



HAL
open science

Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire : Relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition

Philippe Courrèges, Pierre Priouret

► **To cite this version:**

Philippe Courrèges, Pierre Priouret. Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire : Relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition. *Annales de l'ISUP*, 1965, XIV, pp.245-274. hal-04084828

HAL Id: hal-04084828

<https://hal.science/hal-04084828>

Submitted on 28 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

TEMPS D'ARRÊT D'UNE FONCTION ALÉATOIRE : RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ASSOCIÉES ET PROPRIÉTÉS DE DÉCOMPOSITION

Philippe COURRÈGE et Pierre PRIOURET

Introduction

Les résultats principaux de ce travail, bien qu'ils soient présentés ici de façon quasi autonome - en particulier indépendante de la théorie des processus de Markov - ont été établis comme instruments pour résoudre les divers problèmes de mesurabilité posés par le recollement des processus de Markov (voir Courrège et Priouret [5] et [6]).

Etant donnée une fonction aléatoire⁽¹⁾ continue à droite (X_s) à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable, les temps de sortie des ouverts sont des temps d'arrêt de la famille de tribus (\hat{F}_t) obtenue en prenant, pour chaque t la complétée universelle \hat{F}_t de la tribu F_t engendrée par les X_s , $s \leq t$ (voir l'appendice 2, n° 2). Désignant alors par T un temps d'arrêt de cette famille il s'agissait d'abord d'obtenir un critère commode de F_T -mesurabilité formalisant la notion intuitive selon laquelle les événements de \hat{F}_T sont ceux qui ne dépendent que des valeurs de X_s pour $s \leq T$: l'introduction de la relation d'équivalence R_T^X (n° 1.1) et le critère de \hat{F}_T -mesurabilité par saturation pour R_T^X dans \hat{F}_∞ (théorème 1.4) répondent à cette première question.

Il s'agissait ensuite de trouver un système de générateurs de la tribu \hat{F}_T : Les ensembles $\{X_s^T \in \Gamma\}$ où X^T est la fonction aléatoire arrêtée à l'instant T déduite de X forment un tel système (théorème 2.4)⁽²⁾.

(1) Voir le n° 0.3 ci-dessous.

(2) Un résultat de ce type pour la famille (F_{t+}^X) figure déjà dans Ito et McKean [8] page 86.



1 = 1965

8° V
64396

Il s'agissait enfin de décomposer chaque fonction h , mesurable par rapport à la tribu \hat{F}_∞ en une "partie antérieure à T ", et une "partie postérieure à T ": la relation $h(\omega) = \bar{h}(\omega, \theta_T(\omega))$ où \bar{h} est $\hat{F}_T \otimes \hat{F}_\infty$ -mesurable exprime une telle décomposition (théorème 4.4 et corollaires).

En outre, lorsque $h(\omega) = V(\omega) - T(\omega)$, où $V \geq T$ est un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}) , la fonction $\bar{h}(\omega, \omega')$ obtenue est, pour chaque ω , un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}) en ω' (théorème 5.3). Cette propriété est très utile pour déduire la propriété de Markov forte avant $T + S \circ \theta_T$ (où S est un autre temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t)) de celles avant T et avant S (voir [5] et [6]).

Nous remercions ici P.A. Meyer dont les critiques et suggestions, à la suite d'une première rédaction de ce travail, nous ont permis de le simplifier et le compléter.

Table des matières

	Pages
Parag. 0 - Terminologie et notations	248
Parag. 1 - Tribu \hat{F}_T^x et relation d'équivalence R_T^x	250
Parag. 2 - Tribu \hat{F}_T^x et fonction aléatoire arrêtée à l'instant T	253
Parag. 3 - Tribu \hat{F}_{T+}^x et relation d'équivalence R_{T+}^x	256
Parag. 4 - Décomposition de la tribu \hat{F}_∞^x relativement à un temps d'arrêt	259
Parag. 5 - Décomposition d'un temps d'arrêt par rapport à un autre temps d'arrêt	263
Appendice 1 - Fonctions aléatoires typiques	267
Appendice 2 - Exemples de temps d'arrêt des familles (F_t^x) , (\hat{F}_t^x) et (\hat{F}_{t+}^x) : temps de sortie	270
Appendice 3 - Evènements postérieurs à T et relation d'équivalence $\theta_T^{-1}(R_\infty^x)$	272

0. - Terminologie et notations

0.1 Extensions de tribus. - Soit Ω un ensemble. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur Ω , on note $\bigvee_{i \in I} F_i$ la tribu sur Ω engendrée par $\bigcup_{i \in I} F_i$; en particulier, $F_1 \vee F_2$ désigne la tribu engendrée par $F_1 \cup F_2$. Si F est une tribu sur Ω , la tribu complétée universelle de F est notée \bar{F} : \bar{F} est l'ensemble des $A \subset \Omega$ tels que, pour toute mesure de probabilité P sur F il existe deux ensembles A' et A'' de F pour lesquels :

$$A' \subset A \subset A'' \quad \text{et} \quad P(A'' \setminus A') = 0.$$

On a $\overline{\bar{F}} = \bar{F}$, et, si Φ est une application mesurable de (Ω, F) dans l'espace mesurable (Ω', F') , Φ est aussi mesurable de (Ω, \bar{F}) dans (Ω', \bar{F}') .

0.2 Temps d'arrêt d'une famille de tribu. - $(F_t)_{t \in R_+}$ étant une famille croissante ($t < u \implies F_t \subset F_u$) de tribus sur Ω , un temps d'arrêt de la famille (F_t) est une application T de Ω dans $\bar{R}_+ = [0, +\infty]$ telle que $\{T \leq t\} \in F_t$ pour tout $t \in R_+$. On désigne alors par F_T la tribu sur Ω des événements antérieurs à T :

$$A \in F_T \iff \forall t \in R_+, A \cap \{T \leq t\} \in F_t.$$

Si S et T sont deux temps d'arrêt de (F_t) , $A \cap \{S \leq T\} \in F_T$ pour tout $A \in F_S$; en particulier $S \leq T$ entraîne $F_S \subset F_T$.

0.3 Fonctions aléatoires à cimetière. - Soient (E, \mathcal{B}) un espace mesurable, δ un terme n'appartenant pas à $E^{(1)}$, $E_\delta = E \cup \{\delta\}$, et \mathcal{B}_δ la tribu sur E_δ engendrée par \mathcal{B} .

(1) δ est un terme tel que $\delta \notin E$, quelconque mais fixé en même temps que E . Si, par exemple, E est un espace localement compact à base dénombrable, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_t$ sa tribu borélienne, δ est, comme d'ordinaire, le point à l'infini de E , E_δ son compactifié d'Alexandroff, et \mathcal{B}_δ la tribu borélienne de l'espace compact E_δ (voir à ce sujet l'appendice 1).

Une fonction aléatoire (1) à cimetièrè(2) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) est un terme $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t)_{t \in R_+}, E, \mathcal{B}, \delta)$ où Ω est un ensemble, $(X_t)_{t \in R_+}$ (3) une famille d'applications de Ω dans E_δ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{t \mid t \in R_+, \text{ et } X_t(\omega) = \delta\}$ est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in [0, +\infty]$), et ω_δ un élément de Ω tel que $X_t(\omega_\delta) = \delta$ pour tout $t \in R_+$.

La donnée de E, \mathcal{B}, δ fait partie, en toute rigueur, de la donnée de X ; toutefois, la mention "à valeurs dans (E, \mathcal{B}) " pour X permet d'écrire, sans ambiguïté : $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t)_{t \in R_+})$, ce que nous ferons le plus souvent par la suite.

Pour chaque $t \in [0, +\infty]$, on désigne par F_t^X la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les applications X_s ($s \leq t$) à valeurs dans $(E_\delta, \mathcal{B}_\delta)$, et par \hat{F}_t^X la complétée universelle \overline{F}_t^X de F_t^X . $(F_t^X)_{t \in [0, +\infty]}$ (resp. $(\hat{F}_t^X)_{t \in [0, +\infty]}$) est la famille de tribus (resp. la famille de tribus complétées) engendrée par X (4).

0.4. Opérateurs de translation et d'arrêt - Une famille $(\theta_t)_{t \in R_+}$ (resp. $(\alpha_t)_{t \in R_+}$) d'applications de Ω dans Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \in R_+$ et $s \in R_+$, $X_s(\theta_t(\omega)) = X_{s+t}(\omega)$ (resp. $X_s(\alpha_t(\omega)) = X_{s \wedge t}(\omega)$) (5), est appelée famille d'opérateurs de translation (resp. d'arrêt) de la fonction aléatoire X (6).

(1) On distingue ici systématiquement la notion de fonction aléatoire de celle de processus stochastique qui comporte, en plus, la donnée d'une mesure de probabilité.

(2) Toute fonction aléatoire (sans cimetièrè) $(\Omega, F, (X_t)_{t \in R_+})$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}) peut être transformée en fonction aléatoire à cimetièrè par adjonction à Ω d'un point ω_δ . On peut donc ne considérer que des fonctions aléatoires à cimetièrè, et sous entendre le qualificatif "à cimetièrè", ce que nous ferons le plus souvent dans la suite.

(3) R_+ désigne l'ensemble $[0, +\infty[$ des nombres réels ≥ 0 (finis).

(4) On pourrait faire figurer aussi, dans la donnée de X , une tribu F sur Ω rendant mesurables les X_t ($t \in R_+$); une telle tribu est inutile ici car seules joueront un rôle les tribus F_∞^X ou \overline{F}_∞^X (n° 0.1) qui sont canoniquement associées à X .

(5) $s \wedge t = \inf(s, t)$.

(6) Les fonctions aléatoires courantes à valeurs dans un espace LCD admettent de telles familles d'opérateurs; voir l'appendice 1.

On prolonge ces définitions en posant $X_\infty(\omega) = \delta$, $\theta_\infty(\omega) = \omega_\delta$ et $\alpha_\infty(\omega) = \omega$ pour chaque $\omega \in \Omega$, et, si H est une application de Ω dans $[0, +\infty]$, on définit, comme d'habitude, les applications X_H , θ_H , α_H en posant :

$$X_H(\omega) = X_{H(\omega)}(\omega), \quad \theta_H(\omega) = \theta_{H(\omega)}(\omega), \quad \alpha_H(\omega) = \alpha_{H(\omega)}(\omega)$$

pour chaque $\omega \in \Omega$. On a alors : $X_s \circ \theta_H = X_{s+H}$ si $0 \leq s \leq +\infty$, et $X_s \circ \alpha_H = X_{s \wedge H}$ si $0 \leq s < +\infty$ (1).

0.5 - La fonction aléatoire X est *mesurable*, si l'application $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans E est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}_\infty^X$ -mesurable. La fonction aléatoire X est *progressivement mesurable* si, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(s, \omega) \rightarrow X_{s \wedge t}(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans E est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}_t^X$ -mesurable.

0.6 - Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, on désignera par (E, \mathcal{B}) un espace mesurable (quelconque), et par $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ une fonction aléatoire (à cimetière) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) possédant une famille $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'opérateurs d'arrêt (n° 0.4).

1. Tribu \mathcal{F}_T^X et relation d'équivalence R_T^X (2)

1.1 - Relation d'équivalence R_H^X - Soit H une application de Ω dans $[0, +\infty]$. On définit la relation d'équivalence R_H^X sur Ω en posant :

$$\omega \sim \omega' (R_H^X) \iff H(\omega) = H(\omega') \quad \text{et} \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \quad \text{pour tout} \quad s \leq H(\omega).$$

Le lemme suivant illustre immédiatement cette définition :

(1) Par contre, en général $X_\infty \circ \alpha_H \neq X_{\infty \wedge H} = X_H$.

(2) Voir le n° 0.6.

1.2-Tribu $\hat{F}_t^{X(1)}$ et équivalence R_t^X -

LEMME - Pour tout $t \in [0, +\infty]$, la tribu \hat{F}_t^X (resp. F_t^X) est égale à l'ensemble des événements de \overline{F}_∞^X (resp. F_∞^X) qui sont saturés pour R_t^X .

En effet, remarquons que, pour chaque $t \in [0, +\infty]$, d'une part α_t est une application mesurable de (Ω, F_t^X) dans (Ω, F_∞^X) (relation $X_s \circ \alpha_t = X_{s \wedge t}$), donc aussi de (Ω, \hat{F}_t^X) dans $(\Omega, \hat{F}_\infty^X)$ (n° 0-1); d'autre part, pour chaque $\omega \in \Omega$, $\alpha_t(\omega) \sim \omega(R_t^X)$.

Soit alors $A \in \hat{F}_\infty^X$ (resp. $A \in F_\infty^X$) saturé pour R_t^X ; on a $\alpha_t^{-1}(A) = A$, donc $A \in \hat{F}_t^X$ (resp. $A \in F_t^X$).

Inversement, montrons que tout $A \in \hat{F}_t^X$ est saturé pour R_t^X : supposons d'abord que $A \in F_t^X$; A est saturé pour R_t^X car l'ensemble des événements de F_∞^X qui sont saturés pour R_t^X est une tribu qui contient les ensembles $\{X_s \in \Gamma\}$ ($0 \leq s \leq t$). Supposons ensuite que $A \in \hat{F}_t^X$, et soient $\omega \in A$ et $\omega' \sim \omega(R_t^X)$; désignons par P la mesure discrète $-\frac{1}{2}(\varepsilon_\omega + \varepsilon_{\omega'})$ sur Ω ; il existe deux ensembles A_1 et A_2 de F_t^X tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $P(A_2 \setminus A_1) = 0$; autrement dit,

$$1_{A_1}(\omega) = 1_A(\omega) = 1_{A_2}(\omega) \quad \text{et} \quad 1_{A_1}(\omega') = 1_A(\omega') = 1_{A_2}(\omega');$$

mais A_1 appartenant à F_t^X est R_t^X saturé d'après ce qui précède, donc $1_{A_1}(\omega) = 1_{A_1}(\omega')$; et aussi $1_{A_2}(\omega') = 1_{A_2}(\omega) = 1$; d'où $\omega' \in A$ et le résultat.

1.3- Caractérisations des temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) -

THÉORÈME - Pour qu'une application T de Ω dans $[0, +\infty]$ soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. (F_t^X)) il faut et il suffit que T soit \hat{F}_∞^X -mesurable (resp. F_∞^X -mesurable) et que, pour tout $t \in R_+$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$:

(1) On rappelle que l'on a posé (n° 0.3) $\hat{F}_t^X = \overline{F}_t^X$ ($t \in [0, +\infty]$), ceci afin d'éviter des notations ambiguës comme \overline{F}_t^X (T temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X)). On utilisera cependant parfois la notation \overline{F}_∞^X au lieu de \hat{F}_∞^X .

$$T(\omega) \leq t \quad \text{et} \quad \omega' \sim \omega (R_t^X) \implies T(\omega') = T(\omega).$$

COROLLAIRE 1 - Si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) , la relation $X_s(\omega) = X_s(\omega')$ pour tout $s \leq T(\omega)$ entraîne que $T(\omega') = T(\omega)$ et par conséquent que $\omega' \sim \omega (R_T^X)$.

COROLLAIRE 2 - Pour tout $\omega \in \Omega$, $\alpha_T(\omega) \sim \omega (R_T^X)$.

COROLLAIRE 3 - $\omega \sim \omega' (R_T^X)$ entraîne $\alpha_T(\omega) \sim \alpha_T(\omega') (R_\omega^X)$.

En effet, supposons que T soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) , et soient t, ω, ω' tels que $T(\omega) \leq t$ et $\omega' \sim \omega (R_t^X)$; posons $u = T(\omega)$; on a $\omega \in \{T = u\}$, $\omega' \sim \omega (R_u^X)$ et $\{T = u\} \in \hat{F}_u^X$; donc $\omega' \in \{T = u\}$ d'après le lemme 1.2, c'est-à-dire $T(\omega') = T(\omega)$.

Inversement, supposons que T soit \hat{F}_∞^X -mesurable et que $T(\omega) \leq t$ et $\omega' \sim \omega (R_t^X) \implies T(\omega') = T(\omega)$; alors $\{T \leq t\} \in \hat{F}_t^X$, et $\{T \leq t\}$ est R_t^X saturé, d'où le résultat, encore d'après le lemme 1.2. Procédure analogue pour (F_t^X) .

1.4 - THEOREME (1) - Si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. F_t^X), la tribu \hat{F}_T^X (resp. F_T^X) est identique à l'ensemble des événements de \hat{F}_∞^X (resp. F_∞^X) saturés pour R_T^X .

En effet, supposons que T soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) , et soient $A \in \hat{F}_T^X$, $\omega \in A$ et $\omega' \sim \omega (R_T^X)$. Si $u = T(\omega) = T(\omega')$, on a $\omega \in A \cap \{T \leq u\}$ et $\omega' \sim \omega (R_u^X)$; donc, d'après le lemme 1.2, $\omega' \in A \cap \{T \leq u\}$; ce qui établit que A est saturé pour R_T^X .

Inversement, supposons que $A \in \hat{F}_\infty^X$ soit R_T^X saturé, et soient $t \in R_+$, $\omega \in A \cap \{T \leq t\}$ et $\omega' \sim \omega (R_t^X)$. D'après le théorème 1.3, $\omega' \sim \omega (R_T^X)$; donc $\omega' \in A \cap \{T \leq t\}$ et cet ensemble est R_T^X saturé; d'où $A \in \hat{F}_T^X$ d'après le lemme 1.2. Le théorème est établi.

(1) Voir le n° 0.6.

2. Tribu \hat{F}_t^x et fonction aléatoire arrêtée à l'instant $T^{(1)}$

2.1 Fonction aléatoire X^H . - Soit H une application de Ω dans $[0, +\infty]$. Posons $X_t^H = X_t \circ \alpha_H = X_{t \wedge H}$ pour tout $t \in R_+$.

$$X^H = (\Omega, \omega_\delta, (X_t^H)_{t \in R_+}, E, \mathcal{B}, \delta)$$

est encore une fonction aléatoire (à cimetière) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) qui est appelée la fonction aléatoire arrêtée à l'instant H déduite de X .

2.2 - LEMME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable (2), et on désigne par H une application de Ω dans $[0, +\infty]$. Si H est F_∞^x -mesurable, α_H est mesurable de (Ω, F_∞^H) dans (Ω, F_∞^x) , et $A \in F_\infty^H \iff A \in F_\infty^x$ et $\alpha_H^{-1}(A) = A$ ($A \subset \Omega$). Si H est \overline{F}_∞^x -mesurable α_H est mesurable de $(\Omega, \overline{F}_\infty^H)$ dans $(\Omega, \overline{F}_\infty^x)$, et $A \in \overline{F}_\infty^H \iff A \in \overline{F}_\infty^x$ et $\alpha_H^{-1}(A) = A$ ($A \subset \Omega$).

En effet, supposons, par exemple, que H soit \overline{F}_∞^x -mesurable. En vertu de la relation $X_t \circ \alpha_H = X_{t \wedge H} = X_t^H$, α_H est mesurable de (Ω, F_∞^H) dans (Ω, F_∞^x) , donc aussi de $(\Omega, \overline{F}_\infty^H)$ dans $(\Omega, \overline{F}_\infty^x)$ (n° 0.1). En vertu de la mesurabilité de X , $X_{t \wedge H}$ est \overline{F}_∞^x -mesurable, (en effet $X_{t \wedge H}$ est composée de $\omega \rightarrow (t \wedge H(\omega), \omega)$ qui est mesurable de $(\Omega, \overline{F}_\infty^x)$ dans $(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}_{R_+} \otimes F_\infty^x)$, et de $(u, \omega) \rightarrow X_u(\omega)$ qui est $\mathcal{B}_{R_+} \otimes F_\infty^x$ -mesurable); donc, d'après la relation $X_t \circ \alpha_H = X_{t \wedge H}$, α_H est mesurable de $(\Omega, \overline{F}_\infty^H)$ dans $(\Omega, \overline{F}_\infty^x)$, donc aussi (n° 0.1) de $(\Omega, \overline{F}_\infty^x)$ dans lui-même.

Par ailleurs, $\alpha_H^{-1}(A) = A$ pour tout $A \in F_\infty^H$ à cause de la relation $\alpha_H \circ \alpha_H = \alpha_H$.

(1) Voir le n° 0.6.

(2) Voir le n° 0.5.

Ainsi, $A \in \mathbb{F}_\omega^{x^H} \implies \alpha_H^{-1}(A) = A$ et $A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^x}$, $\overline{\mathbb{F}_\omega^{x^H}} \subset \overline{\mathbb{F}_\omega^x}$, et,

$$\alpha^{-1}(A) = A \quad \text{et} \quad A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^x} \implies A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^{x^H}}.$$

Il reste à montrer que $A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^{x^H}} \implies \alpha_H^{-1}(A) = A$.

Pour cela soient $A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^{x^H}}$, $\omega \in A$, et $P = \frac{1}{2} (\epsilon_\omega + \epsilon_{\alpha_H(\omega)})$ (mesure discrète sur Ω). Il existe deux ensembles A' et A'' de $\mathbb{F}_\omega^{x^H}$ tels que $A' \subset A \subset A''$ et $P(A'' - A') = 0$; c'est-à-dire $1_{A'}(\omega) = 1_{A''}(\omega)$ et $1_{A'}(\alpha_H(\omega)) = 1_{A''}(\alpha_H(\omega))$. On a alors :

$$1_A(\omega) = 1_{A'}(\omega) = 1_{A'}(\alpha_H(\omega)) = 1_A(\alpha_H(\omega)) \quad \text{d'où le résultat.}$$

Procédure analogue mais plus simple dans le cas où H est \mathbb{F}_ω^x -mesurable.

2.3 - $\hat{\mathbb{F}}_T^x$ -mesurabilité de l'application α_T -

LEMME - Si la fonction aléatoire X est mesurable (1) et si T est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathbb{F}}_t^x)$ (resp. \mathbb{F}_t^x), alors α_T est mesurable de $(\Omega, \hat{\mathbb{F}}_T^x)$ dans $(\Omega, \hat{\mathbb{F}}_\omega^x)$ (resp. de (Ω, \mathbb{F}_T^x) dans $(\Omega, \mathbb{F}_\omega^x)$).

En effet, T étant un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathbb{F}}_t^x)$, T est $\overline{\mathbb{F}_\omega^x}$ -mesurable ; donc, d'après la mesurabilité de X et le lemme 2.2., α_T est mesurable de $(\Omega, \overline{\mathbb{F}_\omega^x})$ dans lui-même.

Il suffit donc d'établir que, si $A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^x}$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_T^{-1}(A) \cap \{T \leq u\}$ est \mathbb{R}_u^x -saturé. Soient donc $\omega \in \alpha_T^{-1}(A) \cap \{T \leq u\}$ et $\omega' \sim \omega (R_u^x)$; d'après le corollaire 1 du théorème 1.3, $\omega' \sim \omega (R_T^x)$; et, d'après le corollaire 3 du même théorème, $\alpha_T(\omega') \sim \alpha_T(\omega) (R_\omega^x)$; d'où le résultat, puisque $A \in \overline{\mathbb{F}_\omega^x}$ est saturé pour R_ω^x d'après le lemme 1.2. On peut alors énoncer :

2.4 - THEOREME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable (2). Alors, si T est un temps d'arrêt de la famille

(1) Voir le n° 0.5.

(2) Voir les n° 0.5 et 0.6.

$$(\hat{F}_t^x) \text{ (resp. } F_t^x), \hat{F}_T^x = \overline{F_\infty^{xT}} \text{ (resp. } F_T^x = F_\infty^{xT})(1)$$

COROLLAIRE - $\hat{F}_T^x = \alpha_T^{-1}(\overline{F_\infty^x})$ (resp. $F_T^x = \alpha_T^{-1}(F_\infty^x)$).

En effet, supposons, par exemple, que T soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^x) ; T est $\overline{F_\infty^x}$ -mesurable, donc $A \in \overline{F_\infty^x}$ entraîne $A = \alpha_T^{-1}(A)$, d'après le lemme 2.2, et donc aussi $A \in \hat{F}_T^x$, d'après le lemme 2.3.

Inversement, $A \in \hat{F}_T^x$ entraîne que $A \in \overline{F_\infty^x}$ et que A est saturé pour R_T^x (théorème 1.4), donc que $\alpha_T^{-1}(A) = A$ (corollaire 2 du théorème 1.3); donc finalement que $A \in \overline{F_\infty^x}$ d'après le lemme 2.2.; d'où le théorème. Le corollaire en résulte, compte-tenu du lemme 2.2.

2.5-Progressive mesurabilité forte - Le théorème suivant sera utile dans la suite (2).

THEOREME - On suppose que la fonction aléatoire X est progressivement mesurable (3), et que $(G_t)_{t \in R_+}$ est une famille croissante de tribus sur Ω à laquelle X est adaptée ($F_t^x \subset G_t$ pour tout $t \in R_+$). Alors, pour tout temps d'arrêt S de la famille (G_t) , l'application $(u, \omega) \longrightarrow X_{u \wedge S}(\omega)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{B}_{R_+} \otimes G_S$ et \mathcal{B} .

En effet, soit $u \in R_+$; l'application $(t, \omega) \longrightarrow \alpha_t(\omega)$ de $[0, u] \times \Omega$ dans Ω est mesurable pour les tribus $\mathcal{B}_{[0, u]} \otimes F_u^x$ et F_∞^x , d'après la progressive mesurabilité de X , donc aussi, puisque $F_u^x \subset G_u$, pour les tribus $\mathcal{B}_{[0, u]} \otimes G_u$ et F_∞^x . L'application $\omega \longrightarrow (S(\omega) \wedge u, \omega)$ de Ω dans $[0, u] \times \Omega$ est mesurable pour les tribus G_u et $\mathcal{B}_{[0, u]} \otimes G_u$; donc, en composant, l'application $\omega \longrightarrow \alpha_{S \wedge u}(\omega)$ de Ω dans Ω est mesurable pour les tribus G_u et F_∞^x .

(1) En particulier, la tribu \hat{F}_T^x est identique à sa complétée universelle.
 (2) Ce résultat est dû à Chung (voir [2]), nous l'établissons ici, en supposant l'existence d'une famille d'opérateurs d'arrêt.
 (3) Voir les n° 0.5 et 0.6.

Autrement dit, si $A \in \mathbb{F}_\infty^X$,

$$\alpha_s^{-1}(A) \cap \{S \leq u\} = \alpha_{s \wedge u}^{-1}(A) \cap \{S \leq u\} \in \mathbb{G}_u.$$

u étant arbitraire, α_s est mesurable de (Ω, \mathbb{G}_s) dans $(\Omega, \mathbb{F}_\infty^X)$.

On peut alors considérer l'application $(u, \omega) \longrightarrow X_{u \wedge S}(\omega)$ comme composée de $(u, \omega) \longrightarrow (u, \alpha_s(\omega))$ qui est mesurable pour les tribus $\mathbb{B}_{R_+} \otimes \mathbb{G}_s$ et $\mathbb{B}_{R_+} \otimes \mathbb{F}_\infty^X$, et de $(u, \omega) \longrightarrow X_u(\omega)$ qui est $\mathbb{B}_{R_+} \otimes \mathbb{F}_\infty^X$ -mesurable d'après la (progressive) mesurabilité de X ; d'où le théorème.

3. Tribu $\hat{\mathbb{F}}_t^X$ et relation d'équivalence R_{t+}^X (1)

On pose, comme d'habitude,

$$\mathbb{F}_{t+}^X = \bigcap_{u>t} \mathbb{F}_u^X \quad \text{et} \quad \hat{\mathbb{F}}_{t+}^X = \bigcap_{u>t} \hat{\mathbb{F}}_u^X \quad (t \in R_+).$$

3.1 - Relation d'équivalence R_{H+}^X . - Soit H une application de Ω dans $[0, +\infty]$. On définit la relation d'équivalence R_{H+}^X sur Ω en posant :

$$\omega \sim \omega' (R_{H+}^X) \iff H(\omega) = H(\omega') \quad \text{et il existe } \varepsilon > 0 \quad \text{tel que}$$

$$X_s(\omega) = X_s(\omega') \quad \text{pour tout } s < H(\omega) + \varepsilon.$$

Autrement dit, (n° 1.1), $\omega \sim \omega' (R_{H+}^X) \iff$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega \sim \omega' (R_{H+\varepsilon}^X)$.

3.2 - Tribu $\hat{\mathbb{F}}_{t+}^X$ et équivalence R_{t+}^X -

LEMME - Pour tout $t \in R_+$, la tribu $\hat{\mathbb{F}}_{t+}^X$ (resp. \mathbb{F}_{t+}^X) est égale à l'ensemble des événements de $\hat{\mathbb{F}}_t^X$ (resp. \mathbb{F}_t^X) qui sont saturés pour R_{t+}^X .

(1) Voir le n° 0.6.

(2) On a : $\widehat{\hat{\mathbb{F}}_{t+}^X} = \hat{\mathbb{F}}_{t+}^X$ pour tout $t \in R_+$.

Démonstration immédiate à partir du lemme 1.2 et des définitions.

3.3 - Caractérisation des temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_{t+}^x)_{(1)}$ -

THEOREME - Pour qu'une application T de Ω dans $[0, +\infty]$ soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) (resp. F_{t+}^x), il faut et il suffit que T soit \hat{F}_{∞}^x -mesurable (resp. F_{∞}^x -mesurable) et que, pour tous $t \in R_+$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$,

$$T(\omega) < t \quad \text{et} \quad \omega' \sim \omega(R_t^x) \implies T(\omega') = T(\omega).$$

En effet, supposons que T soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) : T est \hat{F}_{∞}^x -mesurable, et la relation annoncée résulte du lemme 1.2 et de ce que $\{T < t\} \in \hat{F}_t^x$ (2). Inversement, si T est \hat{F}_{∞}^x -mesurable, et si cette relation est satisfaite, $\{T < t\} \in \hat{F}_{\infty}^x$ et $\{T < t\}$ est R_t^x saturé, d'où $\{T < t\} \in \hat{F}_t^x$ (lemme 1.2) et le résultat.

3.4 - THEOREME - Si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) (resp. F_{t+}^x), la tribu \hat{F}_{T+}^x (resp. F_{T+}^x) est identique à l'ensemble des événements de \hat{F}_{∞}^x (resp. F_{∞}^x) saturés pour R_{T+}^x .

Démonstration tout à fait analogue à celle du théorème 1.4 en remplaçant $\{T \leq t\}$ par $\{T < t\}$.

3.5 - THEOREME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable (3). Alors, si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) (resp. F_{t+}^x),

$$\hat{F}_{T+}^x = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{F_{\infty}^{x^{T+\epsilon}}} \quad (\text{resp. } F^x = \bigcap_{\epsilon > 0} F_{\infty}^{x^{T+\epsilon}}) \quad (4)$$

(1) Cette caractérisation des temps d'arrêt (pour la famille (F_{t+}^x)) a déjà été établie par A.R. Galmarino ; voir à ce sujet Ito et Mc Kean [8] page 85 et Mc Kean et Tanaka [9] page 483.

(2) Pour que T soit un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^x) il faut et il suffit que $\{T < t\} \in F_t$ pour tout t .

(3) Voir le n° 0.5.

(4) Voir à ce sujet Ito et Mc Kean [8], page 86.

En effet, supposons que T soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) . Remarquons d'abord que, pour chaque $\varepsilon > 0$, $\alpha_{T+\varepsilon}(\omega) \sim \omega (R_{T+\varepsilon}^x)$: soient $\omega' = \alpha_{T+\varepsilon}(\omega)$, $t = T(\omega) + \varepsilon(1)$ et $\varepsilon' < \varepsilon$; on a $T(\omega) + \varepsilon' < t$, et $X_s(\omega') = X_s(\omega)$ pour tous $s \leq t$; donc

$$T(\omega') + \varepsilon' = T(\omega) + \varepsilon'$$

d'après le théorème 3.3, puisque $T + \varepsilon'$ est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) en même temps que T (d'après ce même théorème, entre autre); on a donc aussi $T(\omega') + \varepsilon = T(\omega) + \varepsilon$, et le résultat annoncé.

Soient maintenant $A \in \hat{F}_{T+}^x$, $\omega \in A$, $\varepsilon > 0$ et $\omega' \sim \omega (R_{T+\varepsilon}^x)$; par définition de R_{T+}^x (n° 3.1), $\omega' \sim \omega (R_{T+}^x)$; donc, d'après le théorème 3.4, $\omega' \in A$, et A est saturé pour $R_{T+\varepsilon}^x$; on a donc $\alpha_{T+\varepsilon}^{-1}(A) = A$ d'après la remarque préliminaire, et, comme $A \in \overline{F_{\infty}^x}$, $A \in \overline{F_{\infty}^{T+\varepsilon}}$ d'après le lemme 2.2. Ainsi, $\hat{F}_{T+}^x \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{F_{\infty}^{T+\varepsilon}}$.

Inversement, supposons que $A \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{F_{\infty}^{T+\varepsilon}}$, et soient $\omega \in A$ et $\omega' \sim \omega (R_{T+}^x)$; il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega' \sim \omega (R_{T+\varepsilon}^x)$; on a alors, d'une part, $\alpha_{T+\varepsilon}(\omega') \sim \alpha_{T+\varepsilon}(\omega) (R_{\infty}^x)$; d'autre part, puisque $A \in \overline{F_{\infty}^{T+\varepsilon}}$, $\alpha_{T+\varepsilon}^{-1}(A) = A$ (lemme 2.2); on en déduit, A étant dans $\overline{F_{\infty}^x}$, donc R_{∞}^x saturé, (lemme 1.2), que $1_A(\omega') = 1_A(\alpha_{T+\varepsilon}(\omega')) = 1_A(\alpha_{T+\varepsilon}(\omega)) = 1_A(\omega) = 1$; d'où le résultat cherché.

3.6 - REMARQUE. - Si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^x) , en général, la tribu \hat{F}_{T+}^x est différente de la tribu $\overline{F_{\infty}^T}$. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la fonction aléatoire continue à droite typique (App. 1 n° 3) à valeurs dans la droite réelle R , et de prendre pour T le temps de sortie (2) d'un intervalle fermé. T est un temps d'arrêt de la famille F_{T+}^x , mais il existe des trajectoires ω pour lesquelles $T(\omega) < +\infty$ et $T(\alpha_T(\omega)) = +\infty$; autrement dit $T \neq T \circ \alpha_T$; ce qui montre, en vertu du lemme 2.2,

(1) Si $T(\omega) = +\infty$, $\omega' = \omega$; on peut donc supposer $T(\omega) < +\infty$, et alors $t \in R_+$.

(2) Voir l'appendice 2 ci-dessous.

que T n'est pas $\overline{F_\infty^X}$ -mesurable ; donc que $\overline{F_\infty^X} \neq \widehat{F}_{T^+}^X$, puisque T est $\widehat{F}_{T^+}^X$ -mesurable.

Par contre, si on prend pour X la fonction aléatoire continue à droite typique (App. 1, n° 3) à valeurs dans un espace LCD E , et si on considère sur (Ω, F_∞^X) une famille $(P_x)_{x \in E_S}$ de mesures de probabilités qui font de $(X, (P_x))$ un processus fortement markovien, on peut montrer (voir Blumenthal et Gettoor [1]) que la relation $\overline{F_\infty^X} = \widehat{F}_{T^+}^X$ est vérifiée à condition de remplacer la complétion universelle par celle qui consiste à adjoindre tous les sous-ensembles des événements de F_∞^X P_μ -négligeables pour toute répartition initiale μ .

4. Décomposition de la tribu \widehat{F}_∞^X relativement à un temps d'arrêt

Dans ce paragraphe, on suppose que la fonction aléatoire X possède, en plus de la famille $(\alpha_t)_{t \in R_+}$ d'opérateurs d'arrêt (n° 0.6), une famille $(\theta_t)_{t \in R_+}$ d'opérateurs de translation⁽¹⁾.

4.1 - LEMME - Si la fonction aléatoire X est mesurable⁽²⁾, et si H est une application de Ω dans $[0, +\infty]$, $\overline{F_\infty^X}$ -mesurable (resp. F_∞^X -mesurable), alors θ_H est mesurable de $(\Omega, \overline{F_\infty^X})$ (resp. (Ω, F_∞^X)) dans lui-même.

En effet, en vertu de la mesurabilité de H , de celle de X et de la relation $X_s \circ \theta_H = X_{s+H}$, θ_H est mesurable de $(\Omega, \overline{F_\infty^X})$ (resp. (Ω, F_∞^X)) dans $(\Omega, \overline{F_\infty^X})$; donc aussi (n° 0.1) de $(\Omega, \overline{F_\infty^X})$ dans $(\Omega, \overline{F_\infty^X})$.

4.2 - LEMME - On suppose que T est un temps d'arrêt de la famille (\widehat{F}_t^X) , et que S et U sont des applications de Ω dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $U(\omega) = T(\omega) + S(\theta_T(\omega))$, on a

(1) Les fonctions aléatoires courantes à valeurs dans un espace LCD satisfont à ces hypothèses (voir l'appendice 1).

(2) Voir n° 0.5.

$$\alpha_s(\theta_T(\omega)) \sim \theta_T(\alpha_u(\omega)) \quad (R_\infty^X) \quad (1).$$

En effet, si $s \in R_+$,

$$\begin{aligned} X_s \circ \alpha_s \circ \theta_T(\omega) &= X_{s \wedge S(\theta_T(\omega))}(\theta_T(\omega)) = X_{s \wedge S(\theta_T(\omega)) + T(\omega)}(\omega) \\ &= X_{[s+T(\omega)] \wedge U(\omega)}(\omega) = X_{[s+T(\alpha_u(\omega))] \wedge U(\omega)}(\omega) \\ &= X_{s+T}(\alpha_u(\omega)) = X_s \circ \theta_T \circ \alpha_u(\omega), \end{aligned}$$

puisque $T(\omega) = T(\alpha_u(\omega))$ en vertu du théorème 1.3 et des relations $T(\omega) \leq U(\omega)$ et $X_s(\alpha_u(\omega)) = X_s(\omega)$ pour tout $s \leq U(\omega)$.

4.3 - Temps d'arrêt $U = T + S \circ \theta_T -$

LEMME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable. Alors, si T et S sont des temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. F_t^X), et si on pose $U = T + S \circ \theta_T$, U est aussi un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. F_t^X).

En effet, d'après le lemme 4.1, U est $\overline{F_\infty^X}$ -mesurable (resp. F_∞^X -mesurable); il suffit donc de montrer (lemme 1.2), que, pour chaque $u \in R_+$, $\{U < u\}$ est R_u^X saturé: soit donc $\omega \in \Omega$ tel que $U(\omega) \leq u$, et $\omega' \sim \omega (R_u^X)$; comme $T \leq U$, on a $T(\omega') = T(\omega)$ (théorème 1.3). Posons $T(\omega) = t$. On a

$$\theta_t(\omega') \sim \theta_t(\omega) \quad (R_{u-t}^X), \quad \text{et} \quad S(\theta_t(\omega)) = U(\omega) - T(\omega) \leq u - t,$$

donc (théorème 1.3), $S(\theta_t(\omega)) = S(\theta_t(\omega'))$; et finalement

$$U(\omega') = U(\omega) \leq u.$$

(1) En particulier, $\alpha_s(\theta_t(\omega)) \sim \theta_t(\alpha_{t+s}(\omega)) \quad (R_\infty^X) \quad (s, t \in R_+)$.

4.4 - Décomposition de F_∞^X -

THEOREME (1) - Si la fonction aléatoire X est mesurable, et si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) , alors

$$F_\infty^X \subset \hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(F_\infty^X).$$

COROLLAIRE 1 - La famille, stable par intersections finies, des sous-ensembles de Ω de la forme $\alpha_T^{-1}(A) \cap \theta_T^{-1}(B)$ où $A \in \overline{F_\infty^X}$ et $B \in F_\infty^X$ engendre une tribu sur Ω contenant F_∞^X .

COROLLAIRE 2 - Pour toute application h de Ω dans

$$[a, b] \subset [-\infty, +\infty], \hat{F}_T^X \vee F_\infty^X\text{-mesurable,}$$

il existe une application \bar{h} de $\Omega \times \Omega$ dans $[a, b]$ telle que

(a) \bar{h} est $\hat{F}_T^X \otimes F_\infty^X$ -mesurable.

(b) $h(\omega) = \bar{h}(\omega, \theta_T(\omega)) = \bar{h}(\alpha_T(\omega), \theta_T(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(c) \bar{h} a une valeur constante (arbitraire) sur l'ensemble

$$\{\omega, \omega' \mid \omega, \omega' \in \Omega \times \Omega \text{ et } X_T(\omega) \neq X_0(\omega')\} \quad (2)$$

Pour établir le théorème, il suffit de vérifier que si f est une fonction (numérique) \mathcal{B}_δ -mesurable sur E_δ , et si $t \in R_+$, $f \circ X_t$ est $\hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(F_\infty^X)$ -mesurable. Or

$$f \circ X_t = f \circ X_t \cdot 1_{\{t \leq T\}} + f \circ X_t \cdot 1_{\{T < t\}}.$$

Le premier terme est \hat{F}_T^X -mesurable ; étudions le deuxième : on a,

$$f \circ X_t \cdot 1_{\{T < t\}}(\omega) = f(X_{(t-T)^+}(\theta_T(\omega))) \cdot 1_{\{T < t\}}(\omega) \quad (\omega \in \Omega) ;$$

d'où le résultat en remarquant que l'application

(1) Voir le début de ce paragraphe.

(2) Voir le n° 5.2.

$$\omega \longrightarrow ((t - T(\omega))^+, \theta_T(\omega))$$

est mesurable pour les tribus $\hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(F_\infty^X)$ et $\mathcal{B}_{R_+} \otimes F_\infty^X$, et que l'application $(s, \omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ est $\mathcal{B}_{R_+} \otimes F_\infty^X$ -mesurable d'après la mesurabilité de X .

Le corollaire 1 résulte directement du théorème ainsi que l'existence d'une fonction \bar{h} ayant les propriétés (a) et (b) (corollaire 2); on en déduit une fonction \bar{h} ayant aussi la propriété (c) puisque $X_T(\omega) = X_0(\theta_T(\omega))$ et que

$$\{\omega, \omega' \mid X_T(\omega) \neq X_0(\omega')\} \in \hat{F}_T^X \otimes F_\infty^X.$$

4.5 - Décomposition de \hat{F}_U^X -

THEOREME (1) - On suppose que la fonction aléatoire X est progressivement mesurable (2), et que S et T sont des temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. (F_t^X)). Alors, si on désigne par U le temps d'arrêt $T + S \circ \theta_T$, on a

$$\hat{F}_U^X = \overline{\hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(\hat{F}_S^X)} \quad (3) \quad (\text{resp. } F_U^X = F_T^X \vee \theta_T^{-1}(F_S^X)).$$

En effet, en vertu du théorème 2.4, il suffit de montrer que $F_\infty^U \subset \hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(\hat{F}_S^X)$, ou encore que si $t \in R_+$ et si f est une fonction (numérique) \mathcal{B}_δ -mesurable sur E_δ , $f \circ X_t^U$ est $\hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(\hat{F}_S^X)$ -mesurable. Or :

$$f \circ X_t^U = f \circ X_t \cdot 1_{\{t \leq T\}} + f \circ X_t^U \cdot 1_{\{T < t\}}.$$

Le premier terme est \hat{F}_T^X -mesurable; quant au deuxième, remarquons que, si $t > T(\omega)$:

$$\begin{aligned} X_{[t-T(\omega)] \wedge S(\theta_T(\omega))}(\theta_T(\omega)) &= X_{[(t-T(\omega)) \wedge S(\theta_T(\omega))] + T(\omega)}(\omega) \\ &= X_{t \wedge U(\omega)}(\omega) = X_t^U(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi,

(1) Voir le début de ce paragraphe.

(2) Voir le n° 0.5.

(3) Voir le n° 0.1.

$$f \circ X_t^u(\omega) 1_{\{T < t\}}(\omega) = f(X_{[t-T(\omega)]^+ \wedge S(\theta_T(\omega))}(\theta_T(\omega))) 1_{\{T < t\}}(\omega).$$

Or, l'application $\omega \rightarrow X_{[t-T(\omega)]^+ \wedge S(\theta_T(\omega))}(\theta_T(\omega))$ est composée de $\omega \rightarrow ((t-T(\omega))^+, \theta_T(\omega))$ qui est mesurable de $(\Omega, \hat{F}_T^X \vee \theta_T^{-1}(\hat{F}_S^X))$ dans $(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}_{R_+} \otimes \hat{F}_S^X)$, et de l'application $(u, \omega) \rightarrow X_{u \wedge S(\omega)}(\omega)$ qui est mesurable de $(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}_{R_+} \otimes \hat{F}_S^X)$ dans (E, \mathcal{B}) , d'après le théorème 2.5 et la progressive mesurabilité de X ; d'où le résultat dans le cas de la famille (\hat{F}_t^X) , et par une procédure analogue dans celui de la famille (F_t^X) .

5. Décomposition d'un temps d'arrêt par rapport à un autre temps d'arrêt

On suppose, dans ce paragraphe, comme dans le précédent que la fonction aléatoire X admet une famille (α_t) d'opérateurs d'arrêt et une famille (θ_t) d'opérateurs de translation(1).

5.1- On dit que la fonction aléatoire X possède la *propriété de raccordement* si pour tout $t \in R_+$, $\omega \in \Omega$ et $\omega' \in \Omega$ tels que $X_t(\omega') = X_t(\omega)$, il existe $\omega'' \in \Omega$ tel que :

$$\omega'' \sim \omega (R_t^X) \quad \text{et} \quad \theta_t(\omega'') \sim \omega' (R_\infty^X).$$

5.2- Sous les hypothèses du théorème 4.4, la propriété de raccordement entraîne que la fonction \bar{h} introduite dans le corollaire 2 de ce théorème est déterminée de façon unique par les conditions (a), (b), (c) : en effet, pour tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$, tel que $X_t(\omega') = X_t(\omega)$, il existe, d'après la propriété de raccordement et le théorème 1.3, une trajectoire $\omega'' \in \Omega$ telle que $\omega'' \sim \omega (R_t^X)$ et $\theta_T(\omega'') \sim \omega' (R_\infty^X)$; il en résulte, en vertu de la $\hat{F}_T^X \otimes F_\infty^X$ -mesurabilité de \bar{h} , que $\bar{h}(\omega, \omega') = \bar{h}(\omega'', \theta_T(\omega'')) = \bar{h}(\omega'')$; d'où l'unicité annoncée, compte-tenu de la propriété (c).

(1) Les fonctions aléatoires courantes à valeurs dans un espace LCD satisfont à ces hypothèses (voir l'appendice 1).

5.3 - Décomposition d'un temps d'arrêt -

THEOREME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable et possède la propriété de raccordement (1). Alors, si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) (resp. (F_t^X)), et V un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^X) (2), il existe une application \bar{V} de $\Omega \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

- \bar{V} est $\hat{F}_T^X \otimes F_\infty^X$ -mesurable (resp. $F_T^X \otimes F_\infty^X$ -mesurable).
- $T(\omega) \vee V(\omega) = T(\omega) + V(\omega, \theta_T(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- $\bar{V}(\omega, \omega') = 0$ si $T(\omega) = +\infty$ et $X_0(\omega') = X_T(\omega)$; et $\bar{V}(\omega, \omega') = +\infty$ si $X_0(\omega') \neq X_T(\omega)$ (3).

En outre, pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $\omega' \rightarrow \bar{V}(\omega, \omega')$ est un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^X) (2).

En effet, posons $V'(\omega) = T(\omega) \vee V(\omega) - T(\omega)$ si $T(\omega) < +\infty$, et $V'(\omega) = 0$ si $T(\omega) = +\infty$. V' est $\hat{F}_T^X \vee F_\infty^X$ -mesurable; donc, d'après le corollaire 2 du théorème 4.4, et le n° 5.2 ci-dessus, il existe une application \bar{V} de $\Omega \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$ et une seule, $\hat{F}_T^X \otimes F_\infty^X$ -mesurable et telle que $V'(\omega) = \bar{V}(\omega, \theta_T(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $\bar{V}(\omega, \omega') = +\infty$ (3) si $X_0(\omega') \neq X_T(\omega)$. On en déduit d'abord que

$$T(\omega) \vee V(\omega) = T(\omega) + \bar{V}(\omega, \theta_T(\omega))$$

pour tout $\omega \in \Omega$, et que $\bar{V}(\omega, \theta_T(\omega)) = 0$ si $T(\omega) = +\infty$; mais, si $X_0(\omega') = X_T(\omega)$, et $T(\omega) = +\infty$, on a $X_T(\omega) = \delta$, donc

$$\theta_T(\omega) = \omega_\delta, \quad X_0(\omega') = \delta, \quad \text{et} \quad \omega' \sim \omega_\delta (R_\infty^X);$$

d'où $\bar{V}(\omega, \omega') = \bar{V}(\omega, \theta_T(\omega)) = 0$ d'après la F_∞^X -mesurabilité de $\bar{V}(\omega, \cdot)$ et le lemme 1.2.

Ainsi \bar{V} possède les propriétés (a), (b), (c), et il reste

(1) En plus des hypothèses faites au début du paragraphe.

(2) Sans chapeau (voir la remarque 5.6 ci-dessous). Le théorème subsiste si on remplace la famille (\hat{F}_t^X) par la famille (F_t^X) .

(3) On peut ici remplacer $+\infty$ par 0.

seulement à établir que $\bar{V}(\omega, \cdot)$ est un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^x) ; ou encore, d'après le théorème 3.3, que, pour $\omega \in \Omega$ et $t \in R_+$,

$$(1) \quad \bar{V}(\omega, \omega_1) < t \quad \text{et} \quad \omega_2 \sim \omega_1 (R_t^x) \implies \bar{V}(\omega, \omega_2) = \bar{V}(\omega, \omega_1).$$

Supposons donc que $\bar{V}(\omega, \omega_1) < t$ et $\omega_2 \sim \omega_1 (R_t^x)$. Si $T(\omega) = +\infty$, la conclusion est immédiate car $\omega_2 \sim \omega_1 (R_t^x)$ entraîne $X_0(\omega_2) = X_0(\omega_1)$. Supposons donc que $T(\omega) < +\infty$ et soit $u = T(\omega)$. D'après la propriété de raccordement, il existe $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ dans Ω tels que :

$$(2) \quad \bar{\omega}_i \sim \omega (R_u^x) \quad (i = 1, 2).$$

$$(3) \quad \theta_u(\bar{\omega}_i) \sim \omega_i (R_\infty)$$

De la relation (2) résulte que $T(\bar{\omega}_i) = T(\omega) = u$ (théorème 1.3) et que $\bar{V}(\bar{\omega}_i, \cdot) = \bar{V}(\omega, \cdot)$ (théorème 1.4) ; et il résulte alors de la relation (3) que :

$$\theta_r(\bar{\omega}_i) \sim \omega_i (R_\infty^x), \quad \text{donc que, pour } i = 1, 2,$$

$$(4) \quad \bar{V}(\omega, \omega_i) = \bar{V}(\bar{\omega}_i, \theta_r(\bar{\omega}_i)) = V(\bar{\omega}_i) - T(\bar{\omega}_i).$$

Par ailleurs, les relations (2) et (3), jointes à l'hypothèse $\omega_2 \sim \omega_1 (R_t^x)$ entraînent que :

$$(5) \quad \bar{\omega}_2 \sim \bar{\omega}_1 (R_{t+u}^x).$$

Comme $V(\bar{\omega}_1) < t + u$ d'après l'hypothèse $\bar{V}(\omega, \omega_1) < t$, le théorème 3.3 entraîne que $\bar{V}(\bar{\omega}_2) = V(\bar{\omega}_1)$; d'où le résultat, d'après (4).

5.4 - Sous les hypothèses du théorème 5.3 sur X et T , l'application $V \longrightarrow \bar{V}$ a la propriété suivante qui résulte immédiatement de l'unicité :

COROLLAIRE - Si (V_n) est une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^x) , et si $V = \sup_n V_n$, on a aussi $\bar{V} = \sup_n \bar{V}_n$.

5.5 - Signalons enfin l'extension suivante qui est utile (1) pour étudier le temps d'arrêt V entre deux temps d'arrêt T et $U = T + S \circ \theta_T$:

COROLLAIRE - Soient S un deuxième temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^X) et U le temps d'arrêt $T + S \circ \theta_T$ (n° 4.3).

Posons $V^*(\omega) = V(\omega)$ si $\omega \in \{T \leq V < U\}$,
 et $V^*(\omega) = +\infty$ si $\omega \notin \{T \leq V < U\}$;
 $\bar{V}^*(\omega, \omega') = \bar{V}(\omega, \omega')$ si $\omega \in \{T \leq V\}$ et $\bar{V}(\omega, \omega') < S(\omega')$,
 et $\bar{V}^*(\omega, \omega') = +\infty$ si $\omega \notin \{T \leq V\}$ ou $\bar{V}(\omega, \omega') \geq S(\omega')$.

Alors V^* est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^X) , et on a les propriétés suivantes :

- (a*) \bar{V}^* est $\hat{F}_T^X \otimes \hat{F}_\infty^X$ -mesurable.
 (b*) $V^*(\omega) = T(\omega) + \bar{V}^*(\omega, \theta_T(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.
 (c*) $\{T \leq V\} \in \hat{F}_T^X$, et $\{T \leq V^* < U\} = \{V^* < +\infty\}$
 $= \{T \leq V\} \cap \{\omega \mid \bar{V}(\omega, \theta_T(\omega)) < S(\theta_T(\omega))\}$
 $= \{T \leq V\} \cap \{\omega \mid \bar{V}^*(\omega, \theta_T(\omega)) < +\infty\}$.
 (d*) Pour chaque $\omega \in \Omega$, $\bar{V}^*(\omega, \cdot)$ est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^X) .
 (e*) Soit h une fonction numérique sur Ω , F_{v+}^X -mesurable, et \bar{h} l'unique (2) fonction numérique sur $\Omega \times \Omega$ réalisant la décomposition de h par rapport au temps d'arrêt T (corollaire 2 du théorème 4.4) et nulle sur $\{\omega, \omega' \mid X_T(\omega) \neq X_0(\omega')\}$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction numérique
 $\omega_1 \longrightarrow 1_{\{\bar{V}^*(\omega, \cdot) < S\}}(\omega_1) \bar{f}(\omega, \omega_1)$ est $\hat{F}_{\bar{V}^*(\omega, \cdot)+}^X$ -mesurable.

Que V^* soit un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^X) est un résultat classique puisque $\{T \leq V < U\} \in \hat{F}_{v+}^X$; on peut aussi le dé-

(1) Voir à ce sujet Courrégé et Priouret [6], n° 1.3.5.

(2) Voir le n° 5.2.

duire du théorème 3.3. Que $\{T \leq V\}$ appartienne à \hat{F}_T^x est une conséquence de ce même théorème et du théorème 3.4 en considérant l'ensemble $\{V < T\}$. On en déduit que \bar{V}^* est $\hat{F}_T^x \otimes \hat{F}_\infty^x$ -mesurable, puisque \bar{V} l'est ainsi que

$$M = (\{T \leq V\} \times \Omega) \cap \{\omega, \omega' \mid \bar{V}(\omega, \omega') < S(\omega')\}.$$

La relation $V^*(\omega) = T(\omega) + \bar{V}^*(\omega, \theta_T(\omega))$ résulte de la propriété (b) de \bar{V} (théorème 5.3) si $\omega \in \{T \leq V < U\}$; elle est aussi vérifiée si $\omega \notin \{T \leq V < U\}$ et $T(\omega) = +\infty$ ou si $\omega \notin \{T \leq V\}$. Enfin, si $V(\omega) \geq U(\omega)$ et $T(\omega) < +\infty$, on a $\bar{V}(\omega, \theta_T(\omega)) \geq S(\theta_T(\omega))$, d'où la propriété (b*) par définition de \bar{V}^* . La propriété (c*) peut être établie de façon analogue, et la propriété (d*) est classique (elle peut aussi être déduite du théorème 3.3).

Enfin, la propriété (e*) réclame une simple vérification à partir du théorème 3.4, en utilisant la propriété de raccordement comme au n° 5.3

5.6 - REMARQUE - Le corollaire 5.5 tire son intérêt du fait que le théorème 5.3 ne permet d'associer une fonction $\bar{V}, \hat{F}_T^x \otimes \hat{F}_\infty^x$ -mesurable, qu'à un temps d'arrêt V de la famille (F_{t+}^x) (sans chapeau). Si T et S sont des temps d'arrêt de la famille (F_t^x) , cette difficulté disparaît, et il suffit d'appliquer le théorème 5.3 au temps d'arrêt V^* .

APPENDICE I

Fonction aléatoires typiques

A1.1 - Le présent appendice a pour but de situer dans le cadre employé ici, les fonctions aléatoires pour lesquelles les éléments de l'ensemble Ω sont exactement des applications de R_+ dans E . Ce sont ces fonctions aléatoires qui seront appelées typiques (voir le n° A1.3 ci-dessous).

A1.2 - **La fonction aléatoire canonique a cimetièrè** - (E, \mathcal{B}) étant un espace mesurable, et $(E_\delta, \mathcal{B}_\delta)$ étant défini comme au n° 0.3, on considère l'espace $E_\delta^{R_+}$ de toutes les applications de R_+ dans E_δ , et on désigne, pour chaque $t \in R_+$, par $X_t^{(E)}$ la projection $\varphi \rightarrow \varphi(t)$ de $E_\delta^{R_+}$ sur E_δ , et par $\theta_t^{(E)}$ et $\alpha_t^{(E)}$ les opérateurs

de translation et d'arrêt sur $E_\delta^{R_+}$ entièrement définis par

$$X_s^{(E)} \circ \theta_t^{(E)} = X_{s+t}^{(E)} \quad \text{et} \quad X_s^{(E)} \circ \alpha_t^{(E)} = X_{s \wedge t}^{(E)} \quad (s \in R_+);$$

on désigne enfin par $\omega_\delta^{(E)}$ la trajectoire constante en δ , et par $\Omega^{(E)}$ le sous-ensemble de $E_\delta^{R_+}$ formé des trajectoires φ telles que $\{t \mid t \in R_+, \text{ et } \varphi(t) = \delta\}$ est un intervalle de la forme

$$[a, +\infty[\quad (\text{où } a \in [0, +\infty]).$$

Pour chaque $t \in R_+$, $\theta_t^{(E)}$ et $\alpha_t^{(E)}$ appliquent $\Omega^{(E)}$ dans lui-même ; il en résulte que le terme :

$$X^{(E)} = (\Omega^{(E)}, \omega_\delta^{(E)}, (X_t^{(E)})_{t \in R_+}, E, \mathcal{B}, \delta)$$

est une fonction aléatoire (à cimetière) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) admettant comme familles d'opérateurs de translation et d'arrêt les restrictions à $\Omega^{(E)}$ des familles $(\theta_t^{(E)})$ et $(\alpha_t^{(E)})$. En outre, $X^{(E)}$ possède la *propriété de raccordement* (n° 5.1).

Conformément à la terminologie de Dynkin, $X^{(E)}$ est la *fonction aléatoire canonique (à cimetière) à valeurs dans (E, \mathcal{B})* .

A1.3 - Fonctions aléatoires typiques - Une fonction aléatoire (à cimetière) $X = (\Omega, F, \omega_\delta, (X_t))$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}) est dite *typique* si elle possède la *propriété de raccordement* et si elle est induite par $X^{(E)}$ au sens suivant : Ω est un sous-ensemble de $\Omega^{(E)}$ invariant par $\theta_t^{(E)}$ et $\alpha_t^{(E)}$ pour chaque $t \in R_+$; X_t est, pour chaque $t \in R_+$, la restriction de $X_t^{(E)}$ à Ω , et $\omega_\delta = \omega_\delta^{(E)}$.

Les restrictions à Ω des familles $(\theta_t^{(E)})$ et $(\alpha_t^{(E)})$ constituent alors des familles d'opérateurs de translation et d'arrêt de X (les seules possibles d'ailleurs).

A1.4 - Exemples - On suppose que E est un espace localement compact à base dénombrable, que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ est sa tribu borélienne et que E_δ est le compactifié d'Alexandrov de E .

1er exemple. Fonction aléatoire de Hunt - Ω est le sous-ensemble de $\Omega^{(E)}$ formé des trajectoires ω continues à droite pourvues d'une limite à gauche en tout point $t \in R_+$ tel que $X_t^{(E)}(\omega) \neq \delta$.

2ème exemple. Fonction aléatoire continue - Ω est le sous-ensemble de $\Omega^{(E)}$ formé des trajectoires ω continues en tout point $t \in R_+$ tel que $X_t^{(E)}(\omega) \neq \delta$.

3ème exemple. Fonction aléatoire en gradins (1) - Ω est le sous-ensemble de $\Omega^{(E)}$ formé des trajectoires ω pour lesquelles il existe une suite croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ de nombres ≥ 0 et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E_δ tels que :

- $t_0 = 0$, $\text{Sup}_n t_n = \sigma_E^X(\omega)$ (2) ;
- $X_t(\omega) = a_n$ pour tout $n \geq 0$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

(de telles trajectoires sont continues à droite).

Al.5 - Transformation canonique d'une fonction aléatoire ; type d'une fonction aléatoire - $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$ désignant une fonction aléatoire à valeur dans (E, \mathcal{B}) , on définit une application γ_X de Ω dans $\Omega^{(E)}$ au moyen des relations : $X_t^{(E)} \circ \gamma_X = X_t$ ($t \in R_+$) : γ_X est la transformation canonique de la fonction aléatoire X .

Si X admet des familles d'opérateurs de translation et d'arrêt (θ_t) et (α_t) , et possède la propriété de raccordement, on a

$$\theta_t^{(E)} \circ \gamma_X = \gamma_X \circ \theta_t, \quad \alpha_t^{(E)} \circ \gamma_X = \gamma_X \circ \alpha_t. \quad (t \in R_+),$$

et la fonction aléatoire induite sur $\gamma_X(\Omega)$ par $X^{(E)}$ est typique (n° Al.3 ci-dessus).

Plus généralement, soient $X = (\Omega, \omega_\delta, (X_t))$ une fonction aléatoire à cimetière (a priori quelconque) et $X^0 = (\Omega^0, \omega_\delta^{(E)}, (X_t^0))$ une fonction aléatoire typique à valeurs toutes deux dans (E, \mathcal{B}) . On peut exprimer la relation $\gamma_X(\Omega) \subset \Omega^0$ (autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow X_t(\omega)$ de ω appartient à Ω^0) en disant que X est de type X^0 . (Par exemple si X^0 est la fonction aléatoire continue (n° Al.4, ex. 2), les assertions " X est continue" et " X est de type X^0 " sont équivalentes).

(1) Voir Dynkin [7], parag. 3.13.
 (2) σ_E^X désigne la durée de vie de X (autrement dit, le temps de sortie de E pour X , voir l'appendice 2).

Notons enfin que, la fonction aléatoire X étant donnée, il existe une fonction aléatoire typique $X^m = (\Omega^m, \omega_\delta^{(E)}, (X_t^m))$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}) , et une seule, telle que pour toute fonction aléatoire typique $X^o = (\Omega^o, \omega_\delta^{(E)}, (X_t^o))$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}) , on ait :

$$X \text{ est du type } X^o \iff \Omega^m \subset \Omega^o.$$

(En effet, il est facile de vérifier que si $(X_t^i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions aléatoires typiques à valeurs dans (E, \mathcal{B})

$$(X_t^i = (\Omega^i, \omega_\delta^{(E)}, (X_t^i)), i \in I) \text{ et si on pose,}$$

$$\bar{\Omega} = \bigcap_i \Omega^i, \quad \bar{X}_t(\omega) = X_t^{(E)}(\omega) \quad (t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \bar{\Omega}),$$

$\bar{X} = (\bar{\Omega}, \omega_\delta^{(E)}, (\bar{X}_t))$ est aussi une fonction aléatoire typique à valeurs dans (E, \mathcal{B}) .

On pourrait appeler X^m le type de X .

APPENDICE II

Exemples de temps d'arrêt des familles (F_t^x) , (\hat{F}_t^x) et (\hat{F}_{t+}^x) : temps de sortie (1)

Pour chaque sous-ensemble Γ de E , on désigne par σ_Γ^x le temps de sortie de Γ pour X :

$$\sigma_\Gamma^x(\omega) = \inf \{t \mid t \in [0, +\infty] \text{ et } X_t(\omega) \notin \Gamma\} \quad (\omega \in \Omega).$$

A2.1 - THEOREME - On suppose que la fonction aléatoire X est mesurable (2). Alors, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, σ_Γ^x est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_{t+}^x) .

En effet, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, soit A_t l'ensemble $\{(u, \omega) \mid u < t \text{ et } X_u(\omega) \in \Gamma\}$; en vertu de la mesurabilité de X , $A_t \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}_t^x$,

(1) Voir à ce sujet, Dynkin 7, chap. 4, Meyer 10 et Courrège 3.

(2) Voir les n° 0.5 et 0.6.

si $\Gamma \in \mathcal{B}$. Mais $\{\sigma_\Gamma^x < t\}$ est la projection de A_t sur Ω ; donc, d'après le théorème de projection des ensembles mesurables (voir Meyer [10], ou Courrège [3]), $\{\sigma_\Gamma^x < t\} \in \overline{F}_\infty^x$; autrement dit, σ_Γ^x est F_∞^x -mesurable ; le résultat annoncé est alors une conséquence immédiate du théorème 3.3.

A2.2 - On suppose que E est un espace topologique métrisable, que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ est sa tribu borélienne, et que la fonction aléatoire X à valeurs dans (E, \mathcal{B}_E) (1) est continue à droite (2) (elle est alors mesurable). Alors :

(α) si Γ est un fermé de E , σ_Γ^x est un temps d'arrêt de la famille (F_{t+}^x) (sans chapeau).

(β) si Γ est un ouvert de E , σ_Γ^x est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t^x) ; si, de plus, X est continue (App. 1, n° A1.4 ex. 2, et n° A1.5) σ_Γ^x est un temps d'arrêt de la famille (F_t^x) .

(γ) si X est une fonction aléatoire à gradins (App. 1, n° A1.4, ex. 3 et n° A1.5) pour chaque entier n , le temps du n -ième saut de X est un temps d'arrêt de la famille (F_t^x) .

En effet, si Γ est fermé, on a

$$\{\sigma_\Gamma^x < t\} = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q}_+ \\ r < t}} \{X_r \notin \Gamma\} \quad (3),$$

d'où la propriété (α).

Supposons que Γ soit ouvert ; σ_Γ^x est \overline{F}_∞^x -mesurable d'après le théorème A2.1. Utilisons le théorème 1.3 : soient t, ω, ω' , tels que $\sigma_\Gamma^x(\omega) \leq t$ et $\omega' \sim \omega (R_t^x)$; si $\sigma_\Gamma^x(\omega) < t$, on a $\sigma_\Gamma^x(\omega') = \sigma_\Gamma^x(\omega)$ d'après les théorèmes A2.1 et 3.3 ; si $\sigma_\Gamma^x(\omega) = t$, on a $X_t(\omega) \notin \Gamma$, puisque $E_s \setminus \Gamma$ est fermé ; donc $X_t(\omega') \notin \Gamma$; et $\sigma_\Gamma^x(\omega') \leq t$. D'où le résultat, puisque $\sigma_\Gamma^x(\omega') < t$ et $\omega' \sim \omega (R_t^x)$ contredirait l'hypothèse $\sigma_\Gamma^x(\omega) = t$ d'après le théorème 3.3. Si, de plus, X est conti-

(1) Voir le n° 0.6.

(2) Autrement dit, que, pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ de l'intervalle $[0, \sigma_\Gamma^x(\omega)[$ dans E est continue à droite.

(3) \mathbb{Q} , désigne l'ensemble des nombres rationnels ≥ 0 .

nue, on a $\sigma_{\Gamma}^x = \sup_n \sigma_{K_n}^x$, où (K_n) est une suite croissante de fermés dont la réunion est Γ . σ_{Γ}^x est ainsi F_{∞}^x -mesurable, d'après (a), donc un temps d'arrêt de (F_t^x) d'après le raisonnement précédent.

Supposons enfin que X soit à gradins, et soit T_n le temps du n -ième saut ($n \geq 1$) : par définition

$$T_1(\omega) = \inf \{u \mid u \in [0, +\infty] \text{ et } X_u(\omega) \neq X_0(\omega)\}$$

et si $X_0(\omega) \neq \delta$ et $T_1(\omega) = +\infty$ si $X_0(\omega) = \delta$. Donc, si

$$t \in \mathbb{R}_+, \{T_1 \leq t\} = \left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q}_+ \\ r < t}} \{X_r \neq X_0\} \right) \cup \{X_t \neq X_0\};$$

T_1 est donc un temps d'arrêt de la famille (F_t^x) ; il en est de même de T_n d'après le lemme 4.3, puisque $T_{n+1} = T_n + T_1 \circ \theta_{T_n}$ ($n \geq 1$).

APPENDICE III

Evènements postérieurs à T

et relation d'équivalence $\theta_T^{-1}(\mathbb{R}_{\infty}^x)$ (1)

A3.1 - Relation d'équivalence S_H^x - Soit H une application de Ω dans $[0, +\infty]$; on définit la relation d'équivalence S_H^x sur Ω en posant :

$$\omega \sim \omega' (S_H^x) \iff \theta_H(\omega) \sim \theta_H(\omega') (R_{\infty}^x).$$

Ainsi la relation $\omega \sim \omega' (S_H^x)$, équivaut à $X_{H+\omega}(\omega) = X_{H+\omega'}(\omega')$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (ceci sans que l'on ait nécessairement $H(\omega) = H(\omega')$; voir le n° 3 ci-dessous à ce sujet).

A3.2 - LEMME - Supposons que la fonction aléatoire X est mesurable (2) et possède la propriété de raccordement (3), et soit T un

(1) Les hypothèses sur X sont les mêmes qu'au paragraphe 4.

(2) N° 0.5.

(3) N° 5.1.

temps d'arrêt de la famille (F_t^x) ; alors la tribu $\theta_T^{-1}(F_\infty^x)$ est identique à l'ensemble des événements de F_∞^x qui sont saturés pour S_T^x .

En effet, d'après le lemme 4.1, $\theta_T^{-1}(F_\infty^x) \subset F_\infty^x$, d'une part; et d'autre part tout événement A de la forme $\theta_T^{-1}(B)$ est saturé pour S_T^x . Inversement, supposons que $A \in F_\infty^x$ et que A soit saturé pour S_T^x . D'après le corollaire 2 du théorème 4.4, il existe une fonction numérique Φ sur $\Omega \times \Omega$, $F_T^x \otimes F_\infty^x$ -mesurable et telle que $1_A(\omega) = \Phi(\omega, \theta_T(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, posons $\varphi(\omega) = \Phi(\alpha_\omega(\omega), \omega)$, et montrons que l'on a $1_A = \varphi \circ \theta_T$; le lemme en résultera puisque φ est F_∞^x -mesurable. Il suffit d'établir que si ω_1, ω_2 et ω' sont tels que $X_T(\omega_1) = X_T(\omega_2) = X_\infty(\omega')$, alors $\Phi(\omega_1, \omega') = \Phi(\omega_2, \omega')$ (prendre $\omega_1 = \alpha_\omega(\theta_T(\omega))$, $\omega_2 = \omega$, et $\omega' = \theta_T(\omega)$). Or, la propriété de raccordement et le théorème 1.3 entraînent qu'il existe ω'_1 et ω'_2 tels que :

$$\omega'_i \sim \omega_i (R_T^x) \quad \text{et} \quad \theta_T(\omega'_i) \sim \omega' (R_\infty^x) \quad (i = 1, 2,).$$

On a donc

$$\Phi(\omega_i, \omega') = \Phi(\omega'_i, \theta_T(\omega'_i)) = 1_A(\omega'_i) \quad (i = 1, 2,);$$

d'où le résultat, puisque $\omega'_1 \sim \omega'_2 (S_T^x)$.

A3.3 - REMARQUE - Soient T et S deux temps d'arrêt de la famille (F_t^x) et $U = T + S \circ \theta_T$. On a : $\theta_U = \theta_S \circ \theta_T$, donc :

$$(1) \quad \theta_U^{-1}(F_\infty^x) = \theta_T^{-1}(\theta_S^{-1}(F_\infty^x)),$$

et, en particulier

$$(2) \quad \theta_U^{-1}(F_\infty^x) \subset \theta_T^{-1}(F_\infty^x),$$

ce qui peut s'exprimer en disant qu'un événement postérieur à U est aussi postérieur à T . Cette propriété ne subsiste pas pour un temps d'arrêt quelconque $U \geq T(1)$. Le théorème 5.3 permet de montrer que la relation (2) n'est vérifiée pour un temps d'arrêt $U > T$ que si U est de la forme $T + S \circ \theta_T$.

(1) "Un événement postérieur à U peut dépendre du passé avant T ".

Ce résultat ne contredit pas le lemme A3.2 : un événement saturé pour S_0^x n'est pas nécessairement saturé pour $S_T^x(1)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLUMENTHAL (R. M.) & GETTOOR (R. K.). - A theorem on stopping times. Note multigraphiée.
- [2] CHUNG (K. L.) & DOOB (J. L.). - Fields, optionality and measurability, *Am. J. Math* 87 n° 2 (1965).
- [3] COURREGÉ (P.). - *Théorie des processus de Markov*. Cours multigraphié, Secrétariat de l'Institut Henri Poincaré, Paris (1964).
- [4] COURREGÉ (P.) & PRIOURET (P.). - Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire propriétés de décomposition, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 259 (1964), 3933-3935.
- [5] COURREGÉ (P.) & PRIOURET (P.). - Recollements des processus de Markov continus, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 259 (1964), 4220-4222.
- [6] COURREGÉ (P.) & PRIOURET (P.). - Recollements de processus de Markov, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 14 (1965).
- [7] DYNKIN (E. B.). - *Markovskie processy*. Moscou, Fizmatgiz (1963).
- [8] ITO (K.) & McKEAN (H. P.). - *Diffusion processes and their sample paths*. Berlin, Springer (1965).
- [9] McKEAN (H. P.) & TANAKA (H.). - Additive functionals of the Brownian path, *Memoirs Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A Math.*, 33 (1961), 476-506.
- [10] MEYER (P. A.). - *Probabilité et Potentiel*. A paraître.

Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris (5ème), France

Reçu le 15 mai 1965

(1) Dans le même ordre d'idée, on sait que T n'est pas, en général, $\theta_T^{-1}(F_\infty^x)$ -mesurable.