



**HAL**  
open science

## Sur les plans partiellement équilibrés

G Heuzé

► **To cite this version:**

| G Heuzé. Sur les plans partiellement équilibrés. Annales de l'ISUP, 1970, XIX (4), pp.49-54. <hal-04083508>

**HAL Id: hal-04083508**

**<https://hal.science/hal-04083508v1>**

Submitted on 27 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

## SUR LES PLANS PARTIELLEMENT EQUILIBRES

G. HEUZÉ

### INTRODUCTION.

Cet article constitue un prolongement de [1] relatif aux Plans Partiellement Equilibrés.

Le théorème 1 montre que sur tout schéma d'association à deux classes on peut construire au moins deux P B D.

Le théorème 2 fournit un critère permettant, après examen de leurs paramètres, de réduire éventuellement le nombre de classes associées de certains P B D. Ce critère peut être employé avec succès pour certains P B D de [2] et [3].

Les théorèmes 3 et 4 enfin - dont les réciproques surtout sont utiles - permettent de déceler la structure intime de certains P B D (ils sont applicables par exemple à certains P B D de [2]).

Les notations sont celles de [1].

*DEFINITION 1 - Soit E un ensemble fini. Un schéma d'association à m classes associées sur E est constitué par la donnée de  $(m + 1)$  relations binaires  $S_0, S_1, \dots, S_m$  définies dans E et vérifiant*

(A 1)  $S_0$  est la relation d'égalité

(A 2) pour  $i = 0, 1, \dots, m$   $S_i$  est symétrique (deux éléments vérifiant  $S_i$  sont dits *i*-associés).

(A 3) les ensembles représentatifs de  $S_0, S_1, \dots, S_m$  forment une partition  $E \times E$

(A 4)  $x$  et  $y$  étant *i*-associés,  $\text{Card}(S_j(x) \cap S_k(y))$  ne dépend que de  $i, j, k = 1, \dots, m$

*DEFINITION 2 - Un Plan Partiellement Equilibré (en abrégé P B D "Partially Balanced Design") à m classes associées sur un ensemble E fini est constitué par la donnée d'une famille de parties  $B_1, B_2, \dots, B_b$  (appelées blocs) vérifiant :*

(B1)  $\text{Card}(B_\ell)$  est indépendant de  $\ell$ ,  
et déterminant un schéma d'association à m classes sur E de telle sorte que :

(B 2)  $x$  et  $y$  étant  $i$ -associés,  $\sum_{\ell=1}^b \text{Card} (\{(x,y)\} \cap B_{\ell}^i)$  ne dépend que de  $i=0,1,\dots,m$  (on le note  $\lambda_i$ )

**THEOREME 1** - Etant donné un schéma d'association à deux classes sur  $E$  il existe au moins deux P B D sur  $E$  admettant pour schéma d'association le schéma donné.

**DEMONSTRATION** - Si  $i \in \{1,2\}$  définissons  $i^*$  par  $\{i, i^*\} = \{1,2\}$ . Posons, pour  $x \in E$ ,  $B_x = \{x\} \cup S_i(x)$ . La famille  $(B_x)$  constitue un des P B D annoncés. En effet :

(B 1) se vérifie immédiatement car  $\text{Card} (B_x) = n_i + 1$

(B 2) résulte de trois évaluations qui donnent :

$$\lambda_0 = n_i + 1 \quad (\text{immédiat})$$

$$\lambda_{i^*} = 0 \quad (\text{immédiat})$$

$$\lambda_i = p_{ii}^i + 2 \quad (\text{en effet on cherche à dénombrer tous les } \bar{z}$$

vérifiant  $x \in B_z$  et  $y \in B_z$ ,  $x$  et  $y$  étant  $i$ -associés ; or cette condition est équivalente à  $z \in (S_i(x) \cap S_i(y)) \cup \{x\} \cup \{y\}$  d'où le résultat).

**REMARQUE** Les blocs sont deux à deux distincts sauf dans le cas où le schéma est un GD à 2 classes dont  $S_0 \cup S_i$  est l'équivalence ([1], 1.2 application). En effet  $B_x = B_y$  (avec  $x \neq y$ ) impose  $x$  et  $y$   $i$ -associés et  $n_i = p_{ii}^i + 1$ . Or  $n_i = 1 + p_{ii}^i + p_{ii}^{i^*}$  ([1] théorème 1.1.4). Donc  $p_{ii}^{i^*} = 0$ . Ce qui implique ([1] théorème 1.2.2.) notre assertion.

**THEOREME 2** - Pour que, dans un P B D à  $m$  classes associées, les  $h$  classes d'indices  $i_1, i_2, \dots, i_h$  puissent se confondre en une seule, il faut et il suffit que :

$$(2.1) \quad \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_h}$$

(2.2) Les  $h$  matrices carrées d'ordre  $(m-h)$  obtenues comme restrictions de  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_h}$  aux lignes et colonnes d'indices différents de  $i_1, i_2, \dots, i_h$  soient égales.

DEMONSTRATION - Posant  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_h\}$ , les relations  $S_0, S_i$  (où  $i \in J$ ),  $\bigcup_{i \in J} S_i$  doivent constituer un nouveau schéma sur  $E$ . Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que (2.2) soit vérifié ([1] théorème 1.3.3).

(B 1) reste vrai

Et pour que (B 2) soit vrai avec le nouveau schéma il faut et il suffit que (2.1) soit vérifiée.

Remarquons qu'on peut aussi énoncer un théorème de portée plus générale mais d'utilisation plus difficile :

THEOREME 2' - Pour que, dans un P B D, les classes associées se confondent en  $R_0 = S_0 R_n = \bigcup_{i \in I_n} S_i$  (la famille  $(I_n)$  formant une partition

$\pi$  de  $I$ ) il faut et il suffit que  $\lambda_i$  et  $E_\pi(P_i)$  restent constants quand  $i$  décrit chaque  $I_n$ .

(Les définitions de  $I$  et  $F_\pi$  sont dans [1]).

THEOREME 3 - Soit un P B D à  $m$  classes sur  $E$  dont le schéma est déterminé par  $S_0, S_1, \dots, S_m$ . Pour tout entier  $p \geq 2$  posons  $E^* = E \times \{1, 2, \dots, p\}$ . Alors les parties  $B^* = B \times \{k\}$ , où  $B$  est un bloc de  $E$ , sont les blocs d'un P B D à  $(m+1)$  classes sur  $E^*$  dont le schéma est déterminé par :

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} S_i^*(x, j) = \{ (y, j) \in E^* \mid y \in S_i(x) \} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m \\ S_{m+1}^*(x, j) = \{ (y, k) \in E^* \mid y \in E, j \neq k \} \end{array} \right.$$

Ce P B D est en outre tel que :

$$(3.2) \lambda_i^* = \lambda_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m \quad \text{et} \quad \lambda_{m+1}^* = 0$$

Réciproquement si un P B D à  $(m+1)$  classes sur un ensemble  $E^*$  est tel qu'il existe  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  vérifiant (3.3) et l'une des deux conditions équivalentes (3.4a) et 3.4b) avec

$$(3.3) \lambda_{i_0}^* = 0$$

$$(3.4a) \text{ pour tout } i \neq i_0 \text{ et tout } j \neq i_0 \quad p_{i_0 j}^i = 0$$

$$(3.4b) \text{ pour tout } i \neq i_0 \text{ et tout } j \neq i_0 \quad p_{i j}^{i_0} = 0$$

alors il existe un entier  $p \geq 2$ , un ensemble  $E$  et un PBD à  $m$  classes sur  $E$  tels que :

- .  $E^*$  puisse être identifié à  $E \times \{1, 2, \dots, p\}$
- . Les schémas de  $E$  et  $E^*$  soient liés par les relations (3.1) (en supposant  $i_0 = m+1$ )
- . Tout bloc de  $E^*$  soit de la forme  $B \times \{k\}$  où  $B$  est un bloc de  $E$ .

DEMONSTRATION - On sait ([1] théorème 3.1.2) que  $S_0^*, S_1^*, \dots, S_{m+1}^*$  déterminent un schéma sur  $E^*$ . La vérification de (B1) est immédiate car  $\text{Card}(B^*) = \text{Card}(B)$

Si  $(x, j)$  et  $(y, k)$  sont  $i$ -associés (avec  $i = 0, 1, \dots, m$ ) alors  $j = k$  et les blocs  $B^*$  contenant  $(x, k)$  et  $(y, k)$  proviennent de blocs  $B$  contenant  $x$  et  $y$ . D'où alors  $\lambda_i^* = \lambda_i$

Si  $(x, j)$  et  $(y, k)$  sont  $(m+1)$ -associés alors  $j \neq k$  et il n'existe aucun bloc contenant  $(x, j)$  et  $(y, k)$ . D'où  $\lambda_{m+1}^* = 0$ . Ce qui achève la vérification de (B 2).

Réciproquement supposons  $i_0 = m+1$  pour la commodité des écritures. Alors (3.4a) (ou (3.4b)) entraîne les deux premières assertions ([1] théorème 3.1.2.).

Comme  $\lambda_{m+1}^* = 0$  les blocs de  $E^*$  sont nécessairement de la forme  $B \times \{k\}$  où  $B$  est une partie de  $E$ . Il est alors immédiat de vérifier que les parties (B) sont les blocs d'un PBD à  $m$  classes sur  $E$ .

THEOREME 4 - Soit un PBD à  $m$  classes sur  $E$  dont le schéma est déterminé par  $S_0, S_1, \dots, S_m$ . Pour tout entier  $p \geq 2$  posons  $E^* = E \times \{1, 2, \dots, p\}$ .

Alors les parties  $B^* = B \times \{1, 2, \dots, p\}$ , où  $B$  est un bloc de  $E$ , sont les blocs d'un PBD à  $(m+1)$  classes sur  $E^*$  dont le schéma est déterminé par :

$$S_0^* = \text{égalité}$$

$$(4.1) \quad S_1^*(x, j) = \{(x, k) \in E^* \mid k \neq j\}$$

$$S_{i+1}^*(x, j) = \{(y, k) \in E^* \mid y \in S_i(x), k \in \{1, \dots, p\}\}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, m$

Ce PBD est en outre tel que

$$(4.2) \quad \lambda_0^* = \lambda_1^* = \lambda_0 \text{ et } \lambda_{i+1}^* = \lambda_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m$$

Réciproquement si un PBD à  $(m+1)$  classes sur un ensemble  $E^*$  est tel qu'on puisse ordonner ses classes de telle sorte que :

$$(4.2') \quad \lambda_0^* = \lambda_1^*$$

(4.3) Les matrices d'association s'écrivent comme en [1] théorème 3.1.3, alors il existe un entier  $p \geq 2$ , un ensemble  $E$  et un PBD à  $m$  classes sur  $E$  tels que :

- .  $E^*$  puisse être identifié à  $E \times \{1, 2, \dots, p\}$
- . Les schémas de  $E$  et  $E^*$  soient liés par les relations (4.1)
- . Tout bloc de  $E^*$  soit de la forme  $B \times \{1, 2, \dots, p\}$  où  $B$  est un bloc de  $E$ .

DEMONSTRATION - On sait ([1] théorème 3.1.3) que  $S_0^*, S_1^*, \dots, S_{m+1}^*$  déterminent un schéma sur  $E^*$ .

(B 1) est vrai avec  $\text{Card}(B^*) = p \text{ Card}(B)$ .

Les deux éléments  $(x, j)$  et  $(x, k)$  (avec  $j$  et  $k$  distincts ou non) apparaissent simultanément dans  $\lambda_0$  blocs. D'où  $\lambda_0^* = \lambda_1^* = \lambda_0$ .

Les deux éléments  $(x, j)$  et  $(y, k)$  où  $x$  et  $y$  sont  $i$ -associés ( $i=1, 2, \dots, m$ ) apparaissent simultanément dans  $\lambda_i$  blocs. D'où  $\lambda_{i+1}^* = \lambda_i$ .  
Ce qui achève la vérification de (B 2).

Réciproquement (4.3) entraîne les deux premières assertions ([1], théorème 3.1.3).

Comme  $\lambda_0^* = \lambda_1^*$  les blocs de  $E^*$  sont de la forme  $B^* = B \times \{1, 2, \dots, p\}$  où  $B$  est une partie de  $E$ . Il est alors immédiat de vérifier que les parties  $(B)$  sont les blocs d'un PBD à  $m$  classes sur  $E$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HEUZE (G.) - Contribution à l'étude des schémas d'association. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* (1966), 1-59.
- [2] LAFON-AUGE (M.) - Application de l'algèbre aux plans d'expériences construction de Plans Partiellement Equilibrés. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* (1960), 193-287.
- [3] RAO (C.R.) - A general class of quasi factorial and related designs. *Sankhya* (1956), 165-174.

Reçu en Octobre 1970

Département de Mathématiques.  
Université de Toulouse-Le-Mirail  
31 - TOULOUSE