theta_{T_n}(\omega)).$$

On a alors, en vertu des relations (1.4.9) et (1.4.10)

$$\begin{aligned} & \{V_\infty < \sigma_\varepsilon, V_\infty \leq T_K, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\} \\ & \subset \bigcup_{n < K} \bigcup_m \bigcap_{p \geq m} \{T_n \leq V_p \leq T_{n+1}, T_n \leq V_\infty \leq T_{n+1}, V_\infty \leq \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\}; \\ & \subset \bigcup_{n < K} \{T_n + W_\infty^n(\cdot, \theta_{T_n}) < \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{W_p^n(\cdot, \theta_{T_n})}(\theta_{T_n}) \neq X_{W_\infty^n(\cdot, \theta_{T_n})}(\theta_{T_n})\}. \\ & \subset \bigcup_{n < K} \{T_n < \sigma_\varepsilon, W_\infty^n(\cdot, \theta_{T_n}) < \sigma_\varepsilon(\theta_{T_n}), \lim_{p \rightarrow \infty} X_{W_p^n(\cdot, \theta_{T_n})}(\theta_{T_n}) \neq X_{W_\infty^n(\cdot, \theta_{T_n})}(\theta_{T_n})\}. \end{aligned}$$

D'où, d'après la relation (1.4.5), pour chaque $x \in E_\delta$,

$$\begin{aligned} & P_x \{V_\infty < \sigma_\varepsilon, V_\infty \leq T_K, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\} \\ & \leq \sum_{n=0}^{K-1} \int_{\{T_n < \sigma_\varepsilon\}} P_x(d\omega) P_{x_{T_n}(\omega)} (\{W_\infty^n(\omega, \cdot) < \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{W_p^n(\omega, \cdot)} \neq X_{W_\infty^n(\omega, \cdot)}\}). \end{aligned}$$

Pour chaque $\omega \in \Omega$, posons

$$A_\omega = \{\lim_{p \rightarrow \infty} X_{W_p^n(\omega, \cdot)} \neq X_{W_\infty^n(\omega, \cdot)}\},$$

et $B_\omega = \{W_\infty^n(\omega, \cdot) < \sigma_\varepsilon\} \cap A_\omega$. On a

$$B_\omega = A_\omega \cap \left(\bigcap_p \{W_p^n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\} \right) \cap \left(\{W_\infty^n(\omega, \cdot) < S_{n+1}\} \cup \{S_{n+1} < \sigma_\varepsilon\} \right),$$

puisque $S_{n+1} \leq \sigma_\varepsilon$, et que (relation 1.3.4) $W_p^n(\omega, \cdot) \leq S_{n+1}$ pour tout $p \in N \cup \{+\infty\}$. On en déduit, en utilisant le fait que $W_p^n(\omega, \cdot)$ est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}) et les théorèmes 3.4 et 1.4 de [4], que $B_\omega \in \hat{F}_{S_{n+1}}^y$.

On a donc, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$P_{X_{T_n}(\omega)}(B_\omega) = P_{X_{T_n}(\omega)}(\alpha_{S_{n+1}}^{-1}(B_\omega)) \quad ([4] \text{ corollaire du théorème 2.4})$$

d'où $P_{X_{T_n}(\omega)}(B_\omega) = 0$, en vertu de l'hypothèse de quasi-continuité à gauche de X par rapport à $\alpha_{S_{n+1}}(P_{X_{T_n}(\omega)})$.

La relation (1.4.7) est ainsi établie.

1.4.5 - De la relation (1.4.7), on déduit que

$$P_x \{V_\infty < T_\infty, V_\infty < \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\} = 0.$$

Il reste donc à montrer, quant à la suite (V_p) , que

$$P_x \{T_\infty \leq V_\infty < \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\} = 0.$$

Pour cela, remarquons d'abord que la continuité à droite de X entraîne que $\hat{\Omega} = \{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } \alpha_{T_\infty}(\omega) \sim \omega(R_\infty^X)\} \in \hat{F}_\infty$; et la relation (1.4.3) que,

$$(1.4.12) \quad P_x(\hat{\Omega}) = 1.$$

Posons alors,

$$A = \{T_\infty < V_\infty < \sigma_\varepsilon\}$$

$$B = \{T_\infty = V_\infty < \sigma_\varepsilon\} \cap \bigcap_n \{T_n < T_\infty\}$$

$$C = \{T_\infty = V_\infty < \sigma_\varepsilon\} \cap \bigcup_n \{T_n = T_\infty\}.$$

On a, $\{T_\infty \leq V_\infty < \sigma_\varepsilon\} \subset A \cup B \cup C$, et, compte tenu de la relation (1.4.12),

$$P_x(A \cap \{\lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\}) = 0 \quad ; \quad P_x(B \cap \{\lim_{p \rightarrow \infty} X_{V_p} \neq X_{V_\infty}\}) = 0,$$

en vertu de la relation (1.4.4) ; $P_x(C \cap \{\lim_{p \rightarrow \infty} X_{v_p} \neq X_{v_\infty}\}) = 0$, en vertu de ce qui a été établi au n° 1.4.4.

Ainsi $P_x\{V_\infty < \sigma_\varepsilon, \lim_{p \rightarrow \infty} X_{v_p} \neq X_{v_\infty}\} = 0$ pour tout $x \in E_\delta$ et toute suite croissante (V_p) de temps d'arrêt de la famille (F_{t+}) . On passe au cas d'une suite de temps d'arrêt de la famille (F_{t+}) en utilisant le lemme A2.1 (Appendice 2 ci-dessous).

Le théorème 1.4.2 est ainsi établi.

Notations et préliminaires
sur les processus de Markov

Processus fortement Markovien - E est un espace topologique localement compact, séparable, un processus fortement Markovien dans E est un triplet

$$X = (Q, \mathcal{F}, (X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in E})$$

où Q est une famille de noyaux de transition à valeurs réelles positives dans E , continue à droite et homogène par rapport à la translation de temps des noyaux Q_t , et (P_x) est une famille de probabilités dans \mathcal{F} satisfaisant aux propriétés suivantes :

1) $P_x(X_0 = x) = 1$ pour tout $x \in E$;

2) (propriété de Markov forte) : pour tout temps d'arrêt V de (F_t) , tout $z \in E$, $t \geq 0$, et tout $x \in E$,

$$P_x(X_{t+V} = z) = \int P_x(X_t = y) P_y(X_{t+V} = z) dy$$

- 1.1. Définitions et notations.
- 1.2. Propriétés de continuité.
- 1.3. Propriétés de Markov.
- 1.4. Théorème de décomposition.
- 1.5. Théorème de décomposition.
- 1.6. Théorème de décomposition.
- 1.7. Théorème de décomposition.
- 1.8. Théorème de décomposition.
- 1.9. Théorème de décomposition.
- 1.10. Théorème de décomposition.

DEUXIÈME PARTIE

RECOLLEMENTS DE PROCESSUS DE MARKOV

2.0. - Notations et préliminaires sur les processus de Markov

2.0.1 - **Processus fortement Markoviens** - E étant un espace B.C.D.(1), et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ sa tribu borélienne, un processus fortement Markovien à valeurs dans E est un terme

$$\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (P_x)_{x \in E_\delta})$$

où $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$ est une fonction aléatoire à cimetière(2) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) continue à droite(1), (θ_t) une famille d'opérateurs de translation de cette fonction aléatoire(3), et (P_x) une diffusion de E_δ dans $(\Omega, \hat{F}_\infty^x)$ (4) ayant les propriétés suivantes :

(M₁) (normalité) : $P_x\{X_0 = x\} = 1$ pour tout $x \in E_\delta$.

(M₂) (propriété de Markov forte) : pour tout temps d'arrêt V de la famille (F_t^x) (5), tout $g \in B(\Omega, F_\infty^x)$, et tout $x \in E_\delta$,

$$(2.0.1) \quad E_x\{g \circ \theta_V / F_{V^+}^x\} = E_{x_V}\{g\}. \quad P_x \text{ P.S. (6)}$$

(1) Voir le n° 1.0.6 ci-dessus.

(2) Voir [4] n° 0.3.

(3) Voir [4] n° 0.4

(4) Voir le n° 1.0.2 ci-dessus.

(5) Sans chapeaux ; voir ci-dessous la remarque du n° 2.0.3.

(6) Voir le n° 2.4.7.

La fonction aléatoire X est appelée *la fonction aléatoire du processus* \mathfrak{X} (1) ; la tribus $F_t^{\mathfrak{X}}$ (resp $\hat{F}_t^{\mathfrak{X}}$) ($0 \leq t \leq +\infty$) engendrée par X (2) est notée couramment F_t (resp \hat{F}_t) ; de même, on note $\sigma_{\nu}^{\mathfrak{X}}$ au lieu de $\sigma_{\nu}^{\mathfrak{X}(3)}$ ($U \subset E$).

2.0.2 - Processus standards (1) ; processus continus - Le processus \mathfrak{X} est dit *continu* si sa fonction aléatoire X est du type continu (5). Il est dit *standard*, si X est du type de Hunt, et si X est quasi continue à gauche par rapport à toutes les mesures P_x (5) ($x \in E_{\delta}$) ; autrement dit, si la propriété suivante est satisfaite :

(M₃) (quasi continuité à gauche) : pour toute suite croissante

(V_n) de temps d'arrêt de la famille $(F_{t_n}^{\mathfrak{X}})$ (6), et tout $x \in E_{\delta}$,

$$(2.0.2) \lim_{n \rightarrow \infty} X_{V_n} = X_{\sup_n V_n} \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad \{\sup_n V_n < \sigma_E^{\mathfrak{X}}\}.$$

En particulier, *tout processus continu est standard.*

2.0.3 - Tribus définitives d'un processus - $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_{\delta}, (X_t), (\theta_t), (P_t))$ étant un processus fortement Markovien, on désigne par $G_{\omega}^{\mathfrak{X}}$ la tribu sur Ω complétée de $F_{\omega}^{\mathfrak{X}}$ pour la famille des mesures P_{μ} , où μ décrit l'ensemble des mesures de probabilité sur $(E_{\delta}, \mathcal{B}_{\delta})$ (7) (chacune des mesures P_{μ} se prolonge de façon unique à la tribu $G_{\omega}^{\mathfrak{X}}$), et, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, par $G_t^{\mathfrak{X}}$ la tribu sur Ω engendrée par la réunion de $F_t^{\mathfrak{X}}$ et de l'ensemble des parties de Ω appartenant à $G_{\omega}^{\mathfrak{X}}$ et P_{μ} -négligeable pour chaque μ . La famille croissante de tribus $(G_t^{\mathfrak{X}})_{t \in [0, +\infty]}$ est appelée comme d'ordinaire *la famille des tribus définitives du processus* \mathfrak{X} .

Il résulte de la propriété de Markov (M₂) que cette famille

(1) On notera que X n'est pas nécessairement supposée typique ([4] appendice 1) ; voir à ce sujet les n° 2.0.4, 2.0.7 et 2.0.8.

(2) Voir [4] n° 0.3.

(3) Voir [4] appendice 2.

(4) Voir Dynkin [6] n° 3.23, page 150.

(5) Voir le n° 1.0.6.

(6) Sans chapeaux ; voir la remarque du n° 2.0.3.

(7) Autrement dit, des répartitions initiales de \mathfrak{X} .

est continue à droite⁽¹⁾ ($G_{t+}^{\mathfrak{X}} = G_t^{\mathfrak{X}}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$). En outre, pour chaque $t \in [0, +\infty]$, $\bar{G}_t^{\mathfrak{X}} = G_t^{\mathfrak{X}}$; en particulier, $\bar{F}_{t+}^{\mathfrak{X}} \subset G_t^{\mathfrak{X}}$.

De plus, les propriétés suivantes jouent un rôle important dans ce travail :

THEOREME ⁽²⁾ - Si $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ est un processus fortement markovien, on a :

(M') Pour tout temps d'arrêt V de la famille $(G_t^{\mathfrak{X}})$, tout $g \in B(\Omega, G_{\infty}^{\mathfrak{X}})$ et toute répartition initiale μ ,

$$(2.0.3) \quad E_{\mu} \{g \circ \theta_V / G_t^{\mathfrak{X}}\} = E_{x_V} \{g\} \quad P_{\mu} \text{ P.S.}$$

De plus, si \mathfrak{X} est standard :

(M') Pour toute suite croissante (V_n) de temps d'arrêt de la famille $(G_t^{\mathfrak{X}})$, et toute répartition initiale μ ,

$$(2.0.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{V_n} = X_{\sup_n V_n} \quad P_{\mu} \text{ P.S. sur } \{\sup_n V_n < \sigma_t\}.$$

REMARQUE - Ce sont les propriétés (M'_2) et (M'_3) qui servent en théorie des processus de Markov, et pas seulement les propriétés (M_2) et (M_3) ; le théorème ci-dessus permet de faire figurer seulement ces dernières dans la définition, et, par conséquent, de ne manipuler que des temps d'arrêt de la famille $(F_{t+}^{\mathfrak{X}})$, pour lesquels on peut appliquer les théorèmes établis dans [4] et dans la 1ère partie de ce travail.

2.0.4 - Processus canoniques, processus équivalents ⁽³⁾ -

LEMME - Soient $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ un processus fortement markovien (resp standard) à valeurs dans E , γ la trans-

(1) Voir l'appendice 2.

(2) On trouvera une démonstration de ce résultat dans l'appendice 3; voir aussi Dynkin [6] § 3.21 p. 147.

(3) Le contenu de ce numéro n'interviendra qu'au § 2.4 ci-dessous.

formation canonique de sa fonction aléatoire $X^{(1)}$, et

$$X^{\circ} = (\Omega^{\circ}, \omega_{\delta}^{(\varepsilon)}, (X_t^{(\varepsilon)}))$$

une fonction aléatoire typique continue à droite (resp du type de Hunt) à valeurs dans $E^{(2)}$ telle que X soit de type $X^{\circ(1)}$ (autrement dit $\gamma(\Omega) \subset \Omega^{\circ}$). γ est mesurable de $(\Omega, \hat{F}_{\infty}^X)$ dans $(\Omega, \hat{F}_{\infty}^{X^{\circ}})$; donc, pour chaque $x \in E_{\delta}$, $P_x^{\circ} = \gamma(P_x)$. Le terme

$$\mathfrak{X}^{\circ} = (\Omega^{\circ}, \omega_{\delta}^{(\varepsilon)}, (X_t^{(\varepsilon)}), (\theta_t^{(\varepsilon)}), (P_x^{\circ}))$$

est alors un processus fortement markovien (resp standard)(3).

En particulier :

1/ Si X_0 est la fonction aléatoire typique continue à droite, \mathfrak{X}° est désigné par $k(\mathfrak{X})$ et appelé le processus canonique associé à \mathfrak{X} .

2/ Si X_0 est la fonction aléatoire typique continue, \mathfrak{X}° est désigné par $k^c(\mathfrak{X})$ et appelé le processus canonique continu associé à \mathfrak{X} .

Deux processus fortement Markoviens \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 sont équivalents si ils prennent leurs valeurs dans le même espace B.C.D. et si $k(\mathfrak{X}_1) = k(\mathfrak{X}_2)$ (4). Si, de plus \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 sont continus, on a alors aussi $k^c(\mathfrak{X}_1) = k^c(\mathfrak{X}_2)$.

2.0.5 - Processus arrêtés -

THEOREME - Soient $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_{\delta}, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ un processus fortement markovien à valeurs dans l'espace E dont la fonction aléatoire X admet une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt(5), et T

(1) Voir [4] appendice 1 n° A1.5.

(2) Voir [4] appendice 1 et les n° 1.0.6 et 1.07.

(3) Vérification sans difficultés.

(4) Cette définition est équivalente à la définition classique par l'identité des semi-groupes de transition.

(5) Voir [4] n° 0.4. On dira alors aussi que \mathfrak{X} admet une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt.

un temps terminal strict de X (1). Posons, pour chaque $x \in E_s$,

$$(2.0.5) \quad P_x^T = \alpha_T(P_x) \quad (2).$$

alors le terme $\mathfrak{X}^T = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x^T))$ est un processus fortement markovien à valeurs dans E , standard (resp. continu). en même temps que \mathfrak{X} (3).

Le processus \mathfrak{X}^T est appelé le processus arrêté à l'instant T déduit de \mathfrak{X} ; le processus \mathfrak{X} est dit arrêté à l'instant T si $\mathfrak{X}^T = \mathfrak{X}$ (autrement dit, si $\alpha_T(P_x) = P_x$ pour tout $x \in E_s$). En particulier \mathfrak{X}^T est arrêté à l'instant T .

Notons en outre que si T_1 et T_2 sont deux temps terminaux stricts de X tels que $T_1 \leq T_2$, on a :

$$(2.0.6) \quad (\mathfrak{X}^{T_2})^{T_1} = \mathfrak{X}^{T_1}.$$

2.0.6 - Processus arrêté au sortir d'un ouvert - Si U est un ouvert de E , le temps de sortie σ_U de X au sortir de U est un temps terminal strict de X (voir [4] appendice 2). Le processus \mathfrak{X}^{σ_U} sera appelé le processus arrêté au sortir de U déduit de \mathfrak{X} . Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{\sigma_U}$, on dira que \mathfrak{X} est arrêté au sortir de U .

Le lemme suivant concrétise cette terminologie :

LEMME - Si $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ est un processus à valeurs dans E arrêté au sortir de l'ouvert U (4), alors, pour chaque $x \notin U$, la mesure P_x est (sur la tribu \hat{F}_∞^x) de la forme $\varepsilon_{\bar{\omega}_x}$, où $\bar{\omega}_x$ est un élément de Ω dont la trajectoire est la constante égale à x ($X_s(\bar{\omega}_x) = x$ pour tout $s \in R_+$).

En effet, d'après la normalité de \mathfrak{X} , pour chaque $x \in E_s$,

(1) Autrement dit (n° 1.0.3), T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^x) tel que $T(\theta_t(\omega)) = T(\omega) - t$ pour tout (t, ω) tel que $t \leq T(\omega)$.

(2) En vertu de la mesurabilité de X , α_T est mesurable de (Ω, \hat{F}_∞) dans lui-même (voir [4] lemme 2.2).

(3) Ce théorème peut être établi de façon analogue au théorème 10.2 de Dynkin [6] page 418.

(4) Dire que \mathfrak{X} est arrêté au sortir de U sous entend qu'il admet une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt.

il existe $\omega_x \in \Omega$ tel que $X_0(\omega_x) = x$; posons $\bar{\omega}_x = \alpha_0(\omega_x)$ (1). On a, si $x \notin U$ et $A \in \hat{F}_\infty^x$,

$$P_x(A) = P_x(\alpha_{\sigma_0}^{-1}(A)) = P_x(\alpha_0^{-1}(A)) = 1 \quad (\varepsilon_{\omega_x}),$$

puisque $X_0(\omega) = x$ entraîne que $\alpha_0(\omega) \sim \bar{\omega}_x$ (R_∞^x) (voir [4] théorème 1.4) ; d'où le lemme.

2.0.7 - Processus induit sur un ouvert (2) -

THEOREME - Soient $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ un processus standard à valeurs dans l'espace E , et U un ouvert de E . Posons, pour chaque $\omega \in \Omega$ et $t \in R_+$,

$$X_t^u(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{et} \quad \theta_t^u(\omega) = \theta_t(\omega) \quad \text{si} \quad t \leq \sigma_u^{\mathfrak{X}}(\omega)$$

$$X_t^u(\omega) = \delta \quad \text{et} \quad \theta_t^u(\omega) = \omega_\delta \quad \text{si} \quad t \geq \sigma_u^{\mathfrak{X}}(\omega).$$

Le terme $\mathfrak{X}^u = (\Omega, \omega_\delta, (X_t^u)_{t \in R_+}, (\theta_t^u)_{t \in R_+}, (P_x)_{x \in U \cup \{\delta\}})$ (3) est un processus standard à valeurs dans l'espace B. C. D U. En outre, si \mathfrak{X} est continu, il en est de même de \mathfrak{X}^u (4).

Le processus \mathfrak{X}^u est appelé le processus induit par \mathfrak{X} sur U (5).

Notons en outre que :

(2.0.7) $k(\mathfrak{X}^u) = k(k(\mathfrak{X}^u))$, $k^c(\mathfrak{X}^u) = k^c(k^c(\mathfrak{X}^u))$ si \mathfrak{X} est continu (6), et

(1) Dire que \mathfrak{X} est arrêté au sortir de U sous entend qu'il admet une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt.

(2) Le contenu de ce numéro n'interviendra qu'au § 2.4 ci-dessous.

(3) En notant encore, pour $x \in U \cup \{\delta\}$, par P_x la restriction à la tribu \hat{F}_∞^u (engendrée par la fonction aléatoire $X_t^u = (X_t^u)$; $F_\infty^u \subset \hat{F}_\infty^x$) de la mesure P_x donnée sur \hat{F}_∞^x ; et en considérant δ comme le point à l'infini de U .

(4) Pour une démonstration de ce théorème, voir Dynkin [6], n° 10.3, page 418.

(5) On dit aussi que \mathfrak{X}^u est le processus tué au sortir de U déduit de \mathfrak{X} ; mais nous n'utiliserons pas ici cette terminologie (voir le n° 2.0.8).

(6) Voir le n° 2.0.4 ci-dessus.

$$(2.0.8) \quad (\mathfrak{X}^{U_2})^{U_1} = \mathfrak{X}^{U_1} \quad \text{si} \quad U_1 \subset U_2 .$$

2.0.8 - Remarques sur la définition des processus arrêtés et des processus induits - L'opération qui fait passer de \mathfrak{X} au processus arrêté \mathfrak{X}^{σ_U} laisse inchangée la fonction aléatoire de \mathfrak{X} mais transforme la diffusion (P_x) , tandis que celle qui fait passer de \mathfrak{X} au processus induit \mathfrak{X}^U transforme la fonction aléatoire de \mathfrak{X} en une nouvelle fonction aléatoire à valeurs dans U , mais laisse inchangée (au moins sur U) la diffusion (P_x) .

Intervertissant les rôles de ces deux méthodes, il est possible de définir un processus arrêté au sortir de U en arrêtant la fonction aléatoire (voir [4] n° 2.1, et Dynkin [6] n° 10.4 page 418), et en conservant la diffusion (P_x) ; et aussi de définir un processus tué au sortir de U en conservant la fonction aléatoire de \mathfrak{X} et en modifiant la diffusion (P_x) au moyen d'une famille "d'opérateurs de meurtre" $(m_t)_{t \in R^+}$ (1).

Dans le cadre de ce travail les définitions choisies sont pratiquement plus commodes pour des raisons diverses qui apparaîtront dans la suite, mais que l'on peut résumer ainsi :

L'opération d'arrêt au sortir de U réduit tout au plus l'espace de phase du processus à l'adhérence \bar{U} de U dans le cas continu, et peut très bien, dans le cas non continu, exiger de conserver E tout entier ; par ailleurs, pour étudier les propriétés de prolongement, il est plus simple de ne manipuler qu'une seule fonction aléatoire sous jacente à divers processus (2), d'où le choix de la définition d'un processus arrêté.

Par contre, l'opération de meurtre au sortir de U conduit à un processus ne concernant que les points de U , d'où l'intérêt de considérer explicitement le processus tué comme un processus à valeurs dans U , c'est-à-dire comme un processus induit sur U : on se trouve ainsi dans la situation classique de recollement qui intervient dans la définition des faisceaux (3).

(1) Voir le n° 1.0.1

(2) Voir les paragraphes 2.1, 2.2 et 2.3 ci-dessous.

(3) Voir l'énoncé du théorème principal de ce travail au n° 2.4.2.

2.0.9 - Temps d'arrêt S_U et quasi continuité à gauche - Soit

$$X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$$

une fonction aléatoire du type de Hunt à valeurs dans l'espace E , et U un ouvert de E .

Posons, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$S_U^X(\omega) = \sigma_U^X(\omega) \wedge \inf \{t \mid t < \sigma_E^X(\omega) \text{ et } X_t^-(\omega) \notin U\},$$

si $\{t \mid t < \sigma_E^X(\omega) \text{ et } X_t^-(\omega) \notin U\} = \emptyset$, et

$$S_U^X(\omega) = \sigma_U^X(\omega) \text{ si } \{t \mid t < \sigma_E^X(\omega) \text{ et } X_t^-(\omega) \notin U\} = \emptyset.$$

Alors, si (U_n) est une suite d'ouverts de E telle que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ pour tout n , et $\bigcup_n U_n = U$, on a

$$(2.0.9) \quad S_U^X = \sup_n \sigma_{U_n}^X.$$

En particulier, S_U^X est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_t^X)^{(0)}$. De plus :

LEMME - Si $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ est un processus standard admettant X pour fonction aléatoire,

$$(2.0.10) \quad S_U^X = \sigma_U^X \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{pour tout } x \in E_\delta \quad (1)$$

2.1. - Recollement de deux processus fortement Markoviens arrêtés

Dans tout ce paragraphe (et aussi dans les deux suivants), on désigne par E un espace B.C.D., par $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ sa tribu borélienne, et par $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$ une fonction aléatoire à cime-tière à valeurs dans (E, \mathcal{B}) , continu à droite⁽²⁾, admettant une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt et une famille (θ_t) d'opérateurs de translation, et possédant la propriété complète de raccordement

(0) Ainsi que le fait Dynkin dans [6], on peut appeler S_U^X le temps de "fro-lement" de $\mathcal{C}U$ pour X .

(1) Conséquence directe de la quasi continuité à gauche de \mathfrak{X} .

(2) Voir le n° 1.0.6.

(3) Voir le n° 1.0.1.

(E, \mathfrak{B}) et X ainsi introduits rentrent dans le cadre fixé au n° 1.0.1 (en particulier, X est progressivement mesurable); Selon la même convention que dans ce numéro, on note

$F_t, \hat{F}_t, \dots, \sigma_U, S_U$ ($U \subset E$) au lieu de $F_t^x, \hat{F}_t^x, \dots, \sigma_U^x, S_U^x$.

On désigne, de plus, par $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ un mode de raccordement de X (1) [autrement dit, on suppose que X admet un mode de raccordement (au moins) que l'on note $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$.].

Citons les deux exemples fondamentaux(2) :

A) X est la fonction aléatoire typique continue à droite(3) et $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ le mode libre(4).

B) X est la fonction aléatoire typique de Hunt(3) (resp continue et $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ le mode continu(5).

2.1.2 - Existence du processus recollé - Désignons(6) par U' et U'' deux sous ensembles ouverts de l'espace B.C.D E , par U leur réunion, et par (P'_x) et (P''_x) des diffusions de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) faisant des termes

$\mathfrak{X}' = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P'_x))$ et $\mathfrak{X}'' = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P''_x))$ des processus fortement Markoviens(7) à valeurs dans E .

THEOREME(6) - On suppose que \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' sont arrêtés au sortir de U' et U'' respectivement. Alors, la relation

(1) Voir le n° 1.2.1.

(2) Voir la remarque 2 du n° 1.0.7.

(3) Voir le n° 1.0.7.

(4) Voir le n° 1.2.2.

(5) Voir le n° 1.2.3.

(6) Avec les notations et hypothèses du numéro 2.1.1.

(7) Voir le n° 2.0.1.

$$(2.1.1) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U' \cap U''}} = \mathfrak{X}^{\sigma_{U'} \cap \sigma_{U''}} \quad (1) (2)$$

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un processus fortement markovien (3)

$\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ arrêté au sortir de $U = U' \cap U''$ tel que

$$(2.1.2) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U'}} = \mathfrak{X}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U''}} = \mathfrak{X}'' (1)$$

La condition est nécessaire à cause de la relation (2.0.6) (n° 2.0.5). Pour établir qu'elle est suffisante (voir le théorème 2.1.4 ci-dessous) introduisons :

2.1.3 - La suite déterminante (T_n) des temps de sortie alternatifs de U' et U'' , le long de laquelle va être réalisé le recollement.

Elle peut être définie comme suit :

Pour chaque $\omega \in \Omega$, posons (5), $S(\omega) = \sigma_{U'}(\omega)$ si $X_0(\omega) \in U'$, et $S(\omega) = \sigma_{U''}(\omega)$ si $X_0(\omega) \notin U'$.

$\sigma_{U'}$ et $\sigma_{U''}$ étant des temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) (6), il en est de même de S . Posons $S_n = S$ pour tout $n \geq 1$, et désignons par (T_n) la suite déterminante associée à la suite (S_n) (7); autrement dit,

$$(2.1.3) \quad T_0 = 0 \quad \text{et} \quad T_{n+1} = T_n + S \circ \theta_{T_n} \quad (n \geq 1) ;$$

en particulier, $T_1 = S$.

(1) Voir les n° 2.0.5 et 2.0.6.

(2) Cette relation est identiquement satisfaite si $U' \cap U'' = \emptyset$.

(3) Voir le n° 2.0.1.

(4) Il en existe en général plusieurs ; voir le n° 2.1.4.

(5) Dans le cadre fixé au n° 2.1.1.

(6) Voir 4 Appendice 2 n° A2.2.

(7) Voir le n° 1.0.4. On pose $T_\infty = \sup_n T_n$.

LEMME - (T_n) est une suite déterminante terminale ayant les propriétés suivantes :

(2.1.4) $T_n + T_p \circ \theta_{T_n} = T_{n+p}$ pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$.

(2.1.5) Si $X_o(\omega) \in U'$, $X_{T_{2p}}(\omega) \notin U''$ ($p \geq 1$), et $X_{T_{2p+1}}(\omega) \notin U'$ ($p \geq 0$).

(2.1.6) Si $X_o(\omega) \notin U'$, $X_{T_{2p}}(\omega) \notin U'$ ($p \geq 1$), et $X_{T_{2p+1}}(\omega) \notin U''$ ($p \geq 0$).

(2.1.7) $\{T_n = T_\infty\} \subset \{T_n = \sigma_U\}$ ($n \geq 1$)

(2.1.8) $T_\infty \leq \sigma_U$ et, si X est du type de Hunt, $S_U \leq T_\infty$ (1).

A partir de la relation de définition $T_{n+1} = T_n + S \circ \theta_{T_n}$, les relations (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6) réclament une simple vérification par récurrence sur n et p ; la relation $T_\infty \leq \sigma_U$ résulte, par récurrence, du caractère terminal strict de σ_U (n° 1.0.4) et des relations $S \leq \sigma_U$ et $T_{n+1} = T_n + S \circ \theta_{T_n}$ ($n \geq 0$); ou on déduit la relation (2.1.7), compte tenu des relations (2.1.5) et (2.1.6). Supposons enfin que X soit du type de Hunt, et montrons que $S_U \leq T_\infty$:

Si $\omega \in \bigcup_n \{T_n = T_\infty\}$, ou si $\omega \in \{T_\infty = \sigma_E\}$, on a

$$T_\infty(\omega) \geq \sigma_U(\omega) \geq S_U(\omega).$$

Si $\omega \in \bigcap_n \{T_n < T_\infty < \sigma_E\}$, on a

$$X_{T_\infty}^-(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n}(\omega);$$

donc, si, par exemple, $X_o(\omega) \in U'$, on a, d'après (2.1.5),

$$X_{T_\infty}^-(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} X_{T_{2p}}(\omega) \notin U'' \quad \text{et} \quad X_{T_\infty}^-(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} X_{T_{2p+1}}(\omega) \notin U'$$

d'où $X_{T_\infty}^-(\omega) \notin U' \cup U'' = U$, et $T_\infty(\omega) \geq S_U(\omega)$. Le lemme est ainsi établi.

2.1.4 - Unicité du processus recollé - Faisant intervenir la suite déterminante (T_n) (n° 2.1.3) énonçons le résultat plus complet suivant dont le théorème 2.1.2 est une conséquence directe :

(1) Voir le n° 2.0.9.

THEOREME (1) - On suppose que \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' sont arrêtés au sortir de U' et U'' respectivement, et que la relation (2.1.1) est satisfaite. Alors :

1/ Si π est une répartition conditionnelle de X au sortir de U après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ et terminale⁽²⁾, il existe une diffusion (P_x) de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) , et une seule, telle que le terme $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ soit un processus fortement markovien arrêté au sortir de $U = U' \cap U''$ et que

$$(2.1.2) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U'}} = \mathfrak{X}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U''}} = \mathfrak{X}''.$$

$$(2.1.9) \quad P_x \{X_{T_\omega} \in \Gamma \mid \bigvee_n \hat{F}_{T_n}\} = \pi(\cdot, \Gamma) \quad P_x \text{ P.S.}$$

pour tout $x \in E_\delta$ et $\Gamma \in \mathfrak{B}_\delta$.

$$(2.1.10) \quad T_\omega = \sigma_U \quad P_x \text{ P.S.} \quad \text{pour tout } x \in E_\delta.$$

De plus, si la fonction aléatoire X est du type de Hunt, si $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ est le mode de raccordement continu, et si \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' sont des processus standards, il en est de même de \mathfrak{X} ⁽³⁾.

2/ Inversement, si $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ est un processus fortement Markovien arrêté au sortir de U vérifiant les relations (2.1.2) et (2.1.10), il existe une répartition conditionnelle π de X au sortir de U après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{E}}$ et terminale telle que la relation (2.1.9) soit satisfaite.

On dira dans la suite que le processus \mathfrak{X} caractérisé par les relations (2.1.2), (2.1.9) et (2.1.10) est réparti par π après (T_n) .

REMARQUE 1 - Le fait que les relations (2.1.2) et (2.1.10) ne déterminent pas \mathfrak{X} de façon unique en général peut être illustré par le contre exemple élémentaire suivant :

Prenons pour X la fonction aléatoire typique continue à valeurs dans E , et remarquons qu'à chaque $\varphi \in \Omega$ dont la trajectoire est biunivoque on peut associer un processus fortement Markovien $\mathfrak{X}^\varphi = (\Omega, \omega_\delta, (X_t); (\theta_t), (P_x^\varphi))$ en posant

(1) Avec les notations et hypothèses introduites aux n° 2.1.1 et 2.1.2.

(2) Voir les n° 1.2.5 et 1.2.9.

(3) Les relations (2.1.2) et (2.1.9) suffisent alors à assurer l'unicité de \mathfrak{X} (voir le n° 2.0.9).

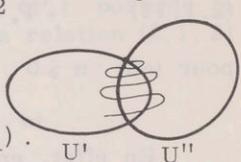
$$P_x^\varphi = \varepsilon_{\bar{\omega}_x} (1) \quad \text{si} \quad x \notin \varphi(R_+) = \{X_t(\varphi) \mid t \in R_+\} \quad \text{et} \quad P_{\varphi(t)}^\varphi = \varepsilon_{\theta_t(\varphi)}$$

pour chaque $t \in R_+$.

Choisissons alors (voir schéma ci-contre) deux ouverts U' et U'' de E et deux trajectoires biunivoques φ_1 et φ_2 de Ω de telle sorte que :

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}, \quad T_\infty(\varphi_i) = \sigma_0(\varphi_i) \quad i = 1, 2$$

$$X_s(\varphi_1) = X_s(\varphi_2) \quad \text{pour tout} \quad s < T_\infty(\varphi_1) = T_\infty(\varphi_2)$$

$$X_s(\varphi_1) = X_{T_\infty}^-(\varphi_1) \neq \delta = X_s(\varphi_2) \quad \text{pour tout} \quad s \geq T_\infty(\varphi_1)$$


Les processus \mathfrak{X}^{φ_1} et \mathfrak{X}^{φ_2} sont alors distincts et cependant les relations (2.1.2) et (2.1.10) sont satisfaites.

Notons, toutefois que, si $U = E$, (2.1.2) et (2.1.10) déterminent \mathfrak{X} de façon unique.

REMARQUE 2 - Le théorème 2.1.4 permet de déterminer tous les processus recollant \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' et sortant (P_x P.S. pour chaque $x \in E_\delta$) de U à l'instant T_∞ (relation (2.1.10)). Il existe en général aussi des processus recollant \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' pour lesquels la relation (2.1.10) n'est pas satisfaite ; autrement dit pour lesquels avec probabilité > 0 des trajectoires peuvent sauter "transitivement" de U' à U'' et de U'' à $U' \dots$ (2).

2.1.5 - Démonstration du Théorème 2.1.4 : Unicité de la diffusion (P_x) -
 On va utiliser les théorèmes 1.1.1 et 1.2.6 de la première partie.

Définissons d'abord une diffusion (P_x^1) de E_δ dans (Ω, \hat{F}_5) en posant pour chaque $A \in \hat{F}_5$ et $x \in E_\delta$,

(1) $\bar{\omega}_x$ est la trajectoire constante égale à x .
 (2) Voir à ce sujet l'appendice 4 ci-dessous.

$$(2.1.11) \quad P_x^1(A) = P_x'(A) \quad \text{si } x \in U'$$

$$(2.1.12) \quad P_x^1(A) = P_x''(A) \quad \text{si } x \notin U'.$$

Supposons alors que (P_x) soit une diffusion répondant à la question, et montrons d'abord que

$$(2.1.13) \quad P_x \{ \theta_{T_n}^{-1}(A) / \hat{F}_{T_n} \} = P_x^1(A) \quad P_x \text{ P.S.}$$

pour tout $n \geq 0$, $A \in \hat{F}_s$ et $x \in E_s$.

En effet, en vertu de la propriété de Markov de (P_x) relativement au temps d'arrêt T_n (théorème 2.0.3), il suffit de montrer que $P_x(A) = P_x^1(A)$ pour tout $A \in \hat{F}_s$ et $x \in E_s$, ce qui résulte de (2.1.2) et de la définition de (P_x^1) : en effet, soit $A \in \hat{F}_s$; on a,

$$A \cap \{X_0 \in U'\} \in \hat{F}_{\sigma_U}, \quad \text{et} \quad A \cap \{X_0 \notin U'\} \in \hat{F}_{\sigma_U}.$$

en vertu de la définition de S et du théorème 1.4 de [4]; donc, si par exemple $x \in U'$,

$$P_x(A) = P_x(A \cap \{X_0 \in U'\}) = P_x(\alpha_{\sigma_U}^{-1}(A \cap \{X_0 \in U'\}))$$

d'après le corollaire 2.4 de [4]

$$= P_x'(A \cap \{X_0 \in U'\}) \text{ d'après (2.1.2)}$$

$$= P_x'(A) = P_x^1(A).$$

En vertu de la propriété d'unicité dans le théorème 1.1.1, la relation (2.1.13), jointe à la normalité de (P_x^1) entraîne ainsi l'unicité de (P_x) sur la tribu $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$.

La relation (2.1.9), jointe à la relation $\hat{F}_{T_\infty} = \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \vee X_{T_\infty}^{-1}(\mathcal{B}_s)(1)$, entraîne ensuite l'unicité de (P_x) sur la tribu \hat{F}_{T_∞} . Enfin, la relation 2.1.10, jointe au fait que \mathfrak{X} est arrêté au sortir de U , l'unicité sur la tribu \hat{F}_∞ .

(1) Cette relation résulte du théorème 2.4 de [4]; voir le n° 1.2.10.

2.1.6 - Démonstration du théorème 2.1.4 : construction de la diffusion (P_x) - On déduit des théorèmes 1.1.1⁽¹⁾, 1.2.6 et 1.2.12 l'existence d'une diffusion normale (P_x) de E_δ dans $(\Omega, \mathbb{F}_\infty)$ vérifiant les relations (2.1.13), (2.1.9) et (2.1.10) ainsi que

$$(2.1.14) \quad \alpha_{\sigma_U}(P_x) = P_x \quad \text{pour tout } x \in E_\delta \text{ (2)}.$$

On va montrer que la diffusion (P_x) ainsi définie répond à la question. Pour cela, il reste à établir que (P_x) possède la propriété de Markov forte (M_2) (n° 2.0.1) et que la relation (2.1.2) est satisfaite, autrement dit, que

$$(2.1.15) \quad \alpha_{\sigma_{U'}}(P_x) = P_x^I, \quad \text{et}$$

$$(2.1.16) \quad \alpha_{\sigma_{U''}}(P_x) = P_x^{II} \quad \text{pour tout } x \in E_\delta.$$

La propriété de Markov sera établie au n° 2.1.7 ; montrons ici (2.1.15) et (2.1.16) :

\mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' étant supposés arrêtés au sortir de U' et U'' respectivement, on a $\alpha_{\sigma_{U'}}(P_x^I) = P_x^I$ et $\alpha_{\sigma_{U''}}(P_x^{II}) = P_x^{II}$ pour tout $x \in E_\delta$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $x \in E_\delta$,

$$(2.1.17) \quad P_x(A) = P_x^I(A) \quad \text{pour tout } A \in \hat{\mathbb{F}}_{\sigma_{U'}} \text{, et}$$

$$(2.1.18) \quad P_x(A) = P_x^{II}(A) \quad \text{pour tout } A \in \hat{\mathbb{F}}_{\sigma_{U''}}.$$

Pour cela, remarquons que la relation (2.1.13) avec $n = 0$ entraîne que P_x coïncide avec P_x^1 sur la tribu $\hat{\mathbb{F}}_s$. Il en résulte d'une part (2.1.17) pour $x \in U'$ et (2.1.18) pour $x \notin U'$ par définition même de (P_x^1) ; d'autre part (2.1.17) pour $x \notin U'$ et (2.1.18) pour $x \in U''$ en vertu de la relation

$$\alpha_{\sigma_{U'}}^{-1}(A) \cap \{X_0 \notin U'\} = \alpha_0^{-1}(A) \cap \{X_0 \notin U'\} \in \hat{\mathbb{F}}_0 \subset \hat{\mathbb{F}}_s,$$

et de la relation analogue pour U'' .

Il reste donc à montrer (2.1.18) pour $x \in U' \cap U''$. Soit donc $A \in \hat{\mathbb{F}}_{\sigma_{U''}}$ et $x \in U' \cap U''$. On a d'abord,

(1) En posant $P_x^n = P_x^1$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in E_\delta$.

(2) (P_x) est déterminée de façon unique par ces conditions ainsi qu'il résulte des théorèmes cités.

$$(2.1.19) \quad P_x(A \cap \{\sigma_{u^*} < \sigma_{v^*}\}) = P_x(A \cap \{\sigma_{u^*} < S\}) = P_x^1(A \cap \{\sigma_{u^*} < S\}),$$

puisque $A \cap \{\sigma_{u^*} < S\} \in \hat{F}_S$.

$$= P_x^1(A \cap \{\sigma_{u^*} < \sigma_{v^*}\}) = P_x^{11}(A \cap \{\sigma_{u^*} < \sigma_{v^*}\}),$$

en vertu de l'hypothèse (2.1.1) (n° 2.1.2), puisque

$$A \cap \{\sigma_{u^*} < \sigma_{v^*}\} = A \cap \{\sigma_{u^* n u^*} < \sigma_{v^*}\} \in \hat{F}_{\sigma_{u^* n u^*}}$$

ainsi qu'il résulte des théorèmes 1.3 et 1.4 de [4].

Montrons enfin que $P_x(A \cap \{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\}) = P_x^{11}(A \cap \{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\})$. Pour cela, nous allons établir, plus généralement, que

$$(2.1.20) \quad P_x(B \cap \{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\}) = P_x^{11}(B \cap \{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\}) \quad \text{pour tout } B \in \hat{F}_{T_2};$$

Il en résultera la relation cherchée, puisque, en vertu de (2.1.15) et (2.1.16), $\sigma_{u^*} \leq T_2$, donc $\hat{F}_{\sigma_{u^*}} \subset \hat{F}_{T_2}$.

Puisque $\hat{F}_{T_2} = \overline{\hat{F}_S \vee \theta_S^{-1}(\hat{F}_S)}$ ([4] théorème 4.5), il suffit d'établir (2.1.20) pour $B \in \hat{F}_{T_2}$ de la forme $B_1 \cap \theta_S^{-1}(B_2)$ où $B_1 \in \hat{F}_S$ et $B_2 \in \hat{F}_S$.

On a alors, tenant compte de ce que $\sigma_{u^*} = S$ P_x P.S.,

$$P_x(B \cap \{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\}) = \int_{\{\sigma_{u^*} \geq S\} \cap B_1} P_x^1(d\omega) P_{x_S(\omega)}^1(B_2)$$

d'après 2.1.13, puisque $\{\sigma_{u^*} \geq S\} \in \hat{F}_S$ et que P_x coïncide avec P_x^1 sur \hat{F}_S .

$$= \int_{\{\sigma_{u^*} \geq S\} \cap B_1} P_x^1(d\omega) P_{x_S(\omega)}^{11}(B_2)$$

par définition de (P_x^1) , puisque $x \in U'$ et que, d'après (2.1.15), $\{X_0 \in U'\} \subset \{X_S \notin U'\}$.

$$= \int_{\{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\} \cap B_1} P_x^{11}(d\omega) P_{x_{\sigma_{u^*}(\omega)}}^{11}(B_2),$$

en vertu de l'hypothèse (2.1.1), puisque, ainsi qu'il résulte des théorèmes 1.3 et 1.4 de [4],

$$\{\sigma_{u^*} \geq \sigma_{v^*}\} \cap B_1 = \{\sigma_{u^* n u^*} = \sigma_{v^*}\} \cap B_1 \in \hat{F}_{\sigma_{u^* n u^*}}.$$

D'où le résultat cherché d'après la propriété de Markov forte du processus \mathcal{X}'' . La relation (2.1.2) est ainsi établie.

2.1.7 - Démonstration du théorème 2.1.4 : propriété de Markov forte de la diffusion (P_x) - On va utiliser le théorème 1.3.1 en posant, pour chaque $n \geq 0$ et $x \in E_\delta$, $S_n^x = \sigma_0$, si $x \in U'$ et $S_n^x = \sigma_{0^*}$, si $x \notin U'$ et en établissant successivement :

- La propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt $T_n (n \geq 1)$; puis σ_0 , et σ_{0^*} .
- La propriété de Markov avant σ_0 , et avant σ_{0^*} .

a) Propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt $T_n (n \geq 1)$:
 Pour tout $n \geq 1$, tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et tout $x \in E_\delta$,

$$(2.1.21) \quad E_x \{ g \circ \theta_{T_n} / \hat{F}_{T_n} \} = E_{x_{T_n}} \{ g \} \quad P_x \text{ P.S.}$$

Supposons d'abord que $g \in B(\Omega, \bigvee_p F_{T_p})$; pour $n = 1$, (2.1.21) résulte immédiatement du lemme 1.1.2.

Procédant par récurrence sur n , supposons que (2.1.21) est satisfaite pour $n = p$, et montrons que

$$E_x \{ f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}} \} = E_x \{ f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot E_{x_{T_{p+1}}} \{ g \} \}$$

pour tout $f \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$. Il suffit, en vertu du théorème 4.5 de [4] d'établir cette relation pour f de la forme $f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \theta_{T_p}$ où $f_1 \in B(\Omega, \hat{F}_{T_p})$ et $f_2 \in B(\Omega, \hat{F}_{T_1})$:

$$\begin{aligned} E_x \{ f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}} \} &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \theta_{T_p} \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot g \circ \theta_{T_{p+1}} \} \\ &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \alpha_{T_1} \circ \theta_{T_p} \cdot g \circ \theta_{T_1} \circ \theta_{T_p} \} \end{aligned}$$

en vertu du lemme 4.2 de [4] et de la relation $T_{p+1} = T_p + T_1 \circ \theta_{T_p}$ (n° 2.1.3) ;

$$\begin{aligned} &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot E_{x_{T_p}} \{ f_2 \circ \alpha_{T_1} \cdot g \circ \theta_{T_1} \} \}, \\ &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot E_{x_{T_p}} \{ f_2 \circ \alpha_{T_1} \cdot E_{x_{T_1}} \{ g \} \} \} \\ &= E_x \{ f_1 \circ \alpha_{T_p} \cdot f_2 \circ \alpha_{T_1} \circ \theta_{T_p} \cdot E_{x_{T_1} \circ \theta_{T_p}} \{ g \} \}, \end{aligned}$$

d'après la propriété pour T_p , compte tenu de la relation 1.0.7 (lemme 1.0.5) ;

$$= E_x \{ f \circ \alpha_{T_{p+1}} \cdot E_{X_{T_{p+1}}} \{ g \} \}.$$

Pour passer ensuite au cas général où $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$, il suffit d'appliquer le théorème 1.2.9, alinéa 1/.

b) Propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt σ_0 , et $\sigma_{U''}$:
Pour $W = U'$ et $W = U''$, pour tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et tout $x \in E_x$,

$$(2.1.22) \quad E_x \{ g \circ \theta_{\sigma_W} / \hat{F}_{\sigma_W} \} = E_{X_{\sigma_W}} \{ g \} \quad P_x \text{ P.S.}$$

Pour établir cette relation, il suffit de montrer que

$$(2.1.23) \quad E_x \{ f \circ \alpha_{\sigma_W} \cdot g \circ \theta_{\sigma_W} \} = E_x \{ f \circ \alpha_{\sigma_W} \cdot E_{X_{\sigma_W}} \{ g \} \}$$

pour tout $f \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$.

Cette relation est vérifiée pour $W = U'$ et $x \in U'$, $W = U''$ et $x \notin U'$ d'après a) ci-dessus puisqu'alors $\sigma_W = T_1$; elle l'est aussi pour $x \notin W$ car dans ce cas $\sigma_W = 0$ et,

$$\begin{aligned} E_x \{ f \circ \alpha_{\sigma_W} \cdot g \circ \theta_{\sigma_W} \} &= f(\bar{\omega}_x) E_x \{ g \} (1) \\ &= E_x \{ f \circ \alpha_{\sigma_W} E_{X_{\sigma_W}} \{ g \} \}. \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer (2.1.23) dans le cas où $x \in U' \cap U''$ et $W = U''$. Soit donc $x \in U' \cap U''$; on a d'abord :

$$\int_{\{\sigma_{U''} \geq \sigma_{U'}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U''}} \cdot g \circ \theta_{\sigma_{U''}} dP_x = \int_{\{\sigma_{U''} \geq T_1\}} f \circ \alpha_{T_2} \cdot g \circ \theta_{T_2} dP_x,$$

puisque $\sigma_{U'} = T_1$ P_x P.S. et que $\{\sigma_{U''} \geq T_1\} \subset \{\sigma_{U''} = T_2\}$.

$$\begin{aligned} &= \int_{\{\sigma_{U''} \geq T_1\}} f \circ \alpha_{T_2} E_{X_{T_2}} \{ g \} dP_x \quad \text{d'après a)} \\ &= \int_{\{\sigma_{U''} \geq \sigma_{U'}\}} \{ f \circ \alpha_{T_2} E_{X_{T_2}} \{ g \} \} dP_x. \end{aligned}$$

Montrons enfin que,

(1) Où $\bar{\omega}_x \in \Omega$ est telle que $X_s(\bar{\omega}_x) = x$ pour tout $s \in R_+$.

$$(2.1.23) \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g \circ \theta_{\sigma_{U^n}} dP_x = \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^n}}} \{g\} dP_x .$$

Il suffit d'établir cette relation pour g de la forme $g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot g_2 \circ \theta_{\sigma_{U^1}}$, où $g_1, g_2 \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \circ \theta_{\sigma_{U^n}} \cdot g_2 \circ \theta_{\sigma_{U^1}} \circ \theta_{\sigma_{U^n}} dP_x = \\ = \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g_1 \circ \theta_{\sigma_{U^n}} \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot g_2 \circ \theta_{\sigma_{U^1}} dP_x , \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.2 de [4] et la relation

$$\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\} \subset \{\theta_{\sigma_{U^1}} \circ \theta_{\sigma_{U^n}} = \theta_{\sigma_{U^n}}\} .$$

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g_1 \circ \theta_{\sigma_{U^n}} \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^1}}} \{g_2\} dP_x$$

en vertu de la relation (2.1.22) déjà établie pour $W = U^1$.

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g_1 \circ \theta_{\sigma_{U^n}} \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^1}}} \{g_2\} dP_x'$$

puisque P_x et P_x' coïncident sur $\hat{F}_{\sigma_{U^1}}$, en vertu de 2.1.15 (n° 2.1.6 ci-dessus).

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \circ \theta_{\sigma_{U^n}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^1}} \circ \theta_{\sigma_{U^n}}} \{g_2\} dP_x'$$

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^n}}} \{g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^1}}} \{g_2\}\} dP_x' ,$$

en vertu de la propriété de Markov forte de (P_x') ;

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^n}}} \{g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^1}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^1}}} \{g_2\}\} dP_x ,$$

encore en vertu de la coïncidence de P_x et P_x' sur $\hat{F}_{\sigma_{U^1}}$;

$$= \int_{\{\sigma_{U^n} < \sigma_{U^1}\}} f \circ \alpha_{\sigma_{U^n}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^n}}} \{g\} dP_x ,$$

à cause de la relation (2.1.22) déjà établie pour $W = U^1$. D'où (2.1.23) et (2.1.22).

c) **Propriété de Markov avant** σ_{U^*} et σ_{U^*} (1) : Pour tout temps d'arrêt V de la famille (\hat{F}_t^x) , tout $x \in E_s$, et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_{s_1}^x)$ (2),

$$(2.1.24) \quad E_x \{ 1_{\{v < s_1^x\}} g \circ \theta_v / \hat{F}_{v^+}^x \} = 1_{\{v < s_1^x\}} E_{x_v} \{ g \} \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

Il suffit d'établir que,

$$(2.1.25) \quad \int_{\{v < s_1^x\}} f \cdot g \circ \theta_v \, dP_x = \int_{\{v < s_1^x\}} f \cdot E_{x_v} \{ g \} \, dP_x$$

pour tout $f \in B(\Omega, \hat{F}_{v^+}^x)$ et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ de la forme

$$g_1 \circ \alpha_{s_1^x} \cdot g_2 \circ \theta_{s_1^x} \quad \text{où} \quad g_1, g_2 \in B(\Omega, \hat{F}_\infty).$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{\{v < s_1^x\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{s_1^x} \circ \theta_v \cdot g_2 \circ \theta_{s_1^x} \circ \theta_v \, dP_x \\ = \int_{\{v < s_1^x\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{s_1^x} \cdot g_2 \circ \theta_{s_1^x} \, dP_x \end{aligned}$$

d'après le caractère terminal de S_1^x et le lemme 4.2 de [4] ;

$$= \int_{\{v < s_1^x\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{s_1^x} \cdot E_{x_{s_1^x}} \{ g_2 \} \, dP_x$$

en vertu de b) ci-dessus, puisque $1_{\{v < s_1^x\}} f \in B(\Omega, \hat{F}_{s_1^x}^x)$ d'après les théorèmes 1.4 et 3.4 de [4].

$$= \int_{\{v < \sigma_{U^*}\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{x_{\sigma_{U^*}}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^*}}} \{ g_2 \} \, dP_x^*$$

[où $\sigma_{U^*} = \sigma_U$, ou $\sigma_{U^*} = \sigma_{U^*}$, $P_x^* = P_x'$ ou $P_x^* = P_x''$, selon que $x \in U'$ ou $x \notin U'$] en vertu des relations (2.1.15) et (2.1.16) (n° 2.1.6).

$$\begin{aligned} &= \int_{\{v < \sigma_{U^*}\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^*}} \circ \theta_v \cdot E_{x_{\sigma_{U^*}} \circ \theta_v} \{ g_2 \} \, dP_x^* \\ &= \int_{\{v < \sigma_{U^*}\}} f \cdot E_{x_v}^* \{ g_1 \circ \alpha_{\sigma_{U^*}} \cdot E_{x_{\sigma_{U^*}}} \{ g_2 \} \} \, dP_x^* \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov forte de (P_x^*) .

(1) Voir n° 1.3.1, relation (1.3.3).

(2) $S_1^x = \sigma_U$, si $x \in U'$ et $S_1^x = \sigma_{U^*}$, si $x \notin U'$; voir ci-dessus le début du n° 2.1.7.

D'où la relation (2.1.25), en vertu de b) ci-dessus et des relations (2.1.15) et (2.1.16).

d) Compte tenu de b) et c) ci-dessus, le théorème 1.3.1 entraîne que, pour tout temps d'arrêt V de la famille (F_{t+}) , tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et tout $x \in E_s$,

$$(2.1.26) \quad E_x \{ 1_{\{v < \tau_\omega\}} g \circ \theta_v / F_{v+} \} = 1_{\{v < \tau_\omega\}} E_{x_v} \{ g \} \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

Par ailleurs, la répartition conditionnelle π donnée étant une répartition conditionnelle au sortir de U (n° 1.2.12), le théorème 2.1.2 [relation (1.2.28)] entraîne que,

$$(2.1.27) \quad E_x \{ 1_{\{v \geq \tau_\omega\}} g \circ \theta_v / F_{v+} \} = 1_{\{v \geq \tau_\omega\}} E_{x_v} \{ g \} \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

La propriété de Markov est ainsi établie, pour la diffusion (P_x) ; ce qui achève la démonstration de l'alinéa 1) du théorème 2.1.4 dans le cas des processus fortement Markovien.

2.1.8 - Fin de la démonstration du théorème 2.1.4 : cas des processus standards - Sous les hypothèses faites, le caractère standard du processus \mathfrak{X} construit ci-dessus résulte exactement du théorème 1.4.2. L'alinéa 2) du théorème 2.1.4 étant une conséquence immédiate du théorème 1.2.9, 2), et de l'unicité de la diffusion (P_x) construite, le théorème 2.1.4 est ainsi complètement établi.

2. 2. - Recollement d'une suite croissante de processus fortement Markoviens arrêtés (1)

2.2.1 - Existence du processus recollé - Avec les notations et hypothèses sur la fonction aléatoire X introduites au n° 2.1.1, on désigne par $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'ouverts de E , par U leur réunion et, pour chaque $n \geq 1$, par (P_x^n) une diffusion de E_s dans (Ω, \hat{F}_∞) faisant du terme $\mathfrak{X}^n = (\Omega, \omega_s, (X_t), (\theta_t), (P_x^n))$ un processus fortement Markovien à valeurs dans E (2).

(1) Les structures communes ayant été reportées dans la première partie, ce paragraphe est présenté de façon indépendante du précédent.

(2) Voir le n° 2.0.1.

THEOREME - On suppose que, pour chaque $n \geq 1$, le processus \mathfrak{X}^n est arrêté au sortir de U_n (1). Alors, la relation

$$(2.2.1) \quad (\mathfrak{X}^{n+1})^{\sigma_{U_n}} = \mathfrak{X}^n \quad \text{pour chaque } n \geq 1 \quad (1)$$

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins (2) un processus fortement markovien (3) $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_t))$ arrêté au sortir de $U = \bigcup_n U_n$ et tel que :

$$(2.2.2) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U_n}} = \mathfrak{X}^n \quad \text{pour chaque } n \geq 1.$$

La condition est nécessaire à cause de la relation (2.0.6) (n° 2.0.5). Pour établir qu'elle est suffisante (voir le théorème 2.1.4 ci-dessus) introduisons :

2.2.2 - La suite déterminante (σ_{U_n}) - Posons,

$$(2.2.3) \quad T_0 = 0 \quad \text{et, pour chaque } n \geq 1 \quad T_n = \sigma_{U_n}.$$

Alors :

LEMME - (T_n) est une suite déterminante terminale ayant les propriétés suivantes :

$$(2.2.4) \quad T_n + T_{n+p} \circ \theta_{T_n} = T_{n+p} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \quad \text{et } p \geq 0.$$

$$(2.2.5) \quad X_{T_n}(\omega) \notin U_n \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad \text{et } \omega \in \Omega.$$

$$(2.2.7) \quad \{T_n = T_\omega\} \subset \{T_n = \sigma_U\} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

$$(2.2.8) \quad T_\omega \leq \sigma_U \quad \text{et, si } X \text{ est du type de Hunt } S_U \leq T_\omega.$$

Ces propriétés résultent immédiatement de la définition de (T_n) , du caractère terminal strict (4) des temps de sortie σ_{U_n} , et du lemme 2.0.9.

(1) Voir les n° 2.0.5 et 2.0.6.

(2) Il en existe en général plusieurs ; voir le n° 2.2.3.

(3) Voir le n° 2.0.1.

(4) Voir le n° 1.0.3, et [4] appendice 2.

2.2.3 - **Unicité du processus recollé** - Faisant intervenir la suite déterminante (T_n) (n° 2.2.2), énonçons le résultat plus complet suivant dont le théorème 2.2.1 est une conséquence directe :

THEOREME (1) - On suppose que le processus \mathfrak{X}^n est arrêté au sortir de U_n , pour chaque $n \geq 1$, et que la relation (2.2.1) est satisfaite. Alors :

1/ Si π est une répartition conditionnelle de X au sortir de U après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ et terminale, il existe une diffusion (P_x) de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) et une seule telle que le terme $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ soit un processus fortement markovien arrêté au sortir de U et que,

$$(2.2.2) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U_n}} = \mathfrak{X}^n \quad \text{pour chaque } n \geq 1$$

$$(2.2.9) \quad P_x \{X_{T_\omega} \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{T_n}\} = \pi(\cdot, \Gamma) \quad P_x \text{ P.S.}$$

pour tout $x \in E_\delta$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$.

$$(2.2.10) \quad T_\omega = \sigma_U \quad P_x \text{ P.S.} \quad \text{pour tout } x \in E_\delta.$$

De plus, si la fonction aléatoire X est du type de Hunt, si $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ est le mode de raccordement continu, et si \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' sont des processus standards, il en est de même de \mathfrak{X} (2).

2/ Inversement, si $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ est un processus fortement markovien arrêté au sortir de U vérifiant les relations (2.2.2) et (2.2.10), il existe une répartition conditionnelle π de X au sortir de U après (T_n) régie par $(B_T, M_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ et terminale telle que la relation (2.2.9) soit satisfaite.

(1) Avec les notations et hypothèses introduites aux numéros 2.1.1 et 2.2.1 ci-dessus.

(2) Les relations (2.2.2) et (2.2.9) suffisent alors à assurer l'unicité de \mathfrak{X} (voir le n° 2.0.9).

REMARQUE - On pourrait énoncer ici des remarques très analogues aux remarques 1 et 2 qui suivent le théorème 2.1.4.

Notons seulement que, si $U = E$, les relations (2.2.2) et (2.2.10) déterminent le processus \mathcal{X} de façon unique.

2.2.4 - Démonstration du théorème 2.2.3 : Unicité de la diffusion (P_x) - On va utiliser les théorèmes 1.1.1 et 1.2.6 de la première partie. Supposons que (P_x) soit une diffusion répondant à la question. On a d'abord

$$(2.2.11) \quad P_x \{ \theta_{T_n}^{-1}(A) / \hat{F}_{T_n} \} = P_{x_{T_n}}^{n+1}(A) \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

pour tout $n \geq 0$, $A \in \hat{F}_{T_{n+1}}$, et $x \in E_\delta$.

En effet, cette relation résulte de la propriété de Markov forte de (P_x) , et du fait que les mesures P_x^{n+1} et P_x coïncident sur la tribu $\hat{F}_{T_{n+1}}$ en vertu de la relation (2.2.2).

L'unicité de (P_x) sur la tribu $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$ résulte alors de la propriété d'unicité du théorème 1.1.1 (où $S_n = T_n = \sigma_{U_n}$ pour tout $n \geq 1$) et de la relation (2.2.11), jointe à la normalité de (P_x) . La relation (2.2.9), jointe à la relation $\hat{F}_{T_\infty} = \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \vee X_{T_\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\delta)$, entraîne ensuite l'unicité de (P_x) sur la tribu \hat{F}_{T_∞} ; enfin, la relation (2.2.10) et le fait que \mathcal{X} soit arrêté au sortir de U , sur la tribu \hat{F}_∞ .

2.2.5 - Démonstration du théorème 2.2.3 : construction de la diffusion (P_x) - On déduit des théorèmes 1.1.1, 1.2.6 et 1.2.12 l'existence d'une diffusion normale (P_x) de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) vérifiant les relations (2.2.11), (2.2.9) et (2.2.10) ainsi que

$$(2.2.12) \quad \alpha_{\sigma_U}(P_x) = P_x \quad \text{pour tout } x \in E_\delta.$$

On va montrer que la diffusion (P_x) ainsi définie répond à la question. Pour cela, il reste à établir que (P_x) possède la propriété de Markov forte (M_2) (n° 2.0.1) et que la relation (2.2.2) est satisfaite, autrement dit, puisque \mathcal{X}^n est arrêté à l'instant T_n , que, pour tout $x \in E_\delta$ et $n \geq 1$,

$$(2.2.13) \quad P_x(A) = P_x^n(A) \quad \text{pour tout } A \in \hat{F}_{T_n}$$

La propriété de Markov sera établie au n° 2.2.6 ; montrons ici (2.2.13) : la relation (2.2.11) pour $n = 0$ entraîne d'abord la relation (2.2.13) pour $n = 1$. Procédons ensuite par récurrence sur n : supposant (2.2.13) satisfaite pour $n = p$, il suffit, en vertu du théorème 4.5 de [4] et de la relation $T_{p+1} = T_p + T_{p+1} \circ \theta_{T_p}$, de montrer que $P_x(A) = P_x^{p+1}(A)$ pour tout A de la forme

$$A_1 \cap \theta_{T_p}^{-1}(A_2) \quad \text{où} \quad A_1 \in \hat{F}_{T_p} \quad \text{et} \quad A_2 \in \hat{F}_{T_{p+1}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} P_x(A_1 \cap \theta_{T_p}^{-1}(A_2)) &= \int_{\Lambda_1} P_x(d\omega) P_{x_{T_p(\omega)}}^{p+1}(A_2) && \text{d'après (2.2.11).} \\ &= \int_{\Lambda_1} P_x^p(d\omega) P_{x_{T_p(\omega)}}^{p+1}(A_2), \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence ;

$$= \int_{\Lambda_1} P_x^{p+1}(d\omega) P_{x_{T_p(\omega)}}^{p+1}(A_2)$$

en vertu de la relation de cohérence (2.2.1) ; d'où le résultat en vertu de la propriété de Markov forte de (P_x^{p+1}) .

2.2.6 - Démonstration du théorème 2.2.3 : propriété de Markov forte de la diffusion (P_x) - On va utiliser le théorème 1.3.1 en posant, pour chaque $n \geq 1$, $S_n^x = T_n$, et en établissant successivement :

La propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt T_n , puis la propriété de Markov avant T_n ($n \geq 1$).

a) Propriété de Markov par rapport aux temps d'arrêt T_n ($n \geq 1$) :

Pour tout $n \geq 1$, tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et $x \in E_\delta$,

$$(2.2.14) \quad E_x\{g \circ \theta_{T_n} / \hat{F}_{T_n}\} = E_{x_{T_n}}\{g\} \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

Pour $g \in \cup_p B(\Omega, \hat{F}_{T_p})$, donc aussi pour $g \in B(\Omega, \bigvee_p \hat{F}_{T_p})$,

(2.2.14) résulte de la propriété de Markov des diffusions (P_x^p) et de (2.2.13). On passe ensuite au cas général où $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ en appliquant le théorème 1.2.9, alinéa 1).

b) Propriété de Markov avant T_n ($n \geq 1$) (1) : Pour tout temps d'arrêt V de la famille (\hat{F}_{t+}) , tout $x \in E_\delta$, tout $n \geq 1$ et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_{T_n})$,

$$(2.2.15) \quad E_x \{ 1_{\{v < T_n\}} g \circ \theta_v / \hat{F}_{v+} \} = 1_{\{v < T_n\}} E_{x_{T_n}} \{ g \} \quad P_x \text{ P.S.}$$

Il suffit, en vertu du théorème 4.5 de [4], d'établir que,

$$(2.2.16) \quad \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g \circ \theta_v \, dP_x = \int_{\{v < T_n\}} f \cdot E_{x_v} \{ g \} \, dP_x$$

pour tout $f \in B(\Omega, \hat{F}_{v+})$ et tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ de la forme

$$g_1 \circ \alpha_{T_n} \cdot g_2 \circ \theta_{T_n} \quad \text{où} \quad g_1, g_2 \in B(\Omega, \hat{F}_\infty).$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{T_n} \circ \theta_v \cdot g_2 \circ \theta_{T_n} \circ \theta_v \, dP_x \\ = \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{T_n} \cdot g_2 \circ \theta_{T_n} \, dP_x, \end{aligned}$$

d'après le caractère terminal de T_n et le lemme 4.2 de [4] ;

$$= \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{T_n} \cdot E_{x_{T_n}} \{ g_2 \} \, dP_x,$$

en vertu de a) ci-dessus, puisque $1_{\{v < T_n\}} f \in B(\Omega, \hat{F}_{T_n})$ d'après les théorèmes 1.4 et 3.4 de [4].

$$= \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g_1 \circ \theta_v \circ \alpha_{T_n} \cdot E_{x_{T_n}} \{ g_2 \} \, dP_x^n$$

d'après la coïncidence de P_x et P_x^n sur F_{T_n} (n° 2.2.5) ;

$$\begin{aligned} &= \int_{\{v < T_n\}} f \cdot g_1 \circ \alpha_{T_n} \circ \theta_v \cdot E_{x_{T_n} \circ \theta_v} \{ g_2 \} \, dP_x^n \\ &= \int_{\{v < T_n\}} f \cdot E_{x_v} \{ g_1 \circ \alpha_{T_n} \cdot E_{x_{T_n}} \{ g_2 \} \} \, dP_x^n, \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov forte de (P_x^n) et le théorème 2.0.3 ;

(1) Voir le n° 1.3.1, relation (1.3.3).

$$= \int_{\{v < \tau_n\}} f \cdot E_{x_v} \{g\} dP_x$$

en vertu de a) ci-dessus et de la coïncidence de P_x et P_x^n sur \hat{F}_{τ_n} . D'où (2.2.16) et (2.2.15).

c) Compte tenu de a) et b) ci-dessus, le théorème 1.3.1 entraîne que, pour tout temps d'arrêt V de la famille (F_{t+}) , tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\omega)$ et tout $x \in E_\delta$,

$$(2.2.17) E_x \{1_{\{v < \tau_\omega\}} g \circ \theta_v / F_{v+}\} = 1_{\{v < \tau_\omega\}} E_{x_v} \{g\} \quad P_x \quad P.S.$$

Par ailleurs, la répartition conditionnelle π donnée étant une répartition conditionnelle au sortir de U (n° 1.2.12), le théorème 1.2.12 [relation (1.2.28)] entraîne que,

$$E_x \{1_{\{v \geq \tau_\omega\}} g \circ \theta_v / F_{v+}\} = 1_{\{v \geq \tau_\omega\}} E_{x_v} \{g\} \quad P_x \quad P.S.$$

La propriété de Markov forte est ainsi établie pour la diffusion (P_x) ; ce qui achève la démonstration de l'alinéa 1) du théorème 2.2.3 dans le cas des processus fortement markoviens.

2.2.7 - Fin de la démonstration du théorème 2.2.3 ; cas des processus standards - Sous les hypothèses faites, le caractère standard du processus X construit ci-dessus résulte exactement du théorème 1.4.2. L'alinéa 2) du théorème 2.2.3 étant une conséquence immédiate du théorème 1.2.9, 2), et de l'unicité de la diffusion (P_x) construite, le théorème 2.2.3 est ainsi complètement établi.

2.2.8 - Cas où X est une fonction aléatoire non interrompue - On peut appliquer les théorèmes 2.1.4 et 2.2.3 au cas où X est une fonction aléatoire non interrompue (pour laquelle $\sigma_\varepsilon(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \neq \omega_\delta$), en particulier au cas où X est la fonction aléatoire typique continue à droite non interrompue (n° 1.0.7 exemple A')).

On notera cependant que ces fonctions aléatoires non interrompues ne peuvent pas être du type de Hunt si elles ont la propriété complète de raccordement (voir la remarque 1 de n° 1.0.7) et que le théorème 2.2.3 est faux lorsque X ne possède pas la propriété complète de raccordement ainsi que le montre l'exemple

suivant : prenant pour E un ouvert relativement compact de R^n , et, pour chaque n , supposant que $\bar{U}_n \subset E$, et prenant pour \mathfrak{X} le processus standard déduit du mouvement Brownien par arrêt au sortir de U , le processus standard \mathfrak{X} que fournit le théorème 2.2.3 est le processus induit sur E par le mouvement Brownien sur R^n (1). Le processus \mathfrak{X} n'est pas non interrompu, ce qui entraîne que l'énoncé du théorème 2.2.3 est faux si on prend pour X la fonction aléatoire typique continue non interrompue à valeurs dans E , fonction aléatoire qui ne possède pas la propriété complète de raccordement.

2. 3. - Recollement d'une suite quelconque de processus fortement Markoviens arrêtés. (2)

2.3.1 - Existence et unicité du processus recolle - Avec les notations, et en plus des hypothèses sur la fonction aléatoire X introduites au n° 2.1.1, on suppose que X est du type de Hunt, admet le mode de raccordement continu, et possède une famille (m_t) d'opérateurs de mesure (2). On désigne par $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (3) un recouvrement ouvert dénombrable de l'espace B.C.D E , et, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, par (P_i) une diffusion de E_δ dans (Ω, \hat{F}_∞) faisant du terme

$$\mathfrak{X}_i = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x^i))$$

un processus standard.

THEOREME - On suppose que, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le processus \mathfrak{X}_i est arrêté au sortir de U_i . Alors, la relation

$$(2.3.1) \quad \mathfrak{X}_i^{\sigma_{U_i} \cap U_j} = \mathfrak{X}_j^{\sigma_{U_i} \cap U_j}$$

pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ (4) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un processus standard $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ tel que

(1) Voir le lemme 2.4.4.

(2) Voir le n° 1.0.1 et la remarque finale du n° 2.3.4.

(3) \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers ≥ 1 .

(4) Si $U_i \cap U_j = \emptyset$ la relation $\mathfrak{X}_i^{\sigma_{U_i} \cap U_j} = \mathfrak{X}_j^{\sigma_{U_i} \cap U_j}$ est toujours vérifiée.

$$(2.3.2) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U_i}} = \mathfrak{X}_i \quad \text{pour tout } i \in N.$$

le processus \mathfrak{X} est alors unique.

Compte tenu du théorème 2.2.3, ce théorème résulte du lemme ci-dessous qui permet, par récurrence sur n , de construire pour chaque entier $n \geq 1$, un processus standard $\hat{\mathfrak{X}}_n$, arrêté au sortir de $\hat{U}_n = \bigcup_{k=1}^n U_k$ et tel que $\hat{\mathfrak{X}}_n^{\sigma_{U_k}} = \mathfrak{X}_k$ pour tout $k \leq n$.

2.3.2 - LEMME - Dans la situation du théorème 2.3.1, on suppose que la relation (2.3.1) est satisfaite. Alors, il existe un processus standard $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$, et un seul, arrêté au sortir de $U = U_1 \cup U_2$, et tel que

$$(2.3.3) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U_i}} = \mathfrak{X}_i \quad \text{pour } i = 1, 2$$

$$(2.3.4) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_{U \cap U_k}} = \mathfrak{X}_k^{\sigma_{U \cap U_k}} \quad \text{pour tout } k \geq 3.$$

2.3.3 - Afin d'établir le lemme 2.3.2, introduisons les notations suivantes : d'une part, si W est un ouvert de E , on désigne par (T_n^W) la suite déterminante des temps de sortie alternatifs de $U = U_1 \cap W$ et $U'' = U_2 \cap W$ définie au n° 2.1.3 ; et on pose

$$C_W = B_{T_n^W} \cap \bigcap_p \{T_p^W < T_\infty^W\}.$$

En particulier, on pose $T_n = T_n^E$ et $C = C_E$. D'autre part, soient π une répartition conditionnelle de X au sortir de $U = U_1 \cup U_2$, après (T_n) , régie par le mode continu et terminale, et $\mathfrak{X}_\pi = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x^\pi))$ l'unique processus standard arrêté au sortir de U , réparti par π après (T_n) ,⁽¹⁾ et tel que $\mathfrak{X}_\pi^{\sigma_{U_i}} = \mathfrak{X}_i$ ($i = 1, 2$).

La diffusion de E_δ dans $(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n})$ induite sur $\bigvee_n \hat{F}_{T_n}$ par la diffusion (P_x^π) du processus \mathfrak{X}_π ne dépend pas de π . On désigne par (P_x) cette diffusion.

De plus, si W est un ouvert de E , on désigne par π^W

(1) Voir le n° 2.1.4.

une répartition conditionnelle de X au sortir de U après (T_n^*) régie par le mode continu et terminale répartissant le processus $\mathfrak{X}_n^{\sigma_w \cup U}$ après (T_n^*) .

Enfin, on désigne, pour chaque entier $k \geq 3$, par π_k (resp $\hat{\pi}_k$) une répartition conditionnelle au sortir de U (resp U_k) après (T_n) (resp $(T_n^{U_k})$) régie par le mode de raccordement continu et terminale répartissant après (T_n) (resp $(T_n^{U_k})$) le processus $\mathfrak{X}_k^{\sigma_w}$ (resp $\mathfrak{X}_k^{\sigma_w \cup U_k}$). On va alors établir les deux lemmes suivants qui précisent les propriétés requises des termes ainsi introduits :

2.3.4 - LEMME - *D'une part, pour tout ouvert W de E ,*

$$(2.3.5) \quad T_n^W = T_n \wedge \sigma_w, \quad \text{et,}$$

$$(2.3.6) \quad C_w \subset \{T_n^W = T_n < \sigma_w\} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

$$(2.3.7) \quad C_{w \cap w'} = C_w \cap C_{w'}, \quad \text{pour tout ouvert } W' \text{ de } E.$$

$$(2.3.8) \quad \theta_{T_n}^{-1}(C_w) \subset \bigcap_{p \geq n} \theta_{T_p}^{-1}(C_w) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

$$(2.3.9) \quad A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \implies A \cap C_w \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n^W}$$

D'autre part,

$$(2.3.10) \quad C = \bigcup_{k \geq 3} \bigcup_{n \geq 0} \theta_{T_n}^{-1}(C_{U_R}).$$

En effet :

a) La relation $T_n^W = T_n \wedge \sigma_w$ s'établit par récurrence sur n : Compte tenu de la relation $\sigma_{U_i \cap W} = \sigma_{U_i} \wedge \sigma_w$, on a d'abord, par définition même de T_1^W (n° 2.1.3), $T_1^W = T_1 \wedge \sigma_w$. Supposons ensuite que $T_n^W = T_n \wedge \sigma_w$ et montrons que $T_{n+1}^W = T_{n+1} \wedge \sigma_w$: on a

$$T_{n+1}^W(\omega) = T_n^W(\omega) + T_{T_n^W}^1(\omega);$$

par conséquent

- ou bien $T_n(\omega) \geq \sigma_w(\omega)$; alors $T_n^W(\omega) = \sigma_w(\omega)$, donc $X_o(\theta_{T_n^W}(\omega)) = X_{\sigma_w}(\omega) \notin W$; donc $T_1^W(\theta_{T_n^W}(\omega)) = 0$, et

$$T_{n+1}^W(\omega) = T_n^W(\omega) = T_n(\omega) \wedge \sigma_w(\omega).$$

- ou bien $T_n(\omega) < \sigma_w(\omega)$; alors $T_n^w(\omega) = T_n(\omega)$ et

$$X_0(\theta_{T_n}(\omega)) = X_{T_n}(\omega) \in W ; \quad \text{donc,}$$

- si $X_{T_n}(\omega) \notin U$, on a $T_1^w(\theta_{T_n}(\omega)) = T_1(\theta_{T_n}(\omega)) = 0$ et $T_{n+1}^w(\omega) = T_n^w(\omega) = T_n(\omega) \wedge \sigma_w(\omega) = T_{n+1}(\omega) \wedge \sigma_w(\omega)$.

- si $X_{T_n}(\omega) \in U_1$, on a,

$$T_1^w(\theta_{T_n}(\omega)) = \sigma_{U_1 \cap W}(\theta_{T_n}(\omega)) = T_1(\theta_{T_n}(\omega)) \wedge \sigma_w(\theta_{T_n}(\omega)),$$

donc

$$\begin{aligned} T_{n+1}^w(\omega) &= [T_n(\omega) + T_1(\theta_{T_n}(\omega))] \wedge [T_n(\omega) + \sigma_w(\theta_{T_n}(\omega))] \\ &= T_{n+1}(\omega) \wedge \sigma_w(\omega) \end{aligned}$$

d'après le caractère terminal de σ_w .

- enfin, si $X_{T_n}(\omega) \notin U_1$, une vérification analogue donne le résultat ; d'où la relation (2.3.5), et, comme conséquence immédiate, la relation (2.3.6).

b) La relation (2.3.7) résulte directement de (2.3.6) et de $T_n^{w \circ w'} = T_n^w \wedge \sigma_{w'} = T_n^{w'} \wedge \sigma_w$ (n entier ≥ 0) qui est une conséquence de (2.3.5).

La relation (2.3.8) réclame aussi une simple vérification à partir des définitions, en utilisant la relation (2.3.5) ainsi que la relation (2.1.4) (lemme 2.1.3) appliquée à la suite (T_n^w) .

c) Pour établir la relation (2.3.9), introduisons l'opérateur de meurtre $m_{T_\infty^w}$ à l'instant T_∞^w : partant de la famille (m_t) d'opérateurs de meurtre dont X est supposée pourvue (n° 2.3.1), posons, pour chaque $\omega \in \Omega$, $m_{T_\infty^w}(\omega) = m_{T_\infty^w(\omega)}(\omega)$ si $T_\infty^w(\omega) < \infty$, et $m_{T_\infty^w}(\omega) = \omega_\delta$ si $T_\infty^w(\omega) = +\infty$. On a, par définition de (m_t) ,

$$X_s(m_{T_\infty^w}(\omega)) = X_s(\omega) \quad \text{si } s < T_\infty^w(\omega), \quad \text{et}$$

$$X_s(m_{T_\infty^w}(\omega)) = \delta \quad \text{si } s \geq T_\infty^w(\omega).$$

Remarquons d'abord que l'application $m_{T_\infty^w}$ de Ω dans Ω ainsi définie est mesurable de $(\Omega, \bigvee_n \hat{F}_{T_n^w})$ dans (Ω, \hat{F}_∞) ; en effet, il suffit de montrer que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$, et $s \geq 0$,

$$m_{T_n^w}^{-1}(\{X_s \in \Gamma\}) \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n^w};$$

ce qui résulte de (2.3.11), puisque T_n^w est $\bigvee_n \hat{F}_{T_n^w}$ -mesurable.

Montrons ensuite que,

$$(2.3.12) \quad A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n^w} \implies m_{T_n^w}^{-1}(A \cap C_w) = A \cap C_w.$$

La relation (2.3.9) cherchée en résultera, puisque $A \cap C_w \in \hat{F}_\omega$. Pour cela, désignons par $R_{T_n^w}^-$ la relation d'équivalence sur Ω définie par,

$$(2.3.13) \quad \omega \sim \omega' (R_{T_n^w}^-) \iff T_\omega^w(\omega') = T_\omega^w(\omega) \quad \text{et} \quad X_s(\omega') = X_s(\omega)$$

pour tout $s < T_\omega^w(\omega)$, et montrons d'abord que, si $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ et $A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n^w}$,

$$(2.3.14) \quad \omega \in A \cap C_w \quad \text{et} \quad \omega' \sim \omega (R_{T_n^w}^-) \implies \omega' \in A \cap C_w.$$

En effet, soit \mathcal{G} l'ensemble des $A \in \hat{F}_\omega$ satisfaisant la relation (2.3.14) pour tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$. \mathcal{G} est une tribu; il suffit donc de montrer que $\hat{F}_{T_n^w} \subset \mathcal{G}$ pour tout $n > 0$, ce qui résulte du corollaire 1 du théorème 1.3 et du théorème 1.4 de [4], et du fait que $C_w \subset C_\varepsilon = C$ (relation (2.3.7) ci-dessus établie).

Il reste à déduire (2.3.12) de (2.3.14) : soit donc

$$A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n^w}, \quad \omega \in \Omega \quad \text{et} \quad \omega' = m_{T_n^w}(\omega).$$

Si $\omega \in A \cap C_w$, on a $X_s(\omega) = X_s(\omega')$ pour tout $s < T_\omega^w(\omega)$; donc, compte tenu de ce que $\omega \in C_w$, $T_p^w(\omega') = T_p^w(\omega)$ pour tout p ; donc aussi $T_\omega^w(\omega') = T_\omega^w(\omega)$ et finalement, $\omega' \sim \omega (R_{T_n^w}^-)$, d'où $\omega' \in A \cap C_w$ d'après (2.3.14). Inversement, supposons que $\omega' \in A \cap C_w$; on a

$$X_{T_\omega^w(\omega)}(\omega') = \delta, \quad \text{donc} \quad T_\omega^w(\omega') \leq \sigma_\varepsilon(\omega') \leq T_\omega^w(\omega);$$

d'où $T_p^w(\omega') = T_p^w(\omega)$ pour tout p , d'après le corollaire 1 du théorème 1.3 de [4]; et aussi $T_\omega^w(\omega') = T_\omega^w(\omega)$; et finalement $\omega' \sim \omega (R_{T_n^w}^-)$ d'où $\omega \in A \cap C_w$ d'après (2.3.14), et la relation (2.3.9)

d) Enfin, la relation (2.3.10) résulte de ce que (U_i) est un recouvrement de E , et de ce que, compte tenu du caractère isolé de δ ,

$$\omega \in C \quad \text{et} \quad X_{T_\omega}^-(\omega) \in U_p \implies \exists n \geq 0, \theta_{T_n}(\omega) \in C_{U_p};$$

et,

$$\omega \in C \implies X_{T_\omega}^-(\omega) \in E$$

REMARQUE - C'est seulement pour établir la relation (2.3.9) qu'est utilisée, dans la démonstration du théorème 2.3.1, l'hypothèse de l'existence d'une famille d'opérateurs de meurtre pour X . Cette hypothèse interdit d'appliquer le théorème 2.3.1 au cas d'une fonction aléatoire non interrompue ; interdiction qui résulte aussi de ce qu'une fonction aléatoire non interrompue ne peut être du type de Hunt si elle possède la propriété complète de raccordement (voir à ce sujet le n° 2.2.8 ci-dessus).

2.3.5 - LEMME - pour tout $k \geq 3$ et $x \in E_\delta$, d'une part,

$$(2.3.15) \quad P_x^k(A) = P_x(A) \quad \text{pour tout} \quad A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}^{U_k}.$$

D'autre part, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$(2.3.16) \quad \pi(\cdot, \Gamma) = \pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) \quad P_x \text{ P.S. sur } C_{U_k}$$

pour toute répartition conditionnelle π au sortir de U après (T_n) régie par le mode de raccordement continu et terminale.

$$(2.3.17) \quad \pi_k(\cdot, \Gamma) = \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \text{ P.S. sur } C_{U_k}$$

$$(2.3.18) \quad \pi_h(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \text{ P.S. sur } C_{U_k \cap U_h}$$

pour tout $h \geq 3$.

En effet :

a) Pour établir la relation (2.3.15), désignons par (P_x') une diffusion de E_δ dans (Ω, \hat{F}_ω) , faisant du terme

$$\mathcal{X}' = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t) \quad (P_x')$$

un processus standard tel que $\mathcal{X}^{\sigma_{U_i}} = \mathcal{X}_i$ ($i = 1, 2$) (une telle diffusion (P_x') existe en vertu du théorème 2.1.4 et prolonge (P_x)) ; et posons, pour chaque $x \in E_\delta$,

$$\bar{P}_x' = \alpha_{\sigma_{U_k \cap U}}(P_x) \quad \text{et} \quad \bar{P}_x^k = \alpha_{\sigma_{U_k \cap U}}(P_x^k);$$

autrement dit (n° 2.0.6), (\overline{P}_x^i) et (\overline{P}_x^k) sont les diffusions des processus $\mathfrak{X}^{\sigma_{U_k n U}}$ et $\mathfrak{X}_k^{\sigma_{U_k n U}}$ respectivement. Il résulte alors de l'hypothèse de compatibilité de \mathfrak{X}_k et \mathfrak{X}_1 , \mathfrak{X}_k et \mathfrak{X}_2 (relation (2.3.1)), que,

$$(2.3.19) \quad \alpha_{\sigma_{U_k n U}}(\overline{P}_x^i) = \alpha_{\sigma_{U_k n U}}(\overline{P}_x^k) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Remarquant alors que, pour chaque n , $T_n^{U_k} \leq \sigma_{U_k n U}$, donc aussi que $\bigvee_n \hat{F}_n^{U_k} \subset \hat{F}_{\sigma_{U_k n U}}$, on a, si $A \in \bigvee_n \hat{F}_n^{U_k}$, d'une part

$$P_x(A) = P_x^i(A) = \overline{P}_x^i(A) \quad \text{et} \quad P_x^k(A) = \overline{P}_x^k(A)$$

puisqu'on a $A = \alpha_{\sigma_{U_k n U}}^{-1}(A)$; et, d'autre part,

$$\overline{P}_x^i(A) = \overline{P}_x^k(A)$$

à cause de la relation (2.3.19), puisque, ainsi qu'on l'a montré au n° 2.1.5, les diffusions $(\alpha_{\sigma_{U_k n U}}(\overline{P}_x^i))$ $i = 1, 2$ (resp $(\alpha_{\sigma_{U_k n U}}(\overline{P}_x^k))$ $i = 1, 2$) déterminent entièrement (\overline{P}_x^i) et (\overline{P}_x^k) sur la tribu $\bigvee_n \hat{F}_n^{U_k}$.
D'où la relation (2.3.15).

b) Pour montrer (2.3.16), il suffit de vérifier que

$$\int_{C_{U_k} \cap A} \pi(\cdot, \Gamma) dP_x = \int_{C_{U_k} \cap A} \pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) dP_x$$

pour tout $A \in \bigvee_n \hat{F}_n^{U_k}$. Or,

$$\int_{C_{U_k} \cap A} \pi(\cdot, \Gamma) dP_x = P_x^\pi(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_\infty} \in \Gamma\}),$$

puisque \mathfrak{X}_π est réparti par π (n° 2.3.3 et 2.1.4) après (T_n) ;

$$= P_x^\pi(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_\infty^{U_k}} \in \Gamma\})$$

à cause de (2.3.6). (Lemme 2.3.4);

$$= \overline{P}_x^\pi(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_\infty^{U_k}} \in \Gamma\})$$

[où $\overline{P}_x^\pi = \alpha_{\sigma_{U_k n U}}(P_x^\pi)$], puisque $C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_\infty^{U_k}} \in \Gamma\} \in \hat{F}_{\sigma_{U_k n U}}$, en vertu de (2.3.6) et (2.3.9);

$$= \int_{C_{U_k} \cap A} \pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) d\overline{P}_x^\pi = \int_{C_{U_k} \cap A} \pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) dP_x,$$

encore d'après (2.3.9), puisque $\bigvee_n \hat{F}_n^{U_k} \subset \hat{F}_{\sigma_{U_k n U}}$.

c) De même, pour montrer (2.3.17), il suffit de vérifier que

$$\int_{C_{U_k} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) dP_x = \int_{C_{U_k} \cap A} \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) dP_x$$

pour tout $A \in \mathcal{V}_n \hat{F}_{T_n}$. Or, en posant encore $\overline{P}_x^k = \alpha_{\sigma_{U_k} \cap U}(P_x^k)$,

$$\int_{C_{U_k} \cap A} \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) dP_x = \int_{C_{U_k} \cap A} \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) dP_x^k$$

à cause de (2.3.9) et (2.3.15) ;

$$= \int_{C_{U_k} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) d\overline{P}_x^k,$$

puisque, à cause de (2.3.9), $\hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) 1_{C_{U_k} \cap A}$ est $\hat{F}_{\sigma_{U_k} \cap U}$ -mesurable.

$$= \overline{P}_x^k(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_{U_k}} \in \Gamma\})$$

par définition de $\hat{\pi}_k$ (n° 2.3.3) ;

$$= \hat{P}_x^k(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_{U_k}} \in \Gamma\})$$

où $\hat{P}_x^k = \alpha_{\sigma_U}(P_x^k)$, puisque $\overline{P}_x^k = \alpha_{\sigma_{U_k} \cap U}(\hat{P}_x^k)$ et que

$$C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_{U_k}} \in \Gamma\} \in \hat{F}_{\sigma_{U_k} \cap U}.$$

$$= \hat{P}_x^k(C_{U_k} \cap A \cap \{X_{T_{U_k}} \in \Gamma\})$$

d'après (2.3.6) ;

$$= \int_{C_{U_k} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) d\hat{P}_x^k$$

par définition de π_k ;

$$= \int_{C_{U_k} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) dP_x^k$$

puisque, d'après (2.3.9), $\pi_k(\cdot, \Gamma) 1_{C_{U_k} \cap A}$ est $\hat{F}_{\sigma_{U_k} \cap U}$ -mesurable, donc \hat{F}_{σ_U} -mesurable.

$$= \int_{C_{U_k} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) dP_x$$

à cause de (2.3.9) et (2.3.15).

d) Enfin, pour montrer (2.3.18), il suffit d'établir que,

$$\int_{C_{U_k \cap U_h} \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) dP_x = \int_{C_{U_k \cap U_h} \cap A} \pi_h(\cdot, \Gamma) dP_x$$

pour tout $A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}$.

Pour cela, posons, pour chaque $i \geq 3$ et $j \geq 3$,

$$P_x^{i,j} = \alpha_{\sigma_{U_i \cap U_j}}(P_x^i);$$

en vertu de l'hypothèse de compatibilité de \mathfrak{X}_i et \mathfrak{X}_j (relation (2.3.1)), on a,

$$P_x^{i,j} = P_x^{j,i} \quad (i \geq 3, j \geq 3).$$

Soit alors $A \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n}$; on a, en posant $W = U_h \cap U_k$,

$$\int_{C_W \cap A} \pi_h(\cdot, \Gamma) dP_x = \int_{C_W \cap A} \pi_k(\cdot, \Gamma) dP_x,$$

d'après (2.3.9) et (2.3.15);

$$= \int_{C_W \cap A} \pi_h(\cdot, \Gamma) d\hat{P}_x^h \quad [\text{où } \hat{P}_x^h = \alpha_{\sigma_U}(P_x^h)]$$

comme ci-dessus], puisque $\pi_h(\cdot, \Gamma) 1_{C_W \cap A}$ est \hat{F}_{σ_U} -mesurable d'après (2.3.9).

$$= \hat{P}_x^h(C_W \cap A \cap \{X_{T_\infty} \in \Gamma\}),$$

par définition de π_h (n° 2.3.3);

$$= \hat{P}_x^h(C_W \cap A \cap \{X_{T_\infty^W} \in \Gamma\}) \quad \text{d'après (2.3.6)}$$

$$= P_x^{h,k}(C_W \cap A \cap \{X_{T_\infty^W} \in \Gamma\}),$$

puisque, d'après (2.3.9), $C_W \cap A \cap \{X_{T_\infty^W} \in \Gamma\} \subset \bigvee_n \hat{F}_{T_n^W} \subset \hat{F}_{\sigma_{W \cap U}}$.

D'où la relation (2.3.18), compte tenu de (2.3.19).

2.3.6 - **Démonstration du lemme 2.3.2** - Définissons une application ν de $C = B_{T_\infty}^c \cap \bigcap_p \{T_p < T_\infty\}$ dans l'ensemble des entiers ≥ 3 en posant, pour chaque $\omega \in C$,

$$\nu(\omega) = \inf \{k \mid k \text{ entier } \geq 3 \text{ et } \exists n \geq 0 \theta_{T_n}(\omega) \in C_{U_k}\};$$

ν est bien défini d'après la relation (2.3.10); et on a,

$$(2.3.20) \quad C = \bigcup_{h \geq 3} \{\nu = h\} \quad \text{et} \quad \{\nu = h\} \subset \bigcup_n \theta_{T_n}^{-1}(C_{U_h}) \quad \text{pour tout } h \geq 0.$$

$$(2.3.21) \quad \{\nu = h\} \subset \theta_{T_n}^{-1}(\{\nu = h\}) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \quad \text{et } h \geq 3.$$

$$(2.3.22) \quad \{\nu = h\} \in \bigvee_n \hat{F}_{T_n} \quad \text{pour tout } h \geq 3.$$

Ces relations réclament de simples vérifications, compte tenu de (2.3.10) pour (2.3.20), de (2.1.4) (lemme 2.1.3) et (1.2.3) (n° 1.2.1 et lemme 1.2.3) pour (2.3.21), et de (1.0.7) (lemme 1.0.5) pour (2.3.22).

a) Unicité du processus \mathcal{X} - Soit π une répartition conditionnelle de X au sortir de U après (T_n) régie par le mode continu et terminale telle que le processus \mathcal{X}_π (n° 2.3.3) réponde à la question, c'est-à-dire vérifie (en plus de (2.3.3)) la relation (2.3.4).

Pour chaque $k \geq 3$, $x \in E_\delta$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$, on a,

$$\pi(\cdot, \Gamma) = \pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad P.S$$

sur C_{U_k} d'après le lemme 2.3.5, relation (2.3.16);

$$\pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) = \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad P.S$$

en vertu de l'hypothèse $\mathcal{X}_\pi^{\sigma_{U_k} \cap U} = \mathcal{X}_k^{\sigma_{U_k} \cap U}$;

$$\hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad P.S \quad \text{sur } C_{U_k}$$

d'après le lemme 2.3.5, relation (2.3.17). Ainsi :

$$(2.3.23) \quad \pi(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad P.S. \quad \text{sur } C_{U_k}.$$

Compte tenu du caractère terminal de π et π_k , on en déduit que,

$$(2.3.24) \quad \pi(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad \bigcup_n \Theta_n^{-1}(C_{U_k})(1)$$

D'où l'unicité cherchée, en vertu de (2.3.10).

De plus, en vertu de (2.3.20), on a

$$(2.3.25) \quad \pi(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad \{v = k\}.$$

b) Construction du processus \mathfrak{X} - La relation (2.3.25) permet de définir π comme suit : pour $\omega \in \Omega$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$\pi(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(\delta) \quad \text{si} \quad \omega \notin B_{T_\omega}^c,$$

$$\pi(\omega, \Gamma) = 1_\Gamma(X_{T_\omega}(\omega)) \quad \text{si} \quad \omega \in B_{T_\omega}^c \cap \bigcup_p \{T_p < T_\omega\}, \quad \text{et}$$

$$\pi(\omega, \Gamma) = \pi_k(\omega, \Gamma) \quad \text{si} \quad \omega \in \{v = k\}, \quad \text{pour chaque } k \geq 3.$$

Compte tenu des relations (2.3.21) et (2.3.22), π ainsi définie est une répartition conditionnelle de X au sortir de U après (T_n) régie par le mode de raccordement continu et terminale. Posons $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\pi$, et montrons que \mathfrak{X} vérifie la relation (2.3.4).

En vertu de la relation (2.3.15) (Lemme 2.3.5), il suffit de montrer que, pour chaque $x \in E_\delta$, $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$ et $k \geq 3$,

$$\pi^{U_k}(\cdot, \Gamma) = \hat{\pi}_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad C_{U_k}(2).$$

Ou encore, compte tenu des relations (2.3.16) et (2.3.17) du lemme 2.3.5, que,

$$(2.3.26) \quad \pi(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad C_{U_k};$$

ou enfin, par définition de π , que pour chaque $h \geq 3$,

$$(2.3.27) \quad \pi_h(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S.} \quad \text{sur} \quad C_{U_k} \cap \{v = h\}.$$

Or, d'après la relation (2.3.18),

(1) En effet, $P_x(\Theta_n^{-1}(C_{U_k}) \cap \{\pi(\cdot, \Gamma) \neq \pi_k(\cdot, \Gamma)\}) = P_x(\Theta_n^{-1}(C_{U_k} \cap \{\pi(\cdot, \Gamma) \neq \pi_k(\cdot, \Gamma)\}))$, en vertu du caractère terminal de π et π_k ;

$$= E_x\{P_{X_{T_n}}(C_{U_k} \cap \{\pi(\cdot, \Gamma) \neq \pi_k(\cdot, \Gamma)\})\}$$

d'après la propriété de Markov de \mathfrak{X}_π ; d'où la relation (2.3.24), puisque (2.3.23) est satisfaite pour tout $x \in E_\delta$.

(2) Si $\omega \notin C_{U_k}$, on a $\pi^{U_k}(\omega, \Gamma) = \hat{\pi}_k(\omega, \Gamma)$ par définition.

$$\pi_h(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S. sur } C_{u_k \cap u_h};$$

donc aussi, en vertu du caractère terminal de π_h et π_k ,

$$\pi_h(\cdot, \Gamma) = \pi_k(\cdot, \Gamma) \quad P_x \quad \text{P.S. sur } \bigcup_n \theta_{T_n}^{-1}(C_{u_k \cap u_h});$$

D'où le résultat cherché, puisque, d'après les relations (2.3.7) et (2.3.20), $C_{u_k} \cap \{v = h\} \subset \bigcup_n \theta_{T_n}^{-1}(C_{u_k \cap u_h})$.

Le lemme 2.3 est établi, ainsi que le théorème 2.3.1.

2.4. - Recollement de processus fortement markoviens continus

Dans ce paragraphe, on retrouve, dans le cas des processus fortement markoviens continus, la situation de recollement qui intervient en théorie des faisceaux (voir le théorème 2.4.6). Ce résultat est obtenu, grâce au caractère continu, en utilisant la notion de *processus induit sur un ouvert* (1), (et non plus celle des processus arrêté au sortir d'un ouvert qui intervenait dans les paragraphes précédents) ce qui permet de partir, comme données, de processus prenant leurs valeurs dans des ouverts formant un recouvrement de l'espace total E (et non plus de processus à valeurs dans l'espace E tout entier, arrêtés au sortir de ces ouverts).

Le théorème fondamental s'énonce comme suit :

2.4.2 - THEOREME - Soient E un espace B.C.D. (2), $(E_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert (quelconque) de E, et, pour chaque $i \in I$ un processus fortement markovien continu (3) \mathfrak{X}_i à valeurs dans E_i . On suppose que, pour tout $(i, j) \in I \times I$ tel que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, les processus $\mathfrak{X}_i^{E_i \cap E_j}$ et $\mathfrak{X}_j^{E_i \cap E_j}$ induits (1) sur $E_i \cap E_j$ par \mathfrak{X}_i et \mathfrak{X}_j sont équivalents (4). Alors, il existe un processus fortement markovien continu \mathfrak{X} à valeurs dans E, et un seul à une équivalence

(1) Voir le n° 2.0.7.

(2) Voir le n° 1.0.6.

(3) Voir les n° 2.0.1 et 2.0.2.

(4) Voir le n° 2.0.4.

près, tel que, pour chaque $i \in I$, le processus X^{E_i} induit par X sur E_i soit équivalent au processus X_i .

2.4.3 - Fixons, pour la suite de ce numéro, les notations suivantes:

1/ On désigne par $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$ la fonction aléatoire typique continue à valeurs dans $E^{(1)}$, par (θ_t) et (α_t) ses familles d'opérateurs de translation et d'arrêt, et, pour chaque ouvert E' de E , par $\Omega^{(E')}$ le sous-ensemble de Ω formé des $\omega \in \Omega$ tels que $X_t(\omega) \in E' \cup \{\delta\}$ pour tout $t \in R_+$. $X^{(E')} = (\Omega^{(E')}, \omega_\delta, (X_t))$ est alors la fonction aléatoire typique continue à valeurs dans E' , et les restrictions à $\Omega^{(E')}$ de (θ_t) et (α_t) (restrictions qui sont encore notées (θ_t) et (α_t)) ses familles d'opérateurs de translation et d'arrêt(2).

Pour chaque $t \in [0, +\infty]$, on note $F_t^{(E')}$ la tribu $F_t^{X^{(E'')}}$ sur $\Omega^{(E')}$; et \hat{F}_t la tribu F_t^X .

Pour chaque ouvert U de E , on note σ_U le temps de sortie de U pour X . Si $U \subset E'$, et $\omega \in \Omega^{(E')}$, on a

$$\sigma_U^{X^{(E')}}(\omega) = \sigma_U(\omega);$$

ce qui permet de noter σ_U le temps de sortie de U pour $X^{(E')}$.

2/ Si E' et E'' sont des ouverts de E tels que $E'' \subset E'$, on note $\Phi_{E', E''}$ l'injection canonique de $\Omega^{(E'')}$ dans $\Omega^{(E')}$ ($X_t \circ \Phi_{E', E''} = X_t$ pour tout $t \in R_+$) et par $\Psi_{E', E''}$ l'application de $\Omega^{(E')}$ dans $\Omega^{(E'')}$ définie par,

$$X_t(\Psi_{E', E''}(\omega)) = X_t(\omega) \quad \text{si } t < \sigma_{E''}(\omega) \quad \text{et}$$

$$X_t(\Psi_{E', E''}(\omega)) = \delta \quad \text{si } t \geq \sigma_{E''}(\omega) \quad [t \in R_+, \omega \in \Omega^{(E')}]$$

Pour chaque $t \in R_+$, $\Phi_{E', E''}$ (resp $\Psi_{E', E''}$) est une application mesurable de $(\Omega^{(E'')}, \hat{F}_t^{(E'')})$ dans $(\Omega^{(E')}, \hat{F}_t^{(E')})$ (resp de $(\Omega^{(E')}, \hat{F}_t^{(E')})$ dans $(\Omega^{(E'')}, \hat{F}_t^{(E'')})$). De plus,

(1) Voir le n° 1.0.7.

(2) $X^{(E')}$ et X ont le même cimetièrè δ .

$$(2.4.1) \quad \forall_{E^*E'} (\Phi_{E^*E'}(\omega'')) = \omega'' \quad \text{pour tout } \omega'' \in \Omega^{(E'')}$$

3) On désigne, pour chaque ouvert E' de E , par $\mathcal{N}_{E'}$, l'ensemble des processus fortement markoviens *continus* à valeurs dans E' admettant $X^{(E')}$ comme fonction aléatoire, et par $\mathcal{A}_{E'}$, le sous-ensemble de $\mathcal{N}_{E'}$, formé des processus $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_{E'}$, pour lesquels il existe un ouvert U de E tel que $\bar{U} \subset E'$ (1) et $\mathcal{X}^{\sigma_U} = \mathcal{X}$ (2).

Enfin, si E' et E'' sont des ouverts de E tels que $E'' \subset E'$, on désigne par $\Lambda_{E''E'}$, l'application de $\mathcal{N}_{E'}$, dans $\mathcal{N}_{E''}$, qui à chaque $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_{E'}$, fait correspondre le processus canonique continu associé au processus $\mathcal{X}^{E''}$ induit par \mathcal{X} sur E'' [autrement dit (voir les n° 2.0.4 et 2.0.7) $\Lambda_{E''E'}(\mathcal{X}) = k^c(\mathcal{X}^{E'})$ pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_{E'}$]. Si E''' est un ouvert de E tel que $E''' \subset E''$,

$$\Lambda_{E'''E'} = \Lambda_{E'''E''} \circ \Lambda_{E''E'}$$

2.4.4 - La démonstration du théorème 2.4.2 va reposer sur le théorème 2.3.1, et sur le lemme suivant qui permet de *relever sur* E un processus sur un ouvert E' de E arrêté au sortir de l'ouvert U dès que $\bar{U} \subset E'$:

LEMME - Pour tout couple E', E'' d'ouverts de E tels que $E'' \subset E'$, il existe une application $\rho_{E'E''}$ de $\mathcal{A}_{E''}$ dans $\mathcal{A}_{E'}$, et une seule telle que, pour tout ouvert U de E tel que $\bar{U} \subset E''$,

$$(2.4.2) \quad \Lambda_{E'E''}(\rho_{E'E''}(\mathcal{X}^{''\sigma_U})) = \mathcal{X}^{''\sigma_U}, \text{ et}$$

$\rho_{E'E''}(\mathcal{X}^{''\sigma_U})$ est arrêté au sortir de U , pour tout $\mathcal{X}'' \in \mathcal{A}_{E''}$; de plus,

$$(2.4.3) \quad \rho_{E'E''}([\Lambda_{E''E'}(\mathcal{X}')]^{\sigma_U}) = \mathcal{X}'^{\sigma_U} \quad \text{pour tout } \mathcal{X}' \in \mathcal{A}_{E'}$$

Enfin, si E''' est un ouvert de E tel que $E''' \subset E''$,

$$(2.4.4) \quad \rho_{E'E''} \circ \rho_{E''E'''} = \rho_{E'E'''}$$

En effet :

(1) \bar{U} désigne la fermeture de U dans E .

(2) Voir le n° 2.0.6.

a) Désignons par $\mathfrak{X}'' = (\Omega^{(E'')}, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x''))$ un élément de $\mathfrak{N}_{E''}$ arrêté au sortir de U et montrons d'abord que la relation (2.4.2) détermine $\rho_{E''E''}(\mathfrak{X}'') = \mathfrak{X}'$: supposons que

$$\mathfrak{X}' = (\Omega^{(E')}, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x')_{x \in E'_\delta})$$

soit un élément de $\mathfrak{N}_{E'}$, tel que

$$(2.4.5) \quad \mathfrak{X}'^{\sigma_U} = \mathfrak{X}' \quad \text{et} \quad \Lambda_{E''E''}(\mathfrak{X}') = \mathfrak{X}''.$$

Par définition de $\Lambda_{E''E''}$, on a, pour chaque $x \in E''_\delta$,

$$(2.4.6) \quad P_x'' = \Psi_{E''E''}(P_x').$$

Par ailleurs, si $B \in F_\omega^{(E')}$, on a, d'après (2.4.1) (n° 2.4.3),

$$B = \Psi_{E''E''}^{-1}(\Phi_{E''E''}^{-1}(B));$$

donc, d'après (2.4.6),

$$P_x''(\Phi_{E''E''}^{-1}(B)) = P_x'(B).$$

Ainsi

$$(2.4.7) \quad P_x' = \Phi_{E''E''}(P_x'') \quad \text{pour chaque} \quad x \in E''_\delta.$$

Comme, par ailleurs \mathfrak{X}' est arrêté au sortir de U , en vertu du lemme 2.0.6,

$$(2.4.8) \quad P_x' = \varepsilon_{\bar{\omega}_x} \quad \text{pour chaque} \quad x \in E' \setminus E''(1).$$

b) Inversement, \mathfrak{X}'' étant donné, on définit une diffusion normale (P_x') de E''_δ dans $(\Omega^{(E')}, \hat{F}_\omega^{(E')})$ au moyen des relations (2.4.7) et (2.4.8). Le terme $\mathfrak{X}' = (\Omega^{(E')}, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x'))$ est alors un processus fortement continu qui satisfait la relation (2.4.5); et on peut donc poser $\rho_{E''E''}(\mathfrak{X}'') = \mathfrak{X}'$.

D'abord, $\alpha_{\sigma_U}(P_x') = P_x'$ pour tout $x \in E''_\delta$: cela est clair si $x \in E' \setminus E''$, et si $x \in E''_\delta$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma_U}(P_x') &= \alpha_{\sigma_U}(\Phi_{E''E''}(P_x'')) = \Phi_{E''E''}(\alpha_{\sigma_U}(P_x'')) \\ &= \Phi_{E''E''}(P_x'') = P_x', \end{aligned}$$

puisque $\alpha_{\sigma_U}(P_x'') = P_x''$.

(1) Où $\bar{\omega}_x$ désigne la trajectoire constante égale à x .

Etablissons ensuite la propriété de Markov de (P'_x) : Soient V un temps d'arrêt de la famille $\hat{F}_t^{(E'')}$, $f \in B(\Omega^{(E'')}(1), \hat{F}_V^{(E'')})$ et $g \in B(\Omega^{(E'')}, F_{\infty}^{(E'')})$. On a, si $x \in E''_s$,

$$\int f \cdot g \circ \theta_V dP'_x = \int f \circ \Phi \cdot g \circ \theta_V \circ \Phi dP''_x \text{ d'après (2.4.7)}$$

$$= \int f \circ \Phi \cdot g \circ \Phi \circ \theta_{V \circ \Phi} dP''_x,$$

car $\theta_t \circ \Phi = \Phi \circ \theta_t$ pour tout $t \in [0, +\infty)$.

$$= \int f \circ \Phi \cdot E''_{x_{V \circ \Phi}} \{g \circ \Phi\} dP''_x$$

d'après la propriété de Markov de \mathfrak{X}'' , car, d'une part, $V \circ \Phi$ est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_t^{(E'')})$; d'autre part, il résulte du théorème 3.4 de [4] que $f \circ \Phi$ est $\hat{F}_{V \circ \Phi}^{(E'')}$ -mesurable.

$$= \int f \cdot E''_{x_V} \{g \circ \Phi\} dP'_x \text{ d'après (2.4.7) ;}$$

$$= \int f \cdot E''_{x_V \circ \alpha_{\sigma_U}} \{g \circ \Phi\} dP'_x,$$

puisque $P'_x = \alpha_{\sigma_U}(P'_x)$ entraîne que $P'_x(\{\omega | \omega \in \Omega^{(E'')} \text{ et } \alpha_{\sigma_U}(\omega) = \omega\}) = 1$;

$$= \int f \cdot E''_{x_V \wedge \sigma_U} \{g \circ \Phi\} dP'_x = \int f \cdot E''_{x_V \wedge \sigma_U} \{g\} dP'_x$$

d'après (2.4.7), puisque $t \leq \sigma_U(\omega)$ entraîne que $X_t(\omega) \in \bar{U} \cup \{\delta\} \subset E''$ en vertu de la continuité des trajectoires.

Ainsi,
$$\int f \cdot g \circ \theta_V dP'_x = \int f \cdot E''_{x_V} \{g\} dP'_x$$

pour tout $x \in E''_s$. Si, maintenant, $x \in E' \setminus E''$,

$$\int f \cdot g \circ \theta_V dP'_x = f(\bar{\omega}_x) [1_{\{V < \infty\}}(\bar{\omega}_x) g(\bar{\omega}_x) + 1_{\{V = \infty\}}(\bar{\omega}_x) g(\omega_\delta)],$$

$$= \int f \cdot E''_{x_V} \{g\} dP'_x, \text{ d'après (2.4.8).}$$

L'existence (et l'unicité) d'une application $\rho_{E', E''}$ satisfaisant (2.4.2) est ainsi établie.

c) Etablissons maintenant la relation (2.4.3) : Soient

$$\mathfrak{X}' = (\Omega^{(E')}, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P'_x))$$

(1) On pose ici $\Phi = \Phi_{E', E''}$.

un élément de \mathcal{N}_{E^*} , et (P_x'') la diffusion du processus $\Lambda_{E^*E^*}(X^*)$. Il suffit de montrer, en vertu des relations (2.4.7) et (2.4.8) qui définissent $\rho_{E^*E^*}$, et du lemme 2.0.6, que, pour chaque $x \in E''$,

$$\Phi_{E^*E^*}(\alpha_{\sigma_U}(P_x'')) = \alpha_{\sigma_U}(P_x') ;$$

ou encore, puisque $\Phi_{E^*E^*} \circ \alpha_{\sigma_U} = \alpha_{\sigma_U} \circ \Phi_{E^*E^*}$, que $P_x''(\Phi_{E^*E^*}^{-1}(A)) = P_x'(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_{\sigma_U}^{(E^*)}$; ou enfin, puisque, par définition de $\Lambda_{E^*E^*}$, $P_x'' = \Psi_{E^*E^*}(P_x')(1)$, que

$$(2.4.9) \quad P_x'(\Psi_{E^*E^*}^{-1}(\Phi_{E^*E^*}^{-1}(A))) = P_x'(A) \quad \text{pour tout } A \in \hat{\mathcal{F}}_{\sigma_U}^{(E^*)}.$$

Posons $m = \Phi_{E^*E^*} \circ \Psi_{E^*E^*}$; pour tout $\omega \in \Omega^{(E^*)}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} X_t(m(\omega)) &= X_t(\omega) & \text{si } t < \sigma_{E^*}(\omega), & \quad \text{et} \\ X_t(m(\omega)) &= \delta & \text{si } t \geq \sigma_{E^*}(\omega); & \end{aligned}$$

autrement dit, m est l'opérateur de meurtre à l'instant σ_{E^*} .

Utilisant la *continuité de la fonction aléatoire* $X^{(E^*)}$, et le fait que $\bar{U} \subset E''$, on vérifie que, pour tout $\omega \in \Omega^{(E^*)}$ et $s \in \mathbb{R}_+$,

$$s \leq \sigma_U(\omega) \implies X_s(m(\omega)) = X_s(\omega).$$

Il résulte donc, d'abord du théorème 1.3 de [4] que

$$\omega \sim m(\omega) \quad (R_{\sigma_U}^{X^{(E^*)}}) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega^{(E^*)};$$

ensuite du théorème 1.4 de [4] que $m^{-1}(A) = A$ pour tout $A \in \hat{\mathcal{F}}_{\sigma_U}^{(E^*)}$; d'où la relation (2.4.9) et aussi la relation (2.4.3).

d) Enfin, la relation (2.4.4) résulte de ce que (2.4.2) détermine $\rho_{E^*E^*}$ de façon unique (voir en a) ci-dessus).

Le lemme 2.4.4 est ainsi établi.

2.4.5 - Démonstration du théorème 2.4.2 à partir du théorème 2.3.1 et du lemme 2.4.4 - E étant un espace topologique métrisable et séparable, il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts non vide de E telle que,

1/ Pour tout $i \in I$, il existe une partie H_i de N telle que,

(1) Voir le n° 2.4.3

$$(2.4.10) \quad n \in H_i \implies \bar{U}_n \subset E_i$$

$$(2.4.11) \quad E_i = \bigcup_{n \in H_i} U_n$$

2/ Pour tout $n \in N$, il existe $i \in I$ tel que $\bar{U}_n \subset E_i$.

En substituant éventuellement $k^c(\mathcal{X}_i)$ à \mathcal{X}_i , on peut, par ailleurs supposer que $\mathcal{X}_i \in \mathcal{N}_{E_i}(1)$ pour tout $i \in I$.

On peut alors établir comme suit le théorème 2.4.2 :

a) D'abord, pour chaque entier $n \in N$, il existe un processus $\hat{\mathcal{X}}_n \in \mathcal{N}_E$ et un seul tel que,

$$(2.4.12) \quad \rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U_n}) = \hat{\mathcal{X}}_n \text{ pour tout } i \in I \text{ tel que } \bar{U}_n \subset E_i.$$

(d'où il résulte, d'après la relation 2.4.2 (lemme 2.4.4) que $\hat{\mathcal{X}}_n$ est arrêté au sortir de U_n). En effet, il suffit d'établir que :

$$(2.4.13) \quad \rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U}) = \rho_{EE_j}(\mathcal{X}_j^{\sigma U})$$

pour tout $(i, j) \in I \times I$ et tout ouvert U de E tel que

$$\bar{U} \subset E_i \cap E_j.$$

Or, posons $E' = E_i \cap E_j$; on a, d'après le lemme 2.4.4, relation (2.4.3), $\rho_{E'E}([\Lambda_{E'E_i}(\mathcal{X}_i)]^{\sigma U}) = \mathcal{X}_i^{\sigma U}$; donc, d'après la relation (2.4.4),

$$\rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U_n}) = \rho_{EE'}([\Lambda_{E'E_i}(\mathcal{X}_i)]^{\sigma U});$$

et de même,

$$\rho_{EE_j}(\mathcal{X}_j^{\sigma U_n}) = \rho_{EE'}([\Lambda_{E'E_j}(\mathcal{X}_j)]^{\sigma U});$$

d'où la relation cherchée, puisque $\Lambda_{E'E_i}(\mathcal{X}_i) = \Lambda_{E'E_j}(\mathcal{X}_j)$ d'après l'hypothèse de cohérence de la famille (\mathcal{X}_i) .

b) Ensuite, pour tout couple $(m, n) \in N \times N$,

$$(2.4.14) \quad \hat{\mathcal{X}}_m^{\sigma U_m \cap U_n} = \hat{\mathcal{X}}_n^{\sigma U_m \cap U_n}.$$

(1) Voir le n° 2.4.3, alinéa 3/.

En effet, soient⁽¹⁾ i et j des éléments de I tels que $\bar{U}_n \subset E_i$ et $\bar{U}_n \subset E_j$; posant $U = U_m \cap U_n$, et $E' = E_i \cap E_j$, on a $\bar{U} \subset E'$, donc, d'après la relation (2.4.3),

$$\hat{\mathcal{X}}_m^{\sigma U} = \rho_{EE_i}([\Lambda_{E_i E}(\hat{\mathcal{X}}_m)]^{\sigma U});$$

donc, d'après la relation (2.4.12) de définition de $\hat{\mathcal{X}}_m$, et (2.4.2)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}_m^{\sigma U} &= \rho_{EE_i}([\Lambda_{E_i E}(\rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U_m}))]^{\sigma U}) \\ &= \rho_{EE_i}([\mathcal{X}_i^{\sigma U_m}]^{\sigma U}) = \rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U}). \end{aligned}$$

De même $\hat{\mathcal{X}}_n^{\sigma U} = \rho_{EE_j}(\mathcal{X}_j^{\sigma U})$; d'où la relation (2.4.14), d'après (2.4.13).

c) Enfin, si $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_E$, les deux relations suivantes sont équivalentes :

$$(2.4.15) \quad \Lambda_{E_i E}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_i \quad \text{pour chaque } i \in I.$$

$$(2.4.16) \quad \mathcal{X}^{\sigma U_n} = \hat{\mathcal{X}}_n \quad \text{pour chaque } n \in N.$$

D'abord, (2.4.15) \implies (2.4.16) : en effet, soient $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_E$ vérifiant (2.4.15) et $n \in N$. D'après la propriété 2/ de (U_n) , il existe $i \in I$ tel que $\bar{U}_n \subset E_i$. Les relations (2.4.3) et (2.4.15) entraînent alors que,

$$\mathcal{X}^{\sigma U_n} = \rho_{EE_i}([\Lambda_{E_i E}(\mathcal{X})]^{\sigma U_n}) = \rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U_n}) = \hat{\mathcal{X}}_n.$$

D'où (2.4.16).

Jointe à la propriété d'unicité du théorème 2.3.1, la relation (2.4.15) \implies (2.4.16) entraîne l'unicité d'un processus \mathcal{X} satisfaisant (2.4.15).

Montrons alors, inversement, que (2.4.16) \implies (2.4.15) : Soient $\mathcal{X} \in \mathcal{N}_E$ vérifiant (2.4.16), $i \in I$ et $\bar{\mathcal{X}}_i = \Lambda_{E_i E}(\mathcal{X})$. En vertu de l'unicité ci-dessus établie, il suffit de montrer que $\bar{\mathcal{X}}_i^{\sigma U_n} = \mathcal{X}_i^{\sigma U_n}$ pour tout $n \in H_i$ (propriété 1) de (U_n) .

Or, d'après (2.4.2) et (2.4.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i^{\sigma U_n} &= \Lambda_{E_i E}(\rho_{EE_i}(\mathcal{X}_i^{\sigma U_n})) = \Lambda_{E_i E}(\hat{\mathcal{X}}_n) \\ \bar{\mathcal{X}}_i^{\sigma U_n} &= \Lambda_{E_i E}(\rho_{EE_i}(\bar{\mathcal{X}}_i^{\sigma U_n})) \\ &= \Lambda_{E_i E}(\rho_{EE_i}([\Lambda_{E_i E}(\mathcal{X})]^{\sigma U_n})) = \Lambda_{E_i E}(\mathcal{X}^{\sigma U_n}). \end{aligned}$$

(1) Compte tenu de la propriété 2/ de (U_n) .

D'où le résultat, puisque $\mathcal{X}^{\sigma_{U_n}} = \hat{\mathcal{X}}_n$ par l'hypothèse.

d) Le théorème 2.4.2 résulte alors exactement de l'équivalence établie en c) et du théorème 2.3.1.

2.4.6 - Le Faisceau des processus fortement markoviens continus - Avec les notations introduites au numéro 2.4.3 alinéa 3/ ci-dessus, et en désignant par \mathcal{T}_ε la topologie de l'espace B.C.D E, on peut énoncer le théorème 2.4.2 sous la forme suivante :

THEOREME - Les familles $(\pi_U)_{U \in \mathcal{E}_\varepsilon}$ et $(\Lambda_{UV})_{U, V \in \mathcal{E}_\varepsilon, U \subset V}$ définissent un faisceau d'ensembles sur l'espace B.C.D E.

2.4.7 - REMARQUE - Tous les résultats énoncés dans cette 2ème partie subsistent si on remplace, dans la définition des processus fortement markoviens la propriété (M_2) par la propriété :

(M_2^f) pour tout temps d'arrêt T de la famille (\hat{F}_t^x) , tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty^x)$ et tout $x \in E_s$,

$$E_x \{g \circ \theta_T / \hat{F}_T^x\} = E_{x_T} \{g\} \quad P_x \quad \text{P.S.}$$

La propriété (M_2^f) est la propriété de Markov forte la plus faible permettant de recoller les processus par la méthode employée ici.

APPENDICE I

Limites projectives de mesures et théorème 1.1.1.

L'objet du présent appendice est de préciser les relations du théorème 1.1.1 avec divers résultats concernant les limites projectives de mesures : on établit d'abord que ce théorème est une conséquence directe d'un résultat récent de Raoult à ce sujet (voir [12]). On montre ensuite que, par contre, dans la situation du théorème 1.1.1, la condition de Choksi relative aux supports des probabilités régulières introduites (voir [1] théorème 4.1, condition (c), et condition (c') ci-dessous) n'est pas satisfaite en général.

A1.1 - Précisons d'abord la situation envisagée : on suppose donné un ensemble Ω , une suite croissante $(F_n)_{n \geq 1}$ de tribus sur Ω , et, pour chaque $m \geq 1$, une mesure de probabilité P_m sur F_m et une probabilité de passage $P_{m,m+1}$ de (Ω, F_m) dans (Ω, F_{m+1}) . On définit, pour chaque $n > m$ une probabilité de passage $P_{m,n}$ de (Ω, F_m) dans (Ω, F_n) en posant, pour $\omega \in \Omega$ et $A \in F_n$,

$$(A1.1) \quad P_{m,n}(\omega, A) = \int P_{m,m+1}(\omega, d\omega_1) \int P_{m+1,m+2}(\omega_1, d\omega_2) \dots \\ \dots \int P_{n-2,n-1}(\omega_{n-2-m}, d\omega_{n-1-m}) P_{n-1,n}(\omega_{n-1-m}, A).$$

On considère alors les propriétés suivantes :

- (A) pour chaque $n \geq 1$, P_{n+1} induit P_n sur F_n .
- (B) pour chaque $m \geq 1$, $P_{m,m+1}$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle $P_{m+1} \{ . / F_m \}$:

$$(A1.2) \quad P_{m+1}(A \cap B) = \int_B P_m(d\omega) P_{m,m+1}(\omega, A)$$

pour tout $A \in F_{m+1}$ et $B \in F_m$ (1)

(1) On a alors $P_n(A \cap B) = \int_B P_m(d\omega) P_{m,n}(\omega, A)$ pour tout $n > m$, $A \in F_n$ et $B \in F_m$.

(C) Il existe une suite croissante⁽¹⁾ $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de partitions⁽²⁾ de Ω telles que,

(C₁) Pour tout $m \geq 1$, $\omega \in \Omega$ et $A \in F_{m+1}$

$$(A1.3) \quad A \supset A_m(\omega) \implies P_{m,m+1}(\omega, A) = 1 \quad (3)$$

(où $A_m(\omega)$ est l'élément de α_m qui contient ω) ;

(C₂) Pour tout $m \geq 1$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ et $A \in F_m$,

$$(A1.4) \quad \omega' \in A_m(\omega) \text{ et } \omega \in A \implies \omega' \in A ;$$

(C₃) Pour toute suite décroissante (A_n) de parties de Ω telle que $A_n \in \alpha_n$ pour tout $n \geq 1$, $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

(C') Pour chaque couple m, n tel que $1 \leq m < n$, il existe un ensemble $H_{m,n} \in F_m$ tel que :

$$P_m(H_{m,n}) = 0 \quad \text{et} \quad P_{m,n}(\omega, A) = 0$$

pour tout $A \in F_n$ et tout $\omega \notin A \cup H_{m,n}$.

Le théorème de Raoult (voir [12]) affirme l'existence d'une mesure P sur $(\Omega, \bigvee_n F_n)$ prolongeant les P_n , sous les hypothèses (A), (B) et (C) ; le théorème de Choksi, sous les hypothèses (A), (B) et (C').

A1.2 - Montrons que, dans la situation du théorème 1.1.1, les hypothèses (A), (B) et (C) sont satisfaites :

a) Reprenant les notations du n° 1.1.1, fixons $x \in E$, posons $F_n = \hat{F}_{T_n} (n \geq 1)$, et définissons la mesure $P_n = P_n^x$ sur F_n en prolongeant par complétion la mesure sur $\bigvee_{k=1}^n \theta_{T_{k-1}}^{-1}(\hat{F}_{S_k})$ définie par la relation 1.1.3 (lemme 1.1.2) ; la propriété de cohérence (A) de la suite (P_n) est ainsi satisfaite.

(1) α_{n+1} est plus fine que α_n pour tout n .

(2) Pour tout $n \geq 1$, $A \in \alpha_n \implies A \neq \emptyset$.

(3) On a alors $A \supset A_n(\omega) \implies P_{m,n}(\omega, A) = 1$ pour tout $n > m$ et $A \in F_n$.

b) Pour définir $P_{m,m+1} = P_{m,m+1}^x(1)$, désignons, pour chaque $A \in \hat{F}_{T_m} \vee \theta_{T_m}^{-1}(\hat{F}_{S_{m+1}})$, par A^{m+1} l'unique sous-ensemble de $\Omega \times \Omega$ appartenant à $\hat{F}_{T_m} \otimes \hat{F}_{S_{m+1}}$ contenu dans $\{\omega, \omega' \mid X_o(\omega) = X_{T_m}(\omega')\}$ et tel que $\omega \in A \iff (\omega, \theta_{T_m}(\omega)) \in A^{m+1}$ (voir [4] n° 4.5 et 5.2); et pour chaque $\omega \in \Omega$, et $A \in \hat{F}_{T_m} \vee \theta_{T_m}^{-1}(\hat{F}_{S_{m+1}})$, posons

$$(A1.5) \quad P_{m,m+1}(\omega, A) = \int P_{X_{T_m}(\omega)}^{m+1}(d\omega) 1_{A^{m+1}}(\omega, \omega')$$

On définit ainsi une probabilité de passage de (Ω, \hat{F}_{T_m}) dans $(\Omega, \hat{F}_{T_m} \vee \theta_{T_m}^{-1}(\hat{F}_{S_{m+1}}))$ qui se prolonge en une probabilité de passage de (Ω, \hat{F}_{T_m}) dans $(\Omega, \hat{F}_{T_{m+1}})$, puisque

$$\overline{\hat{F}_{T_m}} = \hat{F}_{T_m} \quad \text{et} \quad \overline{\hat{F}_{T_m} \vee \theta_{T_m}^{-1}(\hat{F}_{S_{m+1}})} = \hat{F}_{T_{m+1}}$$

([4] théorème 2.4 et 4.4); en outre, il est clair, d'après la relation (1.1.3), que $P_{m+1}(A \cap B) = \int_B P_m(d\omega) P_{m,m+1}(\omega, A)$ pour tout $A \in F_{m+1}$ et $B \in F_m$. La propriété (B) est ainsi satisfaite.

c) Désignons par α_n la partition de Ω associée à la relation d'équivalence $R_{T_n}^x$ (voir [4] n° 1.2), et montrons que les conditions (C₁) (C₂) et (C₃) sont ainsi satisfaites.

Examinons d'abord (C₁): soient $A \in F_{m+1}$ et $\omega \in \Omega$ tels que $A \supset A_m(\omega)$. Par définition de $P_{m,m+1}(\omega, \cdot)$, il existe

$$A_1 \in \hat{F}_{T_m} \vee \theta_{T_m}^{-1}(\hat{F}_{S_{m+1}})$$

tel que $A \subset A_1$, et

$$P_{m,m+1}(\omega, A) = P_{m,m+1}(\omega, A_1) = \int P_{X_{T_m}(\omega)}^{m+1}(d\omega') 1_{A_1^{m+1}}(\omega, \omega')$$

(voir b) ci-dessus). Montrons que

$$X_o(\omega') = X_{T_m}(\omega) \implies (\omega, \omega') \in A_1^{m+1};$$

d'où il résultera que $P_{m,m+1}(\omega, A) = 1$, d'après la normalité de (P_x^{m+1}) . Soit donc $\omega' \in \Omega$ tel que $X_o(\omega') = X_{T_m}(\omega)$; en vertu de la propriété de raccordement de X (voir [4] n° 5.1), il existe $\omega'' \in \Omega$ tel que $\omega'' \sim \omega$ ($R_{T_m}^x$) et $\theta_{T_m}(\omega'') \sim \omega'$ (R_ω^x), d'où

$$1_{A_1^{m+1}}(\omega, \omega') = 1_{A_1^{m+1}}(\omega'', \theta_{T_m}(\omega'')) = 1_{A_1}(\omega'') = 1,$$

puisque $A_1 \supset A_m(\omega)$ et $\omega'' \in A_m(\omega)$. Ainsi (C₁) est satisfaite.

(1) Nous écrirons, dans ce numéro, P_n et $P_{n,m+1}$ au lieu de P_n^x et $P_{n,m+1}^x$.

(C₂) est immédiate en vertu du théorème 1.4 de [4]. Enfin, la propriété (C₃) va résulter de la *propriété complète de raccordement* de X : pour chaque n, soit ω_n un élément de A_n; posons

$$\bar{\omega}_n = \theta_{T_{n-1}}(\omega_n), \quad \text{et} \quad t_n = T_n(\omega_n) \quad (t_0 = 0).$$

On a, d'une part,

$$X_{t_n - t_{n-1}}(\bar{\omega}_n) = X_{t_n - t_{n-1}}(\theta_{t_{n-1}}(\omega_n)) = X_{t_n}(\omega_n),$$

puisque $t_{n-1} = T_{n-1}(\omega_{n-1}) = T_{n-1}(\omega_n)$, à cause de la relation $A_n \subset A_{n-1}$ du théorème 1.3 de [4]; d'autre part

$$X_0(\bar{\omega}_{n+1}) = X_{T_n}(\omega_n) = X_{t_n}(\omega_n).$$

Ainsi, $X_0(\bar{\omega}_{n+1}) = X_{t_n - t_{n-1}}(\bar{\omega}_n)$, pour tout $n \geq 1$. Il existe donc, d'après la propriété complète de raccordement de X, un élément ω de Ω tel que $\theta_{t_{n-1}}(\omega) \sim \omega_n$ ($R_{t_n - t_{n-1}}$) pour tout n. On en déduit, par récurrence sur n, que $\omega \sim \omega_n$ ($R_{t_n}^x$) pour tout n; c'est-à-dire $\omega \in \bigcap_n A_n$. D'où (C₃).

A1.3 - Montrons enfin que l'on peut trouver une situation particulière (relative au théorème 1.1.1) dans laquelle aucune famille ($P_{n,n+1}^I$) ayant la propriété (B) ne possède la propriété (C') (n° A1.1). Pour cela, il suffit de trouver $x \in E$, $n \geq 1$ et $A \in F_{n+1}$ tel que

$$\int_{\Omega \setminus A} P_{n+1}^x(d\omega) P_{n,n+1}^x(\omega, A) > 0 \quad (1).$$

Désignons alors par E l'espace euclidien R^k ($k \geq 1$), par X la fonction aléatoire typique continue à valeurs dans E (voir [4] appendice 1 n° A1.4), par (U_p) une suite croissante d'ouverts de E telle que $\bar{U}_p \subset U_{p+1}$ pour tout p et $\bigcup_p U_p = E$, par S_p le temps d'arrêt σ_{U_p} ($p \geq 1$) et par (P_x) la diffusion de E_S

(1) S'il existe une famille ($P_{n,n+1}^I$) ayant les propriétés (B) et (C'), toute autre famille ($P_{n,n+1}^{II}$) ayant la propriété (B) a aussi la propriété (C'). Il suffit donc d'opérer avec la famille ($P_{n,n+1}^x$) construite ci-dessus en b) au n° A1.2.

dans (Ω, \hat{F}_∞) qui définit le mouvement brownien de dimension $k(1)$. Soient d'autre part W un ouvert de E et n un entier ≥ 1 tels que $\bar{U}_n \subset W \subset \bar{W} \subset U_{n+1}$.

Soit enfin Γ un sous-ensemble ouvert non vide de la frontière ∂W de W tel que $\partial W \setminus \Gamma$ ait un intérieur non vide (dans ∂W).

Posons

$$A = \theta_{T_n}^{-1} (\{\sigma_W \in \Gamma\}).$$

D'une part, $\sigma_W \leq \sigma_{U_{n+1}} = S_{n+1} = T_{n+1}$; donc

$$\hat{F}_{\sigma_W} \subset \hat{F}_{S_{n+1}}, \{\sigma_W \in \Gamma\} \in \hat{F}_{S_{n+1}} \quad \text{et} \quad A \in \hat{F}_{T_{n+1}} = F_{n+1}.$$

D'autre part, pour tout $y \in \bar{U}_n$,

$$(A1.7) \quad 0 < P_y \{\sigma_W \in \Gamma\} < 1$$

(d'après le choix de Γ et le fait que les mesures harmoniques du mouvement Brownien chargent toute la frontière).

Il en résulte que, si $x \in \bar{U}_n$,

$$\int_{\Omega \setminus A} P_{n+1}^x(d\omega) P_{n,n+1}^x(\omega, A) = \int_{\Omega \setminus A} P_x(d\omega) P_{x,T_n}(\{\sigma_W \in \Gamma\}) > 0.$$

En effet, $X_{T_n} = X_{\sigma_{U_n}} \in \bar{U}_n$; donc, d'après (A1.7), d'une part

$$P_{x,T_n}(\{\sigma_W \in \Gamma\}) > 0 \quad P_x \text{ P.S. ;}$$

d'autre part,

$$P_x(\Omega \setminus A) = E_x \{P_{x,T_n}(\{\sigma_W \notin \Gamma\})\} > 0.$$

(1) P_n^x est ici la restriction de P_x à \hat{F}_{T_n} .

APPENDICE II

Continuité à droite des tribus définitives

A2.1 - LEMME - Soient (E, \mathcal{B}) un espace mesurable $X = (\Omega, \omega_s, (X_t))$ une fonction aléatoire à valeurs dans (E, \mathcal{B}) , (θ_t) une famille d'opérateurs de translation de X , et (P_x) une diffusion de E_s dans $(\Omega, \hat{F}_\infty^x)$. On suppose que, $t \in \mathbb{R}_+$ étant donné, pour tout

$g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et $x \in E_s$,

$$(A2.1) \quad E_x \{g \circ \theta_t / F_{t+}^x\} = E_{x_t} \{g\} \quad P_x \quad \text{P. S.}$$

Alors, pour tout $g \in B(\Omega, \hat{F}_\infty)$ et toute mesure de probabilité μ sur (E_s, \mathcal{B}_s) ,

$$(A2.2) \quad E_\mu \{g / F_{t+}^x\} = E_\mu \{g / F_t^x\} \quad P_\mu \quad \text{P. S.}$$

En effet, il suffit d'établir la relation A2.2 pour $g \in B(\Omega, F_\infty^x)$, donc aussi pour g de la forme $g_1 \cdot g_2 \circ \theta_t$ où $g_1 \in B(\Omega, F_t^x)$ et $g_2 \in B(\Omega, F_\infty^x)$. Or, pour une telle fonction g , (A2.2) résulte directement de (A2.1).

A2.2 - La continuité à droite de la famille des tribus définitives d'un processus fortement markovien est une conséquence immédiate du lemme ci-dessus(1).

(1) Cette propriété est bien connue mais généralement mêlée dans la littérature avec des propriétés du semi-groupe de transition qui n'interviennent que pour établir (A2.1).

APPENDICE III

Temps d'arrêt de la famille (G_t^x)

A3.1 - Le théorème 2.0.3 va être une conséquence du lemme suivant :

LEMME - Soient (Ω, F) un espace mesurable, $(F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille croissante de sous tribus de F , et P une mesure de probabilité sur F . On désigne par G_∞ la tribu sur Ω complétée de F pour P (P se prolonge à G_∞ de façon unique), et, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, par G_t la tribu sur Ω engendrée par la réunion de F_t et de l'ensemble des $A \in G_\infty$ tels que $P(A) = 0$.

Alors, pour chaque temps d'arrêt V de la famille (G_t) , il existe un temps d'arrêt V' de la famille (F_{t+}) tel que :

$$(A3.1) \quad P\{V = V'\} = 1$$

(A3.2) Pour tout $A \in G_{v+}$, il existe $A' \in F_{v+}$ tel que

$$P((A \setminus A') \cup (A' \setminus A)) = 0.$$

En effet⁽¹⁾, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, $\{V < t\} \in G_t$; donc, par définition de G_t , il existe $C_t \in F_t$ tel que $\{V < t\} = C_t$ P.S.⁽²⁾; posons, de plus, $C_\infty = \Omega$.

On définit alors une application V' de Ω dans $[0, +\infty]$ par la relation :

(1) Démonstration analogue à celle du lemme 3.4 de Dynkin [6].

(2) On note, par commodité, $A = B$ P.S. (resp $A \subset B$ P.S.) la relation $P(A \setminus B \cup B \setminus A) = 0$ (resp $P(A \setminus B) = 0$).

$$V'(\omega) = \inf \{ r \mid r \in \overline{Q}_+ \text{ et } \omega \in C_r \} \quad (1) \quad (\omega \in \Omega) ;$$

et on a

$$\{V' < t\} = \bigcup_{\substack{r < t \\ r \in Q_+}} C_r \in F_t \quad \text{pour tout } t \in R_+.$$

V' est ainsi un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}) ; et on a $\{V' < t\} \subset C_t$ P.S. pour chaque t . De plus,

$$\{V' < V\} = \bigcup_{r \in Q_+} \{V' < r\} \setminus \{V < r\} \subset \bigcup_{r \in Q_+} C_r \setminus \{V < r\} \quad \text{P.S.}$$

$$\{V < V'\} = \bigcup_n \bigcup_{r \in Q_+} \{V < r\} \setminus \left\{ V' < r + \frac{1}{n} \right\} \subset \bigcup_{r \in Q_+} \{V < r\} \setminus C_r ;$$

d'où $P \{V = V'\} = 1$.

Soit maintenant $A \in G_{v+}$. Posons, pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$,

$$A_{k,n} = A \cap \left\{ \frac{k-1}{n} \leq V < \frac{k}{n} \right\}, \quad \text{et} \quad A_\infty = A \cap \{V = +\infty\}.$$

$$A_{k,n} \in G_{k/n} \quad \text{et} \quad A_\infty \in G_\infty ;$$

donc, il existe, pour chaque K, n , un ensemble $A'_{n,K}$ de $F_{k/n}$ et un ensemble A_∞ de F_∞ tels que,

$$(A3.3) \quad A'_{n,K} \subset \left\{ \frac{k-1}{n} \leq V' < \frac{k}{n} \right\} \quad A_\infty \subset \{T' = +\infty\},$$

$$A'_{k,n} = A_{k,n} \quad \text{P.S.} \quad \text{et} \quad A'_\infty = A_\infty \quad \text{P.S.}$$

Posons

$$A' = \left(\bigcup_p \bigcap_{n \geq p} \bigcup_K A'_{K,n} \right) \cup A'_\infty.$$

De (A3.3) et de la relation $A = \left(\bigcup_p \bigcap_{n \geq p} \bigcup_K A_{K,n} \right) \cup A_\infty$, il résulte d'abord que $A' = A$ P.S. Montrons ensuite que $A' \in F_{v+}$: $s \in R_+$ étant donné, on a

(1) Q_+ est l'ensemble des nombres rationnels ≥ 0 , et $\overline{Q}_+ = Q_+ \cup \{+\infty\}$.

$$\begin{aligned} A' \cap \{V' < s\} &= \bigcup_p \bigcap_{n \geq p} \bigcup_k \left(A'_{k,n} \cap \left\{ \frac{k-1}{n} \leq V' < s \right\} \right) \\ &= \bigcup_m \bigcup_{p \geq m} \bigcap_{n \geq p} \bigcup_k \left(A'_{k,n} \cap \left\{ \frac{k-1}{n} \leq V' < s - \frac{1}{m} \right\} \right). \end{aligned}$$

D'où $A' \cap \{V' < s\} \in F_s$, puisque $\left\{ \frac{k-1}{n} \leq V' < s - \frac{1}{m} \right\} \neq \emptyset$ et $n \geq m$ entraînent que $\frac{k}{n} \leq s$, et que $A'_{k,n} \in F_{k/n}$.

Le lemme est ainsi établi.

A3.2 - Compte tenu du lemme A3.1, la démonstration du théorème 2.0.3 est une simple vérification; montrons par exemple la propriété (M'_3) : μ étant donnée, V_n est, pour chaque n , un temps d'arrêt de la famille (G_t) obtenue comme dans le lemme à partir de la mesure $P = P_\mu$ sur (Ω, F_∞^X) (en effet, $G_t \supset G_t^{\otimes 3}$). Soit alors V'_n le temps d'arrêt de la famille $(F_{t,t}^{\otimes 3})$ associé à V_n par le lemme; on conclut en considérant la suite de temps d'arrêt (V''_n) , où $V''_n = \sup_{k \leq n} V'_k$.

APPENDICE IV

Prolongement d'un processus fortement markovien en un processus non interrompu

A titre d'application des résultats de la première partie de ce travail, on peut résoudre le problème de prolongement suivant :

A4.1 - Position du problème - Avec les notations, et en plus des hypothèses sur la fonction aléatoire $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$ introduites au n° 2.1.1 ci-dessus, on suppose que X possède une famille $(\mathcal{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'opérateurs de meurtre, et admet le mode de raccordement libre (on peut, par exemple prendre pour X la fonction aléatoire typique continue à droite (voir le n° 1.0.7) à valeurs dans l'espace B.C.D E).

On désigne par (U_n) une suite croissante d'ouverts de E telle que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ pour tout n , et $E = \bigcup_n U_n$, et on pose $S = S_E^x = \text{Sup } \sigma_{U_n}^x$ (voir le n° 2.0.9).

On considère, par ailleurs une diffusion (P_x) de E_δ dans \hat{F}_∞ telle que le terme $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ soit un processus fortement markovien et que,

$$(A4.1) \quad \mathfrak{N}_s(P_x) = P_x^{(1)} \quad \text{pour chaque } x \in E_\delta \quad \text{et}$$

$$(A4.2) \quad \sigma_{U_n} < \sigma_E \quad P_x \quad \text{P.S. pour chaque } x \in E.$$

On cherche alors une diffusion (\bar{P}_x) de E_δ dans \hat{F}_∞ telle que le terme $\mathfrak{X} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (\bar{P}_x))$ soit un processus fortement markovien et que

$$(A4.3) \quad \mathfrak{N}_s(\bar{P}_x) = P_x \quad \text{pour chaque } x \in E_\delta, \quad \text{et}$$

$$(A4.4) \quad \bar{P} \{ \sigma_E = +\infty \} = 1 \quad \text{pour chaque } x \in E.$$

(1) Autrement dit $S = \sigma_E \quad P_x \quad \text{P.S.}$

A4.2 - REMARQUE - La relation (A4.1) signifie que le processus \mathfrak{X} est tué à l'instant S , et la relation (A4.3) que \mathfrak{X} est le processus tué à l'instant S déduit du processus \mathfrak{X} , ce dernier étant non interrompu (relation (A4.4)).

La relation (A4.2) signifie que "le processus \mathfrak{X} ne meurt pas à l'intérieur de $E^{(1)}$ "; cette propriété est essentielle pour permettre la construction du processus \mathfrak{X} indiquée ci-dessous par prolongement de la diffusion (P_x) de \mathfrak{X} sur le même espace de trajectoires Ω : en effet, on va construire la diffusion (\bar{P}_x) , par une suite transfinie de prolongements successifs, de manière à ce qu'elle charge seulement les trajectoires qui, chaque fois qu'elles frôlent le point δ , ressaute dans E à l'instant de frôlement tant que celui-ci est fini⁽²⁾. Pour que ceci soit possible, il faut au moins que ce saut dans E soit possible au premier instant de frôlement de δ , c'est-à-dire que (A4.2) soit vérifiée.

Formellement, ces considérations peuvent être exprimées comme suit :

A4.3 - La suite de temps d'arrêt Transfinie (T_α) - Soit T un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) . On définit d'abord, par récurrence sur n , la suite $(T^{(n)})$ de temps d'arrêt en posant,

$$T^{(1)} = T, \quad T^{(n+1)} = T^{(n)} + T \circ \theta_{T^{(n)}} \quad (n > 1);$$

et on pose,

$$T^{(\infty)} = \sup_n T^{(n)}.$$

-
- (1) Cette relation est satisfaite, par exemple, par le processus induit sur un ouvert par le mouvement brownien, ou un processus non interrompu.
 - (2) Il va sans dire que le processus ainsi obtenu ne sera pas quasi continu à gauche (n° 2.0.2). On trouvera dans l'article récent de P.A. Meyer "Sur les relations entre diverses propriétés des processus de Markov" (à paraître) l'exposé d'une méthode de prolongement d'un processus standard en un processus standard pour lequel $X_{\sigma_\varepsilon}^- = \delta$ P.S dès que $\sigma_\varepsilon < \infty$ et $X_{\sigma_\varepsilon}^-$ existe. Cette méthode de construction peut aussi être utilisée ici, mais ne permet pas d'obtenir la diffusion (\bar{P}_x) sur le même espace de trajectoires.

On définit ensuite par induction transfinie, la suite transfinie $(T_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de temps d'arrêt, en posant⁽¹⁾ :

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = T$$

$$T_{\alpha+1} = T_\alpha^{(\infty)} \quad (\alpha \in \Delta)$$

$$T_\beta = \sup_{\alpha < \beta} T_\alpha \quad (\beta \in \Delta, \beta \text{ ordinal limite}).$$

On a alors,

LEMME - La suite transfinie $(T_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ a les propriétés suivantes :

(A4.5) Pour tout $\alpha \in \Delta$, T_α est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) .

(A4.6) $T_\beta = T_\alpha + T_\beta \circ \theta_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha < \beta$.

(A4.7) Si T est un temps terminal⁽²⁾, il en est de même de T_α pour tout $\alpha \in \Delta$.

(Vérification sans grosses difficultés).

A4.4 - Schéma d'une construction de la diffusion (\bar{P}_x) - On se donne d'abord une répartition conditionnelle terminale⁽³⁾ π après la suite (σ_{ν_n}) de temps d'arrêt.

On considère ensuite la suite transfinie (S_α) associée au temps terminal $S = \sup_n \sigma_{\nu_n}$, et on se donne

- pour chaque $\alpha \in \Delta$, une répartition conditionnelle terminale π_α après la suite $(S_\alpha^{(n)})$ de temps d'arrêt.

- pour chaque ordinal limite β , une suite (β_n) crois-

(1) Δ désignant l'ensemble des ordinaux dénombrables.

(2) n° 1.0.3.

(3) Voir le n° 1.2.9.

sant (strictement) vers β , et une répartition conditionnelle terminale π_β^l après la suite (S_{β_n}) de temps d'arrêt.

Utilisant alors le théorème 1.2.6, on peut étendre par induction transfinie, pour chaque $x \in E_\delta$, la restriction de la mesure P_x à la tribu $\bigvee_n \hat{F}_{\sigma_{U_n}}$ en une mesure \bar{P}_x sur \hat{F}_∞ de telle sorte que, pour $\Gamma \in \mathcal{B}_\delta$,

$$(A4.8) \quad \bar{P}_x \left\{ X_s \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{\sigma_{U_n}} \right\} = \pi(\cdot, \Gamma) \bar{P}_x \quad \text{P.S.}$$

$$(A4.9) \quad \bar{P}_x \left\{ X_{s_{\alpha+1}} \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{s_{\alpha}^{(n)}} \right\} = \pi_\alpha(\cdot, \Gamma) \bar{P}_x \quad \text{P.S.}$$

pour tout $\alpha \in \Delta$.

$$(A4.10) \quad \bar{P}_x \left\{ X_{s_\beta} \in \Gamma / \bigvee_n \hat{F}_{s_{\beta_n}} \right\} = \pi_\beta^l(\cdot, \Gamma) \bar{P}_x \quad \text{P.S.}$$

pour tout ordinal limite β .

De plus, \bar{P}_x est défini de façon unique par ces relations. Il résulte alors des théorèmes 1.2.9 (alinéa 1) et 1.3.1⁽¹⁾ que le terme $\bar{\mathcal{X}} = (\Omega, \omega_\delta, (X_t), (\theta_t), (\bar{P}_x))$ est un processus fortement markovien. En outre, la relation (A4.3) est vérifiée par construction même de (\bar{P}_x) .

Pour faire en sorte que le processus $\bar{\mathcal{X}}$ ainsi construit soit non interrompu (relation A4.4), on peut montrer enfin⁽²⁾ qu'il suffit de choisir les répartitions conditionnelles π , π_α , π_β^l de façon à ce que les mesures $\pi(\omega, \cdot)$, $\pi_\alpha(\omega, \cdot)$ et $\pi_\beta^l(\omega, \cdot)$ ne chargent pas le point δ pour toutes les trajectoires $\omega \in \Omega$ sur lesquelles les suites de temps d'arrêt correspondantes ne stationnent pas (relations (1.2.7) et (1.2.8), n° 1.2.5). Choix qui est toujours possible en prenant là des mesures ponctuelles.

On remarquera aussi que, inversement, en vertu du théorème 1.2.9 (alinéa 2)), toute diffusion (\bar{P}_x) répondant au problème de prolongement posé peut être obtenue par la construction précédente pour un choix convenable des répartitions conditionnelles π , π_α , π_β^l .

(1) En utilisant, en particulier, la propriété (A4.7) du lemme A4.3.

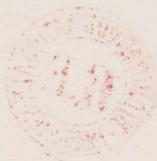
(2) Etablir, par induction transfinie, que $P_x \{ \sigma_\varepsilon = T_\alpha < +\infty \} = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, compte tenu de l'hypothèse (A4.2).



Bibliographie

- [1] CHOKSI (J. R.). - Inverse limits of measure spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3), 8 (1958), 321-342.
- [2] COURREGE (P.) & PRIOURET (P.). - Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire : propriétés de décomposition, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 259 (1964), 3933-3935.
- [3] COURREGE (P.) & PRIOURET (P.). - Recollements de processus de Markov continus, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 259 (1964), 4220-4222.
- [4] COURREGE (P.) & PRIOURET (P.). - Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire : Relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* (article précédent).
- [5] DOOB (J. L.). - Brownien Motion on a Green space, *Theor. Probability Appl.*, 2 (1957), 1-30.
- [6] ДЫНКИН (Е.Б.). - Марковские процессы. Физматгиз Moscou (1963).
- [7] GANGOLLI (R.). - On the Construction of certain diffusions on a differentiable Manifold. Note multigraphiée.
- [8] GETOOR (P. K.). - Additive functionals of a Markov process. Cours multigraphié à l'université de Hamburg (été 1964).
- [9] IONESCU TULCEA (C. T.). - Mesures dans les produits infinis, *Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), 7 (1949).
- [10] ITO (K.). - Stochastic differential equations in a differentiable manifold, *Nagaya Math J.*, 1 (1950), 35-47.
- [11] MEYER (P. A.). - L'équivalence de certaines propriétés des processus de Markov, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 260 (1965), 2977-2979.
- [12] RAOULT (J. P.). - Limites projectives de mesures σ -finies et probabilités conditionnelles, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 260 (1965), 4893-4896.

Manuscrit reçu le 20 Juin 1965



... les propriétés de ...

Bibliographie

... les propriétés de ...

Publ
I.
sen
d'u
am
sou
rial
de
En
r +
que
(re
par
r +
PR
ai
--
(*)
8°
43
14