



**HAL**  
open science

## Outils élémentaires d'Analyse pour les Equations aux Dérivées Partielles (version 2006)

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marc Lenoir

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marc Lenoir. Outils élémentaires d'Analyse pour les Equations aux Dérivées Partielles (version 2006). Engineering school. France. 2006. hal-04083186

**HAL Id: hal-04083186**

**<https://hal.science/hal-04083186>**

Submitted on 27 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Outils élémentaires d'Analyse  
pour les  
Equations aux Dérivées Partielles

Anne-Sophie Bonnet Bendhia & Marc Lenoir

11 juillet 2006



# Introduction

Nombre de problèmes issus de la physique, de la mécanique ou de l'économie ont pour modèle une équation ou un système d'équations dont la solution est une fonction, tels par exemple le champ électrique, le potentiel des vitesses, le cours d'une action. La compréhension, la prévision ou la commande de ces phénomènes est de plus en plus liée à l'étude mathématique de ces équations; désormais, au même titre que l'expérimentation, elle constitue un puissant moyen d'investigation.

Les problèmes abordés sont divers : existe-t-il une solution, est-elle unique, quelles sont ses caractéristiques, comment dépend-t-elle des paramètres du modèle, des incertitudes sur les données, comment détermine-t-on une solution approchée? De façon générale, il s'agira d'étudier la résolution d'une équation de la forme  $\mathbb{A}u = S$ , où  $u$  est la fonction inconnue,  $S$  est la donnée du problème, et  $\mathbb{A}$  un opérateur (une équation aux dérivées partielles par exemple) qui envoie l'espace de fonctions  $E$  dans l'espace de fonctions  $F$ . Démontrer *l'unicité* de la solution  $u$ , ce sera démontrer que  $\mathbb{A}$  est *injective*, l'existence de la solution pour tout second membre  $S$ , c'est la *surjectivité* de  $\mathbb{A}$ , démontrer la *stabilité*, c'est démontrer que l'inverse de  $\mathbb{A}$  est *continu*. Il est déjà clair à ce stade que les espaces de fonctions  $E$  et  $F$  devront être munis d'une notion de convergence, puisque nous évoquons la continuité de  $\mathbb{A}^{-1}$ .

De ces questions a naturellement découlé le développement de l'analyse fonctionnelle, qui étudie les propriétés des espaces de fonctions et des topologies dont ils sont munis, ainsi que des fonctionnelles définies sur ces espaces, de même qu'on étudie les propriétés de l'ensemble des nombres réels ou complexes et des fonctions d'une ou plusieurs variables.

Le cours se compose de trois parties, la première est consacrée à la mise en place des deux outils fondamentaux de l'analyse que sont la topologie et l'intégration, la seconde introduit à la théorie des distributions qui forme le cadre naturel de l'étude des équations aux dérivées partielles, la troisième partie est consacrée à la théorie variationnelle, point de rencontre naturel entre mathématiques et mécanique.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Eléments d'analyse</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Topologie</b>	<b>13</b>
1.1	Normes, distances . . . . .	13
1.1.1	Boules . . . . .	13
1.2	Topologie d'un espace métrique . . . . .	16
1.2.1	Voisinages . . . . .	16
1.3	Espaces topologiques . . . . .	18
1.4	Topologie générale . . . . .	19
1.4.1	Espaces topologiques . . . . .	19
1.4.2	Suites et continuité en un point . . . . .	20
1.4.3	Continuité globale . . . . .	21
1.4.4	Encore un peu de vocabulaire . . . . .	21
1.4.5	Génération de topologies . . . . .	22
1.5	Les fonctions continues et bornées . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Compacité</b>	<b>27</b>
2.1	Propriétés élémentaires . . . . .	27
2.2	Application aux fonctions continues . . . . .	28
2.3	Critères de compacité . . . . .	29
2.3.1	Cas des espaces métriques . . . . .	30
2.3.2	Cas des espaces topologiques . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Les structures uniformes</b>	<b>33</b>
3.1	La complétude . . . . .	33
3.1.1	Un théorème de prolongement par continuité . . . . .	36
3.2	Les fonctions uniformément continues . . . . .	36
3.2.1	Prolongement par continuité uniforme . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Espaces vectoriels topologiques</b>	<b>39</b>
4.1	Topologies compatibles . . . . .	39
4.1.1	Les voisinages de 0 . . . . .	40
4.2	Espaces localement convexes . . . . .	41
4.2.1	Convergence et continuité en termes de semi-normes . . . . .	42

4.2.2	Propriétés des semi-normes . . . . .	42
4.2.3	Les applications linéaires continues . . . . .	44
4.2.4	Propriétés supplémentaires des voisinages de 0 . . . . .	44
4.3	Espaces métrisables . . . . .	45
4.4	Espaces séquentiellement complets . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Quelques espaces fonctionnels</b>	<b>49</b>
5.1	Espaces fonctionnels métrisables . . . . .	49
5.1.1	Fonctions dérivables sur un ouvert . . . . .	50
5.1.2	Fonctions à support dans un compact fixe . . . . .	51
5.2	Fonctions à support dans un compact arbitraire . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Filtres</b>	<b>57</b>
A.1	Filtres et continuité . . . . .	57
A.2	Compacité . . . . .	59
A.3	Ultrafiltres . . . . .	59
<b>B</b>	<b>Le théorème d'Ascoli</b>	<b>63</b>
B.1	Convergence uniforme et convergence simple . . . . .	63
B.1.1	Convergence simple . . . . .	63
B.1.2	Convergence uniforme . . . . .	63
B.2	Equicontinuité et compacité . . . . .	64
<b>C</b>	<b>La propriété de Baire</b>	<b>67</b>
C.1	Espaces de Baire . . . . .	67
C.2	Théorèmes de la borne uniforme . . . . .	69
C.3	Théorème des homomorphismes . . . . .	70
C.4	Théorème du graphe fermé . . . . .	71
<b>II</b>	<b>Intégration</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Intégration</b>	<b>75</b>
6.1	Mesures de Radon . . . . .	76
6.2	La théorie de Lebesgue . . . . .	78
6.2.1	La mesure des ouverts . . . . .	82
6.2.2	La convergence presque uniforme . . . . .	84
6.2.3	Les fonctions intégrables . . . . .	86
6.2.4	Passages à la limite sous le signe somme . . . . .	91
6.3	La mesurabilité . . . . .	95
6.3.1	Fonctions mesurables . . . . .	95
6.3.2	Ensembles mesurables . . . . .	97
6.4	Le cas particulier de la mesure de Lebesgue . . . . .	99
6.4.1	Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue . . . . .	99

6.4.2	La formule de changement de variables . . . . .	100
6.5	Intégration sur un espace produit . . . . .	105
6.5.1	Mesure produit . . . . .	105
6.5.2	Théorème de Fubini . . . . .	107
6.6	Le produit de convolution . . . . .	111
6.6.1	Support . . . . .	113
6.6.2	Régularisation . . . . .	115
<b>D</b>	<b>Partitions de l'unité</b> . . . . .	<b>119</b>
D.1	Bornes supérieures et inférieures . . . . .	119
D.2	Prolongements continus . . . . .	120
D.3	Partitions continues de l'unité . . . . .	121
D.4	Partitions régulières de l'unité . . . . .	125
<b>E</b>	<b>Intégrale de Riemann</b> . . . . .	<b>127</b>
E.1	Définition . . . . .	127
E.2	Propriétés de l'intégrale de Riemann . . . . .	128
E.3	Fonctions intégrables . . . . .	130
E.4	Intégrale de Stieltjès . . . . .	132
<b>F</b>	<b>Les espaces <math>L^p</math></b> . . . . .	<b>133</b>
F.1	Outils techniques . . . . .	133
F.2	Espaces de Banach . . . . .	135
F.3	Convexité uniforme . . . . .	137
F.3.1	Les inégalités de Clarkson . . . . .	138
F.4	Dualité . . . . .	143
F.5	Compacité . . . . .	146
<b>III</b>	<b>Distributions</b> . . . . .	<b>149</b>
<b>7</b>	<b>Propriétés élémentaires</b> . . . . .	<b>151</b>
7.1	Introduction . . . . .	151
7.2	Divers types de distributions . . . . .	152
7.2.1	Fonctions localement intégrables . . . . .	155
7.2.2	Valeur principale de Cauchy . . . . .	155
7.3	Topologie faible sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	156
<b>8</b>	<b>Opérations élémentaires</b> . . . . .	<b>159</b>
8.1	La Translation . . . . .	159
8.2	Transposition . . . . .	160
8.3	Symétrie . . . . .	161
8.4	Dérivation . . . . .	161
8.5	Primitives . . . . .	162



8.6	Multiplication . . . . .	163
8.7	Division des distributions . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Dérivée des fonctions au sens des distributions</b>	<b>167</b>
9.1	Le cas monodimensionnel . . . . .	167
9.2	Le cas multidimensionnel . . . . .	169
9.2.1	La formule de Stokes pour un surgraphe . . . . .	169
9.2.2	La formule de Stokes pour un ouvert borné régulier . . . . .	170
9.2.3	La formule des sauts . . . . .	174
<b>10</b>	<b>Structure</b>	<b>175</b>
10.1	Support . . . . .	175
10.2	Distributions à support compact . . . . .	177
10.2.1	Extension de la dualité . . . . .	178
10.2.2	Le théorème de structure . . . . .	180
10.3	Distributions à support ponctuel . . . . .	182
<b>11</b>	<b>La convolution</b>	<b>185</b>
11.1	Produit tensoriel . . . . .	185
11.1.1	Propriétés . . . . .	188
11.2	Le produit de convolution . . . . .	191
11.2.1	Ensembles convolutifs . . . . .	192
11.2.2	Divers aspects du produit de convolution . . . . .	193
11.2.3	Propriétés . . . . .	197
11.2.4	Applications . . . . .	198
<b>IV</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>201</b>
<b>12</b>	<b>Transformation de Fourier des fonctions</b>	<b>205</b>
12.1	La transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	205
12.1.1	Le théorème de Riemann-Lebesgue . . . . .	205
12.1.2	Propriétés de la transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	206
12.1.3	Exemples . . . . .	208
12.1.4	Convolution et transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	212
12.2	Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide . . . . .	214
12.2.1	L'espace $\mathcal{S}$ . . . . .	215
12.2.2	Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$ . . . . .	216
<b>13</b>	<b>Transformation de Fourier des distributions tempérées</b>	<b>217</b>
13.1	L'espace $\mathcal{S}'$ . . . . .	217
13.2	Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$ . . . . .	218
13.3	Les formules de réciprocity et de Plancherel . . . . .	221
13.4	Transformation de Fourier et convolution . . . . .	223

<b>V</b>	<b>Equations aux dérivées partielles</b>	<b>227</b>
<b>14</b>	<b>Quelques équations aux dérivées partielles de la physique</b>	<b>229</b>
14.1	L'équation de Laplace . . . . .	229
14.1.1	La solution élémentaire . . . . .	230
14.1.2	La régularité à l'intérieur . . . . .	232
14.1.3	Le principe du maximum fort . . . . .	235
14.2	L'équation des ondes . . . . .	236
14.2.1	La solution élémentaire du d'Alembertien . . . . .	237
14.2.2	Le principe de Huyghens . . . . .	239
<b>15</b>	<b>Espaces de Hilbert</b>	<b>243</b>
15.1	Propriétés élémentaires . . . . .	243
15.2	Le théorème de projection . . . . .	246
15.3	Bases Hilbertiennes . . . . .	250
<b>16</b>	<b>Espaces de Sobolev</b>	<b>255</b>
16.1	L'espace $L^2$ . . . . .	255
16.1.1	Définition et propriétés de $L^2(\Omega)$ . . . . .	255
16.1.2	Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	258
16.2	Définitions des espaces de Sobolev . . . . .	261
16.2.1	Les espaces $H^m(\Omega)$ . . . . .	261
16.2.2	Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	262
16.3	Régularité et traces . . . . .	265
16.3.1	Inégalités de Sobolev . . . . .	265
16.3.2	Opérateurs de trace . . . . .	266
16.4	L'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	268
<b>17</b>	<b>Etude variationnelle des problèmes elliptiques</b>	<b>273</b>
17.1	Quelques exemples de problèmes aux limites elliptiques . . . . .	273
17.1.1	Le problème de Dirichlet . . . . .	273
17.1.2	Le problème de Neumann . . . . .	274
17.1.3	Autres exemples . . . . .	275
17.2	Formulations variationnelles . . . . .	275
17.2.1	Le problème de Dirichlet . . . . .	276
17.2.2	Le problème de Neumann . . . . .	277
17.2.3	Formulations variationnelles et énergie . . . . .	278
17.3	Le théorème de Lax-Milgram . . . . .	279
17.4	Application aux problèmes aux limites elliptiques . . . . .	282
17.4.1	Le problème de Dirichlet . . . . .	282
17.4.2	Le problème de Neumann . . . . .	285
17.4.3	Le principe du maximum faible . . . . .	287

<b>18 Théorie spectrale des opérateurs compacts</b>	<b>291</b>
18.1 Opérateurs adjoints - Opérateurs compacts . . . . .	291
18.2 Alternative de Fredholm . . . . .	294
18.3 Diagonalisation des opérateurs autoadjoints . . . . .	296

**Première partie**  
**Eléments d'analyse**



# Chapitre 1

## Topologie

Ce chapitre constitue une introduction à l'étude des espaces fonctionnels. Dans un premier temps, nous introduisons le langage de la topologie pour l'étude de la convergence dans  $\mathbb{R}^n$ , dans un second temps nous utilisons les notions ainsi dégagées pour définir diverses notions de convergence au sein des espaces de fonctions continues ou dérivables.

### 1.1 Normes, distances

#### 1.1.1 Boules

On munira, sauf précision contraire, l'espace  $\mathbb{R}^n$  de la norme Euclidienne :

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

**Proposition 1.1** *La norme Euclidienne vérifie les propriétés suivantes :  $\forall x, y$*

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , (*homogénéité positive*)
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
- (iv)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Cette notion s'étend en fait bien au-delà de  $\mathbb{R}^n$ , et de façon générale, si  $E$  est un espace vectoriel, on appellera norme une fonction  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés (i) à (iv) de la proposition précédente. Considérons par exemple l'espace vectoriel des suites  $(z_n)$  complexes bornées, on peut le munir de la norme  $\|z_n\| = \sup_n |z_n|$ .

Si une fonction  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie (i), (ii), (ii) mais pas (iv), on parle de *semi-norme*. Dans  $\mathbb{R}^n$ , une autre norme est, par exemple

$$|x| = \max_{i=1,n} |x_n|.$$

Ce choix n'est pas totalement indifférent, mais il ne modifie pas les notions de convergence et de continuité, puisque

$$|x|^2 \leq \|x\|^2 \leq n|x|^2.$$

Cette remarque justifie qu'on tente de mettre au point un cadre mathématique permettant de décrire la notion de convergence sans faire explicitement appel à la norme, mettant ainsi en lumière ce qui distingue réellement deux notions de convergence différentes.



La notion de norme, n'est pas spécifique de  $\mathbb{R}^n$ , elle est en fait valable dès qu'on a affaire à un espace vectoriel, soit  $E$ . On appellera norme toute application  $E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés (i)-(iv) de la proposition 1.1. On peut alors trouver une expression particulièrement commode de la continuité des *applications linéaires*, qui deviendra par la suite d'un usage constant :

**Proposition 1.2** *Pour que l'application linéaire  $u : E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés, soit continue, il faut et il suffit qu'il existe  $C > 0$ , telle que*

$$\|u(\varphi)\| \leq C \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in E.$$

On dit alors que la fonctionnelle  $u$  est bornée, et on note

$$\|u\| = \inf \{C \mid \|u(\varphi)\| \leq C \|\varphi\|, \forall \varphi \in E\}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Il est tout d'abord clair que si l'inégalité est vérifiée, alors  $u$  est continue à l'origine, et donc partout puisque

$$\|u(\varphi) - u(\psi)\| = \|u(\varphi - \psi)\| \leq C \|\varphi - \psi\|.$$

▷ Réciproquement supposons  $u$  continue à l'origine, on peut alors trouver  $\eta > 0$  tel que  $\|\varphi\| \leq \eta$  entraîne  $\|u(\varphi)\| \leq 1$ . Par homothétie de rapport  $\lambda$ , il en résulte que  $\|\varphi\| \leq \lambda\eta$  entraîne  $\|u(\varphi)\| \leq \lambda$ . Si on choisit de prendre  $\lambda = \|\varphi\|/\eta$ , on constate que l'inégalité  $\|u(\varphi)\| \leq \eta^{-1} \|\varphi\|$  est inconditionnellement vérifiée.

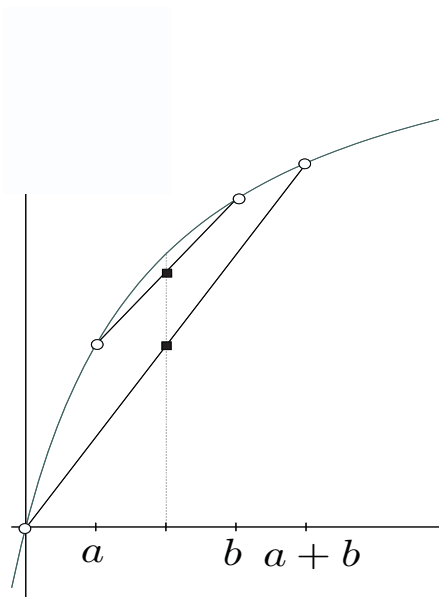
□

De la norme sur un espace vectoriel découle une distance définie de la façon suivante :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Proposition 1.3** *Elle vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $d(x, y) \geq 0$
- (ii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire)
- (iii)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

FIG. 1.1 – La fonction  $F(t) = t/(1+t)$ 

Plus généralement, pour un ensemble  $E$ , qui ne soit pas nécessairement un espace vectoriel, on appelle distance une fonction  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés i à iii de la proposition précédente. Toutes les normes donnent naissance à une distance, mais même dans le cas d'un espace vectoriel, le contraire est faux comme le montre le Lemme suivant :

**Lemme 1.4** Sur  $\mathbb{R}^n$ , si  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est croissante, concave et nulle à l'origine, alors

$$d(x, y) = F(\|x - y\|)$$

est une distance.

DÉMONSTRATION. La seule difficulté consiste à démontrer l'inégalité triangulaire :  $F$  étant concave, on montre aisément (et on constate sur la figure 1.1), que

$$\forall a, b \geq 0, (F(a) + F(b))/2 \geq (F(a+b) + F(0))/2 = F(a+b)/2.$$

Mais comme de plus  $F$  est croissante, on pourra écrire

$$d(x, y) + d(y, z) = F(\|x - y\|) + F(\|y - z\|) \geq F(\|x - y\| + \|y - z\|) \geq F(\|x - z\|) = d(x, z)$$

□



FIG. 1.2 – Un voisinage de  $x$ 

Bien entendu,  $d$  n'est positivement homogène, et n'engendre donc une norme, que si  $F$  est linéaire.

Un ensemble  $E$  muni d'une distance est appelé *espace métrique*. Si la fonction  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie les propriétés (i) et (ii) mais pas (iii), on l'appelle *semi-distance*.

**Définition 1.5** *Si  $d$  est une distance, on appelle boule (fermée) de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ , l'ensemble*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

On supposera  $\varepsilon$  fini et strictement positif. Si on avait choisi dans la définition  $<$  au lieu de  $\leq$  on aurait obtenu la boule ouverte, notée  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x)$ . Si  $d$  est une semi-distance,  $B_\varepsilon$  porte le nom de *semi-boule*.

## 1.2 Topologie d'un espace métrique

### 1.2.1 Voisinages

Des notions classiques qui précèdent, nous allons dégager une idée géométrique permettant de traiter de façon imagée les questions de convergence et de continuité en s'affranchissant de la présentation ' $\varepsilon, \eta$ ', souvent lourde et de toutes façons trop limitée.

**Définition 1.6** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces métriques respectivement munis des distances  $d$  et  $\delta$ , on dit que  $f : E \rightarrow F$  est continue en  $x \in E$  si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \text{ tel que } \forall y \in E \ d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.7** *On appelle voisinage de  $x$  dans l'espace métrique  $E$ , tout ensemble contenant une boule de centre  $x$ .*

Remarquons que, contrairement à ce qui pourrait paraître naturel, il est d'autant plus facile d'être un voisinage que l'on est de grande taille ; il reste qu'en fait les voisinages intéressants sont bien les petits, ce qui nous réconcilie avec le langage courant.

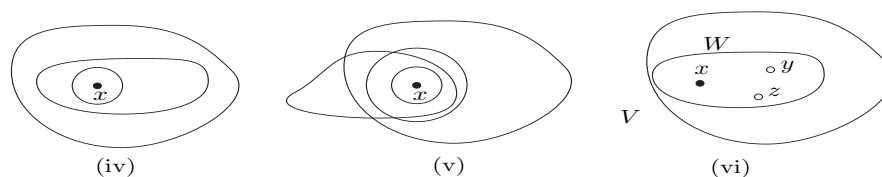


FIG. 1.3 – Propriétés des voisinages

L'ensemble des voisinages d'un point jouit d'un certain nombre de propriétés découlant très simplement de cette définition ; nous les rassemblons dans la proposition suivante :

**Proposition 1.8** Soit  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$  dans  $E$ ,

- (i) Tout voisinage de  $x$  contient  $x$ .
- (ii) L'espace entier est voisinage de tout point  $x$ .
- (iii) L'ensemble vide n'est pas voisinage de  $x$ .
- (iv) Tout sous-ensemble de  $E$  contenant un voisinage de  $x$  est lui-même voisinage de  $x$ .
- (v) L'intersection de deux voisinages de  $x$  est un voisinage de  $x$ . On dit également que  $\mathcal{V}(x)$  est stable par intersection finie.
- (vi) Si  $V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $\exists W \in \mathcal{V}(x)$ , tel que  $W \subset V$  et  $W$  soit voisinage de chacun de ses points.

**Remarque 1.9** Malgré son apparence un peu technique, la propriété (vi) n'est rien d'autre qu'une propriété de stabilité de chaque voisinage d'un point vis-à-vis de ce point.

**Définition 1.10** On appelle base de voisinages d'un point  $x$ , un ensemble de voisinages de  $x$  tel que tout voisinage de  $x$  contienne un élément de la base.

En fait pour définir l'ensemble des voisinages d'un point, en vertu de la propriété (iv) de la proposition précédente, il est clair qu'il suffit de connaître une base de voisinages de ce point.

L'ensemble des voisinages d'un point sert à exprimer de façon imagée la continuité ou la convergence en ce point. Prenons donc pour  $E$  et  $F$  deux espaces métriques :

**Proposition 1.11** *Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces métriques*

(i) *Pour que la suite  $x_n$  d'éléments de  $E$  tende vers  $x \in E$ , il faut et suffit que, pour tout voisinage de  $x$ , la suite soit contenue toute entière dans ce voisinage au-delà d'un certain rang. Bien entendu, ce rang dépend du voisinage choisi.*

(ii) *Pour que la fonction  $f$  soit continue en  $x \in E$ , il faut et il suffit que l'image réciproque d'un voisinage quelconque de  $f(x)$  soit un voisinage de  $x$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Rappelons la définition classique de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, d(x_n, x) \leq \varepsilon,$$

elle revient à dire que pour tout  $\varepsilon$ , la suite  $x_n$  est tout entière contenue dans  $B_\varepsilon(x)$  au-delà d'un certain rang, il est donc clair que la condition (i) de la proposition 1.11 entraîne la convergence. Supposons réciproquement que la suite converge, et notons  $V$  un voisinage de  $x$ ; il existe  $\varepsilon$  tel que  $B_\varepsilon(x) \subset V$ , et comme la suite converge vers  $x$ , elle est toute entière contenue dans  $B_\varepsilon(x)$ , et donc dans  $V$  à partir d'un certain rang.

▷ De même, dire que  $f$  est continue en  $x$ , c'est dire d'après la définition 1.6, que  $\forall B_\varepsilon(f(x))$ ,  $\exists B_\eta(x)$ , tel que  $f(B_\eta) \subset B_\varepsilon$ , ou encore que l'image réciproque de  $B_\varepsilon(f(x))$ , que nous notons  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ , contient une boule  $B_\eta(x)$ .

▷ Si la condition (ii) de la proposition 1.11 est vérifiée, alors  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$  est un voisinage de  $x$ , et par conséquent il contient une boule centrée en  $x$ .

▷ Réciproquement si  $V$  est un voisinage de  $f(x)$ , il contient une boule  $B_\varepsilon(f(x))$ , et on aura  $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \supset B_\eta(x)$ . C'est dire que  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x$ .

□

### 1.3 Espaces topologiques



Les propriétés rassemblées dans la proposition 1.8 peuvent être considérées comme caractéristiques de l'ensemble des voisinages des points d'un espace  $E$  donné. Si on sait définir une telle famille de parties, sans nécessairement faire appel à une distance, on dit que l'espace  $E$  est *muni d'une topologie*, ou encore que c'est *un espace topologique*. La proposition 1.11 constitue alors une définition de la convergence et de la continuité en un point, ce que nous avons vérifié c'est sa compatibilité avec les notions classiques dans le cas d'un espace métrique.



S'il existe une distance permettant de construire la famille des voisinages selon la Définition 1.7 on dit que la topologie découle d'une distance et on parle d'espace métrique; nous avons vu que des distances différentes peuvent être à l'origine de la même topologie, c'est pourquoi on distingue entre espace *métrique* (où la distance est donnée) et espace *métrisable* (où seule la topologie est donnée).

**Définition 1.12** *On dit que l'espace  $E$  est séparé si deux points distincts possèdent deux voisinages disjoints, c'est en particulier le cas des espaces métriques.*

Dans un espace séparé une suite ne peut avoir qu'une limite unique ; s'il y en avait deux en effet, la suite serait toute entière dans un voisinage de chacune de ces limites à partir d'un certain rang, ce qui est impossible si les limites sont différentes, puisqu'on peut alors choisir les voisinages disjoints. A contrario, *on évitera soigneusement les espaces non séparés*, qui autorisent une suite à avoir plusieurs limites distinctes !

### Suites et continuité en un point

**Proposition 1.13** *Si la fonction  $f$  est continue en  $x$ , alors pour toute suite  $x_n$  tendant vers  $x$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ , en vertu de la continuité, son image réciproque est un voisinage de  $x$ , qui contient toute la suite  $x_n$  à partir d'un certain rang. Il en résulte que  $V$  contient la suite  $f(x_n)$  à partir d'un certain rang. □

Le plus intéressant, c'est la réciproque. *Dans le cas des espaces métrisables* elle permet de se contenter des suites pour tester la continuité :

**Proposition 1.14** *Soit  $E$  métrisable, pour que  $f : E \rightarrow F$  soit continue en  $x$ , il suffit que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dès que  $x_n \rightarrow x$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors il existe un voisinage  $V$  de  $f(x)$  dont l'image réciproque n'est pas un voisinage de  $x$ . Notons  $B_n$  la suite des boules de rayon  $1/n$  centrées en  $x$ , aucune d'entre elles n'est incluse dans  $f^{-1}(V)$ . C'est dire qu'il existe une suite  $x_n$  convergeant vers  $x$  telle que  $\forall n, f(x_n) \notin V$ , et par conséquent telle que  $f(x_n)$  ne converge pas vers  $f(x)$ . □

## 1.4 Topologie générale

### 1.4.1 Espaces topologiques

Les propriétés rassemblées dans la proposition ?? peuvent être considérées comme caractéristiques de l'ensemble des ouverts d'un espace  $E$  donné. Si on sait définir une telle famille de parties (sans nécessairement faire appel à une distance), on dit que l'espace  $E$  est *muni d'une topologie*, ou encore que c'est *un espace topologique*. On définira alors les voisinages de  $x$  de la façon suivante : ◇

**Définition 1.15** *On dit que  $V$  est voisinage de  $x \in E$ , s'il existe un ouvert de  $E$  inclus dans  $V$ , qui contienne  $x$ .*

On vérifie alors aisément que la famille des voisinages d'un point  $x$  vérifie les propriétés énoncées aux propositions 1.8 et ??.

La proposition 1.11 constitue alors une définition de la convergence et de la continuité en un point; ce que nous avons vérifié c'est sa compatibilité avec les notions classiques dans le cas d'un espace métrique.

**Remarque 1.16** Réciproquement, supposons que pour chaque point  $x$  de  $E$ , on dispose d'une famille de parties  $\mathcal{V}(x)$  vérifiant les propriétés de la proposition 1.8, et que de plus

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x) \text{ tel que } W \subset V \text{ et } W \in \mathcal{V}(y), \forall y \in W.$$

On pourra alors définir une topologie sur  $E$  en définissant comme ouverts les  $U \subset E$  tels que  $U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in U$ ; les propriétés de la proposition ?? sont alors vérifiées et les  $\mathcal{V}(x)$  seront les voisinages de  $x$  pour cette topologie, ils vérifieront les propriétés des propositions 1.8 et ??.

S'il existe une distance permettant de construire la famille des ouverts selon la définition ?? on dit que la topologie découle d'une distance et on parle d'espace métrisable; nous avons vu que des distances différentes peuvent être à l'origine de la même topologie, c'est pourquoi on distingue entre espace *métrique* (où la distance est donnée) et espace *métrisable* (où seule la topologie est donnée).



**Définition 1.17** On dit que l'espace  $E$  est séparé si deux points distincts possèdent deux voisinages disjoints, c'est en particulier le cas des espaces métriques.

Dans un espace séparé une suite ne peut avoir qu'une seule limite; s'il y en avait deux en effet, la suite serait toute entière dans un voisinage de chacune de ces limites à partir d'un certain rang, ce qui est impossible si les limites sont différentes, puisqu'on peut alors choisir les voisinages disjoints. A contrario, on évitera soigneusement les espaces non séparés, qui autorisent une suite à avoir plusieurs limites distinctes!

## 1.4.2 Suites et continuité en un point

**Proposition 1.18** Si la fonction  $f$  est continue en  $x$ , alors pour toute suite  $x_n$  tendant vers  $x$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ , en vertu de la continuité, selon la proposition 1.11, son image réciproque est un voisinage de  $x$ , qui contient toute la suite  $x_n$  à partir d'un certain rang. Il en résulte que  $V$  contient la suite  $f(x_n)$  à partir de ce rang.

□

Dans le cas des espaces métrisables la réciproque est valable, elle permet de se contenter des suites pour éprouver la continuité :



**Proposition 1.19** Soit  $E$  métrisable, pour que  $f : E \rightarrow F$  soit continue en  $x$ , il suffit que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dès que  $x_n \rightarrow x$ .

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors il existe un voisinage  $V$  de  $f(x)$  dont l'image réciproque n'est pas un voisinage de  $x$ . Notons  $B_n$  la suite des boules de rayon  $1/n$  centrées en  $x$  ; aucune d'elles n'est incluse dans  $f^{-1}(V)$ . C'est dire qu'il existe une suite  $x_n$  convergeant vers  $x$  telle que  $\forall n, f(x_n) \notin V$ , et par conséquent telle que  $f(x_n)$  ne converge pas vers  $f(x)$ .

□

### Remarque 1.20

(i) Ces définitions sont compatibles avec les appellations de 'boule ouverte' et 'boule fermée' précédemment employées.

(ii) On peut se limiter à ne considérer que des bases formées de voisinages ouverts en vertu de définition même des voisinages.

### 1.4.3 Continuité globale

Nous disposons maintenant du vocabulaire nous permettant d'exprimer la continuité globale de façon simple et suggestive :

**Proposition 1.21** Pour que la fonction  $f : E \rightarrow F$  soit continue en tout point de  $E$  (on dit aussi continue sur  $E$ ), il faut et il suffit que l'image réciproque d'un ouvert quelconque de  $F$  soit un ouvert de  $E$ .



DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $F$  et soit  $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ , l'ouvert  $\mathcal{O}$  contient un voisinage  $V$  de  $f(x)$ . Si  $f$  est continue en  $x$ , alors  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x$ , ainsi que  $f^{-1}(\mathcal{O}) \supset f^{-1}(V)$  ; il en résulte que  $f^{-1}(\mathcal{O})$  est ouvert.

▷ Réciproquement, si  $x \in E$ , notons  $V$  un voisinage de  $f(x)$  et  $\mathcal{O}$  un ouvert contenant  $f(x)$  et contenu dans  $V$ . L'image réciproque de  $V$  contient celle de  $\mathcal{O}$  qui est ouverte, c'est par conséquent un voisinage de  $x$ .

□

La démarche que nous avons adoptée nous a conduit à construire les voisinages à partir des ouverts. En fait, mais c'est une méthode moins courante bien que plus intuitive, on peut opérer en sens inverse et définir une topologie sur  $E$  par la donnée d'une famille de parties qu'on appelle voisinages, vérifiant les propriétés (iii)-(v) de la proposition 1.8 ainsi que celle énoncée à la proposition ?? ; les ouverts s'en déduisent alors en les définissant selon ?? (??).



### 1.4.4 Encore un peu de vocabulaire

**Intérieur, Adhérence, Densité**

**Définition 1.22** Soit  $E$  un espace topologique, et  $A$  un sous-ensemble de  $E$

- (i) L'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$ , est l'union (ou le plus grand) de tous les ouverts inclus dans  $A$ .
- (ii) L'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$ , est l'intersection (ou le plus petit) de tous les fermés contenant  $A$ .

On peut donner une autre caractérisation de l'adhérence.



**Proposition 1.23** *Le point  $x$  appartient à l'adhérence de  $A$  si et seulement si  $A$  rencontre tout voisinage de  $x$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Tout d'abord, il est clair que si  $x \notin \bar{A}$ , alors il existe un voisinage de  $x$  inclus dans le complémentaire de  $\bar{A}$ , qui est ouvert ; ce voisinage ne rencontre alors pas  $A$ . C'est également dire que si tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$ , alors  $x \in \bar{A}$ .

▷ Réciproquement, il faut montrer que si  $x \in \bar{A}$ , alors tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$ . Supposons que le voisinage  $V(x)$  ne rencontre pas  $A$  ; il en résulte que  $x$  est contenu dans un ouvert  $\mathcal{O}$  ne rencontrant pas  $A$ . On aura alors  $x \notin \mathcal{O}^c \supset \bar{A}$ , ce qui constitue une contradiction.

□

**Définition 1.24** *Si  $\bar{A} = E$ , on dit que  $A$  est dense dans  $E$ .*



L'adhérence de l'intérieur d'un ensemble n'est en général pas égale à l'adhérence de l'ensemble, par exemple  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset = \bar{\overset{\circ}{\mathbb{Q}}}$  tandis que  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overset{\circ}{\bar{\mathbb{Q}}}$ .

### Comparaison des topologies

**Définition 1.25** *On dit que la topologie  $\mathcal{T}_1$  sur l'espace  $E$  est plus fine que la topologie  $\mathcal{T}_2$  si l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{T}_2$  est contenu dans l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{T}_1$ . Il en est alors de même pour les fermés ou les voisinages de chaque point.*



Plus la topologie d'un espace est fine moins il y a de suites convergentes dans cet espace. De même, si l'on considère les fonctions  $E \rightarrow F$ , plus la topologie de l'espace de départ  $E$  est fine, plus il y a de fonctions continues. Réciproquement, plus la topologie de l'espace d'arrivée  $F$  est fine, moins il y a de fonctions continues.

## 1.4.5 Génération de topologies

### Topologie produit



**Définition 1.26** *Si les  $E_i, i \in I$  sont des espaces topologiques, on appelle topologie produit sur  $E = \prod_{i \in I} E_i$ , celle dont les ouverts sont formés des union de pavés de la*

forme  $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_i$ , où les  $\mathcal{O}_i$  sont des ouverts de  $E_i$ , tous égaux à  $E_i$ , sauf un nombre fini d'entre eux.

Il est alors facile de voir qu'une base de voisinages de  $x = (x_i)_{i \in I}$  est formée des pavés  $\prod_{i \in I} V_i$ , où les  $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$  sont tous égaux à  $E_i$ , sauf un nombre fini d'entre eux.

Cette définition de la topologie produit peut sembler surprenante, car les voisinages ne sont susceptibles de manifester de restriction que dans un nombre fini de directions, c'est en fait la proposition suivante qui justifie cette définition :

**Proposition 1.27** *La topologie produit est la moins fine sur  $E$  rendant les projections canoniques  $p_i : (x_i)_{i \in I} \in E \rightarrow x_i \in E_i$  continues. On dit que c'est la topologie initiale associée aux projections.*

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair tout d'abord, que les  $p_i$  sont continues pour la topologie produit, en effet si  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $E_i$ , alors  $p_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = \mathcal{O}_i \times \prod_{j \neq i} E_j$ , qui est un ouvert de  $E$ .

▷ Supposons maintenant que  $\mathcal{T}$  soit une topologie sur  $E$  rendant les  $p_i$  continues ; pour cette topologie, les pavés  $\mathcal{O}_i \times \prod_{j \neq i} E_j$  seront ouverts, et donc leurs intersections finies, ainsi que les unions de telles intersections, qui sont exactement les ouverts de la topologie produit. □

Il en résulte qu'une application  $f : X \rightarrow E$  est continue si et seulement si les applications partielles  $p_i \circ f$  sont continues  $X \rightarrow E_i$ .

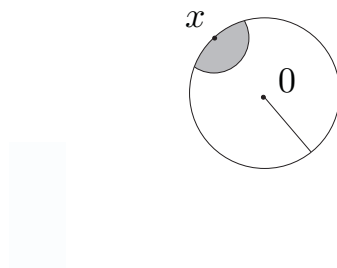
La prise en compte de produits infinis d'espaces topologiques n'est pas tout à fait gratuite, et nous fournit un *premier exemple d'espace fonctionnel*. Considérons en effet un ensemble  $E$  et un espace topologique  $F$ , l'espace  $F^E$  n'est rien d'autre que l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$ , et la topologie produit sur  $F^E$  s'appelle *topologie de la convergence simple ou ponctuelle*. Dans le cas où  $F$  est un espace métrique muni d'une distance  $d$ , la convergence simple d'une suite de fonctions  $f_n$  vers  $f$  peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

### Topologie quotient

**Définition 1.28** *Si  $E$  est un espace topologique,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence, et  $\pi$  la surjection canonique  $x \rightarrow \dot{x} : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ , les ouverts de la topologie quotient sont les  $\mathcal{O}$  tels que  $\pi^{-1}(\mathcal{O})$  soit un ouvert de la topologie de  $E$ .*



FIG. 1.4 – Voisinage de  $x$  dans  $\overline{B}(0,1)$ 

Cette définition fait de la topologie quotient *la plus fine* sur  $E/\mathcal{R}$  rendant l'application canonique  $\pi$  continue. On dit que c'est la *topologie finale* associée à  $\pi$ . Remarquons également que si  $f : E \rightarrow F$  est compatible avec le passage au quotient, alors elle peut se factoriser sous la forme  $f = g \circ \pi$ , où  $g : E/\mathcal{R} \rightarrow F$ , et  $f$  est continue si et seulement si  $g$  l'est.

### Topologie induite

**Définition 1.29** Si  $E$  est un espace topologique et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ , les voisinages de  $x \in F$  pour la topologie induite par  $E$  sur  $F$  sont les traces sur  $F$  des voisinages de  $x$  dans  $E$ . Il en est alors de même pour les ouverts et les fermés.



Cette notion est d'usage fréquent, c'est en particulier à elle qu'on fait appel pour définir la continuité d'une fonction sur un intervalle fermé  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . On dira que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  si elle est continue pour la topologie induite par  $\mathbb{R}$  sur cet intervalle, topologie pour laquelle  $[a, b]$  est en fait ouvert ! Les notions de continuité à droite ou à gauche aux bornes de l'intervalle font alors partie intégrante de la notion générale de continuité sur l'espace topologique  $[a, b]$ .

## 1.5 Les fonctions continues et bornées

Pour ce second exemple d'espace fonctionnel, réduisons un peu le champ de nos investigations et limitons nous à l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_b^0(D)$ , des fonctions  $\varphi$  continues et bornées sur le sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ; il s'agit d'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^D$ , que nous munirons de la norme suivante :

$$p_0(\varphi) = \sup_{x \in D} |\varphi(x)|, \quad (1.2)$$



**Lemme 1.30** La fonction  $p_0$  est une norme sur  $\mathcal{C}_b^0(D)$ , elle définit la topologie de la convergence uniforme sur  $D$ , plus fine que la topologie produit. Nous dirons donc que

la suite  $\varphi_n \in \mathcal{C}_b^0(D)$  converge uniformément vers  $\varphi$  si  $p_0(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ , (voir la figure 1.5).

DÉMONSTRATION. La seule vérification est relative à l'inégalité triangulaire : elle résulte de la relation

$$\sup_{x \in D} (\varphi(x) + \psi(x)) \leq \sup_{x \in D} \varphi(x) + \sup_{x \in D} \psi(x)$$

□

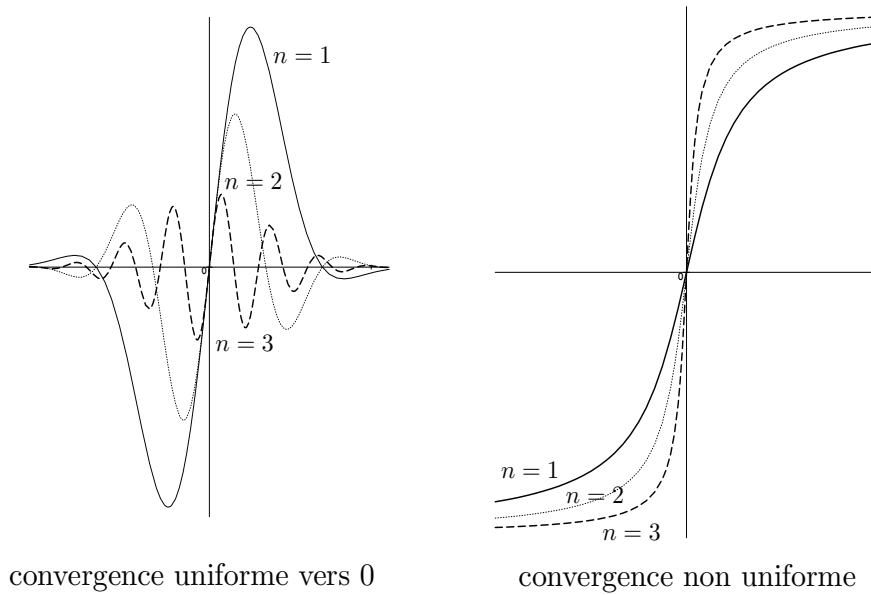


FIG. 1.5 – La convergence uniforme



# Chapitre 2

## Compacité

*La compacité est une propriété particulièrement importante qui confère aux espaces topologiques des qualités proches de celles d'un ensemble fini. Ceci est particulièrement clair des propositions 2.3 et 2.6 ci-dessous, qui deviennent évidentes dans le cas d'un espace composé d'un nombre fini de points.*



### 2.1 Propriétés élémentaires

#### Définition 2.1

(i) *Un espace est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement par des ouverts de cet espace, on peut extraire un sous recouvrement fini. Par passage au complémentaire, il revient au même de dire que de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

(ii) *Un sous ensemble d'un espace topologique est dit compact s'il constitue lui-même un espace compact pour la topologie induite.*

**Remarque 2.2** *Dans un espace métrique, un ensemble compact est nécessairement borné. On peut en effet choisir un recouvrement formé de boules ouvertes; l'ensemble est alors recouvert par un nombre fini d'entre elles, il est par conséquent de diamètre fini.*

#### Proposition 2.3

- (i) *Un sous-ensemble compact d'un espace séparé est fermé.*
- (ii) *Un sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.*
- (iii) *De toute suite d'éléments d'un ensemble compact on peut extraire une sous-suite convergente.*



DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $E$  séparé et  $K$  compact dans  $E$ , montrons que le complémentaire de  $K$  est ouvert. Si  $z \in K^c$ , alors  $\forall x \in K$ , il existe des voisinages ouverts respectifs  $\mathcal{O}_x(z)$  et  $\mathcal{O}(x)$  de  $z$  et  $x$  disjoints. Les  $\mathcal{O}(x)$  forment un recouvrement ouvert de  $K$  dont on peut extraire un recouvrement fini, soit  $\mathcal{O}(x_i)$ ,  $i = 1, n$ . L'intersection des  $\mathcal{O}_{x_i}(z)$  est alors un voisinage ouvert de  $z$  ne rencontrant pas  $K$ , c'est-à-dire inclus dans  $K^c$ . Il en résulte que  $K^c$  est ouvert.

▷ Soient  $E$  compact et  $F$  fermé dans  $E$ . Notons  $F_i$ ,  $i \in I$ , une famille de parties de  $F$ , fermées dans  $F$  pour la topologie induite par  $E$ , et d'intersection vide. Comme  $F$  est fermé dans  $E$ , les  $F_i$  sont également fermées dans  $E$ , et comme  $E$  est compact, il existe une sous-famille finie des  $F_i$  d'intersection vide. Il en résulte que  $F$  est compact.

▷ Soit  $x_n$  une telle suite. Notons  $A_n$  le sous-ensemble formé des  $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  et remarquons que les  $\overline{A_n}$  forment une suite décroissante de fermés non vides. Toute intersection finie des  $\overline{A_n}$  est donc un certain  $\overline{A_m}$  ; par conséquent, elle contient au moins un point, ce qui prouve en vertu de la compacité que l'intersection des  $\overline{A_n}$  n'est pas vide. Un point  $a$  de cette intersection appartient à l'adhérence de tous les  $A_n$  ; par conséquent, en vertu de la proposition 1.23, dans tout voisinage de  $a$ , pour chaque  $n$ , il existe un point appartenant à  $A_n$  ; il en résulte que c'est la limite d'une sous-suite extraite de  $x_n$ .

□

**Remarque 2.4** L'item (iii) de la proposition précédente constitue en fait un théorème d'existence. A partir d'une hypothèse peu contraignante relative à une suite, nous avons démontré l'existence d'une limite.

## 2.2 Application aux fonctions continues

Commençons par un résultat évident :




**Proposition 2.5** L'image continue d'un compact dans un espace séparé est compacte.

DÉMONSTRATION. Considérons donc la fonction continue  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  est supposé compact et  $F$  séparé. Soit  $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}_i, i \in I\}$  un recouvrement ouvert de  $f(E)$  ; les  $\mathcal{O}_i^{-1}$  forment un recouvrement ouvert de  $E$  dont, par compacité, on peut extraire un recouvrement fini, soit  $f^{-1}(\mathcal{O}_j)$ ,  $j = 1, n$ . Mais les  $\mathcal{O}_j$ ,  $j = 1, n$  forment alors un recouvrement ouvert de  $f(E)$  ; la compacité de  $f(E)$  en résulte.

□

Voici maintenant une application de la compacité aux *problèmes d'optimisation*, le résultat qui suit est en effet à la base des démonstrations qui prouvent l'existence d'un optimum. De façon générale, il s'agit de trouver quel jeu de valeurs d'un certain nombre de paramètres rend optimal le résultat d'une opération donnée ; il peut s'agir de son coût, de sa rapidité, de la résistance à la flexion d'une poutre en fonction de sa forme géométrique... Ce dernier exemple est d'ailleurs plutôt instructif, puisqu'on peut montrer qu'un tel maximum n'existe pas dans l'ensemble des géométries qui conservent


le volume et la longueur de la poutre ! C'est ce qui explique que les structures légères et résistantes soient du type 'nid d'abeilles' et sortent du cadre des formes géométriques régulières.

**Proposition 2.6** Une fonction  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , (dite fonction numérique), continue sur un compact est bornée, elle atteint son maximum et son minimum. 

DÉMONSTRATION.

▷ D'après la proposition 2.5, l'image de  $f$  est compacte, elle est donc bornée, selon la remarque 2.2.

▷ Notons  $M = \sup_{x \in K} f(x)$  (son existence découle de l'item précédent),  $z_n$  une suite croissante (dite suite maximisante), ayant  $M$  pour limite, et  $F_n = \{x \in K \mid z_n \leq f(x) \leq M\}$ . Les  $F_n$  constituent une suite décroissante de fermés non vides ; en vertu de la compacité, leur intersection n'est donc pas vide. Soit alors  $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , on aura  $f(a) = M$ , ce qui prouve que le maximum est atteint ; il en est de même pour le minimum. □

La compacité est une propriété particulièrement agréable mais rare ; en témoigne la proposition suivante, qui montre qu'une topologie d'espace compact ne peut être affaiblie sans perdre la propriété de séparation, en particulier, au sein d'une famille de topologies séparées comparables sur un ensemble donné, l'une au plus est une topologie d'espace compact. 

**Proposition 2.7** Si  $E$  est compact pour une topologie, il ne peut pas être muni d'une topologie d'espace séparé moins fine.

DÉMONSTRATION. Considérons plus généralement une bijection continue  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  est compact et  $F$  séparé. Elle transforme tout compact et donc tout fermé de  $E$  en un compact d'après la proposition 2.5, et donc en un fermé de  $F$ . Comme  $f$  est une bijection, il en résulte que c'est un isomorphisme, et donc que la topologie de  $F$  est l'image par  $f$  de celle de  $E$ . La proposition en résulte, en prenant pour  $F$ , l'espace  $E$  lui-même, muni d'une hypothétique topologie séparé moins fine, et pour  $f$  l'identité. □

### Les fonctions continues sur un compact

On note  $\mathcal{C}^0(K)$ , l'espace des fonctions continues sur le compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  ; comme les fonctions continues sur un compact sont bornées, ce n'est en fait rien d'autre que  $\mathcal{C}_b^0(K)$ .

## 2.3 Critères de compacité

La difficulté essentielle consiste à reconnaître les ensembles compacts. Nous aurons l'occasion de nous poser cette question à diverses reprises par la suite ; indiquons tout de suite deux critères d'utilisation fréquente.

### 2.3.1 Cas des espaces métriques



**Théorème 2.8** *Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

DÉMONSTRATION.

▷ Nous avons déjà vu que ces conditions sont nécessaires.

▷ Réciproquement, il nous suffira de démontrer la compacité d'un pavé borné de  $\mathbb{R}^n$ , un borné sera nécessairement contenu dans un tel pavé, et sera compact s'il est fermé, en vertu de la proposition 2.3. (ii)

▷ Raisonnons par l'absurde et considérons donc un recouvrement ouvert  $\mathcal{R}$  de  $P = \prod_{i=1,n} [a_i, b_i]$ , supposé non compact. Découpons chaque segment  $[a_i, b_i]$  par son milieu, il en résulte un découpage de  $P$  en  $2^n$  sous-pavés identiques; l'un d'entre eux au moins, que nous noterons  $P^{(1)} = \prod_{i=1,n} [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}]$ , n'étant pas contenu dans une union finie d'éléments de  $\mathcal{R}$ . Si on poursuit le processus, on construit une suite de pavés emboîtés  $P^{(k)}$  qui ne sont pas contenus dans une union finie d'éléments de  $\mathcal{R}$ , dont le volume tend vers 0. Les suites  $a_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \infty$  et  $b_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \infty$  sont donc bornées et respectivement croissante et décroissante; elles convergent par conséquent vers un unique point  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

▷ Le point  $\alpha$  est contenu dans l'un des ouverts formant le recouvrement  $\mathcal{R}$ . Ce dernier contient une boule ouverte contenant  $\alpha$ , et donc certainement l'un des  $P^{(k)}$ ; il y a là une contradiction.

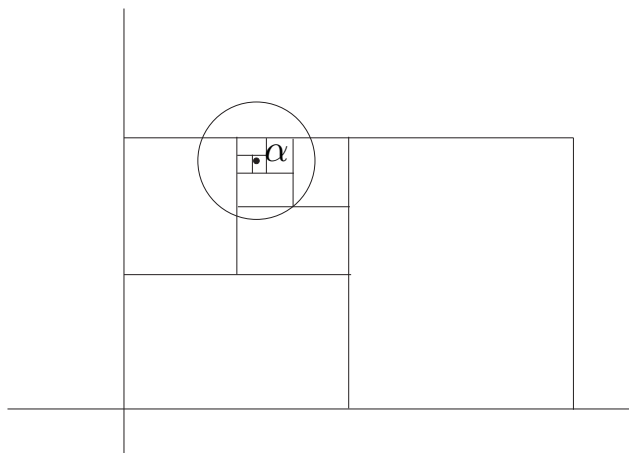


FIG. 2.1 – Convergence vers  $a$

□



**Remarque 2.9** *Ce résultat est spécifique aux espaces vectoriels de dimension finie. Il est faux en particulier pour l'espace vectoriel de dimension infinie  $\mathcal{C}^0(K)$  des applications continues sur le compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , muni de la topologie de la convergence uniforme. La recherche de sous-ensembles compacts dans  $\mathcal{C}^0(K)$  que dans divers autres*

espaces de fonctions revêt une grande importance, nous aurons l'occasion de développer par la suite des outils spécifiques à cet effet (voir les annexes B et F).

**Théorème 2.10 (Bolzano-Weierstraß)** Dans un espace métrisable, un sous-ensemble est compact si et seulement si de toute suite dans cet ensemble on peut extraire une sous-suite convergente. ♥

La démonstration est aisée moyennant deux lemmes préliminaires :

**Lemme 2.11** Soit  $E$  métrisable, supposons que de toute suite dans  $E$ , on puisse extraire une sous-suite convergente, et que  $\mathcal{R}$  soit un recouvrement ouvert de  $E$ . Alors,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que toute boule de rayon  $\varepsilon$  soit contenue dans l'un des ouverts constituant  $\mathcal{R}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On raisonne par l'absurde : supposons que  $\forall n > 0, \exists a_n$  tel que  $B_{1/n}(a_n)$  ne soit contenue dans aucun ouvert de  $\mathcal{R}$ . Notons  $a$  la limite d'une sous-suite extraite de  $a_n$  et  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathcal{R}$  contenant  $a$ . Il existera alors une boule de centre  $a$ , soit  $B_r(a)$ , contenue dans  $\mathcal{O}$ .

▷ Choisissons maintenant  $n \geq 2/\alpha$  tel que  $d(a_n, a) \leq \alpha/2$ , on aura  $B_{1/n}(a_n) \subset B_\alpha(a) \subset \mathcal{O}$ , ce qui constitue une contradiction. □

**Lemme 2.12** Soit  $E$  métrisable, supposons que de toute suite dans  $E$ , on puisse extraire une sous-suite convergente. Alors,  $\forall \varepsilon > 0, E$  peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Raisonnons encore par l'absurde et supposons l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que la conclusion du lemme soit fautive. Soit  $a_0$  un point de  $E$ , alors  $B_\varepsilon(a_0)$  ne recouvre pas  $E$ , et il existe par conséquent  $a_1 \in E \setminus B_\varepsilon(a_0)$ . On construit ainsi par récurrence une suite  $a_n$  qui vérifie  $a_k \in E \setminus \bigcup_{j=1, k-1} B_\varepsilon(a_j)$ .

▷ Soit alors  $a$  la limite d'une sous-suite extraite de  $a_n$ , il existera nécessairement  $i \neq j$  tels que  $d(a_i, a) \leq \varepsilon/3$  et  $d(a_j, a) \leq \varepsilon/3$ , soit par conséquent  $d(a_i, a_j) \leq 2\varepsilon/3$ . Ceci est incompatible avec la construction de la suite  $a_n$ . □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME Soit  $\mathcal{R}$  un recouvrement ouvert de l'espace métrisable  $E$ , le lemme 2.11 nous démontre l'existence d'un  $\varepsilon$  tel que chaque boule de rayon  $\varepsilon$  soit contenue dans un des ouverts composant  $\mathcal{R}$ . En fait d'après le lemme 2.12, un nombre fini de ces boules suffit à recouvrir  $E$ ; il en résulte qu'un nombre fini d'ouverts de  $\mathcal{R}$  suffit à recouvrir  $E$ . □



### 2.3.2 Cas des espaces topologiques

Le résultat qui précède peut être étendu aux espaces non métrisables en utilisant la notion de filtre, qui joue pour les espaces non métrisables le même rôle que les suites dans les espaces métrisables (voir l'annexe A et tout particulièrement le théorème A.7 ainsi que le corollaire A.15).

# Chapitre 3

## Les structures uniformes

### 3.1 La complétude

La démonstration de l'existence d'une solution pour un problème donné passe fréquemment par la construction d'une suite de solutions de problèmes plus simples (par exemple posés dans des espaces de dimension finie), suivie de la preuve de la convergence de cette suite vers une solution du problème initial. Ce type de démonstration d'existence, *de nature constructive*, est particulièrement intéressant d'un point de vue pratique, car susceptible de conduire à un *algorithme réaliste d'approximation* de la solution. On conçoit donc toute l'importance des méthodes permettant de démontrer la convergence d'une suite dans un espace de fonctions.

Jusqu'ici le seul théorème que nous ayons vu en ce sens est lié à la compacité, il nous apprend que de toute suite sur un compact, on peut extraire une sous-suite convergente. La propriété de *complétude* définie ci-dessous, bien que limitée aux *espaces métriques*, est de façon générale moins contraignante, ainsi qu'en témoigne la proposition 3.5 ; elle permet également de démontrer l'existence de la limite d'une suite indépendamment de sa valeur présumée. Nous aurons par la suite l'occasion d'en donner une autre définition, dans le cadre des espaces semi-normés (définition 4.22), c'est l'indice qu'il s'agit en fait de divers avatars d'une notion plus générale, mais il est important de noter que *la seule donnée d'une topologie ne suffit pas à définir la notion de complétude* et qu'une structure supplémentaire est nécessaire, par exemple métrique ou d'espace vectoriel topologique (voir le chapitre 4). ♠

**Définition 3.1** On dit que la suite  $x_n$  est de Cauchy dans l'espace métrique  $E$ , muni de la distance  $d$ , si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq p, d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

**Remarque 3.2** On voit bien ici l'importance de distinguer entre espaces métriques et espaces métrisables ; deux distances peuvent en effet définir la même topologie sans que leurs suites de Cauchy soient les mêmes. Considérons par exemple sur  $\mathbb{R}$  la distance  $d(x, y) = |\text{Arc tg } x - \text{Arc tg } y|$ , elle définit la même topologie que la distance usuelle,

mais cependant, la suite des entiers naturels (qui ne converge pas !) est de Cauchy pour  $d$ .



**Proposition 3.3** Dans un espace métrique, toute suite convergente est une suite de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Si la suite  $x_n$  converge, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p$  tel que  $\forall n \geq p$ ,  $d(x_n, x) \leq \varepsilon/2$ , et par conséquent,  $\forall m, n \geq p$ ,  $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ . □

Remarquons que cette propriété est bien indépendante de la connaissance d'une possible limite, et montrons qu'elle suffit pour en démontrer l'existence dans le cas d'un espace compact.

**Définition 3.4** Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy y converge.

**Proposition 3.5** Un espace métrique compact est complet.

DÉMONSTRATION. Soit en effet une suite de Cauchy  $x_n$  dans le compact  $K$ , d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut en extraire une sous-suite convergente  $x_{n'}$ , soit vers  $x$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $n$  et  $m'$  suffisamment grands, on aura  $d(x_{m'}, x_n) \leq \varepsilon/2$ , et si  $m'$  est choisi suffisamment grand on aura également  $d(x_{m'}, x) \leq \varepsilon/2$ . Il en résulte que  $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ , et par conséquent la convergence de toute la suite  $x_n$ . □

Revenons à notre exemple du paragraphe 1.5 pour lequel est valable la propriété de complétude mais pas celle de compacité.



**Théorème 3.6** L'espace  $\mathcal{C}_b^0(D)$  des fonctions continues et bornées sur l'ensemble  $D$ , est complet.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit donc une suite de Cauchy  $\varphi_n$  dans  $\mathcal{C}_b^0(D)$ , il est clair tout d'abord que pour chaque valeur de  $x \in D$ , la suite  $\varphi_n(x)$  est de Cauchy, elle converge donc dans  $\mathbb{R}$  qui est complet par construction, soit vers  $\varphi(x)$ . Il s'agit maintenant de démontrer la continuité de  $\varphi$ .

▷ Prouvons maintenant qu'en fait  $\varphi_n$  tend uniformément vers  $\varphi$  dans  $D$ . Si nous fixons  $\varepsilon > 0$ , nous pouvons trouver  $N$  tel que

$$\forall m, n > N, \forall x \in D, |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Gardons  $n$  et  $x$  fixés et passons à la limite dans cette inégalité vis-à-vis de  $m$ , on obtient

$$\forall n > N, \forall x \in D, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

▷ Il ne reste plus alors qu'à remarquer qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. On a en effet

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| + |\varphi_n(y) - \varphi(y)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in D} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|. \end{aligned}$$

Si on fixe  $x$  et  $\varepsilon > 0$ , on peut d'abord choisir  $n$  tel que  $\sup_{z \in D} |\varphi(z) - \varphi_n(z)| \leq \varepsilon/3$ , puis  $\eta$  tel que  $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \varepsilon/3$  ; la conclusion en résulte. □

**Proposition 3.7** *Dans un espace métrique, toute partie complète est fermée.*

DÉMONSTRATION. Soit  $F$  une partie complète de l'espace métrique  $E$  et  $a \in \overline{F}$ . Chaque voisinage de  $a$  rencontre  $F$ , en vertu de la proposition 1.23. Il en est en particulier ainsi des boules  $B_{1/n}(a)$ , et il existe donc une suite d'éléments de  $F$  convergeant vers  $a$  ; cette suite est donc de Cauchy, elle converge par conséquent dans  $F$  qui est complet. Il en résulte que  $a \in F$ , et que  $F = \overline{F}$ . □

**Proposition 3.8** *Dans un espace métrique complet, toute partie fermée est complète.* ♥

DÉMONSTRATION. Soit  $E$  un espace métrique complet et  $F$  une partie fermée de  $E$ , soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans  $F$ , elle est également de Cauchy dans  $E$ , qui est complet ; elle y converge par conséquent. Mais un fermé contient la limite de toutes ses suites convergentes, en vertu de la proposition 1.23. Il en résulte que toute suite de Cauchy dans  $F$  y converge. □

Les relations entre compacité et complétude sont plus subtiles que ne pourrait le laisser penser la proposition 3.5 ; on a en particulier la ◇

**Proposition 3.9** *Pour qu'un espace métrique complet soit compact, il faut et il suffit que  $\forall \varepsilon > 0$ , on puisse le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $E$  métrique compact, il est recouvert par  $\bigcup_{x \in E} B_\varepsilon(x)$ , et par conséquent par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ .

▷ Réciproquement, supposons vérifiée la propriété de recouvrement ci-dessus. Choisissons une suite  $S = (x_n)$ , nous allons démontrer qu'on peut en extraire une sous-suite de Cauchy. L'espace étant complet, elle convergera, ce qui prouve la compacité en vertu du Théorème de Bolzano-Weierstraß.

▷ Commençons par choisir  $\varepsilon = 1$  (par exemple !) et notons  $B_1$  l'une des boules de rayon 1 composant le recouvrement, qui contienne une infinité de  $x_n$ , soit en fait une suite partielle  $S_1$  extraite de  $S$ . On peut alors réitérer le procédé et recouvrir ainsi l'espace d'une famille de boules de rayon  $1/n$  dont la boule  $B_n$  contient la suite  $S_n$  extraite de  $S_{n-1}$ . ♠

▷ Considérons alors la suite diagonale  $S'$  formée à partir des suites  $S_n$  en prenant pour  $n^{\text{ième}}$  terme de  $S'$  le  $n^{\text{ième}}$  terme de  $S_n$ . Il s'agit d'une suite de Cauchy, puisque tous ses termes de rang supérieur ou égal à  $n$  sont contenus dans la boule  $B_n$ .

□

### 3.1.1 Un théorème de prolongement par continuité

*La notion de densité est de première importance.* Un premier exemple est celui de la relation entre rationnels et réels : on montre que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , ce qui n'empêche d'ailleurs pas  $\mathbb{Q}$  d'être d'intérieur vide ! Dans le cadre des espaces de fonctions, qui nous intéresse tout particulièrement, les sous-ensembles denses seront formés de fonctions plus régulières, bien adaptées à la démonstration d'estimations a priori de la solution par les données. La densité permet d'étendre ces résultats à l'espace tout entier, et par là même de démontrer l'existence de solutions dans des espaces complets comprenant des fonctions peu régulières. Nous aurons fréquemment l'occasion de voir réapparaître ce thème.



**Théorème 3.10** *Si  $E$  est un espace vectoriel normé,  $A$  un sous-espace vectoriel dense de  $E$ ,  $F$  un espace normé complet et  $u$  une application linéaire continue  $A \rightarrow F$ , alors il existe une unique application linéaire continue  $\tilde{u}$  prolongeant  $u$  à  $E$  tout entier.*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $x \in E$ , il existe une suite  $x_n$  de  $A$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . La suite  $u(x_n)$  est de Cauchy, en effet

$$\|u(x_m) - u(x_n)\| = \|u(x_m - x_n)\| \leq \|u\| \|x_m - x_n\| \leq \|u\| (\|x_m - x\| + \|x_n - x\|).$$

▷ Notons  $z$  sa limite, et montrons qu'elle ne dépend pas de la suite  $x_n$ . Soit donc  $y_n$  une suite de  $A$  tendant vers  $x$ , nous aurons en effet

$$\|u(y_n) - z\| \leq \|u(y_n) - u(x_n)\| + \|u(x_n) - z\| \leq \|u\| \|y_n - x_n\| + \|u(x_n) - z\|.$$

On est donc fondé à définir  $\tilde{u}$  sur  $E$  par la formule  $\tilde{u}(x) = z$ . Il est clair que  $\tilde{u}$  est linéaire, prolonge  $u$ , et que ce prolongement est unique.

▷ De l'inégalité  $\|u(x_n)\| \leq \|u\| \|x_n\|$  résulte, par continuité de la norme,  $\|\tilde{u}(x)\| = \|z\| \leq \|u\| \|x\|$ . La continuité de  $\tilde{u}$  en découle.

□

## 3.2 Les fonctions uniformément continues

**Définition 3.11** *La fonction  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces métriques respectivement munis des distances  $d$  et  $\delta$ , est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \text{ tel que } \forall x, y \in E, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

La continuité uniforme implique la continuité, mais de même que la complétude, ce n'est pas une notion topologique : elle fait explicitement appel à la métrique.

**Proposition 3.12** *Une fonction  $f$  continue d'un espace métrique compact  $E$  dans un espace métrique  $F$  est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $f$  ne soit pas uniformément continue, il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, y_n \text{ avec } d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \text{ et } \delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

Selon le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut extraire de  $x_n$  une sous-suite convergente, soit  $x_{n'} \rightarrow a$ . La suite  $y_{n'}$  convergera également vers  $a$ , puisque  $d(a, y_{n'}) \leq d(a, x_{n'}) + 1/n'$ . Comme  $f$  est continue, on pourra choisir  $n'$  assez grand pour que

$$\delta(f(a), f(x_{n'})) \leq \varepsilon/2 \text{ et } \delta(f(a), f(y_{n'})) \leq \varepsilon/2.$$

On aura alors  $\delta(f(x_{n'}), f(y_{n'})) \leq \varepsilon$ , ce qui constitue une contradiction. □

**Définition 3.13** *On dit que la fonction  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction en escalier si il existe une suite croissante  $s_i$  de points de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit constante sur chaque intervalle  $[s_{i-1}, s_i[$ .*

**Corollaire 3.14** *Une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sur un intervalle compact  $[a, b]$ , est limite uniforme de fonctions en escalier.*

DÉMONSTRATION. Posons  $h = (b - a)/n$  et  $s_i = a + ih$ , notons  $f_h$  la fonction en escalier associée à la subdivision  $s_i$  de pas  $h$ , on aura

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_h(y)| = \sup_{i=1, n} \sup_{x \in [s_{i-1}, s_i]} |f(x) - f(s_{i-1})|$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  étant uniformément continue, on pourra choisir  $h$  tel que  $|x - y| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . Il en résulte que  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_h(y)| \leq \varepsilon$ ; la conclusion en découle. □

### 3.2.1 Prolongement par continuité uniforme

Le théorème de prolongement que nous avons démontré pour les applications *linéaires* continues s'étend, au prix de quelques efforts supplémentaires, aux applications *uniformément* continues.

**Proposition 3.15** *Une application uniformément continue  $f : A \subset E \rightarrow E'$ , où  $A$  est dense dans  $E$ , métrique et  $E'$  est métrique complet, se prolonge de façon unique en une application uniformément continue  $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $A$  est dense dans  $E$ ,  $\forall x \in E$ ,  $\exists x_n \in A$  telle que  $x_n \rightarrow x$ ; par continuité de  $\tilde{f}$ , on aura  $f(x_n) = \tilde{f}(x_n) \rightarrow \tilde{f}(x)$ . L'unicité de  $\tilde{f}$  en découle.

▷ Notons  $d$  la distance dans  $E$  et  $d'$  celle dans  $E'$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$ , par uniforme continuité de  $f$ ,  $\exists \eta > 0$ , tel que  $\forall x, y \in A$ , vérifiant  $d(x, y) \leq \eta$ , alors  $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ . Il en résulte que si  $x_n \rightarrow b \in E$ , la suite  $f(x_n)$  est de Cauchy dans  $E'$ , elle converge donc, soit vers  $b'$ .

▷ Si une autre suite  $y_n \rightarrow b$ , alors  $f(y_n)$  converge également et la limite est la même, puisque  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La limite ne dépend donc que de  $b$ , nous la noterons  $\tilde{f}(b)$ , et il est clair que  $\tilde{f}$  constitue un prolongement continu de  $f$ .

▷ Il reste à montrer la continuité uniforme de  $\tilde{f}$ . Fixons donc  $\varepsilon > 0$ , et choisissons  $\eta > 0$  comme ci-dessus; prenons alors  $x$  et  $y \in E$  tels que  $d(x, y) \leq \eta/2$ , et choisissons deux suites  $x_n$  et  $y_n$  d'éléments de  $A$  convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ . Pour  $n$  suffisamment grand, par continuité de  $d$ , on aura  $d(x_n, y_n) \leq \eta$ , ainsi que  $d'(f(x_n), \tilde{f}(x)) \leq \varepsilon$ , et  $d'(f(y_n), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$ . Comme de plus  $d'(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$ , il en résulte que  $d'(f(x), \tilde{f}(y)) \leq 3\varepsilon$ . La continuité uniforme de  $\tilde{f}$  en découle.

□

# Chapitre 4

## Espaces vectoriels topologiques

Les espaces de fonctions qui sont au centre de notre étude possèdent tout à la fois une structure *d'espace vectoriel* et une structure *d'espace topologique* ; afin de bénéficier au mieux de leurs propriétés, il est nécessaire d'explicitier les relations entre ces deux structures.

### 4.1 Topologies compatibles

**Définition 4.1** *Un espace vectoriel topologique  $E$  est un espace vectoriel muni d'une structure topologique compatible, c'est-à-dire telle que l'addition  $E \times E \rightarrow E$  soit continue, ainsi que la multiplication  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ .*

**Proposition 4.2** *Dans un espace vectoriel topologique, les voisinages d'un quelconque point  $\varphi$  sont de la forme  $\varphi + V$ , où  $V$  est un voisinage de l'origine.*

DÉMONSTRATION. Soit  $W$  un voisinage de  $\varphi$ , comme l'application partielle  $\psi \rightarrow \psi + \varphi$  est en particulier continue, l'image réciproque  $V$  de  $W$  par cette application est un voisinage de 0. C'est dire que  $W = V + \varphi$  où  $V$  est un voisinage de 0. □

**Proposition 4.3** *Si une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est continue à l'origine, où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques, alors elle est continue partout.* ♥

DÉMONSTRATION. Soit en effet  $\varphi \in E$ , posons  $\psi = u(\varphi)$  et notons  $W$  un voisinage de  $\psi$ . D'après la proposition 4.2, nous aurons  $u^{-1}(W) = u^{-1}(\psi + V) \supset u^{-1}(V) + \varphi$ , où  $V$  est un voisinage de 0. De la continuité de  $u$  en 0 résulte alors que  $u^{-1}(V)$  est un voisinage de 0, et par conséquent que  $u^{-1}(W)$  est un voisinage de  $\varphi$ . □



### 4.1.1 Les voisinages de 0

Selon la remarque 1.16, la topologie peut être construite à partir de la famille des voisinages de chaque point, il est donc clair que la considération des voisinages de 0 suffit à la description de la topologie d'un espace vectoriel topologique (e.v.t. en abrégé).

**Proposition 4.4** *Dans un e.v.t., les voisinages de 0 vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *Tout voisinage  $V$  de 0 est absorbant, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \lambda x \in V, \forall |\lambda| \leq \alpha.$$

(ii) *L'ensemble des voisinages de 0 est invariant par homothétie.*

(iii) *Tout voisinage  $V$  de 0 contient un voisinage  $W$  équilibré, c'est-à-dire tel que*

$$\forall |\lambda| \leq 1, \lambda W \subset W.$$

(iv) *Une base de voisinages de 0 est formée de voisinages ouverts équilibrés et absorbants.*

(v) *Tout voisinage  $V$  de 0 contient un voisinage  $W$  tel que  $W + W \subset V$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Les deux premières propriétés découlent des continuités partielles respectives de l'application  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ .

▷ Utilisons maintenant la continuité complète de cette application. Si  $V$  est un voisinage de 0, il existe  $U$ , voisinage de 0, et  $\alpha > 0$ , tels que si  $|\mu| \leq \alpha$  et  $x \in U$  alors  $\mu x \in V$ . Il suffit alors de poser  $W = \bigcup_{|\mu| \leq \alpha} \mu U$ .

▷ Notons de plus que  $\overset{\circ}{W}$  est encore un voisinage de 0 équilibré; c'est en effet un voisinage de 0, et pour  $|\lambda| \leq 1$ , on a  $\lambda \overset{\circ}{W} = (\lambda W) \subset \overset{\circ}{W}$ .

▷ On utilise maintenant la continuité de l'addition  $(x, y) \rightarrow x + y : E \times E \rightarrow E$ . Si  $V$  est un voisinage de 0, il existe des voisinages de 0,  $W_1$  et  $W_2$  tels que  $(x, y) \in W_1 \times W_2 \implies x + y \in V$ . Il suffit alors de poser  $W = W_1 \cap W_2$ .

□

On montre sans difficulté que si les voisinages de 0 dans un espace vectoriel vérifient ces quatre propriétés, et si les voisinages d'un point quelconque sont construits selon la proposition 4.2, alors il s'agit d'un e.v.t.



**Remarque 4.5** *La proposition 4.4 nous montre que les voisinages équilibrés et absorbants jouent le rôle des boules centrées à l'origine dans un espace normé, et partagent beaucoup de leurs propriétés. Nombre de preuves faciles en termes de normes se transposent ainsi aisément aux e.v.t.*

En l'absence de norme, les ensembles bornés ne peuvent être caractérisés par le fait d'être contenus dans une boule, la notion suivante en constitue la généralisation naturelle :

**Définition 4.6** Dans un e.v.t., un ensemble est borné s'il est absorbé par tout voisinage de 0.

**Proposition 4.7** Dans un e.v.t., les ensembles compacts sont bornés.

DÉMONSTRATION. Les voisinages de 0 ouverts équilibrés formant une base de voisinages, nous pouvons nous contenter de considérer l'un d'entre eux, soit  $U$ . Soit alors  $K$  un compact, comme  $U$  est absorbant, on aura  $K \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} nU$ , soit en vertu de la compacité  $K \subset \cup_{i=1, n} n_i U = (\max_{i=1, n} n_i) U$ .

□

## 4.2 Espaces localement convexes

Si nous voulons être plus précis, une idée à la fois simple et assez générale consistera à utiliser des semi-boules pour définir la topologie, de même que nous avons utilisé des boules dans le cas des espaces normés. En fait il n'y a pas d'espoir d'obtenir un espace séparé à l'aide d'une seule ou même d'un nombre fini de semi-normes (sauf bien entendu s'il s'agit en fait de normes!), et nous serons donc amenés à prendre en considération une famille de semi-normes selon un modèle que nous avons déjà expérimenté lors de la définition de la topologie produit :

**Définition 4.8** La topologie définie par la famille de semi-normes  $q_i$ ,  $i \in I$  est celle dont une base de voisinages du point  $\varphi$  est formée des intersections finies de semi-boules

$$B_\varepsilon^i(\varphi) = \{\psi \in E \mid q_i(\varphi - \psi) \leq \varepsilon\} = \varphi + B_\varepsilon^i(0). \quad (4.1)$$

On dit que  $E$ , muni de cette topologie, est un e.v.t. semi-normé.

**Proposition 4.9** La topologie définie par la famille de semi-normes  $q_i$ ,  $i \in I$  est séparée si et seulement si  $\forall \psi \neq 0, \exists i$  tel que  $q_i(\psi) \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. Choisissons  $\varphi \neq \varphi'$ , et posons  $\psi = \varphi - \varphi'$  et  $d = q_i(\psi)$ , Si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $B_{d/3}^i(0)$ , on aura

$$q_i(\psi) \leq q_i(\varphi - \varphi' + u - v) + q_i(u) + q_i(v) \leq q_i(\varphi - \varphi' + u - v) + \frac{2d}{3},$$

et par conséquent  $q_i((\varphi + u) - (\varphi' + v)) \geq d/3$ . Il en résulte que les voisinages respectifs de  $\varphi$  et  $\varphi'$  :  $\varphi + B_{d/3}^i(0)$  et  $\varphi' + B_{d/3}^i(0)$  ne se rencontrent pas. La réciproque est évidente.

□

### 4.2.1 Convergence et continuité en termes de semi-normes

A partir de cette définition de la topologie en termes de semi-boules, il est très facile de reformuler les notions de convergence et de continuité, dans le cadre des espaces semi-normés, nous allons voir que d'un point de vue pratique, il s'agit en fait d'une généralisation aisée du cas des espaces normés.



**Lemme 4.10** *Pour que la suite  $\varphi_n$  converge vers  $\varphi$  dans l'espace  $E$  semi-normé, dont la topologie est définie par la famille de semi-normes  $q_i$ ,  $i \in I$ , il faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon, \forall i \in I, \exists N, \text{ tel que } \forall n \geq N, q_i(\varphi_n - \varphi) \leq \varepsilon. \quad (4.2)$$



**Lemme 4.11** *Pour que la fonction  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels semi-normés dont les topologies sont respectivement définies par les familles de semi-normes  $q_i$ ,  $i \in I$  et  $r_j$ ,  $j \in J$ , soit continue en  $\varphi \in E$ , il faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon, \forall j \in J, \exists \eta > 0 \text{ et } I' \text{ fini } \subset I, \text{ tels que} \quad (4.3)$$

$$(\max_{i \in I'} q_i(\psi - \varphi) \leq \eta) \Rightarrow (r_j(f(\psi) - f(\varphi)) \leq \varepsilon).$$

**Lemme 4.12** *Pour qu'un ensemble  $A$  dans un e.v.t. semi-normé soit borné, il faut et il suffit que pour toute semi-norme  $q_i$  définissant sa topologie, on ait  $\alpha_i = \sup_{\varphi \in A} q_i(\varphi) < +\infty$ .*

DÉMONSTRATION. Une base de voisinages de 0, est formée des intersections finies de semi-boules, soit  $B = \bigcap_{i \in I'} B_{\varepsilon_i}^i(0)$ , et on aura  $A \subset \lambda B$ , dès que  $\lambda \geq \max_{i \in I'} \alpha_i / \min_{i \in I'} \varepsilon_i$ .

□

### 4.2.2 Propriétés des semi-normes

De l'inégalité triangulaire  $|q(\psi) - q(\varphi)| \leq q(\psi - \varphi)$  découle alors, comme dans le cas des espaces normés, le lemme suivant :

**Lemme 4.13**

- (i) *Une semi-norme est continue si et seulement si elle est continue à l'origine.*
- (ii) *Les semi-normes qui définissent la topologie de  $E$  sont continues.*

**Lemme 4.14** *Soit  $E$  est un espace vectoriel topologique dont la topologie est définie par la famille de semi-normes  $q_i$ ,  $i \in I$  ; pour qu'une semi-norme  $q$  soit continue sur  $E$ , il faut et il suffit que*

$$\exists I' \text{ fini } \subset I \text{ et } k > 0 \text{ tels que } q(\varphi) \leq k \max_{i \in I'} q_i(\varphi), \forall \varphi \in E. \quad (4.4)$$

DÉMONSTRATION. Pour que  $q$  soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit continue en 0, c'est-à-dire d'après le lemme 4.11 que  $\forall \varepsilon, \exists \eta > 0$  et  $I'$  fini  $\subset I$ , tels que  $(\max_{i \in I'} q_i(\varphi) \leq \eta) \Rightarrow (q(\varphi) \leq \varepsilon)$ . Par linéarité, il est équivalent de dire que

$$\forall \lambda > 0, (\max_{i \in I'} q_i(\varphi) \leq \lambda \eta) \Rightarrow (q(\varphi) \leq \lambda \varepsilon),$$

ou encore, avec  $\lambda = \max_{i \in I'} q_i(\varphi)/\eta$ , que  $q(\varphi) \leq \varepsilon/\eta \max_{i \in I'} q_i(\varphi)$  ; la conclusion en découle.  $\square$

**Proposition 4.15** *La topologie  $\mathcal{T}$  définie par la famille de semi-normes  $q_i, i \in I$  est la topologie la moins fine compatible avec la structure d'espace vectoriel, qui rende les  $q_i$  continues.*

DÉMONSTRATION.

▷ Montrons tout d'abord que  $E$  muni de la topologie  $\mathcal{T}$  est un e.v.t. Un voisinage de  $\varphi + \psi$  contient un sous-ensemble  $V$  de la forme  $\varphi + \psi + \cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i}^i(0)$ , où  $J \subset I$  est fini. Si on pose alors  $V_1 = \varphi + \cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i/2}^i(0)$  et  $V_2 = \psi + \cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i/2}^i(0)$ , on aura  $V_1 + V_2 \subset V$ .

▷ De même un voisinage de  $\lambda_0 \varphi_0$  contient  $V = \lambda_0 \varphi_0 + \cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i}^i(0)$ . Posons  $\alpha_i = \max(q_i(\varphi_0), 1)$ ,  $2\eta = \min_{i \in J} (\varepsilon_i/\alpha_i)$ , et  $M = |\lambda_0| + \eta$ , alors pour

$$(\lambda, \varphi) \in ]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[ \times \left( \varphi_0 + \cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i/2M}^i(0) \right),$$

on aura

$$\begin{aligned} q_i(\lambda \varphi - \lambda_0 \varphi_0) &\leq q_i(\lambda(\varphi - \varphi_0)) + q_i((\lambda - \lambda_0)\varphi_0) \\ &\leq |\lambda| q_i(\varphi - \varphi_0) + |\lambda - \lambda_0| q_i(\varphi_0) \leq M \frac{\varepsilon_i}{2M} + \frac{\varepsilon_i}{2\alpha_i} \alpha_i = \varepsilon_i. \end{aligned}$$

▷ Réciproquement, comme  $E$  est un e.v.t., les voisinages d'un point  $\varphi$  sont de la forme  $\varphi + V$ , où  $V$  est un voisinage de 0, et si on suppose les  $q_i$  continues, alors les  $\cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i}^i(0)$  sont des voisinages de 0, ce qui montre que la topologie de  $E$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ .  $\square$

**Proposition 4.16** *Si  $E$  est un espace semi-normé, sa topologie peut être définie par l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{T}$  la topologie engendrée par les  $q_i, i \in I$  et  $\mathcal{T}'$  celle engendrée par toutes les semi-normes continues pour  $\mathcal{T}$ . Tout d'abord il est clair que  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ , puisque elle est engendrée par un ensemble plus vaste de semi-normes. Mais comme par ailleurs  $\mathcal{T}'$  est la topologie la moins fine rendant continues les semi-normes qui l'engendrent, elle est identique à  $\mathcal{T}$ .  $\square$

### 4.2.3 Les applications linéaires continues

**Lemme 4.17** Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces semi-normés, dont les topologies sont respectivement définies par les  $q_i, i \in I$  et les  $r_j, j \in J$ , pour que l'application linéaire  $u : E \rightarrow F$  soit continue, il faut et il suffit que

$$\forall j \in J, \exists I' \text{ fini } \subset I \text{ et } k > 0 \text{ tels que } r_j \circ u(\varphi) \leq k \max_{i \in I'} q_i(\varphi), \forall \varphi \in E. \quad (4.5)$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 4.11, dire que  $u$  est continue signifie que  $\forall j, \forall \varepsilon, \exists I' \text{ fini } \subset I$  tel que

$$(\max_{i \in I'} q_i(\varphi) \leq \eta) \Rightarrow (r_j \circ u(\varphi) \leq \varepsilon).$$

Le raisonnement du lemme 4.14 nous conduit alors au résultat énoncé. □

Dans le cas où  $u$  est un forme linéaire, soit en fait si  $F = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'estimation (4.5) prend la forme simplifiée suivante :

$$\exists I' \text{ fini } \subset I \text{ et } k > 0 \text{ tels que } |u(\varphi)| \leq k \max_{i \in I'} q_i(\varphi), \forall \varphi \in E. \quad (4.6)$$



**Corollaire 4.18** Pour qu'une application linéaire  $u : E \rightarrow F$ , espaces semi-normés, soit continue, il faut et il suffit que  $r \circ u$  soit continue sur  $E$  pour toute semi-norme  $r$  continue sur  $F$ .

DÉMONSTRATION.

- ▷ Il est tout d'abord clair que si  $u$  est continue, alors  $r \circ u$  l'est également.
- ▷ Remarquons maintenant que  $r \circ u$  est une semi-norme, en effet

$$r \circ u(\varphi + \psi) = r(u(\varphi) + u(\psi)) \leq r \circ u(\varphi) + r \circ u(\psi).$$

Supposons enfin  $r \circ u$  continue pour toute semi-norme  $r$  continue sur  $F$ , et définissons les topologies de  $E$  et  $F$  par toutes leurs semi-normes continues. Si  $q = r \circ u$ , on aura bien entendu  $r \circ u \leq q$ , ce qui implique la continuité de  $u$  en vertu du lemme précédent. □

### 4.2.4 Propriétés supplémentaires des voisinages de 0

Tous les espaces vectoriels topologiques ne sont pas semi-normés, mais ce sont les seuls à avoir une base de voisinages *convexes* de l'origine (on parle d'*espaces vectoriels topologiques localement convexes*, e.v.t.l.c. en abrégé), et en fait *les seuls utiles dans la pratique*. C'est en effet cette convexité qui, par l'intermédiaire du théorème de Hahn-Banach, permet de démontrer l'existence de formes linéaires continues non identiquement nulles.

**Proposition 4.19**

- (i) Un e.v.t. semi-normé admet une base de voisinages de 0 convexes équilibrés.  
(ii) Un e.v.t. admettant une base de voisinages de 0 convexes est semi-normé.

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord que les  $\cap_{i \in J} B_{\varepsilon_i}^i(0)$  sont convexes équilibrés.

▷ Réciproquement montrons tout d'abord que  $E$  admet une base de voisinages de 0 convexes équilibrés. Par hypothèse, un voisinage de 0 contient un voisinage  $V$  convexe, et nous avons vu à la proposition 4.4 que ce dernier contient un voisinage  $W$  équilibré. L'intersection de tous les convexes contenant  $W$  (ou enveloppe convexe de  $W$ ) étant convexe équilibrée et contenue dans  $V$ , la conclusion en découle. Montrons ce dernier point : les éléments de l'enveloppe convexe de  $W$  sont de la forme  $\psi = \sum_{k=1, K} t_k \varphi_k$ , où  $\sum_{k=1, K} t_k = 1$  et  $\varphi_k \in W$ , et si  $|\lambda| < 1$ , on aura  $\lambda\psi = \sum_{k=1, K} t_k (\lambda\varphi_k)$ , qui appartient à  $W$ , puisque  $\lambda\varphi_k \in W$ .

▷ Soit donc  $V_\ell$  une base de voisinages de 0 convexes équilibrés, dont on sait en vertu de la proposition 4.4 qu'ils sont absorbants. Notons  $A_\ell(\varphi) = \{\lambda > 0 \mid \varphi \in \lambda V_\ell\}$ . Cet ensemble n'est pas vide car  $V_\ell$  est absorbant, c'est même une demi-droite car  $V_\ell$  est convexe et contient l'origine. On pourra donc noter  $p_\ell$  l'application (dite *jauge* de  $V_\ell$ ), définie par

$$p_\ell(\varphi) = \inf A_\ell(\varphi).$$

Comme  $V_\ell$  est équilibré,  $\mu\varphi \in \lambda V_\ell \iff |\mu|\varphi \in \lambda V_\ell$ , et par conséquent  $p_\ell(\mu\varphi) = |\mu|p_\ell(\varphi)$ . De plus, par convexité, si  $\varphi \in \lambda V_\ell$  et  $\psi \in \mu V_\ell$ , alors  $\varphi + \psi \in (\lambda + \mu)V_\ell$ , d'où il résulte que  $p_\ell(\varphi + \psi) \leq p_\ell(\varphi) + p_\ell(\psi)$ , ce qui montre que les  $p_\ell$  sont des semi-normes.

▷ Enfin les  $p_\ell$  définissent la topologie de  $E$  car

$$\{\varphi \mid p_\ell(\varphi) \leq \varepsilon\} = \{\varphi \mid \varphi \in \varepsilon V_\ell\} \subset V_\ell$$

dès que  $|\varepsilon| < 1$ .

□

**La topologie de la convergence simple**

Un exemple instructif est constitué par la topologie définie sur l'ensemble  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  des fonctions continues sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , à l'aide de la famille des semi-normes  $\delta_x(\varphi) = |\varphi(x)|$ ,  $x \in \Omega$  ; ce n'est rien d'autre que la topologie induite par celle du produit  $\mathbb{R}^\Omega$ , que nous avons précédemment rencontrée sous le nom de topologie de la convergence simple.

**4.3 Espaces métrisables**

**Proposition 4.20** Si la famille des semi-normes  $q_i$  est dénombrable et induit une topologie d'espace séparé, alors l'espace topologique  $E$  est métrisable.



DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que si la topologie est définie par les semi-normes  $q_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , on peut sans rien changer à la topologie remplacer ces dernières par les  $p_i = \sum_{j=1, i} q_j$ . On se trouve ainsi dans une situation où la topologie est définie par une famille croissante de semi-normes.

▷ Nous pouvons maintenant exhiber une distance compatible avec la topologie : on posera (par exemple)

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{p_i(\varphi - \psi)}{1 + p_i(\varphi - \psi)}$$

il est clair qu'il s'agit bien d'une distance, en vertu du lemme 1.4. Notons qu'elle est *invariante par translation*.

▷ Démonstrons l'identité des topologies, et choisissons à cet effet un indice  $i$  et considérons la semi-boule  $B_\varepsilon^i(\varphi) = \{\psi \mid p_i(\psi - \varphi) \leq \varepsilon\}$ . Elle contient la boule  $B_\eta(\varphi) = \{\psi \mid d(\varphi, \psi) \leq \eta\}$  où  $\eta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ .

▷ Réciproquement, comme

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i=1, n} \frac{p_i(\varphi - \psi)}{2^i(1 + p_i(\varphi - \psi))} + \sum_{i=n+1, \infty} \frac{p_i(\varphi - \psi)}{2^i(1 + p_i(\varphi - \psi))}$$

il suffit que  $p_n(\varphi - \psi) \leq \eta$  pour que  $d(\varphi, \psi) \leq \eta/(1 + \eta) + 2^{-n}$ . Si on se donne  $\varepsilon > 0$ , il suffit alors de choisir  $n > 1 - \text{Log } \varepsilon / \text{Log } 2$  et  $\eta < \varepsilon/(2 - \varepsilon)$  pour que la semi-boule  $B_\eta^n(\varphi)$  soit contenue dans la boule  $B_\varepsilon(\varphi)$ .

□

### Remarque 4.21

(i) *La distance que nous avons exhibée est invariante par translation, mais pas par homothétie, il ne s'agit donc pas d'une norme.*

(ii) *C'est l'existence d'une distance invariante par translation qui est intéressante, pas la formule qui la définit, son utilisation étant beaucoup moins commode que celle des semi-normes qui sont à la base de sa construction.*

## 4.4 Espaces séquentiellement complets



Nous venons de définir un certain nombre de topologies dont certaines sont métrisables et non les autres ; une différence importante entre ces deux situations réside dans le fait que dans un espace métrisable, les notions topologiques peuvent toujours s'exprimer en termes de suites, car chaque point y possède une base dénombrable de voisinages. Par exemple, dans un espace métrisable, pour qu'un point  $a$  soit dans l'adhérence d'un sous-ensemble  $F$ , il faut et il suffit qu'il soit limite d'une *suite* d'éléments de  $F$ . Il n'en est pas de même dans le cas d'un espace non métrisable, où l'adhérence n'est pas uniquement formée des limites de suites. La notion qui remplace les suites dans le cas d'espaces non métrisables est celle de *filtre*.



Dans le cas d'une topologie définie par une famille de semi-normes, la notion de complétude précédemment définie devra être élargie; nous avons en effet utilisé la distance de façon explicite. C'est ici la structure d'espace vectoriel qui viendra à notre secours, mais comme la famille de semi-normes n'est pas nécessairement dénombrable, nous devrions faire appel à la notion de *filtre de Cauchy*, pour définir la complétude. Nous n'en aurons en fait pas l'utilité immédiate, nous nous contenterons donc de traiter des suites, et nous définirons par là même une notion plus restreinte : celle d'espace *séquentiellement complet*

**Définition 4.22**

(i) On dira que la suite  $\varphi_n$  est de Cauchy dans l'espace semi-normé  $E$ , dont la topologie est définie par la famille de semi-normes  $q_j, j \in J$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall j \in J, \exists N \text{ tel que } \forall m, n > N, q_j(x_m - x_n) \leq \varepsilon. \quad (4.7)$$

(ii) Un espace semi-normé est dit *séquentiellement complet* si toute suite de Cauchy  $y$  converge.

Dans le cas des espaces semi-normés métrisables, on montre aisément que les suites de Cauchy sont les mêmes pour toutes les distances compatibles avec la topologie et invariantes par translation. Un e.v.t.l.c. métrisable séquentiellement complet est donc complet pour toutes les distances invariantes par translation, on dira qu'il est complet et on lui donne le nom *d'espace de Fréchet*. La situation est différente dans le cas d'un espace non métrisable, où par exemple les ensembles séquentiellement complets ne sont pas nécessairement fermés. ◇





# Chapitre 5

## Quelques espaces fonctionnels

Nous pouvons maintenant poursuivre l'exploration des espaces de fonctions numériques régulières, en considérant celles qui sont définies sur un *ouvert*, et par conséquent *non nécessairement bornées*. Deux possibilités (au moins) s'offrent à nous, d'une part adopter la position maximaliste qui consiste à n'introduire aucune contrainte au voisinage du bord de l'ouvert en considérant l'ensemble des fonctions régulières sur l'ouvert ; d'autre part se contenter de la position minimaliste qui consiste à imposer des contraintes de nullité au voisinage du bord. Ces deux types d'espaces ne sont pas susceptibles d'une topologie d'espace normé, mais nous avons providentiellement mis au point l'outil topologique permettant de les munir d'une notion de convergence simple et naturelle.

### 5.1 Espaces fonctionnels métrisables

Rappelons la notation commode des multi-indices : si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on note

$$|\alpha| = \sum_{j=1, n} \alpha_j \text{ et } \partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Définition 5.1** Si une suite croissante de compacts  $K_\ell \subset \Omega$ , vérifie les propriétés suivantes

- (i)  $\cup_\ell K_\ell = \Omega$
- (ii)  $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}$

on dit que les  $K_\ell$  forment une suite croissante exhaustive de compacts dans  $\Omega$ .

**Remarque 5.2** (i) L'existence de la suite des  $K_\ell$  découle du lemme D.14, rappelons-en la construction dans le cas d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  : posons

$$B_\ell = \{x \in \Omega \mid d(x, \Omega^c) \geq 1/\ell\},$$

c'est un fermé puisque l'application  $x \rightarrow d(x, B_\ell)$  est continue (voir le lemme D.4), et il suffira donc de poser

$$K_\ell = B_\ell \cap \{x \mid d(x, 0) < 1/\ell\}$$

(ii) Si  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , alors  $\exists \ell, K \subset K_\ell$ . En effet, on aura en fait  $\Omega = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_\ell$ , et par conséquent  $K$  est recouvert par un nombre fini de  $\overset{\circ}{K}_\ell$ , d'où la conclusion.

### 5.1.1 Fonctions dérivables sur un ouvert

L'espace  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ,  $0 \leq k < \infty$ , formé des fonctions  $k$  fois continûment dérivables dans l'ouvert  $\Omega$ , sera muni de la *topologie de la convergence uniforme sur tout compact, pour la fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$* , qui découle de la donnée de la famille dénombrable de semi-normes :

$$p_\ell^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_\ell} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (5.1)$$

où les  $K_\ell$  forment une *suite croissante exhaustive de compacts* inclus dans  $\Omega$ . De façon générale, si  $K$  est un compact, on posera

$$p_K^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (5.2)$$

L'espace  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , formé des fonctions indéfiniment dérivables dans l'ouvert  $\Omega$ , sera muni de la *topologie de la convergence uniforme sur tout compact, pour la fonction et ses dérivées*, qui découle de la famille des  $p_\ell^k(\varphi)$ . notons bien que dans ce cas la famille des semi-normes ne dépend plus seulement du paramètre  $\ell$  mais également de  $k$ .



Il est facile de montrer que *la topologie ainsi définie ne dépend pas de la suite des compacts  $K_\ell$* . Notons bien la différence avec la topologie de  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ ,  $k < +\infty$ , qui découle de l'unique norme

$$p^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

et peut être définie dès que  $\Omega$  est borné. Ici on a admis que la vitesse de convergence pouvait dépendre du compact  $K_\ell$  considéré, ainsi que (pour  $k = \infty$ ), de l'ordre de dérivation. En fait, cela signifie dans la pratique que la convergence est autorisée à devenir *de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on se rapproche du bord de  $\Omega$  et que l'ordre de dérivation augmente*.



**Théorème 5.3** *L'espace  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  est un espace de Fréchet.*

DÉMONSTRATION.

▷ Si nous nous restreignons au cas où  $k = 0$ , la démonstration est très semblable à celle du théorème 3.6 : on démontre sans peine que la suite de Cauchy  $\varphi_n$  converge vers une fonction continue  $\psi_\ell$  sur chaque compact  $K_\ell$ , et par conséquent vers une fonction continue  $\psi$  sur l'ouvert  $\Omega$ , puisque les  $K_\ell$  sont emboîtés.

▷ Traitons le cas  $k = 1$ , le cas général s'en déduit par récurrence. Si la suite  $\varphi_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , on montre de même que  $\varphi_n$  converge uniformément, soit vers  $\psi$  sur tout compact, ainsi que  $\partial \varphi_n / \partial x_i$ , soit vers  $\psi^{(i)}$ .

▷ Montrons que  $\forall i, \psi^{(i)} = \partial\psi/\partial x_i$ , il en résultera que  $\varphi_n \rightarrow \psi$  dans  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $x$  un point de  $\Omega$ ,  $B(x)$  une boule centrée en  $x$  incluse dans  $\Omega$ , et  $y$  un point de  $B(x)$  tel que  $y_m = x_m$  dès que  $m \neq i$ . On aura

$$\varphi_n(y) - \varphi_n(x) = \int_{x_i}^{y_i} \partial\varphi_n/\partial x_i(t) dt.$$

Comme  $\partial\varphi_n/\partial x_i$  converge uniformément vers  $\psi^{(i)}$ , il en résulte que  $\psi(y) - \psi(x) = \int_{x_i}^{y_i} \psi^{(i)}(t) dt$ , et par conséquent, comme  $\psi^{(i)}$  est continue, que  $\psi^{(i)} = \partial\psi/\partial x_i$ .

□

### 5.1.2 Fonctions à support dans un compact fixe

Poursuivons nos investigations en considérant l'ensemble plus restreint des fonctions qui se raccordent régulièrement à zéro à l'extérieur du compact fixe  $K$  inclus dans l'ouvert  $\Omega$  ; on évite ainsi de prendre en compte ce qui se passe au voisinage de la frontière de  $\Omega$ .

**Définition 5.4** On appelle support de la fonction  $f$ , le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est identiquement nulle ; c'est bien entendu un fermé.

Soit donc  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $K$  un compact inclus dans  $\Omega$ , on définit l'espace  $\mathcal{C}_K^k(\Omega)$  comme étant formé des fonctions  $k$  – fois dérivables dans  $\Omega$ , dont le support est inclus dans  $K$ . Il constitue en fait un sous-espace fermé de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ , que l'on munit de la topologie induite. Cette topologie dégénère d'ailleurs quelque peu dans le cas où  $k < \infty$ , puisqu'alors il est bien clair que la topologie de  $\mathcal{C}_K^k(\Omega)$  peut être engendrée à l'aide de l'unique norme

$$p_K^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

## 5.2 Fonctions à support dans un compact arbitraire

Si on s'intéresse aux espaces de fonctions à support compact dans  $\Omega$ , *ce support pouvant dépendre de la fonction considérée*, la situation se complique, en effet  $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ , espace des fonctions continues, à support compact dans  $\Omega$ , est inclus dans  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  *mais n'y est pas fermé*. La topologie induite n'en fait pas un espace complet, et même pas séquentiellement complet comme le montre le lemme 5.5 ci-dessous, ce qui constitue une catastrophe suffisamment grave pour qu'on soit amené à adopter une topologie plus fine, mais (il faut bien le reconnaître) plus compliquée. Il reste que cette étude ne peut être totalement éludée, car ces espaces sont à la base de la théorie des distributions, dont la mise au point a constitué une contribution majeure à l'étude des équations aux dérivées partielles. ♠

**Lemme 5.5** La suite de fonctions  $f_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi(x-i)$ , où  $\varphi$  positive appartient à  $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ , est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , mais sa limite n'est pas à support compact.

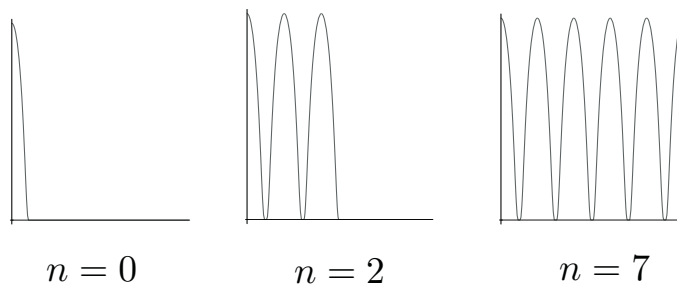


FIG. 5.1 – La suite  $f_n$  pour  $\varphi(x) = \chi_{]-1/2, 1/2[} \exp(1/(4x^2 - 1))$

DÉMONSTRATION. Il est clair tout d'abord que  $f_n(x) - f_m(x)$  tend uniformément vers 0 sur tout compact quand  $m, n \rightarrow \infty$ , la suite  $f_n$  est donc de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . Si de plus  $\varphi(y) \neq 0$ , alors comme la suite  $f_n$  est croissante, on aura  $f_n(x) \neq 0$  dès que  $x = y + i$ ,  $i = 1, n$ ; il en résulte que le support de  $f$  n'est pas borné.

□

On sera donc amené à définir sur  $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$  une topologie plus fine, telle que la suite précédente ne soit plus de Cauchy.

**Définition 5.6** On dit qu'une semi-norme sur  $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$  est acceptée si sa restriction à chaque  $\mathcal{C}_{K_\ell}^0(\Omega)$  est continue, pour une suite exhaustive croissante de compacts  $K_\ell$  inclus dans  $\Omega$ . La topologie définie par l'ensemble des semi-normes acceptées est appelée topologie de limite inductive stricte des  $\mathcal{C}_{K_j}^0(\Omega)$ . On montre sans difficulté que la topologie ne dépend pas de la suite de compacts qui a été choisie.

Muni de cette topologie l'espace  $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$  a été noté  $\mathcal{D}^0(\Omega)$  par Laurent Schwartz, et la notation  $\mathcal{D}_K^0(\Omega)$  au lieu de  $\mathcal{C}_K^0(\Omega)$  en découle assez naturellement. De même on définit  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  à partir des  $\mathcal{C}_K^k(\Omega) = \mathcal{D}_K^k(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  comme étant égal à  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , muni de la topologie de limite inductive stricte des  $\mathcal{C}_{K_j}^\infty(\Omega) = \mathcal{D}_{K_j}(\Omega)$ . On montre que la topologie de limite inductive stricte rend ces espaces complets, et en particulier séquentiellement complets. On prouve d'ailleurs bien d'autres résultats intéressants, comme par exemple le fait que dans ces espaces les ensembles fermés et bornés sont compacts, mais ceci est une autre histoire ...

### Remarque 5.7

(i) On peut expliciter la topologie de limite inductive stricte des  $\mathcal{D}_{K_j}^k(\Omega)$  et montrer que la famille (non dénombrable!) des

$$q_\eta(\varphi) = \sup_\ell \sup_{|x| \geq \ell} \frac{|\varphi(x)|}{\eta_\ell}, \text{ où la suite } \eta = (\eta_\ell) \text{ vérifie } \lim_{\ell \rightarrow \infty} \eta_\ell = 0,$$

engendre la topologie de  $\mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n)$ . De même la famille des

$$q_{\eta, \xi}(\varphi) = \sup_\ell \sup_{|x| \geq \ell} \sup_{|\alpha| \leq \xi_\ell} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{\eta_\ell}, \text{ où } \lim_{\ell \rightarrow \infty} \eta_\ell = 0 \text{ et } \lim_{\ell \rightarrow \infty} \xi_\ell = \infty$$

engendre la topologie de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) On dispose encore d'un autre moyen de définir la topologie de limite inductive stricte : une base de voisinages de 0 dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  est formée des ensembles convexes dont l'intersection avec chaque  $\mathcal{D}_{K_j}^k(\Omega)$  constitue un voisinage de 0 dans  $\mathcal{D}_{K_j}^k(\Omega)$ .

**Proposition 5.8** Pour  $0 \leq k \leq \infty$ , la topologie induite par celle de  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}_K^k(\Omega)$ , où  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , est précisément celle de  $\mathcal{D}_K^k(\Omega)$ . C'est dire en particulier que l'injection canonique  $\mathcal{D}_K^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^k(\Omega)$  est continue.

DÉMONSTRATION.

▷ Il suffit de le démontrer pour  $K$  appartenant à la suite des  $K_j$  définissant la topologie de  $\mathcal{D}_k(\Omega)$ .

▷ Notons  $E = \mathcal{D}^k(\Omega)$  et  $E_\ell = \mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$ , la topologie induite par  $E$  sur  $E_\ell$  est définie par les restrictions à  $E_\ell$  des semi-normes acceptées.

▷ Comme algébriquement  $E_\ell \subset E$ , les semi-normes qui définissent la topologie de  $E_\ell$  sont définies sur  $E$  et acceptées, ce qui fait de la topologie induite par  $E$  sur  $E_\ell$ , une topologie moins fine que celle de  $E$ .

▷ Réciproquement, si  $q$  est une semi-norme acceptée, alors par définition  $q|_{E_\ell}$  fait partie des semi-normes continues sur  $E_\ell$ , dont l'ensemble définit la topologie de  $E_\ell$ . Leurs restrictions définissent donc une topologie moins fine que celle de  $E_\ell$ .

□

**Remarque 5.9** Il ne faudrait pas en déduire qu'il y a identité entre la topologie de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  et celle de  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ , cette dernière est strictement plus fine. Considérons par exemple la semi-norme  $p(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$ , elle est évidemment acceptée; montrons qu'elle n'est pas continue sur  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ . Comme les  $K_\ell$  forment une suite croissante, en vertu du lemme 4.14, pour que  $p$  soit continue sur  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  il faut et il suffit qu'il existe  $\ell$  et  $C$  tels que  $\sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \leq C \sup_{x \in K_\ell} |\varphi(x)| \forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ . C'est impossible car  $\forall \ell$ , on peut trouver  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  dont le support soit inclus dans le complémentaire de  $K_\ell$ ; on aura alors  $\sup_{x \in K_\ell} |\varphi(x)| = 0$  et  $\sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \neq 0$ . ♠

La topologie de  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  a le défaut de ne pas être métrisable, la famille de semi-normes qui la définit n'étant pas dénombrable, mais elle possède nombre de bonnes propriétés, et en particulier les suivantes, qui permettent dans un grand nombre de situations de se contenter de manipuler la topologie des  $\mathcal{C}_K^k(\Omega)$ , qui sont eux des espaces métrisables. ◇

**Proposition 5.10** Pour  $0 \leq k \leq \infty$ , une suite  $\varphi_n$  converge vers 0 dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  si et seulement si ♥

- (i) Les  $\varphi_n$  ont leur support dans un même compact, soit  $K$ , et
- (ii) La suite  $\varphi_n$  converge vers 0 dans  $\mathcal{D}_K^k(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons tout d'abord que  $\varphi_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ , et que les  $\varphi_n$  n'aient pas toutes leur support dans un même compact. Alors,

$$\forall K \subset \Omega, \forall N, \exists n_K > N, \text{ et } x_K \notin K, \varphi_{n_K}(x_K) \neq 0.$$

Opérons alors par récurrence et construisons une suite de compacts  $K_{j'}$  extraite de  $K_j$ , telle que

$$\forall j', \forall N, \exists n_{j'} > N, \exists x_{j'} \in K_{j'+1} \setminus K_{j'}, \varphi_{n_{j'}}(x_{j'}) \neq 0.$$

Si  $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ , la série suivante :

$$p(\varphi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K_{j'+1} \setminus K_{j'}} \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi_{n_{j'}}(x_{j'})} \right|$$

ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls, ce qui fait de  $p$  une semi-norme sur  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ .

▷ La semi-norme  $p$  est acceptée, car continue sur chaque  $\mathcal{D}_{K_{\ell'}}^k(\Omega)$  ; soit en effet  $q(\psi) = \sup_{x \in K_{j'}} |\psi(x)|$ , l'une des semi-normes définissant la topologie de  $\mathcal{D}_{K_{\ell'}}^0(\Omega)$ , on aura pour  $\psi \in \mathcal{D}_{K_{\ell'}}^k(\Omega)$ ,

$$p(\psi) \leq q(\psi) \sum_{j' < \ell'} \frac{1}{|\psi_{n_{j'}}(x_{j'})|}.$$

▷ Mais par ailleurs aucune des  $\varphi_{n_{j'}}$  ne vérifie  $p(\varphi_{n_{j'}}) < 1$ , il en résulte une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle  $\varphi_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ .

▷ Soit maintenant  $K_\ell$  un compact contenant le support des  $\varphi_n$ , la convergence de  $\varphi_n$  vers 0 dans  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  résulte alors de l'identité de la topologie induite par  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  et de celle de ce dernier espace.

▷ La réciproque est évidente, puisque l'injection de  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  est continue. □



**Proposition 5.11** *Pour  $0 \leq k \leq +\infty$ , une application linéaire de  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  dans  $F$ , semi-normé, est continue si et seulement si sa restriction à chaque  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  est continue.*

DÉMONSTRATION.

▷ Comme l'injection  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  est continue, il est clair que la continuité de  $u$  sur  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  entraîne celle de sa restriction.

▷ Réciproquement, notons  $r$  une semi-norme continue sur  $F$ , si  $u$  est continue sur  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$ , alors la restriction de  $r \circ u$  à  $\mathcal{D}_{K_\ell}^k(\Omega)$  est continue et  $r \circ u$  est par conséquent une semi-norme acceptée, qui bien entendu est continue sur  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ . Il en résulte que  $u$  est continue sur  $\mathcal{D}^k(\Omega)$ . □



**Corollaire 5.12** Soit  $u$  linéaire  $\mathcal{D}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^{k'}(\Omega')$ , telle que

$$\forall K \subset \Omega, \exists K' \subset \Omega' \text{ tel que } u(\mathcal{D}_K^k(\Omega)) \subset \mathcal{D}_{K'}^{k'}(\Omega').$$

Pour que  $u$  soit continue de  $\mathcal{D}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^{k'}(\Omega')$ , il faut et il suffit que  $\forall K$ , elle le soit  $\mathcal{D}_K^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_{K'}^{k'}(\Omega')$ . Soit encore, de façon plus explicite

$$\forall K, \exists C_K \text{ tel que } p_{K'}^{k'}(u(\varphi)) \leq p_K^k(\varphi) = C_K \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K^k(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. En effet, selon la proposition 5.11,  $u$  est continue  $\mathcal{D}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^{k'}(\Omega')$  si et seulement si pour tout compact  $K \subset \Omega$ , sa restriction est continue  $\mathcal{D}_K^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_{K'}^{k'}(\Omega')$ . Le résultat découle alors de l'identité de la topologie de  $\mathcal{D}_{K'}^{k'}(\Omega')$  et de celle induite par  $\mathcal{D}^{k'}(\Omega')$  qui a été démontrée à la proposition 5.8.

□





# Appendice A

## Filtres

### Définition A.1

(i) On appelle filtre dans  $E$ , une collection  $\mathcal{F}$  de sous ensembles non vides de  $E$  tels que

▷ si  $A$  et  $B \in \mathcal{F}$ , alors  $A \cap B \in \mathcal{F}$

▷ si  $A \in \mathcal{F}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \in \mathcal{F}$

(ii) On appelle base de filtre dans  $E$ , une collection  $\mathcal{B}$  de sous ensembles non vides de  $E$  tels que si  $A$  et  $B \in \mathcal{B}$ , alors  $\exists C \in \mathcal{B}$  tel que  $C \subset A \cap B$ .

(iii) Si  $\mathcal{B}$  est une base de filtres, le filtre engendré par  $\mathcal{B}$  est formé de l'ensemble des parties de  $E$  contenant un élément de  $\mathcal{B}$ , c'est le plus petit filtre contenant  $\mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ , on dit que le filtre  $\mathcal{G}$  est *plus fin* que  $\mathcal{F}$ .

**Proposition A.2** Si  $u$  est une application  $E \rightarrow F$ , et si  $\mathcal{B}$  est une base de filtre dans  $E$ , alors  $u(\mathcal{B})$  est une base de filtre dans  $F$ . On dira que  $u(\mathcal{B})$  est l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$ .

DÉMONSTRATION. En effet  $u(A \cap B) \subset u(A) \cap u(B)$ .

□

Même si  $\mathcal{B}$  est un filtre,  $u(\mathcal{B})$  n'est pas nécessairement un filtre.

Les filtres constituent une généralisation des suites : à la suite  $x_n$  est associée la base de filtre *dénombrable* formée des  $X_p = \{x_n \mid n \geq p\}$ . Ils constituent également une généralisation des voisinages, l'ensemble des voisinages d'un point  $a$  formant le filtre  $\mathcal{V}(a)$ .

### A.1 Filtres et continuité

Dire que la suite  $x_n$  converge vers  $a$ , c'est dire que tout voisinage de  $a$  contient un  $X_p$ , ou encore que  $\mathcal{V}(a)$  est contenu dans le filtre engendré par les  $X_p$ . Nous sommes donc conduits à adopter la définition suivante :

**Définition A.3** On dit que le filtre  $\mathcal{F}$  converge vers le point  $a$  s'il contient le filtre des voisinages de  $a$ .

Les filtres jouent vis-à-vis des espaces non métrisables le même rôle que les suites pour ces derniers.

**Proposition A.4** Dans un espace topologique séparé, un filtre ne peut avoir plus d'une limite

DÉMONSTRATION. En effet, si  $a$  et  $b$  étaient deux limites distinctes du filtre  $\mathcal{F}$ , alors il contiendrait  $\mathcal{V}(a)$  et  $\mathcal{V}(b)$ , et en particulier  $A$  et  $B$  disjoints appartenant respectivement à  $\mathcal{V}(a)$  et  $\mathcal{V}(b)$ , ce qui est impossible. □

**Proposition A.5** Si  $A$  est un sous-ensemble de l'espace topologique  $E$ , et s'il existe un filtre  $\mathcal{F}$  dont  $A$  soit un élément qui converge vers  $a$ , alors  $a \in \overline{A}$ . Réciproquement si  $a \in \overline{A}$ , alors il existe un filtre  $\mathcal{F}$  convergent vers  $a$ , dont une base est formée de sous-ensembles de  $A$ .

DÉMONSTRATION. Rappelons tout d'abord que  $a \in \overline{A}$  si et seulement si  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ .

▷ Si  $\mathcal{F}$  converge vers  $a$ , et  $A \in \mathcal{F}$ , alors comme  $\mathcal{F}$  est plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ , on aura bien  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ .

▷ Réciproquement, si  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ , alors les  $A \cap V$  où  $V$  parcourt  $\mathcal{V}(a)$  forment une base de filtre, soit  $\mathcal{F}$ , dont les éléments sont des sous-ensembles de  $A$ , et par conséquent  $\mathcal{F}$  est plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ . □

Voici par exemple la généralisation aux espaces topologiques quelconques d'un théorème classique dans le cadre des espaces métrisables.

**Théorème A.6** Une application  $u : E \rightarrow F$  est continue en  $a \in E$  si et seulement si, pour tout filtre  $\mathcal{F}$  convergent vers  $a$ , le filtre engendré par  $u(\mathcal{F})$  converge vers  $u(a)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $u$  continue en  $a$ , alors si  $W$  est un voisinage de  $u(a)$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$ , tel que  $u(V) \subset W$ . C'est dire que le filtre engendré par  $u(\mathcal{V}(a))$  est plus fin que le filtre des voisinages de  $u(a)$ . Si on choisit alors un filtre  $\mathcal{U}$  dans  $E$ , plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ , son image sera plus fine que  $u(\mathcal{V}(a))$ , et par conséquent que le filtre des voisinages de  $u(a)$ .

▷ Réciproquement choisissons pour  $\mathcal{F}$  le filtre des voisinages de  $a$ , et supposons que le filtre engendré par  $u(\mathcal{F})$  converge vers  $u(a)$ . Si  $W$  est un voisinage de  $u(a)$ , il contiendra un élément de  $u(\mathcal{F})$ , c'est-à-dire l'image d'un voisinage de  $a$ . Nous avons donc montré la continuité de  $u$  en  $a$ . □

## A.2 Compacité

Le résultat qui suit joue le même rôle que le théorème de Bolzano-Weierstraß pour les espaces non métrisables.

**Théorème A.7** *Un espace topologique  $E$  est compact si et seulement si pour tout filtre  $\mathcal{F}$  défini sur  $E$ , il existe un filtre plus fin qui converge.*



DÉMONSTRATION.

▷ Considérons un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $E$ , supposé compact. Si  $\mathcal{F}$  est formé de la famille des  $A_i, i \in I$  alors, par définition,  $\forall J$  sous-ensemble fini de  $I, \cap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ , et par conséquent  $\cap_{j \in J} \overline{A_j} \neq \emptyset$ . Par compacité de  $E$ , il en résulte que  $\cap_{j \in I} \overline{A_j} \neq \emptyset$ . Il existe donc un point  $a$  adhérent à tous les  $A_i$ , c'est-à-dire dont tout voisinage  $V$  rencontre chaque  $A_i$ . L'ensemble des  $V \cap A_i$  forme la base d'un filtre plus fin que  $\mathcal{F}$  qui est également plus fin que la base des voisinages de  $a$ , et qui converge par conséquent vers  $a$ .

▷ Réciproquement supposons que pour tout filtre  $\mathcal{F}$ , il existe un filtre convergent plus fin, et considérons une famille de fermés  $F_i$  dont les intersections finies sont non vides. La famille  $F_i$  forme la base d'un filtre, et il existe par hypothèse un filtre  $\mathcal{G}$ , plus fin qui converge, soit vers  $a$ . Le point  $a$  appartient à l'adhérence de tous les  $F_i$ , et par conséquent à leur intersection ; la compacité de  $E$  en résulte.

□

## A.3 Ultrafiltres

On peut donner de ce théorème une autre expression, mieux adaptée à la démonstration de résultats de compacité, et c'est là qu'interviennent la notion d'ultrafiltre et le lemme de Zorn.

**Définition A.8**

(i) *Un ensemble  $X$  est totalement ordonné par  $\leq$  si*

$$\forall x, y \in X, \text{ on a soit } x \leq y, \text{ soit } y \leq x.$$

(ii) *Un ensemble  $X$  est inductivement ordonné si tout sous-ensemble  $Y$  totalement ordonné de  $X$  possède un majorant dans  $X$ .*

**Proposition A.9 (Lemme de Zorn)** *Tout ensemble  $X$  inductivement ordonné possède un élément maximal, soit  $\exists z \in X$ , tel que si  $x \in X$  vérifie  $z \leq x$ , alors  $x = z$ .*



**Définition A.10** *On dit qu'un filtre  $\mathcal{U}$  sur  $E$  est un ultrafiltre s'il n'existe pas de filtre strictement plus fin qui le contienne.*

**Proposition A.11** *Un filtre  $\mathcal{U}$  sur  $E$  est un ultrafiltre si et seulement si  $\forall A \subset E$ , on a  $A \in \mathcal{U}$  ou  $A^c \in \mathcal{U}$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{U}$  un filtre contenant  $A$  ou  $A^c \forall A \subset E$ . Si  $\mathcal{U}$  n'était pas un ultrafiltre, il existerait un filtre  $\mathcal{F}$  strictement plus fin, et par conséquent, il existerait  $A \subset E$  tel que  $A \in \mathcal{F}$  et  $A \notin \mathcal{U}$ , mais alors  $A^c \in \mathcal{U}$ , et par conséquent  $A^c \in \mathcal{F}$  qui est plus fin. Il en résulte que  $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$ , ce qui est impossible.

▷ Réciproquement, si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre et  $A \notin \mathcal{U}$ , alors aucun élément  $V$  de  $\mathcal{U}$  n'est inclus dans  $A$ , et par conséquent  $V \cap A^c \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{U}$ . Mais l'ensemble des  $V \cap A^c$  où  $V$  parcourt  $\mathcal{U}$  est une base de filtre et engendre donc un filtre, soit  $\mathcal{V}$ . Comme  $V \cap A^c \subset V, \mathcal{V}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$ , d'où  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ , puisque  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre; comme  $A^c = E \cap A^c \in \mathcal{V}$ , il en résulte que  $A^c \in \mathcal{U}$ .

□

**Corollaire A.12** *Si  $\mathcal{B}$  est une base d'ultrafiltre sur  $E$ , son image par une application  $f : E \rightarrow F$  est une base d'ultrafiltre sur  $F$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $B \subset F, f^{-1}(B)$  et  $f^{-1}(B^c)$  sont complémentaires, et par conséquent l'un d'eux appartient au filtre engendré par  $\mathcal{B}$ . Il en résulte que  $B$  ou  $B^c$  appartient au filtre engendré par  $f(\mathcal{B})$ , qui constitue donc une base d'ultrafiltre.

□

◇ **Théorème A.13** *Tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{F}_i, i \in I$ , une famille de filtres sur  $E$ , totalement ordonnée, c'est-à-dire telle que de deux filtres de la famille, l'un soit nécessairement plus fin que l'autre. Considérons les sous-ensembles de  $E$  qui appartiennent à l'un des  $\mathcal{F}_i$ . Ils forment un filtre  $\mathcal{S}$ , car si  $A_i \in \mathcal{F}_i$  et  $A_j \in \mathcal{F}_j$ , alors l'un des deux filtres, soit par exemple  $\mathcal{F}_i$ , est plus fin que l'autre, et on aura  $A_j \in \mathcal{F}_i$ . Par conséquent  $A_i \cap A_j \in \mathcal{F}_i$ , d'où il résulte que  $A_i \cap A_j \in \mathcal{S}$ . Enfin il est clair que  $\mathcal{S}$  constitue la borne supérieure des  $\mathcal{F}_i$ .

▷ Considérons alors l'ensemble  $\Sigma$  des filtres plus fins qu'un filtre donné  $\mathcal{F}$ . Il résulte alors du lemme de Zorn A.9 que  $\Sigma$  admet un élément  $\mathcal{T}$  maximal, c'est-à-dire un filtre n'admettant pas de majorant dans  $\Sigma$ . Ce filtre est d'une part un ultrafiltre, car s'il admettait un majorant, ce dernier serait nécessairement dans  $\Sigma$ , et d'autre part il est plus fin que  $\mathcal{F}$ .

□

♡

**Corollaire A.14** *Un espace topologique  $E$  est compact si et seulement si il est séparé et si tout ultrafiltre sur  $E$  converge.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $E$  supposé compact, alors comme il n'existe pas de filtre strictement plus fin,  $\mathcal{U}$  converge. Réciproquement si tout ultrafiltre sur  $E$  converge, alors  $E$  est compact, puisque pour tout filtre  $\mathcal{F}$ , il existe un ultrafiltre convergent plus fin.

□



**Corollaire A.15 (Théorème de Tychonoff)** *Tout produit d'espaces compact est compact.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $E = \prod_{i \in I} E_i$ , où les  $E_i$  sont compacts. Alors,  $\forall i \in I$ , l'image  $\mathcal{U}_i$  de  $\mathcal{U}$  par l'application coordonnée  $p_i$  est un ultrafiltre sur  $E_i$ , en vertu du corollaire A.12; il converge donc selon le corollaire A.14, soit vers  $a_i$ . Notons  $a = (a_i)_{i \in I}$  et  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $E$ . Par définition,  $V$  contient un pavé ouvert  $\prod_{i \in I} V_i$ , avec  $V_i = E_i$  pour  $i \notin J$  fini, et  $V_i \in \mathcal{V}(a_i)$ . Comme  $\mathcal{U}_i$  converge vers  $a_i$ , on aura  $V_i \in \mathcal{U}_i$ ; il en résulte que  $p_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ , et par conséquent  $\prod_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ . L'ultrafiltre  $\mathcal{U}$  est donc convergent, ce qui prouve, toujours selon A.14, que  $E$  est compact.

□



# Appendice B

## Le théorème d'Ascoli

La compacité est une propriété topologique de première importance, mais au sein des espaces de fonctions, il est généralement difficile d'en apporter la preuve. C'est là qu'intervient le théorème d'Ascoli qui fait découler la compacité d'une propriété beaucoup plus élémentaire d'équicontinuité.

### B.1 Convergence uniforme et convergence simple

Soient  $E$  un espace topologique et  $F$  un e.v.t.l.c. on note classiquement  $F^E$  l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$ , et  $\mathcal{C}(E, F)$  l'ensemble des applications continues  $E \rightarrow F$ .

#### B.1.1 Convergence simple

Si  $q$  est une semi-norme sur  $F$  et  $a$  un point de  $E$ , nous noterons

$$p_{a,q}(f) = q \circ f(a), \text{ où } f \in F^E. \quad (\text{B.1})$$

La topologie de la *convergence simple* est celle définie par l'ensemble des semi-normes  $p_{a,q}$  où  $a$  parcourt  $E$  et  $q$  l'ensemble des semi-normes continues sur  $F$ ; c'est également la topologie produit sur  $F^E$ . L'ensemble  $F^E$  muni de la topologie de la convergence simple est noté  $F_s^E$ , le sous-ensemble  $\mathcal{C}(E, F)$  des fonctions continues muni de la topologie induite par celle de la convergence simple est noté  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . Si  $a$  ne parcourt qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E$ , on parlera de topologie de la convergence ponctuelle sur le sous-ensemble  $A$  de  $E$ .

#### B.1.2 Convergence uniforme

Si  $q$  est une semi-norme *continue* sur  $F$  et  $K$  une partie *compacte* de  $E$ , nous noterons

$$P_{K,q}(f) = \sup_{a \in K} q \circ f(a), \text{ où } f \in \mathcal{C}(E, F). \quad (\text{B.2})$$



Comme, selon la proposition 2.6, une fonction continue sur un compact est bornée,  $P_{K,q}(f)$  est bien définie. La topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ou plus simplement *topologie de la convergence compacte*, est celle définie par l'ensemble des semi-normes  $P_{K,q}(f)$  ; l'espace  $\mathcal{C}(E, F)$  muni de cette topologie est noté  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

Rappelons que dans un espace  $X$  semi-normé, soit par les  $p_i, i \in I$ , une base de voisinages de 0 est constituée des intersections finies de semi-boules :

$$\bigcap_{j=1,n} \{x \in X \mid p_i(x) \leq \varepsilon_i\},$$

et que la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  a pour base d'ouverts les  $\prod_{i \in I} A_i$ , où les  $A_i$  sont tous égaux à  $X_i$  hormis un nombre fini d'entre eux  $A_j, j = 1, n$ , respectivement ouverts de  $X_j$ .

## B.2 Équicontinuité et compacité

**Définition B.1** Soit  $\mathcal{H}$  une famille d'applications  $E \rightarrow F$ , on dit que  $\mathcal{H}$  est équicontinue au point  $x$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } \eta_x > 0 \text{ tel que } \|x - y\| \leq \eta_x \implies \|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dit que  $\mathcal{H}$  est équicontinue sur  $E$ , ou tout simplement équicontinu, si  $\mathcal{H}$  est équicontinue en tout point de  $E$ .

**Théorème B.2 (d'Ascoli)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés,  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble équicontinu de  $\mathcal{C}(E, F)$ , alors



(i) L'adhérence  $\overline{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$  est un ensemble équicontinu de  $\mathcal{C}(E, F)$ .

(ii) Sur  $\mathcal{H}$ , et donc sur  $\overline{\mathcal{H}}$ , les topologies de la convergence ponctuelle sur un sous-ensemble dense, de la convergence ponctuelle sur  $E$ , et de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts sont les mêmes.

(iii) Si  $\forall x \in E, \mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\}$  est relativement compact dans  $F$ , alors  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $x \in E$ , et  $\varepsilon > 0$ , d'après l'équicontinuité de  $\mathcal{H}$   $\exists \eta_x > 0$ , tel que  $\|x - y\| \leq \eta_x \implies \|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon/3 \forall f \in \mathcal{H}$ . Choisissons un tel  $y$ , si on prend maintenant  $g \in \overline{\mathcal{H}}$ , alors dans tout voisinage de  $g$  pour  $\mathcal{C}_s(E, F)$ ,  $\exists f \in \mathcal{H}$ , en particulier,  $\exists f \in \mathcal{H}$  tel que  $\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon/3$  et  $\|g(y) - f(y)\| \leq \varepsilon/3$ . On aura donc

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - g(y)\| \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de  $\overline{\mathcal{H}}$  au point  $x$ .

▷ Il est clair que la convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence simple. Il nous suffira donc de démontrer la réciproque, soit que sur  $\mathcal{C}(E, F)$  la topologie  $\mathcal{T}_d$  de la convergence sur un sous-ensemble dense  $A$  de  $E$ , est plus fine que la topologie  $\mathcal{T}_c$  de la convergence uniforme sur tout compact. Soit donc  $K \subset E$  compact, et  $g \in \mathcal{H}$ , il nous suffira de montrer que  $\{f \in \mathcal{H} \mid P_K(f - g) \leq 1\}$  contient un voisinage de  $g$  pour  $\mathcal{T}_d$ . Comme  $\mathcal{H}$  est équicontinue,  $\forall x \in K, \exists \eta_x > 0$ , tel que  $\forall y \in B_{\eta_x}(x), \forall f \in \mathcal{H}, \|f(y) - f(x)\| \leq 1/5$ . Comme  $K$  est compact et que les  $B_{\eta_x}(x)$  le recouvrent,  $\exists x_i, i = 1, n$  tels que  $K \subset \cup_{i=1, n} B_{\eta_i}(x_i)$ . Mais les  $B_{\eta_i}(x_i)$  sont des voisinages de  $x_i$  et contiennent donc chacun au moins un point de  $A$ , soit  $a_i$ , et nous aurons  $\forall y \in B_{\eta_i}(x_i), \forall f, g \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|f(y) - g(y)\| &\leq \|f(y) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(a_i)\| + \|f(a_i) - g(a_i)\| \\ &\quad + \|g(a_i) - g(x_i)\| + \|g(x_i) - g(y)\| \leq 4/5 + \|f(a_i) - g(a_i)\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$P_K(f - g) \leq 4/5 + \max_{i=1, n} \|f(a_i) - g(a_i)\|$$

soit  $P_K(f - g) \leq 1$  dès que  $\max_{i=1, n} p_{a_i}(f - g) \leq 1/5$ .

▷ Supposons que  $\forall x, \mathcal{H}(x)$  est relativement compact dans  $F$ , alors d'après le théorème de Tychonoff (Corollaire A.15),  $\overline{\prod_{x \in E} \mathcal{H}(x)} = \prod_{x \in E} \overline{\mathcal{H}(x)}$  est compact dans  $F^E = \mathcal{C}_s(E, F)$ . C'est dire en fait que l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$  telles que  $f(x) \in \mathcal{H}(x) \forall x \in E$ , est relativement compact dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . En particulier, il en résulte que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . Nous venons de démontrer à l'item (ii) que sur  $\mathcal{H}, \mathcal{C}_s(E, F)$  et  $\mathcal{C}_c(E, F)$  coïncident, il en résulte que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

□

Ce résultat reste valable si  $E$  est un espace topologique et  $F$  un espace vectoriel topologique localement convexe.

**Corollaire B.3** *Si  $E$  est compact, et  $\mathcal{F}$  est borné et équicontinu, alors  $\mathcal{F}$  est compact dans  $\mathcal{C}(E, F)$ .*





# Appendice C

## La propriété de Baire

Les théorèmes de ce chapitre sont essentiels, ils découlent de la propriété de Baire, qui essentiellement n'est valable que dans les espaces métriques, ce qui constitue une sérieuse limitation. Le développement de l'analyse fonctionnelle a cependant permis d'exhiber une classe particulière, mais assez large, d'espaces vectoriels topologiques, les *espaces tonnelés*, pour lesquels le théorème de Banach-Steinhaus est valable bien que la propriété de Baire ne le soit pas.

### C.1 Espaces de Baire

#### Définition C.1


(i) On dit qu'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est rare si son adhérence est d'intérieur vide.

(ii) On dit qu'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est maigre s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares, ce qui revient à dire que  $A$  est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

**Définition C.2** On dit qu'un espace topologique  $E$  est un espace de Baire si tout sous-ensemble maigre de  $E$  est d'intérieur vide, soit plus explicitement

$$\forall F_i, \text{ fermés tels que } \overset{\circ}{F}_i = \emptyset, \forall A \subset \bigcup_{i=1, n} F_i, \text{ alors } \overset{\circ}{A} = \emptyset.$$

**Remarque C.3** On peut donner de cette définition diverses formes équivalentes :

(i)  $E$  est un espace de Baire si, lorsqu'une union dénombrable de fermés contient un ouvert non vide, alors l'un au moins des fermés est d'intérieur non vide. 

(ii) Par passage au complémentaire,  $E$  est un espace de Baire si tout sous-ensemble de  $E$  contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses est lui-même dense.

**Théorème C.4** Un espace métrique complet, est de Baire.

**Remarque C.5** *En fait on démontre une propriété topologique (le fait d'être de Baire), à partir d'une propriété uniforme (la complétude); il suffit donc que l'espace soit complet pour l'une des métriques compatibles avec la topologie, pour que celle-ci soit une topologie d'espace de Baire.*



DÉMONSTRATION.

▷ Soit une suite de fermés  $A_n$  dont l'union contient une boule ouverte  $S$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun des  $A_n$  ne contienne de boule ouverte. C'est dire que  $\forall n$ , l'ouvert  $A_n^c$  recoupe toutes les boules ouvertes, et en particulier  $S$ .

▷ Notons alors  $\overset{\circ}{B}_{\rho_0}(x_0)$  une boule ouverte contenue dans  $A_0^c \cap S$ . On notera de même  $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(x_1)$  une boule ouverte contenue dans  $A_1^c \cap \overset{\circ}{B}_{\rho_0/2}(x_0)$ , et par récurrence  $\overset{\circ}{B}_{\rho_{n+1}}(x_{n+1})$  une boule ouverte contenue dans  $A_{n+1}^c \cap \overset{\circ}{B}_{\rho_n/2}(x_n)$ .

▷ Les boules fermées  $B_{\rho_n}(x_n)$  sont emboîtées et leur rayon tend vers 0 ; par conséquent en vertu du lemme C.6 ci-dessous,  $\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\rho_n}(x_n)$ . Mais  $x \in S$  et  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c$ , ce qui constitue une contradiction, puisque  $S \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . □

**Lemme C.6** *Soit  $E$  un espace métrique complet et  $B_n$  une suite de boules emboîtées dont le rayon tend vers 0, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$  est réduite à un point.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $x_n$  le centre de  $B_n$  et  $\rho_n$  son rayon.  $\forall n, \forall p, q \geq n$ , on aura  $d(x_p, x_q) \leq 2\rho_n$ , la suite  $x_n$  est donc de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers  $x$ . Pour  $p \geq n$  donné, on aura  $x_p \in B_n$ , et par conséquent, comme  $B_n$  est fermée,  $x = \lim x_p \in B_n$ , ce qui prouve que  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

▷ Aucun autre point ne peut appartenir à  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , soit en effet  $y$  un tel point, on aura  $d(y, x_n) \leq \rho_n, \forall n$ , et par conséquent  $x_n \rightarrow y$ . □

## Une application élémentaire

**Proposition C.7** *Soit  $E$  un espace métrique complet et  $\mathcal{F}$  une famille d'applications continues  $E \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que*

$$\forall x \in E, \exists k > 0, \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \text{ on ait } |f(x)| \leq k,$$


*alors, il existe une boule ouverte  $S \subset E$ , et  $K > 0$ , tels que*

$$\forall x \in S, \forall f \in \mathcal{F}, |f(x)| \leq K.$$

DÉMONSTRATION. Posons  $A_k = \{x \in E \mid \forall f \in \mathcal{F}, |f(x)| \leq k\}$ , les  $A_k$  sont fermés, en tant que intersections de fermés, et leur union est  $E$  tout entier. Il en résulte l'existence de  $K$  tel que  $A_K$  contienne une boule ouverte  $S$ . □

La simplicité de la preuve ne doit pas masquer l'intérêt d'un tel résultat : à partir d'une borne ponctuelle sur un ensemble de fonctions on a démontré l'existence d'une borne uniforme dans un ouvert. Ce résultat va prendre toute son ampleur dans le cas d'une famille d'applications linéaires.


## C.2 Théorèmes de la borne uniforme

**Théorème C.8 (de la borne uniforme)** *Si les  $T_i, i \in I$  forment une famille d'applications linéaires continues d'un espace de Banach  $E$ , dans un espace normé  $F$ , et si  $\forall x$ , la famille des  $\|T_i(x)\|_F, i \in I$  est bornée, alors la famille des  $T_i$  est bornée dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .* 

DÉMONSTRATION. Posons  $A_k = \{x \in E \mid \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F \leq k\}$ , de même qu'à la démonstration de la proposition C.7, l'un au moins des  $A_k$ , soit  $A_K$  contient une boule ouverte, soit  $\overset{\circ}{B}_r(y)$ . Posons  $K' = \sup_{i \in I} \|T_i(y)\|_F$ , choisissons  $z$  tel que  $\|z\| < r$  et posons  $x = y + z$ , on aura  $x \in \overset{\circ}{B}_r(y)$  et par conséquent  $\forall i \in I, \forall z \in \overset{\circ}{B}_r(0)$ ,

$$\|T_i(z)\|_F \leq \|T_i(x)\|_F + \|T_i(y)\|_F \leq K + K' ;$$

il en résulte que  $\forall i \in I, \|T_i\| \leq (K + K')/r$ . □

**Théorème C.9 (de Banach-Steinhaus)** *Si les  $T_n$  forment une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach  $E$ , dans un espace normé  $F$ , et si  $\forall x, T_n(x)$  possède une limite, soit  $Tx$ , (c'est-à-dire si  $T_n$  converge simplement vers  $T$ ), alors* 

- (i) l'application  $T$  ainsi définie est linéaire continue et vérifie  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$
- (ii) la suite  $T_n$  converge vers  $T$  uniformément sur tout compact.

DÉMONSTRATION.

▷ La norme étant continue,  $\|T_n(x)\|_F$  est borné  $\forall x$ , et par conséquent, en vertu du théorème C.8,  $\|T_n\|$  est également borné ; nous poserons  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$ . On aura donc  $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ , et par conséquent

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_F = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_F \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\|_E,$$

soit  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ .

▷ Comme  $\|T_n\|$  est bornée, on en déduit que la suite  $T_n$  est équicontinue, et le théorème d'Ascoli B.2 nous montre alors que la convergence ponctuelle est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact. □

Il s'agit là d'un théorème remarquable, puisqu'à partir de la *convergence simple* d'une suite de fonctions *linéaires* continues, il assure la *continuité de la limite et la convergence uniforme sur tout compact*. Bien entendu, la linéarité est ici essentielle. ◇

Ce théorème admet une généralisation au cas où  $E$  est un espace de Fréchet (c'est-à-dire un espace métrique complet) et  $F$  un espace vectoriel topologique localement convexe :

**Théorème C.10** *Si les  $T_n$  forment une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Fréchet  $E$ , dans un e.v.t.l.c.  $F$ , et si  $T_n$  converge simplement, soit vers  $T$ , alors  $T$  est continue et  $T_n$  converge vers  $T$  uniformément sur tout compact de  $E$ .*

### C.3 Théorème des homomorphismes

Une autre conséquence de la propriété de Baire est relative à la relation entre inverses algébrique et topologique. De façon surprenante, il suffit qu'une application linéaire continue soit bijective pour que son inverse soit continu.

♡ **Théorème C.11 (de l'application ouverte)** *Si  $T$  est une application linéaire continue surjective  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, alors l'image par  $T$  de tout ouvert de  $E$  est un ouvert de  $F$ . On dit que  $T$  est une application ouverte.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $E_r$  et  $F_r$  les boules ouvertes respectives de rayon  $r$  et de centre 0 dans  $E$  et  $F$ . Choisissons  $\varepsilon_0 > 0$ , et posons  $\varepsilon_i = 2^{-i}\varepsilon_0$ . Comme  $T$  est surjective, son image n'est pas maigre, et le lemme C.12 ci-dessous nous montre alors que  $\forall i, \exists \eta_i > 0$  tel que  $F_{\eta_i} \subset \overline{T(E_{\varepsilon_i})}$ . Quitte à diminuer les  $\eta_i$ , nous pouvons les choisir de telle sorte que  $\eta_i \rightarrow 0$ .

▷ Soit  $y_0 \in F_{\eta_0}$ ,  $y_0 + F_{\eta_1}$  est un voisinage de  $y_0$ , et comme  $y_0 \in \overline{T(E_{\varepsilon_0})}$ ,  $(y_0 + F_{\eta_1}) \cap T(E_{\varepsilon_0})$  n'est pas vide. C'est dire qu'il existe  $x_0 \in E_{\varepsilon_0}$  tel que  $y_1 = y_0 - Tx_0 \in F_{\eta_1}$ . Par récurrence, on construit ainsi deux suites  $y_n$  et  $x_n$  telles que  $x_n \in E_{\varepsilon_n}$  et

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n = y_0 - T(\sum_{i=0,n} x_i) \in F_{\eta_{n+1}}.$$

▷ Posons  $s_n = \sum_{i=0,n} x_i$ , la suite  $s_n$  est de Cauchy, puisque pour  $m > p$ ,

$$\|s_m - s_p\| \leq \sum_{i=p+1,m} \|x_i\| \leq 2^{-p}\varepsilon_0.$$

Soit  $s$  sa limite, on aura  $\|s\| \leq \sum_{i=0,\infty} \|x_i\| = 2\varepsilon_0 < 3\varepsilon_0$ . Comme  $T$  est continue et  $\eta_i \rightarrow 0$ , il en résulte que  $y_0 = Ts$ , ce qui montre que  $F_{\eta_0} \subset T(E_{3\varepsilon_0})$ . C'est dire qu'en fait, l'image par  $T$  d'un voisinage quelconque de 0 dans  $E$  contient un voisinage de 0 dans  $F$ .

▷ Soit maintenant  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide de  $E$ , et  $y \in T(\mathcal{O})$ . Il existe donc  $x \in \mathcal{O}$  tel que  $y = Tx$ , et comme  $\mathcal{O}$  est un voisinage de  $x$ , il existe un voisinage  $U$  de 0, tel que  $\mathcal{O} = x + U$ .

Nous venons de voir qu'il existe un voisinage, soit  $W$  de  $0$  dans  $F$  tel que  $W \subset TU$  ; on aura alors

$$y + W \subset Tx + TU = T(x + U) \subset T(\mathcal{O}).$$

C'est dire que  $T(\mathcal{O})$  est ouvert.

□

**Lemme C.12** *Si  $T$  est une application linéaire :  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont normés, et si  $\mathcal{R}(T)$ , image de  $T$ , n'est pas maigre, alors  $\forall r > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que  $F_\eta \subset \overline{T(E_r)}$ , où  $E_\rho$  et  $F_\rho$  notent les boules ouvertes respectives de rayon  $\rho$  et de centre  $0$  dans  $E$  et  $F$ .*

DÉMONSTRATION. On aura  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE_{r/2}$  et par conséquent  $\mathcal{R}(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT(E_{r/2})$ . Comme par hypothèse  $\mathcal{R}(T)$  n'est pas maigre, il existe  $n_0$  tel que l'intérieur de  $n_0 \overline{T(E_{r/2})}$  ne soit pas vide, c'est dire que l'intérieur  $\mathcal{O}$  de  $\overline{T(E_{r/2})}$  n'est pas vide. On aura

$$\overline{T(E_r)} \supset \overline{T(E_{r/2} - E_{r/2})} \supset \overline{T(E_{r/2})} - \overline{T(E_{r/2})} \supset \mathcal{O} - \mathcal{O}.$$

Mais  $\mathcal{O} - \mathcal{O}$  est un ouvert qui contient l'origine, le résultat en découle.

□

**Corollaire C.13 (Théorème des homomorphismes de Banach)** *Si  $T$  est une application linéaire continue bijective  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, alors  $T$  est un isomorphisme.*



DÉMONSTRATION. En effet  $T$  est ouverte d'après le théorème C.11, ce qui signifie exactement que  $T^{-1}$  est continue.

□

Il s'agit là d'un théorème particulièrement utile, car il permet de conclure à la stabilité, à partir d'un résultat d'existence et d'unicité.

## C.4 Théorème du graphe fermé

**Définition C.14** *Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces normés. et si  $f$  est une application  $A \subset E \rightarrow F$ ,*

(i) *On appelle graphe de  $f$ , et on note  $\mathcal{G}(f)$ , le sous-ensemble de  $E \times F$  suivant :*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

(ii) *On dit que  $f$  est fermée si  $\mathcal{G}(f)$  est fermé dans  $E \times F$ .*

Dans le cas où  $f$  est linéaire, la remarque suivante est utile :



**Lemme C.15** Si  $f : E \rightarrow F$ , normés, est linéaire, alors  $\mathcal{G}(T)$  est fermé si et seulement si

$$(x_n \rightarrow 0 \text{ et } f(x_n) \rightarrow h) \implies h = 0.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que  $y_n \rightarrow y$  et  $f(y_n) \rightarrow z$ , alors  $y_n - y = x_n \rightarrow 0$ , et  $f(x_n) = f(y_n) - f(y) \rightarrow z - f(y)$ . Selon l'hypothèse  $z - f(y) = 0$ , soit en fait  $z = f(y)$ , ce qui prouve que le graphe de  $f$  est fermé.

□



**Théorème C.16 (du graphe fermé)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T$  un opérateur linéaire fermé  $E \rightarrow F$ , alors  $T$  est continu.

DÉMONSTRATION. Le sous-espace  $\mathcal{G}(T)$  étant fermé est lui-même un espace de Banach. Considérons alors les projections respectives  $P$  et  $Q$ , de  $\mathcal{G}(T)$  sur  $E$  et  $F$  :  $P(x; Tx) = x$  et  $Q(x; Tx) = Tx$  ;  $P$  est linéaire bijective et continue  $\mathcal{G}(T) \rightarrow E$ , c'est donc un isomorphisme d'après le corollaire C.13, et comme  $Q$  est continue,  $T = Q \circ P^{-1}$  l'est également.

□

On constate donc que pour démontrer la continuité d'un opérateur linéaire, il n'est pas nécessaire de démontrer que  $Tx_n$  converge vers  $Tx$  dès que  $x_n$  converge vers  $x$ , mais que l'on peut rajouter l'hypothèse supplémentaire que la suite  $Tx_n$  converge.

# Deuxième partie

## Intégration



# Chapitre 6

## Intégration

Hormis la dérivation, il n'y a pas d'outil plus universel que l'intégration. Bien loin d'être limitée aux seules questions relatives au calcul des aires, elle apparaît comme un outil fondamental en géométrie et en analyse. Contentons-nous de donner un exemple issu de l'analyse harmonique où elle s'introduit de façon inéluctable.

Une des questions pratiquement et théoriquement importante de l'analyse consiste à décomposer une fonction donnée sur une base de fonctions considérées comme élémentaires; on est alors amené à se demander dans quelle mesure la fonction initiale et les coefficients de sa décomposition se correspondent de façon bijective. Le premier exemple qui se présente est celui de la série de Taylor qui consiste à utiliser une base de polynômes  $t^k$ ; sans en méconnaître l'utilité, force est de constater qu'il est en général impossible de reconstituer une fonction indéfiniment dérivable dans un voisinage, aussi petit soit-il, de l'origine à partir de la seule donnée des coefficients de son développement de Taylor en ce point. L'existence de fonctions indéfiniment dérivables à support compact, telles par exemple celle égale à  $\exp(1/(x^2 - 1))$  sur  $[-1, 1]$  et à 0 à l'extérieur, constitue une illustration de ce phénomène, longtemps considéré comme énigmatique. Un second exemple est celui des séries de Fourier où la base est celle des exponentielles complexes  $e^{ikt}$ , pour lesquelles la correspondance entre fonctions périodiques et coefficients de Fourier est déjà meilleure. La raison en est simple : les coefficients dans le développement de Taylor à l'origine de la fonction  $f$  sont les *dérivées*  $f^{(k)}(0)$ , tandis que ceux du développement de Fourier de la fonction  $f$  de période  $2\pi$ , sont les *intégrales*  $c_k = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikt} dt$

Parmi les diverses façons d'aborder la question, l'intégrale de Riemann, dont nous avons brièvement rappelé en annexe la construction, est la première qui se soit clairement dégagée. En dépit de son caractère particulièrement intuitif, ce point de vue possède le grave défaut de faire jouer à la convergence uniforme un rôle essentiel, limitant par là même de façon drastique le type de fonctions que l'on peut intégrer ainsi que la possibilité d'effectuer des passages à la limite sous le signe somme. La théorie due à Lebesgue, que nous allons développer, peut être considérée comme une *extension de l'intégrale de Riemann à une classe de fonctions plus vaste*. Un bénéfice immédiat de ce point de vue plus large réside dans les quelques théorèmes de passage à la limite sous

le signe somme ; leur simplicité et leur puissance n'ont pas d'équivalent dans la théorie de Riemann. Les quelques rappels relatifs à l'intégrale de Riemann, que l'on trouvera en annexe, permettent de mieux apprécier la pertinence de la théorie de Lebesgue, qui pourrait sinon paraître inutilement compliquée.

## 6.1 Mesures de Radon

Nous savons que *l'intégrale de Riemann est une forme linéaire positive*, c'est-à-dire prenant des valeurs réelles positives quand on l'applique à des fonctions réelles positives. Dans un premier temps, nous allons 'reculer pour mieux sauter' en nous restreignant à l'intégrale des fonctions continues à support compact, c'est-à-dire appartenant à  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Ce choix nous permettra de conserver une grande liberté de manœuvre au voisinage du bord de  $\Omega$ , et en particulier de ne pas le choisir borné. Dans le même temps, nous allons effectuer une généralisation du point de vue de Riemann en considérant *l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace  $\mathcal{D}^0(\Omega)$* . Nous les appellerons *mesures de Radon*. Cette extension prendra tout son sens ultérieurement lors de l'étude des distributions.

De façon précise :

**Définition 6.1** *On appelle mesure de Radon positive sur l'ouvert  $\Omega$ , une forme linéaire  $\mu : \mathcal{D}^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\langle \mu, u \rangle \geq 0$  dès que  $u \geq 0$ . La notation  $\langle \mu, u \rangle$  est couramment employée à la place de  $\mu(u)$  quand  $\mu$  est une forme linéaire.*

Désormais, dans ce chapitre, pour  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , on notera

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \\ \|u\|_{L^1} &= \langle \mu, |u| \rangle \end{aligned} \tag{6.1}$$

**Proposition 6.2** *Si  $\mu$  est une mesure de Radon positive sur  $\Omega$ , et  $K$  un compact de  $\Omega$ , alors*

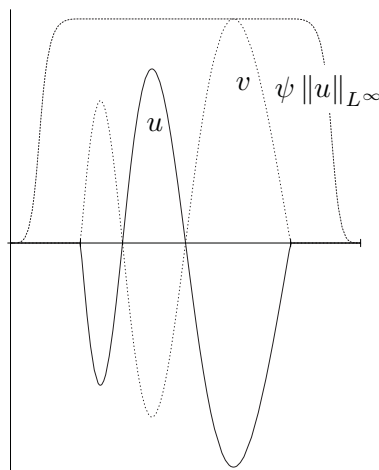
$$\exists C > 0, \forall u \in \mathcal{C}_K^0(\Omega), |\langle \mu, u \rangle| \leq \langle \mu, |u| \rangle \leq C \|u\|_{L^\infty}, \tag{6.2}$$

*c'est dire en fait que  $\mu$  est continue pour la topologie de  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , en vertu de la proposition 5.11*

**DÉMONSTRATION.** Nous pouvons toujours supposer  $u$  réelle, quitte si nécessaire à la séparer en partie réelle et partie imaginaire. Selon la proposition D.11, il existe une fonction de troncature  $\psi$  telle que  $\psi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ ,  $\psi \equiv 1$  sur  $K$  et  $0 \leq \psi \leq 1$  sur  $\Omega$ . Soit alors  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , à support dans  $K$ ; si  $\langle \mu, u \rangle = 0$  la proposition est démontrée, sinon posons  $v = u |\langle \mu, u \rangle| / \langle \mu, u \rangle$ , nous aurons  $v \leq |v| \leq |u| = \psi |u| \leq \psi \|u\|_{L^\infty}$  (voir Figure 6.1). Par conséquent

$$|\langle \mu, u \rangle| = \langle \mu, v \rangle \leq \langle \mu, |u| \rangle \leq \langle \mu, \psi \rangle \|u\|_{L^\infty}.$$

□

FIG. 6.1 – Continuité sur  $\mathcal{D}^0(\mathbb{R})$  d'une mesure positive

**Remarque 6.3** De façon plus générale, on appelle mesure de Radon réelle sur  $\Omega$ , toute forme linéaire continue  $\mathcal{D}^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous venons de démontrer que la continuité découle de la monotonie, ce qui constitue un résultat assez remarquable et justifie le vocabulaire employé : les mesures de Radon positives sont bien ... des mesures de Radon. Les mesures de Radon constituent un sous-ensemble des distributions que nous étudierons par la suite.

**Corollaire 6.4** Si  $u$  et  $v \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , alors

- (i)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda u\|_{L^1} = |\lambda| \|u\|_{L^1}$
- (ii)  $\|u + v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1}$

DÉMONSTRATION.

▷ L'homogénéité est une conséquence de la définition, on a en effet

$$\langle \mu, |\lambda u| \rangle = |\lambda| \langle \mu, |u| \rangle$$

▷ L'inégalité triangulaire découle de la positivité car  $|u + v| \leq |u| + |v|$ , et par conséquent

$$\langle \mu, |u + v| \rangle \leq \langle \mu, |u| \rangle + \langle \mu, |v| \rangle$$

□

**Remarque 6.5** Il est facile de construire des mesures de Radon, citons parmi les plus répandues :

- (i) La mesure de Dirac La mesure de Dirac  $\delta_a$ , définie par

$$\langle \delta_a, u \rangle = u(a), \quad \forall u \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n).$$

(ii) La mesure de Lebesgue *La mesure de Lebesgue*  $\lambda$ , définie par

$$\langle \lambda, u \rangle = I(u), \quad \forall u \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n),$$

où  $I(u)$  note l'intégrale de Riemann de  $u$ . Sa particularité essentielle est d'être invariante par translation.

(iii) Les mesures de Stieltjès *Les mesures de Stieltjès*  $\sigma^\phi$ , définies par

$$\langle \sigma^\phi, u \rangle = I^\phi(u), \quad \forall u \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}),$$

où  $\phi$  est une fonction croissante, continue à gauche, appelée fonction de répartition, et  $I^\phi(u)$  l'intégrale de Riemann-Stieltjès de  $u$  (voir la proposition E.15). Dans le cas monodimensionnel, l'intégrale de Riemann-Stieltjès fournit une expression concrète des mesures de Radon ; on montre en effet que si on se donne une mesure de Radon  $\mu$  sur la droite  $\mathbb{R}$ , à une constante additive près, il existe une et une seule fonction de répartition  $\phi$  telle que  $\sigma^\phi = \mu$ . A titre d'exemple, la mesure de Dirac  $\delta_a$  est associée à la fonction de répartition  $\phi_a = \chi_{[a, \infty[}$ .

## 6.2 La théorie de Lebesgue

Le but de ce paragraphe consiste à décrire la méthode imaginée par Lebesgue pour prolonger les mesures de Radon, ce prolongement prend alors le nom d'*intégrale de Lebesgue*. Pour des raisons historiques, l'unique mesure de Radon invariante par translation sur  $\mathbb{R}^n$ , qui n'est autre que la restriction de l'intégrale de Riemann aux fonctions continues à support compact s'appelle *mesure de Lebesgue*.



Avant d'entrer dans le vif du sujet, indiquons les principales différences entre la théorie de Riemann et celle de Lebesgue. Tout d'abord l'intégrale de Riemann ne traite que des fonctions bornées sur un intervalle borné et considère toute autre situation comme une intégrale impropre, limite éventuelle d'une suite d'intégrales propres pour laquelle les théorèmes usuels ne sont plus applicables de façon systématique. L'intégrale de Lebesgue traite le cas de fonctions éventuellement non bornées sur des ouverts éventuellement non bornés. De façon plus fondamentale, l'importance de la convergence uniforme dans la théorie de Riemann constitue une anomalie, la logique exige en effet que la notion de convergence associée à l'espace des fonctions intégrables soit fondée sur l'intégrale elle-même et mette en jeu la norme dite *de la convergence en moyenne* :

$$\|u\|_{L^1} = \langle \mu, |u| \rangle$$

Les propriétés des mesures de Radon étant directement calquées sur celles de l'intégrale de Riemann, hormis l'invariance par translation, la nouveauté ne peut donc résider que dans la méthode utilisée pour étendre la mesure de Radon à des fonctions moins régulières que celles constituant  $\mathcal{D}^0$ . Comme pour l'intégrale de Riemann le principe consiste à approcher la fonction à intégrer par une suite de fonctions plus simples dont l'intégrale est facile à calculer, puis à effectuer un passage à la limite. Dans sa



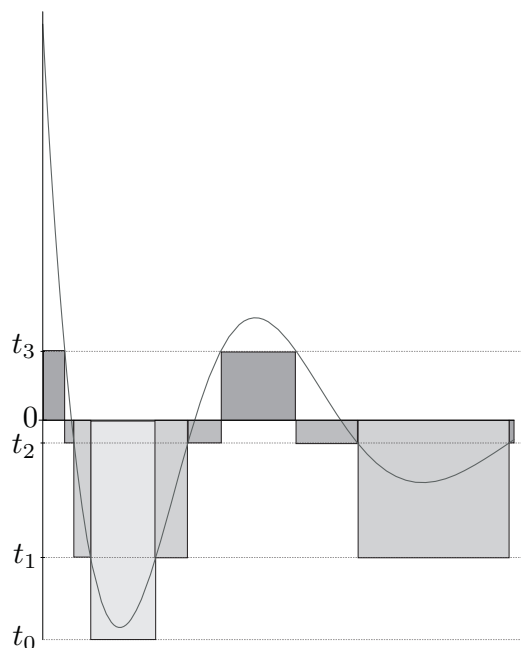


FIG. 6.2 – Subdivision horizontale

formulation originale, le choix de Lebesgue consiste à effectuer une subdivision  $T$  de l'ensemble d'arrivée, supposé être ici le segment  $(t_0, t_m)$ , et non plus de l'ensemble de départ, ce qui conduit à approcher  $f$  par les

$$f_T = \sum_{i=1, m} t_{i-1} \chi_i,$$

où  $\chi_i$  est la fonction caractéristique de  $f^{-1}(]t_{i-1}, t_i])$  (voir Figure 6.2) Il s'agit d'une innovation essentielle ; le caractère monotone des sommes de Darboux lors du raffinement d'une subdivision a été conservé mais la difficulté liée à la présence des  $\inf_{[s_{i-1}, s_i]}$  a été remplacée par celle découlant de la complexité des  $f^{-1}(]t_{i-1}, t_i])$ .

C'est de là que découle la difficulté de la théorie, et en particulier le fait qu'on devra renoncer à la convergence ponctuelle des fonctions et se contenter d'une convergence 'presque partout', c'est-à-dire en dehors d'ensembles considérés comme négligeables. ◇

Le choix que nous avons effectué dans l'exposé de la théorie consiste à adopter le point de vue de l'analyse fonctionnelle, au détriment des probabilités, en raison du rôle que nous faisons jouer dès l'origine à la topologie de  $\mathbb{R}^n$  ; en particulier nous avons préféré considérer comme fonctions élémentaires les fonctions continues à support compact plutôt que les fonctions étagées  $\chi_i$ . Par ailleurs, nous avons privilégié l'obtention rapide du résultat le plus significatif : la complétude de l'espace des fonctions intégrables vis-à-vis de la norme de la *convergence en moyenne*.

Cette façon d'opérer, due à Zamansky, ne revêt pas toute la généralité de la méthode de Carathéodory ou de celle de Daniell et masque quelque peu le rôle joué par la monotonie, mais suffit pour les applications à l'analyse.



Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons essentiellement au cas d'une mesure de Radon *positive*  $\mu$  sur l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , mais les résultats s'étendent sans difficulté aux mesures *réelles* quelconques, on démontre en effet que



**Théorème 6.6** *Toute mesure de Radon réelle est la différence de deux mesures de Radon positives.*



Nous aurons besoin à cet effet du lemme suivant :

**Lemme 6.7** *Si  $\mu$  est une mesure de Radon réelle sur  $\Omega$ , il existe une plus petite mesure positive  $\rho$ , telle que  $|\langle \mu, u \rangle| \leq \langle \rho, |u| \rangle$ ,  $\forall u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ . On note cette mesure  $|\mu|$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons tout d'abord le cas d'une fonction  $f \geq 0 \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , on posera

$$\langle \rho, f \rangle = \sup_{g \in \mathcal{D}^0(\Omega), |g| \leq f} |\langle \mu, g \rangle|,$$

ce qui est loisible car  $|\langle \mu, g \rangle| \leq C \|g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}$ .

▷ Pour tout nombre  $a \geq 0$ , et  $f \geq 0 \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , on aura clairement  $\langle \rho, af \rangle = a \langle \rho, f \rangle$ , puisque  $|g| \leq f \iff |ag| \leq af$ . Montrons que, pour  $f_1, f_2 \geq 0$  et appartenant à  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , on a  $\langle \rho, f_1 + f_2 \rangle = \langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle$ . Nous aurons ainsi démontré la linéarité restreinte de  $\rho$ .

▷ D'une part, pour  $i = 1, 2$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists g_i \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , telle que  $|g_i| \leq f_i$  et  $|\langle \mu, g_i \rangle| \geq \langle \rho, f_i \rangle - \varepsilon$ . Multipliant au besoin  $g_i$  par  $-1$ , on peut supposer que  $\langle \mu, g_i \rangle = |\langle \mu, g_i \rangle|$ ; il en résulte que

$$\langle \mu, g_1 + g_2 \rangle = |\langle \mu, g_1 \rangle| + |\langle \mu, g_2 \rangle| \geq \langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle - 2\varepsilon$$

ce qui implique

$$\langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle \leq \langle \mu, g_1 + g_2 \rangle + 2\varepsilon = |\langle \mu, g_1 + g_2 \rangle| + 2\varepsilon \leq \langle \rho, f_1 + f_2 \rangle + 2\varepsilon,$$

puisque  $|g_1 + g_2| \leq |g_1| + |g_2| \leq f_1 + f_2$ , et comme ceci est vrai  $\forall \varepsilon > 0$ , il en résulte que  $\langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle \leq \langle \rho, f_1 + f_2 \rangle$ .

▷ Réciproquement, si  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , avec  $|u| \leq f_1 + f_2$ , pour  $i = 1, 2$ , on posera

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x)f_i(x)/(f_1(x) + f_2(x)) && \text{pour } f_1(x) + f_2(x) \neq 0 \\ u_i(x) &= 0 && \text{pour } f_1(x) + f_2(x) = 0 \end{aligned}$$

Remarquons que les fonctions  $u_i$  sont continues; il suffira de le démontrer en un point  $x_0$  tel que  $f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0$ , on aura alors

$$|u_i(x) - u_i(x_0)| = |u_i(x)| \leq |u(x)| = |u(x) - u(x_0)|,$$

et par conséquent  $u_i \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ . Comme  $u = u_1 + u_2$  et  $u_i \leq f_i |u| / |f_1 + f_2| \leq f_i$

$$|\langle \mu, u \rangle| = |\langle \mu, u_1 \rangle + \langle \mu, u_2 \rangle| \leq |\langle \mu, u_1 \rangle| + |\langle \mu, u_2 \rangle| \leq \langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle.$$

Comme  $\langle \rho, f_1 + f_2 \rangle = \sup_{u \in \mathcal{D}^0(\Omega), |u| \leq f_1 + f_2} |\langle \mu, u \rangle|$ , il en résulte que  $\langle \rho, f_1 + f_2 \rangle \leq \langle \rho, f_1 \rangle + \langle \rho, f_2 \rangle$ .

▷ Nous pouvons maintenant étendre la définition de  $\rho$  à  $\mathcal{D}^0(\Omega)$  tout entier : si  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , on posera  $\langle \rho, u \rangle = \langle \rho, f' \rangle - \langle \rho, f'' \rangle$ , où  $u = f' - f''$ ,  $f', f'' \geq 0$ . L'existence d'une telle décomposition est claire, il suffit de poser  $f' = f^+$  et  $f'' = f^-$ , nous devons seulement démontrer que  $\langle \rho, u \rangle$  ainsi défini ne dépend pas de la décomposition choisie. Si  $f' - f'' = g' - g''$ , avec  $f', f'', g', g'' \geq 0$ , alors  $f' + g'' = f'' + g'$ , et d'après la linéarité restreinte,  $\langle \rho, f' \rangle + \langle \rho, g'' \rangle = \langle \rho, f'' \rangle + \langle \rho, g' \rangle$  ; il en résulte que  $\langle \rho, f' \rangle - \langle \rho, f'' \rangle = \langle \rho, g' \rangle - \langle \rho, g'' \rangle$ .

▷ Démontrons maintenant la linéarité complète de  $\rho$ . Si  $u = u_1 + u_2$ , on aura

$$\begin{aligned} \langle \rho, u \rangle &= \langle \rho, f'_1 + f'_2 - (f''_1 + f''_2) \rangle \\ &= \langle \rho, f'_1 + f'_2 \rangle - \langle \rho, f''_1 + f''_2 \rangle \\ &= \langle \rho, f'_1 \rangle + \langle \rho, f'_2 \rangle - \langle \rho, f''_1 \rangle - \langle \rho, f''_2 \rangle \\ &= \langle \rho, f'_1 \rangle - \langle \rho, f''_1 \rangle + \langle \rho, f'_2 \rangle - \langle \rho, f''_2 \rangle = \langle \rho, u_1 \rangle - \langle \rho, u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $a$  est un scalaire positif, en vertu de la linéarité restreinte,

$$\langle \rho, au \rangle = \langle \rho, a(f' - f'') \rangle = \langle \rho, af' \rangle - \langle \rho, af'' \rangle = a(\langle \rho, f' \rangle - \langle \rho, f'' \rangle) = a \langle \rho, u \rangle.$$

et si  $-a = b > 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle \rho, au \rangle &= \langle \rho, a(f' - f'') \rangle = \langle \rho, b(f'' - f') \rangle \\ &= \langle \rho, bf'' \rangle - \langle \rho, bf' \rangle = b(\langle \rho, f'' \rangle - \langle \rho, f' \rangle) = a \langle \rho, u \rangle. \end{aligned}$$

▷ Notons maintenant que  $\rho$  est une mesure positive, car si  $u \geq 0$ ,

$$\langle \rho, u \rangle = \sup_{g \in \mathcal{D}^0(\Omega), |g| \leq u} |\langle \mu, g \rangle| \geq |\langle \mu, u \rangle|.$$

▷ Considérons maintenant une mesure réelle  $\rho_1$  qui vérifie  $\langle \rho_1, |u| \rangle \geq |\langle \mu, u \rangle|, \forall u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ . On aura, pour  $f \geq 0$ ,  $\langle \rho_1 - \rho, f \rangle \geq |\langle \mu, f \rangle| - \langle \rho, f \rangle \geq 0$  ; c'est dire que  $\rho_1 - \rho$  est une mesure positive, ou encore que  $\rho_1$  est supérieure à  $\rho$ .

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME Notant  $|\mu|$  la mesure positive  $\rho$ , nous aurons

$$\langle |\mu|, |u| \rangle = \sup_{g \in \mathcal{D}^0(\Omega), |g| \leq |u|} |\langle \mu, g \rangle| \geq |\langle \mu, u \rangle|, \forall u \in \mathcal{D}^0(\Omega).$$

et par conséquent  $\langle |\mu|, f \rangle \geq |\langle \mu, f \rangle|, \forall f \geq 0$ , soit  $|\mu| \geq \mu$ . C'est dire que  $\mu$  est la différence de deux mesures positives.

□

**Remarque 6.8** Si  $\mu$  est une mesure positive, on aura  $|\mu| = \mu$ . En effet comme  $\mu$  est positive, on aura  $\sup_{g \in \mathcal{D}^0(\Omega), |g| \leq f} |\langle \mu, g \rangle| = \langle \mu, f \rangle, \forall f \geq 0$ .

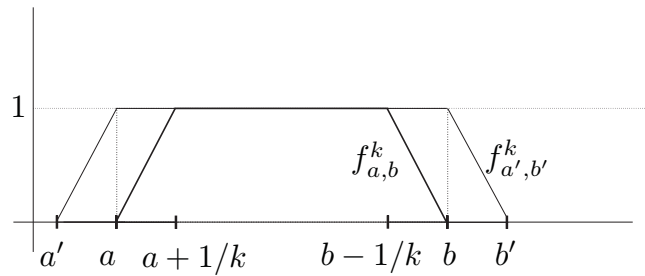


FIG. 6.3 – Approximations supérieure et inférieure

### 6.2.1 La mesure des ouverts

**Définition 6.9** Soit  $\omega$  un ouvert de  $\Omega$ , sa mesure est définie par

$$\mu(\omega) = \sup \{ \langle \mu, u \rangle \mid u \in \mathcal{D}^0(\omega), 0 \leq u \leq 1 \}$$

**Remarque 6.10** Il s'agit là d'une méthode plutôt originale pour définir une quantité représentant en fait un volume, mais il faut bien réaliser qu'elle nous permet de mesurer des domaines de forme complexe, parmi les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  se trouvent en effet des domaines plutôt compliqués. Il ne s'agit d'ailleurs là que d'une première étape, car l'ensemble des domaines de  $\mathbb{R}^n$  auxquels nous serons amenés à attribuer une mesure est bien plus étendu. Il contient par exemple, ce qui semble bien naturel, des domaines de la forme  $[a, b]$ . Dans le cas de la mesure de Lebesgue on montre aisément que la notion classique de volume est respectée, et que la mesure d'un segment n'est en fait rien d'autre que sa longueur :



**Lemme 6.11** Si  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\lambda(]a, b]) = |b - a|$ .



DÉMONSTRATION. Considérons la suite de fonctions  $f_{a,b}^k$  définies (voir Figure 6.3) par

$$\begin{aligned} f_{a,b}^k(x) &= 0 \text{ pour } x \notin ]a, b[ \\ f_{a,b}^k(x) &= 1 \text{ pour } x \in [a + 1/k, b - 1/k] \\ f_{a,b}^k(x) &= k(x - a) \text{ pour } x \in [a, a + 1/k[ \\ f_{a,b}^k(x) &= k(b - x) \text{ pour } x \in ]b - 1/k, b] \end{aligned}$$

On aura  $f_{a,b}^k \in \mathcal{D}^0(]a, b])$ ,  $0 \leq f_k \leq 1$ , et  $\langle \lambda, f_{a,b}^k \rangle = b - a - 1/k$ ; par conséquent  $\lambda(]a, b]) \geq b - a$ . Mais si  $a' = a - 1/k$  et  $b' = b + 1/k$ ,  $f_{a',b'}^k \geq \chi_{]a, b[}$  et par conséquent  $\langle \lambda, f_{a',b'}^k \rangle \geq \lambda(]a, b])$ . Or  $\langle \lambda, f_{a',b'}^k \rangle = b - a + 1/k$ ; la conclusion en résulte.

□

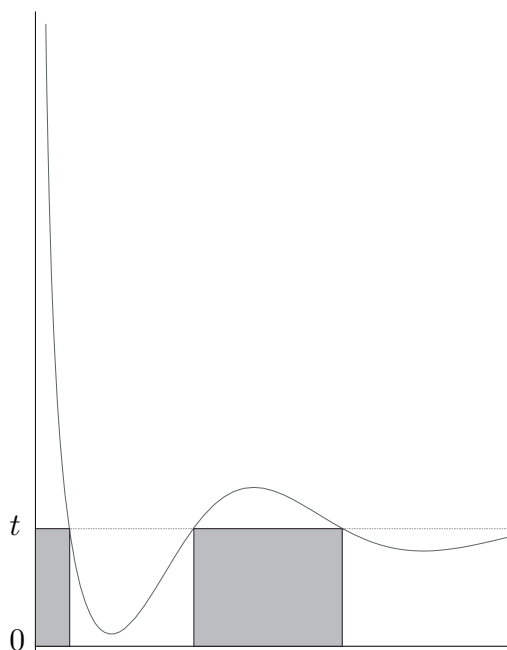


FIG. 6.4 – Inégalité de Tchebychev

**Définition 6.12** Une partie  $D$  de  $\Omega$  est dite négligeable si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \omega$  ouvert de  $\Omega$  tel que  $D \subset \omega$  et  $\mu(\omega) \leq \varepsilon$ . On dira qu'une propriété est vraie presque partout si l'ensemble des points où elle est fautive est négligeable.

**Lemme 6.13 (Inégalité de Tchebychev)** Soient  $t > 0$  et  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , positive. On a alors (voir Figure 6.4)

$$t\mu(u^{-1}(]t, +\infty[)) \leq \langle \mu, u \rangle$$

DÉMONSTRATION. Posons  $\omega = u^{-1}(]t, +\infty[)$  et considérons une fonction  $v \in \mathcal{D}^0(\omega)$  vérifiant  $0 \leq v \leq 1$ , on aura  $tv \leq u$ , et par conséquent  $t\langle \mu, v \rangle = \langle \mu, tv \rangle \leq \langle \mu, u \rangle$  et  $t\mu(\omega) \leq \langle \mu, u \rangle$ .  $\square$

### Sous-additivité dénombrable

#### Proposition 6.14

(i) Pour toute suite d'ouverts  $\omega_i \subset \Omega$ , on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1, \infty} \omega_i\right) \leq \sum_{i=1, \infty} \mu(\omega_i) \quad (6.3)$$

(ii) Toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $\omega = \bigcup_{i=1,\infty} \omega_i$  et choisissons  $u \in \mathcal{D}^0(\omega)$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . la suite  $\omega_i$  constitue un recouvrement ouvert du support de  $u$ , dont on peut par compacité extraire un sous recouvrement fini  $\omega_i, i = 1, n$ . Choisissons selon la proposition D.11, une partition de l'unité  $\psi_i \in \mathcal{D}^0(\omega_i)$  subordonnée à ce recouvrement, c'est à dire telle que  $0 \leq \psi_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1,n} \psi_i = 1$  sur  $\text{Supp } u$ . On aura

$$\langle \mu, u \rangle = \sum_{i=1,n} \langle \mu, \psi_i u \rangle \leq \sum_{i=1,\infty} \mu(\omega_i)$$

et par conséquent  $\mu(\omega) \leq \sum_{i=1,\infty} \mu(\omega_i)$ .

▷ Soient  $\varepsilon > 0$  et  $D_i$  une suite d'ensembles négligeables. Il existe alors une suite d'ouverts  $\omega_i$  tels que  $D_i \subset \omega_i$  et  $\mu(\omega_i) \leq 2^{-i}\varepsilon$ . On aura  $\bigcup_{i=1,\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1,\infty} \omega_i$ , avec selon l'item précédent  $\mu\left(\bigcup_{i=1,\infty} \omega_i\right) \leq \sum_{i=1,\infty} \mu(\omega_i) \leq \varepsilon$ . La conclusion en découle. □

◇ **Remarque 6.15** *Les ensembles négligeables peuvent être très différents selon la mesure considérée.*

(i) *Pour la mesure de Dirac on montre très aisément que  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  est négligeable, tandis que  $\{0\}$  ne l'est pas.*

(ii) *Pour la mesure de Lebesgue par contre, le lemme 6.11, nous montre qu'un point est négligeable, et par conséquent un ensemble dénombrable de points d'après la proposition 6.14.*

◇ Dans ce qui suit, nous nous référerons à la quantité  $\|f\|_{L^1} = \langle \mu, |f| \rangle$  en tant que 'norme de la convergence en moyenne' ou 'norme  $L^1$ ', ce qui constitue manifestement un abus de langage, du moins tant que nous n'avons pas précisé sur quel espace cette quantité constitue bien une norme. Il est bien clair que sur  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , cette quantité est une semi-norme, mais en général pas une norme, comme en témoigne l'exemple de la mesure de Dirac.

## 6.2.2 La convergence presque uniforme

**Définition 6.16** *Une suite  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  converge presque uniformément sur  $\Omega$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \omega$  ouvert de  $\Omega$  tel que  $\mu(\omega) \leq \varepsilon$  et  $u_j$  converge dans  $\mathcal{C}_b^0(\Omega \setminus \omega)$ , c'est-à-dire uniformément sur  $\Omega \setminus \omega$ .*

◇ **Remarque 6.17**

▷ *Bien entendu, la convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout.*

▷ *La notion de convergence presque uniforme est donc intermédiaire entre la convergence uniforme et la convergence presque partout. Dans l'approche que nous développons ici, elle va se révéler jouer un rôle crucial, alors que dans les présentations traditionnelles, son intervention est plus discrète et ne se manifeste qu'après l'obtention des résultats essentiels de la théorie.*

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de deux lemmes techniques. Ils font le lien entre le fait pour une suite de fonctions continues à support compact d'être de Cauchy pour la norme de la convergence en moyenne, et celui de converger presque uniformément. Les démonstrations ne sont pas vraiment difficiles mais témoignent d'une certaine subtilité ; il n'est heureusement pas nécessaire d'en connaître le détail pour en comprendre l'énoncé.

**Lemme 6.18** *Si la suite  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$ , alors elle contient une sous-suite presque uniformément convergente.*

DÉMONSTRATION.

▷ A l'extraction près d'une sous-suite, on peut supposer que  $\|u_{m+1} - u_m\|_{L^1} \leq 4^{-m}$ . Si on pose alors  $\omega_m = \{x \mid |u_{m+1}(x) - u_m(x)| > 2^{-m}\}$ , on aura d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$\mu(\omega_m) \leq 2^m \langle \mu, |u_{m+1} - u_m| \rangle \leq 2^m \|u_{m+1} - u_m\|_{L^1} \leq 2^{-m}.$$

▷ Posons  $\Omega_i = \bigcup_{m \geq i} \omega_m$ , et estimons la mesure de  $\Omega_i$ . On aura

$$\mu(\Omega_i) \leq \sum_{m \geq i} \mu(\omega_m) \leq 2^{1-i},$$

puisque  $\sum_{m \geq i} q^m = q^i / (1 - q)$ .

▷ Par ailleurs, pour  $x \notin \bigcup_{p=k, \ell-1} \omega_p$ , on aura

$$|u_\ell(x) - u_k(x)| \leq \sum_{p=k, \ell-1} |u_{p+1}(x) - u_p(x)| \leq \sum_{p=k, \ell-1} 2^{-p} \leq 2^{1-k}.$$

Par conséquent, si  $x \in \Omega \setminus \Omega_i$ , on aura

$$|u_\ell(x) - u_k(x)| \leq 2^{1-k} \quad \forall i \leq k \leq \ell.$$

On a donc montré que  $\forall i$ , la suite  $u_j$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}_b^0(\Omega \setminus \Omega_i)$ , dont nous avons démontré la complétude ; elle est donc presque uniformément convergente. □

**Lemme 6.19** *Si la suite  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$  et converge vers 0 presque partout dans  $\Omega$ , alors  $\|u_j\|_{L^1} \rightarrow 0$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le lemme 6.18  $u_m$  contient une sous-suite  $u_{m'}$  presque uniformément convergente. Il nous suffira de démontrer que  $\|u_{m'}\|_{L^1} \rightarrow 0$  puisque  $u_m$  est de Cauchy et que  $\|u_m\|_{L^1} \leq \|u_m - u_{m'}\|_{L^1} + \|u_{m'}\|_{L^1}$ .

▷ Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\|u_{m'}\|_{L^1}$  ne tend pas vers 0. La suite  $u_m$  étant de Cauchy, nous pouvons donc postuler que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists m'$  tel que d'une part  $u_{m'} \neq 0$ , et d'autre part  $\forall j' > m'$ ,  $\|u_{j'} - u_{m'}\|_{L^1} \leq \varepsilon$ .

▷ Comme  $u_{j'}$  est presque uniformément convergente, et converge vers 0 presque partout d'après l'hypothèse, elle converge presque uniformément vers 0. Par conséquent,  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,  $\exists \omega$  ouvert de  $\Omega$ , et  $j' \geq m'$ , tels que  $\mu(\omega) \leq \varepsilon_1$  et  $|u_{j'}(x)| \leq \varepsilon_2$ ,  $\forall x \in \Omega \setminus \omega$ . Notons alors  $K_{j'} = \{x \in \Omega \mid u_{j'}(x) \geq 2\varepsilon_2\}$  et remarquons qu'il s'agit d'un sous-ensemble de  $\omega$ .

▷ Introduisons maintenant, selon la proposition D.11, les fonctions de troncature  $\psi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , vérifiant  $0 \leq \psi \leq 1$  et  $\psi|_{\text{Supp } u_{m'}} = 1$  ainsi que les  $\psi_{j'} \in \mathcal{D}^0(\omega)$ , telles que  $0 \leq \psi_{j'} \leq 1$  et  $\psi_{j'}|_{K_{j'}} = 1$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} |u_{j'}(x)| &= \psi_{j'}(x) |u_{j'}(x)| + (1 - \psi_{j'}(x)) |u_{j'}(x)| \\ &\leq \psi_{j'}(x) |u_{j'}(x) - u_{m'}(x)| + \psi_{j'}(x) |u_{m'}(x)| + (1 - \psi_{j'}(x)) |u_{j'}(x)| \\ &\leq \psi_{j'}(x) |u_{j'}(x) - u_{m'}(x)| + \psi_{j'}(x) |u_{m'}(x)| \\ &\quad + (1 - \psi_{j'}(x)) \psi(x) |u_{j'}(x)| + (1 - \psi_{j'}(x)) (1 - \psi(x)) |u_{j'}(x)|, \end{aligned}$$

mais  $\psi|_{\text{Supp } u_{m'}} = 1$ , par conséquent  $(1 - \psi(x)) |(u_{j'})'(x)| = (1 - \psi(x)) |(u_{j'} - u_{m'})'(x)|$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} |u_{j'}(x)| &\leq |u_{j'}(x) - u_{m'}(x)| (\psi_{j'}(x) + (1 - \psi_{j'}(x))(1 - \psi(x))) \\ &\quad + \psi_{j'}(x) |u_{m'}(x)| + (1 - \psi_{j'}(x)) \psi(x) |u_{j'}(x)| \\ &\leq |u_{j'}(x) - u_{m'}(x)| + \psi_{j'}(x) |u_{m'}(x)| + (1 - \psi_{j'}(x)) \psi(x) |u_{j'}(x)|. \end{aligned}$$

Comme  $(1 - \psi_{j'}(x))$  est nulle sur  $K_{j'}$ , on aura  $(1 - \psi_{j'}(x)) |u_{j'}(x)| \leq 2\varepsilon_2$ , mais d'après la définition 6.9 de la mesure d'un ensemble,  $\langle \mu, \psi_{j'} \rangle \leq \mu(\omega)$  ; par conséquent, pour  $j' \geq m'$ , on aura

$$\begin{aligned} \|u_{j'}\|_{L^1} &\leq \|u_{j'} - u_{m'}\|_{L^1} + \mu(\omega) \|u_{m'}\|_{L^\infty} + 2\varepsilon_2 \|\psi\|_{L^1} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon_1 \|u_{m'}\|_{L^\infty} + 2\varepsilon_2 \|\psi\|_{L^1} \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

si on pris soin de choisir  $\varepsilon_1 = \varepsilon / \|u_{m'}\|_{L^\infty}$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon / 2 \|\psi\|_{L^1}$ .

□

### 6.2.3 Les fonctions intégrables

**Définition 6.20** On dira que la fonction  $u$  est intégrable (au sens de Lebesgue) ou que  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , si il existe une suite de fonctions  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  telle que

- (i)  $u_j \rightarrow u$  presque partout sur  $\Omega$ .
- (ii)  $u_j$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$ .

**Lemme 6.21** Soit  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , et  $u_j$  la suite de la définition précédente, alors  $\|u_j\|_{L^1}$  et  $\langle \mu, u_j \rangle$  ont des limites ; elles sont indépendantes de la suite particulière choisie.

DÉMONSTRATION.

▷ La suite  $\|u_j\|_{L^1}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , en effet, *comme  $\mu$  est positive*,

$$\left| \|u_j\|_{L^1} - \|u_k\|_{L^1} \right| = |\langle \mu, |u_j| - |u_k| \rangle| \leq \langle \mu, ||u_j| - |u_k|| \rangle \leq \langle \mu, |u_j - u_k| \rangle = \|u_j - u_k\|_{L^1}.$$

Elle converge donc, ainsi que la suite  $\langle \mu, u_j \rangle$ , qui est également de Cauchy, puisque

$$|\langle \mu, u_j \rangle - \langle \mu, u_k \rangle| \leq \langle \mu, |u_j - u_k| \rangle = \|u_j - u_k\|_{L^1}.$$

▷ Supposons qu'il existe deux suites  $u_j$  et  $v_j$  compatibles avec les propriétés de la définition 6.20, si  $w_j = u_j - v_j$ , la suite  $w_j$  tend vers 0 presque partout et vérifie  $\|w_j - w_k\|_{L^1} \leq \|u_j - u_k\|_{L^1} + \|v_j - v_k\|_{L^1}$ . D'après le lemme 6.19, la suite  $\|w_j\|_{L^1}$  converge donc vers 0, ainsi par conséquent que la suite  $\langle \mu, w_j \rangle$ ; l'unicité en résulte.

□

**Définition 6.22** Si  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $u_j$  est la suite de la définition 6.20, alors on pose

$$\int_{\Omega} u \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mu, u_j \rangle \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^1}.$$

### Remarque 6.23

(i) Selon les définitions qui précèdent, il est clair que les fonctions de  $\mathcal{D}^0(\Omega)$  sont intégrables et que  $\int_{\Omega} u \, d\mu = \langle \mu, u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ . On a donc bien construit un prolongement de la mesure de Radon. Dans la suite, pour  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , nous abandonnerons la notation  $\langle \mu, u \rangle$ , et nous utiliserons systématiquement  $\int_{\Omega} u \, d\mu$ , que la fonction  $u$  soit ou non élément de  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ .

(ii) Par contre, au vu de la définition, il n'est pas si facile de calculer l'intégrale d'une fonction donnée si elle n'appartient pas à  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , ni même de décider si elle est ou non intégrable. Il nous faudra un peu de patience, car ce n'est qu'au paragraphe 6.3, relatif à la notion de mesurabilité, que nous seront fournis quelques critères commodes à cet égard. ♠

Des propriétés de la mesure de Radon, par simple passage à la limite, découle la proposition suivante, qui étend à l'intégrale de Lebesgue  $\int_{\Omega} u \, d\mu$  les propriétés classiques de l'intégrale de Riemann.

### Proposition 6.24

(i)  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  est un espace vectoriel et l'intégrale de Lebesgue une forme linéaire positive sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ . ♥

(ii) Si  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , alors il en est de même de  $u^+$ ,  $u^-$  et  $|u|$ . On a de plus

$$\int_{\Omega} u^+ \, d\mu \geq \left( \int_{\Omega} u \, d\mu \right)^+, \quad \int_{\Omega} |u| \, d\mu \geq \left| \int_{\Omega} u \, d\mu \right|.$$



(iii)  $\|u\|_{L^1}$  est une semi-norme sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , et on a

$$\left| \int_{\Omega} u \, d\mu \right| \leq \|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u| \, d\mu, \quad \forall u \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

(iv) Si  $u$  et  $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , alors  $\sup(u, v)$  et  $\inf(u, v) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et on a

$$\int_{\Omega} \sup(u, v) \, d\mu \geq \sup \left( \int_{\Omega} u \, d\mu, \int_{\Omega} v \, d\mu \right) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \inf(u, v) \, d\mu \leq \inf \left( \int_{\Omega} u \, d\mu, \int_{\Omega} v \, d\mu \right)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $u_j$  la suite de la définition 6.20. Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors  $\lambda u_j \rightarrow \lambda u$  presque partout et la suite  $\lambda u_j$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$ , puisque  $|\lambda u_j - \lambda u_k| = |\lambda| |u_j - u_k|$ . Il en résulte que  $\lambda u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et que  $\lambda \langle \mu, u_j \rangle = \langle \mu, \lambda u_j \rangle \rightarrow \int_{\Omega} \lambda u \, d\mu$ ; mais comme  $\langle \mu, u_j \rangle \rightarrow \int_{\Omega} u \, d\mu$ , on aura  $\int_{\Omega} \lambda u \, d\mu = \lambda \int_{\Omega} u \, d\mu$ . De même si  $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , alors  $u + v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $\int_{\Omega} (u + v) \, d\mu = \int_{\Omega} u \, d\mu + \int_{\Omega} v \, d\mu$ .

▷ Considérons par exemple  $u^+$ , on aura  $u_j^+ \rightarrow u^+$  presque partout et  $|u_j^+ - u_k^+| \leq |u_j - u_k|$ , ce qui prouve que  $u_j^+$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$ . Il en résulte que  $u^+ \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et que  $\int_{\Omega} u^+ \, d\mu \geq 0$ ; il en est de même pour  $u^-$  et pour  $|u| = u^+ + u^-$ .

▷ Comme  $u = u^+$  si  $u$  est positive, il en résulte que  $u \rightarrow \int_{\Omega} u \, d\mu$  est une forme linéaire positive, et puisque  $u^+$  majore à la fois  $u$  et  $0$ , que  $\int_{\Omega} u^+ \, d\mu \geq \left( \int_{\Omega} u \, d\mu \right)^+$ . Enfin on aura  $\int_{\Omega} |u| \, d\mu \geq \left| \int_{\Omega} u \, d\mu \right|$ , car

$$\int_{\Omega} |u| \, d\mu = \int_{\Omega} u^+ \, d\mu + \int_{\Omega} u^- \, d\mu \geq \left( \int_{\Omega} u \, d\mu \right)^+ + \left( \int_{\Omega} u \, d\mu \right)^- = \left| \int_{\Omega} u \, d\mu \right|.$$

▷ Selon l'item précédent, on a

$$\|u_j\|_{L^1} = \langle \mu, |u_j| \rangle = \langle \mu, u_j^+ + u_j^- \rangle \rightarrow \int_{\Omega} (u^+ + u^-) \, d\mu = \int_{\Omega} |u| \, d\mu.$$

Par ailleurs l'intégrale étant une forme linéaire positive, nous aurons

$$\|\lambda u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |\lambda u| \, d\mu = |\lambda| \int_{\Omega} |u| \, d\mu = |\lambda| \|u\|_{L^1},$$

et

$$\|u + v\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u + v| \, d\mu \leq \int_{\Omega} (|u| + |v|) \, d\mu = \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1}.$$


▷ Remarquons enfin que  $\sup(u, v) = v + (u - v)^+$ ; par conséquent  $\sup(u, v) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sup(u, v) \, d\mu &= \int_{\Omega} v \, d\mu + \int_{\Omega} (u - v)^+ \, d\mu \\ &\geq \int_{\Omega} v \, d\mu + \left( \int_{\Omega} (u - v) \, d\mu \right)^+ = \sup \left( \int_{\Omega} u \, d\mu, \int_{\Omega} v \, d\mu \right). \end{aligned}$$

□

### La complétude

C'est ici qu'apparaît la nouveauté car notre construction fait des fonctions intégrables un ensemble complet pour la norme de la convergence en moyenne et non plus seulement pour la norme de la convergence uniforme, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann.

**Lemme 6.25 (d'approximation)** *Si  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , alors il existe une suite  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , convergeant vers  $u$  à la fois en norme  $L^1$  et presque uniformément.* 

DÉMONSTRATION.


▷ Selon la définition même de  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , il existe  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , de Cauchy pour la norme  $L^1$  et convergeant vers  $u$  presque partout. Selon le lemme 6.18, il existe donc une sous-suite  $u_{j'}$  extraite de  $u_j$  presque uniformément convergente (vers  $u$  bien entendu).

▷ Fixons  $\ell$  et posons  $v = u_{\ell'} - u$  et  $v_{j'} = u_{\ell'} - u_{j'}$ , la suite  $v_{j'}$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$  et tend vers  $v$  presque partout. D'après la définition 6.22, on aura

$$\|u - u_{\ell'}\|_{L^1} = \|v\|_{L^1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|v_{j'}\|_{L^1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{\ell'} - u_{j'}\|_{L^1}.$$

Comme la suite  $u_{\ell'}$  est de Cauchy, il en résulte que  $\|u - u_{\ell'}\|_{L^1} \rightarrow 0$ .

□

**Théorème 6.26 (Complétude : Fischer-Riesz)** *Si la suite  $u_j \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  est de Cauchy pour la norme  $L^1$ , alors elle converge en moyenne, soit vers  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , et il existe  $u_{j'}$  extraite de  $u_j$ , qui converge presque uniformément (et donc rappelons-le presque partout) vers  $u$ .* 

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le lemme d'approximation 6.25, pour chaque  $j$ , il existe une fonction  $v_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  et un ouvert  $\omega_j$ , tels que  $\|u_j - v_j\|_{L^1} \leq 1/j$ ,  $\mu(\omega_j) \leq 2^{-j}$ , et  $\sup_{x \in \Omega \setminus \omega_j} |u_j(x) - v_j(x)| \leq 1/j$ .

▷ On aura tout d'abord

$$\|v_j - v_k\|_{L^1} \leq \|v_j - u_j\|_{L^1} + \|u_j - u_k\|_{L^1} + \|u_k - v_k\|_{L^1}.$$

La suite  $v_j$  est donc de Cauchy, et par conséquent selon le lemme 6.18, il existe une suite  $v_{j'}$  extraite, qui converge presque uniformément, soit vers  $u$ . La convergence presque uniforme entraînant la convergence presque partout, il en résulte que  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ . De même que lors de la démonstration du lemme 6.25, et selon la définition 6.21, on aura  $\|v_{\ell'} - u\|_{L^1} = \lim_{j' \rightarrow \infty} \|v_{\ell'} - v_{j'}\|_{L^1}$ , et par conséquent  $\|v_{\ell'} - u\|_{L^1} \rightarrow 0$ .

▷ Revenons maintenant à la suite  $u_j$ , on aura

$$\|u_j - u\|_{L^1} \leq \|u_j - u_{j'}\|_{L^1} + \|u_{j'} - v_{j'}\|_{L^1} + \|v_{j'} - u\|_{L^1},$$

d'où la convergence de  $\|u_j - u\|_{L^1}$  vers 0.

▷ Soient maintenant  $\varepsilon > 0$  et  $m$  tels que  $2^{1-m} \leq \varepsilon$ . Si on pose  $\Omega_m = \bigcup_{k \geq m} \omega_k$ , on aura

$$\mu(\Omega_m) \leq \sum_{k \geq m} \mu(\omega_k) \leq 2^{1-m} \leq \varepsilon.$$

Mais comme  $v_{j'}$  converge presque uniformément vers  $u$ , il existe un ouvert  $\omega \subset \Omega$  tel que  $\mu(\omega) \leq \varepsilon$  et  $\sup_{x \in \Omega \setminus \omega} |v_{j'}(x) - u(x)| \rightarrow 0$ . Plaçons nous alors en dehors de l'ouvert  $\Omega_m \cup \omega$ , on aura  $\mu(\Omega_m \cup \omega) \leq 2\varepsilon$ , et pour  $j' \geq m$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega \setminus (\Omega_m \cup \omega)} |u_{j'}(x) - u(x)| &\leq \sup_{x \in \Omega \setminus (\Omega_m \cup \omega)} |u_{j'}(x) - v_{j'}(x)| + \sup_{x \in \Omega \setminus (\Omega_m \cup \omega)} |v_{j'}(x) - u(x)| \\ &\leq \frac{1}{j'} + \sup_{x \in \Omega \setminus \omega} |v_{j'}(x) - u(x)| \end{aligned}$$

La convergence presque uniforme de  $u_{j'}$  vers  $u$  en résulte. □



La signification de l'expression ‘*presque partout*’ est clairement mise en lumière par le lemme suivant, elle signifie : ‘*sans effet sur la valeur de l'intégrale*’.

**Corollaire 6.27** *La fonction  $u$  est nulle presque partout sur  $\Omega$  si et seulement si  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $\|u\|_{L^1} = 0$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair d'après la définition, que si  $u$  est nulle presque partout, alors elle est intégrable et que son intégrale est nulle.

▷ Réciproquement, si  $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $\|u\|_{L^1} = 0$ , posons  $v_j = ju$ , la suite  $v_j$  vérifie les hypothèses du théorème de Fischer, il existe donc une sous-suite  $v_{j'}$  convergeant presque uniformément sur  $\Omega$ , et donc presque partout. Ce n'est possible que si  $u$  est nulle presque partout. □



Nous sommes maintenant en position de synthétiser ces premiers résultats. La remarque essentielle concerne la présence envahissante de l'expression ‘*presque partout*’ et l'inutilité de définir les fonctions partout dans  $\Omega$ , puisque l'intégrale ne distingue pas deux fonctions égales presque partout. La position raisonnable consiste à prendre clairement acte de cette situation, et à quotienter l'espace des fonctions intégrables par la relation d'égalité presque partout. On a donc pris l'habitude de ne considérer que des *classes d'équivalence de fonctions égales presque partout*, et des expressions d'emploicourant telles que ‘*la fonction  $u$  est plus grande que  $v$* ’ ou ‘*la fonction  $u$  est continue*’ signifient en fait respectivement ‘*l'ensemble des points où  $u$  est plus petite que  $v$  est de mesure nulle*’ et ‘*parmi les fonctions égales à  $u$  presque partout, l'une d'entre elles est continue*’.



**Définition 6.28** *On note  $L^1(\Omega)$  le quotient de  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  par la relation d'équivalence d'égalité presque partout. La convergence en moyenne de la suite  $u_j$  vers  $u$  sera notée  $u_j \xrightarrow{L^1} u$ .*

Dans ce cadre, le théorème de Fischer prend la signification suivante :

**Théorème 6.29** *L'espace  $L^1(\Omega)$  est complet pour la topologie définie par la norme de la convergence en moyenne :  $\|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u| d\mu$ .*



### 6.2.4 Passages à la limite sous le signe somme

De même que le théorème de Fischer-Riesz, les théorèmes de cette section n'ont pas leur équivalent pour l'intégrale de Riemann, ce sont eux qui, par leur portée et leur facilité d'emploi, ont fait le succès de la théorie de Lebesgue.

Le théorème qui suit est particulièrement important, en effet il permet d'assurer la convergence dans  $L^1(\Omega)$  d'une suite de fonctions *sans en connaître à l'avance la limite*, c'est un concurrent redoutable du théorème de Fischer en raison de la simplicité des hypothèses.

**Théorème 6.30 (Convergence monotone : Beppo-Levi)** *Si la suite de fonctions réelles  $u_j \in L^1(\Omega)$  est croissante et si  $\int_{\Omega} u_j d\mu$  est bornée supérieurement, alors  $\exists u \in L^1(\Omega)$  telle que  $u_j \xrightarrow{L^1} u$  et  $u_j$  converge presque uniformément vers  $u$ .*



DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $u_j$  est croissante, la suite  $\int_{\Omega} u_j d\mu$  est également croissante, et comme elle est bornée, elle converge. Pour  $j < k$ , on aura  $\|u_k - u_j\|_{L^1} = \int_{\Omega} u_k d\mu - \int_{\Omega} u_j d\mu$ , la suite  $u_j$  est donc de Cauchy et converge par conséquent en vertu du théorème de Fischer, soit vers  $u$ .

▷ De plus il existe  $u_j$  extraite qui converge presque uniformément vers  $u$ , et comme  $u_j$  est croissante, c'est en fait toute la suite  $u_j$  qui converge presque uniformément vers  $u$ .

□

Le lemme qui suit a la particularité de s'appliquer à des situations où la limite n'existe pas. Rappelons que, par définition

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} a_j = \inf_k \sup_{j \geq k} a_j \\ \liminf_{j \rightarrow \infty} a_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} a_j = \sup_k \inf_{j \geq k} a_j \end{aligned}$$

**Théorème 6.31 (Lemme de Fatou)** *Si la suite  $u_j \in L^1(\Omega)$  est telle que*

- (i) *La suite  $\int_{\Omega} u_j d\mu$  est bornée supérieurement*
- (ii) *La suite  $u_j$  est bornée inférieurement par une fonction intégrable  $f$ ,*

*alors  $\liminf u_j \in L^1(\Omega)$  et*

$$\int_{\Omega} \liminf u_j d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} u_j d\mu.$$

*Un théorème analogue est valable pour les  $\limsup$  à condition d'échanger 'supérieurement' et 'inférieurement'.*

DÉMONSTRATION.

▷ Fixons tout d'abord  $m$  et posons  $v_j = \inf_{m \leq \ell \leq j} u_\ell$ . Les fonctions  $v_j$  sont intégrables en vertu de la proposition 6.24, et forment une suite décroissante. De plus par positivité de la mesure, on a  $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega v_j \, d\mu$ . D'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $v_j$  converge dans  $L^1(\Omega)$  vers la fonction intégrable  $w_m = \inf_{m \leq \ell} u_\ell$ , et on aura

$$\int_\Omega w_m \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega v_j \, d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{m \leq \ell \leq j} \int_\Omega u_\ell \, d\mu = \inf_{m \leq \ell} \int_\Omega u_\ell \, d\mu.$$

▷ Considérons maintenant la suite  $w_m$ , elle converge presque partout en croissant vers  $\liminf u_j$ . On aura  $\int_\Omega w_m \, d\mu \leq \sup \int_\Omega u_j \, d\mu$ ; le théorème de convergence monotone nous montre alors que  $\liminf u_j$  est intégrable et que

$$\int_\Omega \liminf u_j \, d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega w_m \, d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{m \leq \ell} \int_\Omega u_\ell \, d\mu = \liminf \int_\Omega u_\ell \, d\mu.$$

□

Voici le théorème le plus célèbre de la théorie, probablement le plus utilisé dans la pratique, alors que c'est le théorème de convergence monotone qui se révèle souvent comme étant le plus utile en théorie.



**Théorème 6.32 (Convergence dominée : Lebesgue)** Si  $u_j \in L^1(\Omega)$  converge presque partout vers  $u$ , et s'il existe une fonction intégrable  $f$  telle que  $|u_j| \leq f$  presque partout, alors  $u$  est intégrable et  $u_j \xrightarrow{L^1} u$ .

DÉMONSTRATION. On applique le Lemme de Fatou dans sa version 'lim sup' à la suite  $v_j = |u_j - u|$ , on aura en effet  $v_j \leq 2f$  et  $\int_\Omega v_j \, d\mu \geq 0$ . Il en résulte que

$$0 = \int_\Omega \limsup v_j \, d\mu \geq \limsup \int_\Omega v_j \, d\mu,$$

ou encore  $\limsup \int_\Omega v_j \, d\mu \leq 0$ . Il en résulte que  $\int_\Omega |u_j - u| \, d\mu \rightarrow 0$ .

□

### Remarque 6.33

(i) L'exemple suivant fournit un cas simple d'utilisation du théorème de convergence monotone : considérons la suite des  $f_n(x) = \chi_{[1/n, 1]} \frac{n}{(n+1)\sqrt{x}}$  (voir Figure 6.5), cette suite est croissante, et pour la mesure de Lebesgue, l'intégrale de  $f_n$  n'est autre que  $2\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)/(n+1)$ , qui est bornée. Il en résulte que  $f_n$  tend vers une limite,  $\chi_{[0,1]}/\sqrt{x}$  en fait, et que cette dernière est intégrable.

(ii) L'exemple de la suite  $g_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1-1/n}$  (voir Figure 6.5), est ici particulièrement instructif : il est facile de montrer à l'aide du théorème de convergence dominée qu'elle tend vers 0 en moyenne sur  $]0, 1[$ , mais au voisinage de  $x = 0$ , cette convergence n'est ni bien entendu uniforme, ni même monotone.

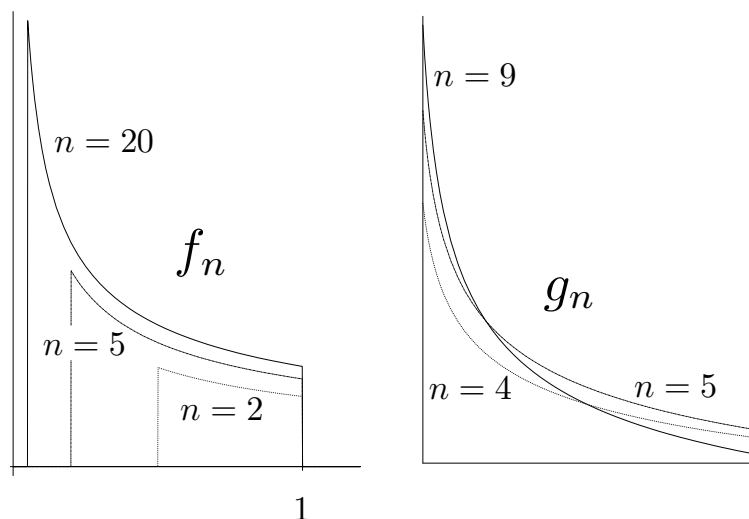


FIG. 6.5 – Exemples (i) et (ii)

(iii) Il ne faudrait pas croire que ces théorèmes épuisent l'ensemble des situations intéressantes ; considérons par exemple la suite  $f_n(x) = e^{-x^2/n} \cos x$ , que nous étudierons en exercice (voir Figure 6.6), son intégrale tend vers 0 pour la mesure de Lebesgue, mais elle ne converge pas en moyenne.

(iv) Une autre situation intéressante est la suivante :

$$g_n(x) = \frac{n-1}{n} (1 - \chi_{[0,1/n]}) \varphi(x)/x,$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  (voir Figure 6.6). La suite  $g_n$  ne converge pas en moyenne, mais son intégrale possède une limite, que la théorie des distributions nous invite à écrire sous la forme  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle$ .

Terminons ce paragraphe par deux corollaires immédiats, mais fréquemment utilisés, du théorème de convergence dominée.

**Corollaire 6.34** Soient  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  une partie de  $\mathbb{R}^m$ , et  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

- (i)  $\forall y \in B, x \rightarrow F(x, y) \in L^1(A)$ ,
- (ii)  $y \rightarrow F(x, y)$  est continue pour presque tout  $x$ ,
- (iii)  $\exists g \in L^1(A)$  telle que  $|F(x, y)| \leq g(x)$  pour tout  $y \in B$  et pour presque tout  $x \in A$ .

Alors la fonction  $f(y) = \int_A F(x, y) d\mu_x$  est continue sur  $B$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée, on constate que si  $y_k \rightarrow y$  dans  $B$ , alors  $\int_A F(x, y_k) d\mu_x \rightarrow \int_A F(x, y) d\mu_x$ .

□



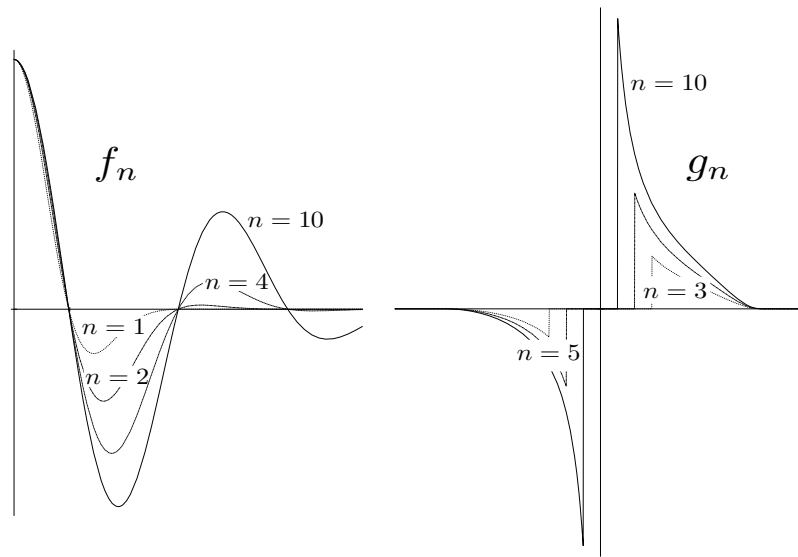


FIG. 6.6 – Exemples (iii) et (iv)

**Remarque 6.35** Une application très simple de ce théorème consiste à démontrer que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $y \rightarrow \int_a^y f(x) dx$  est continue; il suffit en effet d'appliquer le théorème qui précède à la fonction  $F(x, y) = f(x)\chi_{[a, y]}$ . On démontre en fait que cette fonction est presque partout dérivable, ce qui constitue un théorème beaucoup plus fort, mais beaucoup plus difficile.



**Corollaire 6.36** Soient  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  une partie de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\alpha$  un multiindice vérifiant  $|\alpha| = 1$  et  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

- (i)  $\forall y \in B, x \rightarrow F(x, y) \in L^1(A)$ ,
- (ii)  $y \rightarrow F(x, y)$  admet une dérivée partielle d'ordre  $\alpha$  :  $\partial_y^\alpha F$  pour presque tout  $x$ ,
- (iii)  $\exists g \in L^1(A)$  telle que  $|\partial_y^\alpha F(x, y)| \leq g(x)$  pour tout  $y \in B$  et pour presque tout  $x \in A$ .

Alors la fonction  $f(y) = \int_A F(x, y) d\mu_x$  possède une dérivée partielle d'ordre  $\alpha$ ,  $\forall y \in B$ , la fonction  $x \rightarrow \partial_y^\alpha F(x, y) \in L^1(A)$  et

$$\partial^\alpha f(y) = \int_A \partial_y^\alpha F(x, y) d\mu_x.$$

DÉMONSTRATION. D'après la formule de la moyenne, pour presque tout  $x \in A$ ,  $\forall y \in B$ , si  $\lambda$  est assez petit, on a  $|F(x, y + \lambda\alpha) - F(x, y)| \leq |\lambda| g(x)$ . Pour  $y$  fixé, supposons que  $\lambda_k \rightarrow 0$ , alors en vertu du théorème de convergence dominée, la fonction  $x \rightarrow \partial_y^\alpha F(x, y)$  est intégrable sur  $A$ , et on a

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \int_A F(x, y) d\mu_x &= \lim_{\lambda_k \rightarrow 0} \frac{\int_A F(x, y + \lambda_k \alpha) d\mu_x - \int_A F(x, y) d\mu_x}{\lambda_k} \\ &= \int_A \lim_{\lambda_k \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \lambda_k \alpha) - F(x, y)}{\lambda_k} d\mu_x = \int_A \partial_y^\alpha F(x, y) d\mu_x. \end{aligned}$$

□

## 6.3 La mesurabilité

Les théorèmes que nous venons d'obtenir, malgré leur efficacité, ne donnent pas toujours des critères aisés pour décider si une fonction donnée est intégrable ou non. La notion de mesurabilité que nous allons introduire résout cette question : c'est une notion suffisamment faible pour être stable par les opérations courantes de l'analyse, et par là-même facile à prouver, et suffisamment proche de l'intégrabilité pour qu'il soit aisé de passer de l'une à l'autre.

**Remarque 6.37** *Notons cependant que dans le cadre de l'intégration sur  $\mathbb{R}^n$  dans lequel nous nous sommes placés, on ne peut construire de fonction non mesurable qu'en utilisant la version non dénombrable de l'axiome du choix. Il est donc tout à fait exclu que cette occurrence se présente de façon naturelle ; il en résulte la situation paradoxale suivante : la notion de mesurabilité est indispensable, mais dans la pratique il est inutile de s'en préoccuper, car elle est toujours vérifiée.*



### 6.3.1 Fonctions mesurables

**Définition 6.38** *Une fonction définie sur  $\Omega$  est mesurable, si elle est la limite presque partout d'une suite de fonctions de  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ .*

Indiquons tout de suite quelques propriétés élémentaires des fonctions mesurables, qui découlent directement de la définition.

#### Proposition 6.39

- (i) *L'ensemble des fonctions mesurables forme un espace vectoriel*
- (ii) *Si  $u$  et  $v$  sont mesurables alors  $u^+$ ,  $u^-$ ,  $|u|$ ,  $\sup(u, v)$ ,  $\inf(u, v)$ , et  $uv$  le sont également.*
- (iii) *Si  $u$  est mesurable et  $f$  continue, alors  $f \circ u$  est mesurable*



**Théorème 6.40 (de comparaison)** *La fonction  $u$  est intégrable si et seulement si elle est mesurable et  $\exists f \in L^1(\Omega)$  telle que  $|u| \leq f$  presque partout.*



**DÉMONSTRATION.** La condition nécessaire est évidente. Soit donc  $u$  mesurable sur  $\Omega$  et  $f$  intégrable telle que presque partout  $|u| \leq f$ . Séparant au besoin  $u$  en partie réelle et partie imaginaire, on peut la supposer à valeurs réelles. Considérons alors la suite  $u_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  convergeant presque partout vers  $u$  et posons  $v_j = \sup(\inf(u_j, f), -f)$ . Les fonctions  $v_j$  sont intégrables, convergent presque partout vers  $u$  et vérifient  $|v_j| \leq f$  ; la conclusion résulte alors du théorème de convergence dominée.

□



**Remarque 6.41** *Il n'est donc pas tout à fait exact de dire que pour l'intégrale de Lebesgue, contrairement à ce qui se passe pour l'intégrale de Riemann, l'intégrabilité de  $u$  et celle de  $|u|$  sont équivalentes. Ce qui est vrai c'est que si  $u$  est intégrable, alors  $|u|$  également (proposition 6.24), et que si  $|u|$  est intégrable et  $u$  est mesurable, alors  $u$  est intégrable.*

La proposition qui suit témoigne de la robustesse de la notion de mesurabilité, elle constitue une arme de choix lorsqu'il s'agit d'en apporter la preuve.

### Proposition 6.42



(i) *Si une suite de fonctions mesurables converge presque partout, alors la limite est mesurable.*

(ii) *L'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure d'une suite de fonctions mesurables sont mesurables*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $u_j$  une suite de fonctions mesurables convergeant vers  $u$  presque partout et  $\psi$  strictement positive, continue et intégrable sur  $\Omega$  (voir le lemme 6.43 ci dessous). Posons  $v = \psi u / (\psi + |u|)$  et  $v_j = \psi u_j / (\psi + |u_j|)$ . Presque partout sur  $\Omega$ , on aura  $v_j \rightarrow v$  et  $|v_j| \leq \psi$ . Les fonctions  $v_j$  sont mesurables d'après la proposition 6.39, elles sont intégrables d'après le théorème de comparaison ;  $v$  est donc intégrable d'après le théorème de convergence dominée.

▷ Il en résulte que  $v$  est mesurable, et comme  $|v| < \psi$  presque partout, que  $u = \psi v / (\psi - |v|)$  est mesurable.

▷ Posons maintenant  $w_j = \sup_{i=1,j} u_i$  ; la suite des  $w_j$  est mesurable en vertu de la proposition 6.39 ainsi que, d'après l'item précédent,  $\sup_{i \in \mathbb{N}} u_i = \lim_{j \rightarrow \infty} w_j$ .

□

**Lemme 6.43** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une fonction  $\psi$  strictement positive, continue et intégrable sur  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Notons  $K_j = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq j, d(x, \Omega^c) \geq 1/j\}$  ; la proposition D.11 nous autorise à considérer la fonction de troncature  $\psi_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , telle que  $0 \leq \psi_j \leq 1$ , et  $\psi_j|_{K_j} = 1$ . Choisissons alors une suite de réels  $\alpha_j$  tels que  $0 < \alpha_j < 2^{-j}$  et  $\int_{\Omega} \alpha_j \psi_j d\mu \leq 2^{-n}$ . Considérons la série  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j$ , la suite de ses sommes partielles étant croissante, elle converge en tout point de  $\Omega$ , soit vers une fonction  $\psi$ . Celle ci est positive, car sur chaque  $K_j$  la croissance est stricte au-delà d'un certain rang, et elle est intégrable en vertu du théorème de convergence monotone puisque  $\sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \alpha_j \psi_j d\mu \leq 1$ . Enfin la convergence est uniforme sur  $\Omega$  puisque  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$  converge.

□

Une caractérisation particulièrement significative des fonctions mesurables est donnée par le théorème suivant qui fait le lien entre continuité et mesurabilité. La notion de ‘presque continuité’ est analogue à la notion de ‘convergence presque uniforme’ :

**Définition 6.44** *On dit que la fonction  $u$  est presque continue sur  $\Omega$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \omega$  ouvert, tel que  $\mu(\omega) \leq \varepsilon$  et  $u$  est continue sur  $\Omega \setminus \omega$ .*

**Théorème 6.45 (Lusin)** *La fonction  $u$  est mesurable sur  $\Omega$  si et seulement si elle y est presque continue.*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $u$  est mesurable et, comme à la proposition 6.42, posons  $v = \psi u / (\psi + |u|)$ . La fonction  $v$  étant intégrable, selon le lemme d’approximation 6.25, elle est limite d’une suite de fonctions continues convergeant presque uniformément ; elle est donc presque continue, d’après le théorème 3.6.

▷ Réciproquement, si  $u$  est presque continue,  $\forall m$ ,  $\exists \omega_m$  ouvert, tel que  $\mu(\omega_m) \leq 2^{-m}$  et  $u$  est continue sur  $\Omega \setminus \omega_m$ . Notons  $u_m$  la fonction égale à  $u$  sur  $\Omega \setminus \omega_m$  et à 0 sur  $\omega_m$ . La suite  $u_m$  converge presque partout vers  $u$ , montrons qu’elle est formée de fonctions mesurables, la conclusion en résultera en vertu de la proposition 6.42.

▷ Pour  $m$  fixé, posons  $K_j = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq j, d(x, \Omega^c) \geq 1/j\}$ , et notons  $\psi_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  la fonction de troncature dont la proposition D.11 nous assure l’existence, elle vérifie  $0 \leq \psi_j \leq 1$ , et  $\psi_j|_{K_j} = 1$ . Notons alors

$$v_j(x) = \psi_j(x) u_m(x) \frac{d(x, \omega_j)}{1/j + d(x, \omega_j)},$$

la suite  $v_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  converge presque partout vers  $u_m$ , qui par définition est donc mesurable. □

### 6.3.2 Ensembles mesurables

Nous pouvons maintenant en revenir à une question évoquée plus haut : jusqu’où peut-on généraliser la notion de volume ?

**Définition 6.46** *Une partie  $A$  de  $\Omega$  est mesurable si sa fonction caractéristique est mesurable. Si de plus  $\chi_A$  est intégrable, la mesure de  $A$  est donnée par  $\mu(A) = \int_{\Omega} \chi_A d\mu$ .*

Bien entendu, il faut vérifier que cette définition prolonge celle donnée en 6.9 pour des ouverts.

**Proposition 6.47** *Si  $\omega$  est un ouvert, il est mesurable et sa mesure au sens de la définition qui précède coïncide avec celle de la définition 6.9.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $K_j = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq j, d(x, \Omega^c) \geq 1/j\}$  ; et considérons la fonction de troncature  $\psi_j \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , telle que  $0 \leq \psi_j \leq 1$ , et  $\psi_j|_{K_j} = 1$ , (voir la proposition D.11). Nous poserons  $v_j = \sup(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j)$ , c'est une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{D}^0(\omega)$  qui converge partout vers  $\chi_\omega$ .

▷ Supposons  $\chi_\omega$  intégrable, notons  $\mu(\omega)$  la mesure de  $\omega$  au sens de la définition 6.9, on aura  $\int_\Omega u_j d\mu \leq \mu(\omega) \leq \int_\Omega \chi_\omega d\mu$ , mais le théorème de convergence dominée nous assure que  $\int_\Omega u_j d\mu \rightarrow \int_\Omega \chi_\omega d\mu$  ; la conclusion en résulte. □



**Proposition 6.48** *Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable, l'union et l'intersection dénombrables d'ensembles mesurables sont mesurables.*

DÉMONSTRATION. Si les  $A_j$  forment une suite de parties de  $\Omega$ , on aura

$$\begin{aligned}\chi_{\Omega \setminus A} &= 1 - \chi_A, \\ \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{i=1, j} \chi_{A_i} \\ \chi_{\bigcap_{j=1}^\infty A_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{i=1, j} \chi_{A_i}\end{aligned}$$

Les propositions 6.39 et 6.42 permettent alors de conclure. □

**Remarque 6.49** *Il en résulte en particulier, selon la proposition 6.39, que si  $u$  est mesurable, ainsi que  $A$ , alors  $\chi_A u$  est mesurable ; si de plus  $u$  est intégrable alors  $\chi_A u$  est intégrable, d'après le théorème 6.40. On notera*

$$\int_A u d\mu = \int \chi_A u d\mu$$

Nous terminerons en précisant le lien entre ensembles et fonctions mesurables.



**Théorème 6.50** *Si la fonction  $u$  est à valeurs réelles sur  $\Omega$ , alors les deux propositions suivantes sont équivalentes*

- (i)  $u$  est mesurable
- (ii)  $\forall t \in \mathbb{R}, A_t = u^{-1}(]t, +\infty[)$  est mesurable.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $u$  mesurable, fixons  $t$  et posons  $u_j = j(\inf(u, t + 1/j) - \inf(u, t))$ . En vertu de la proposition 6.39,  $u_j$  est mesurable ainsi, d'après la proposition 6.42, que  $\chi_{A_t} = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$ .

▷ Réciproquement supposons que  $u$  vérifie l'item (ii). Fixons  $m$  et notons  $a_k$  les points réalisant la subdivision de  $] -m, +m[$  en  $2m^2$  intervalles de longueur  $1/m$ . Nous poserons  $B_k = u^{-1}(]a_k, b_k[)$  et  $v_m = \sum_{k=1}^{2m^2} b_k \chi_{B_k}$  ; cette fonction est mesurable puisque  $B_k = A_{a_k} \setminus A_{b_k}$ . Pour  $u(x) \leq m$ , on aura  $|v_m(x) - u(x)| \leq 1/m$ , ce qui montre que  $v_m \rightarrow u$ , et par conséquent la mesurabilité de  $u$ . □

**Théorème 6.51 (Egorov)** *Si la suite de fonctions mesurables  $u_j$  converge presque partout vers  $u$  sur  $\Omega$ , supposé de mesure finie. Alors  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists A$  partie mesurable de  $\omega$ , telle que  $\mu(A) \leq \varepsilon$  et  $u_j$  converge uniformément vers  $u$  sur  $\Omega \setminus A$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons

$$A_{m,j} = \bigcup_{k \geq j} \{x \in \Omega \mid |u_k(x) - u(x)| > 1/m\}$$

$\forall m \geq 1$ , on aura  $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_{A_{m,j}} = 0$ , presque partout, et comme  $\mu(\Omega) < +\infty$ , d'après le théorème de convergence dominée,  $\mu(A_{m,j}) \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $\forall m, \exists j_m$  tel que  $\mu(A_{m,j_m}) < 2^{-m}$ .

▷ Si on note alors  $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_{m,j_m}$ , on aura d'après le théorème de convergence monotone,  $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{m \geq n} A_{m,j_m}\right) \leq \sum_{m \geq n} \mu(A_{m,j_m}) \leq 2^{-n}$ . Si nous fixons maintenant  $n$ , et si nous choisissons  $m > n$ , pour  $k > j_m$ , et  $x \in \Omega \setminus B_n$ , nous aurons  $|u_k(x) - u(x)| \leq 1/m$ ; c'est dire que  $u_k$  converge presque uniformément vers  $u$ . □

## 6.4 Le cas particulier de la mesure de Lebesgue

### 6.4.1 Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

La construction même de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  nous montre qu'elle coïncide avec l'intégrale de Riemann dans le cas des fonctions de  $\mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ , ceci est important du point de vue pratique car nous avons acquis une grande habitude des calculs concrets mettant en œuvre l'intégrale de Riemann. L'indication en reste cependant plutôt limitée, et nous souhaiterions étendre cette comparaison à des fonctions moins régulières, ne serait-ce que constantes par morceaux.

#### Proposition 6.52

(i) *Sur un intervalle fini, une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Lebesgue, et les intégrales coïncident.* ♥

(ii) *Sur un intervalle fini, une fonction bornée est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est continue presque partout.*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $f$  bornée et intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $[a, b]$ . Notons  $S_k$  une suite de subdivisions de  $[a, b]$  dont le pas tend vers 0, ainsi que

$$\varphi_k = \sum_k \inf_{[s_{i-1}^k, s_i^k[} f \chi_{[s_{i-1}^k, s_i^k[} \text{ et } \Phi_k = \sum_k \sup_{[s_{i-1}^k, s_i^k[} f \chi_{[s_{i-1}^k, s_i^k[}$$

les fonctions  $\varphi_k$  et  $\Phi_k$  sont mesurables, uniformément bornées, vérifient  $\varphi_k \leq f \leq \Phi_k$ . et  $\int_a^b \varphi_k dx = \sigma_{S_k}(f)$  et  $\int_a^b \Phi_k dx = \Sigma_{S_k}(f)$ . Si la suite  $S_k$  est choisie telle que  $S_k \subset S_{k+1}, \forall k$ ,

alors les suites  $\varphi_k$  et  $\Phi_k$  sont monotones, elles convergent donc, soit respectivement vers  $\varphi$  et  $\Phi$ ; le théorème de convergence dominée montre que  $\varphi$  et  $\Phi$  sont intégrables et que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{S_k}(f) = \int_a^b \varphi \, dx \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_{S_k}(f) = \int_a^b \Phi \, dx.$$

Ces deux limites sont égales à  $I(f)$ , en vertu du lemme E.4, puisque  $f$  est intégrable au sens de Riemann; on aura par conséquent  $\int_a^b (\Phi - \varphi) \, dx = 0$ , mais comme  $\varphi \leq \Phi$ , il en résulte que  $\varphi = \Phi = f$  presque partout. La fonction  $f$  est donc intégrable et  $\int f \, dx = I(f)$ .

▷ Montrons maintenant que, sous les mêmes hypothèses,  $f$  est continue presque partout. Notons  $Z$  un ensemble de mesure nulle, en dehors duquel  $\varphi = f = \Phi$ , et supposons que  $f$  ne soit pas continue en  $x$ . Alors,  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $\forall \eta > 0$ ,  $\exists y$  vérifiant  $|x - y| < \eta$  et  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ . Si  $x$  n'est confondu avec aucun des  $s_i^k$ , alors  $\forall k$ ,  $|\Phi_k(x) - \varphi_k(x)| > \varepsilon$ , et par conséquent  $|\Phi(x) - \varphi(x)| > \varepsilon$ , soit  $x \in Z$ . Comme les  $s_i^k$  sont en quantité dénombrable, ils forment un ensemble de mesure nulle, et la conclusion en résulte.

▷ Réciproquement, supposons  $f$  bornée et continue presque partout. Soit alors  $S_k$  une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0. Au voisinage d'un point  $x$  où  $f$  est continue, on aura  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = f(x)$ ; il en résulte que  $\varphi_k$  et  $\Phi_k$  convergent presque partout vers  $f$ , et d'après le théorème de convergence dominée que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_k \, dx = \int_a^b f \, dx$ ; c'est dire, d'après le lemme E.4 que  $f$  est intégrable au sens de Riemann avec  $I(f) = \int_a^b f \, dx$ .

□

## 6.4.2 La formule de changement de variables

### Mesure image

**Proposition 6.53** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , si  $\Phi$  est un homéomorphisme de l'ouvert  $\Omega$  sur l'ouvert  $\Omega'$ , alors l'application*

$$v \rightarrow \langle \mu, v \circ \Phi \rangle : \mathcal{D}^0(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}$$

*est une mesure de Radon positive notée  $\Phi(\mu)$  et appelée mesure image de  $\mu$  par  $\Phi$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, tout d'abord, si  $v \in \mathcal{D}^0(\Omega')$ , alors  $v \circ \Phi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , et si de plus,  $v \leq v'$ , alors  $v \circ \Phi \leq v' \circ \Phi$ .

□



**Remarque 6.54** *Il ne faut pas se leurrer sur l'utilité de ce résultat; bien plus que l'existence de la mesure image, c'est son identification qui est intéressante (et généralement difficile). Dans le cas (facile) de la mesure de Dirac, on aura par exemple*

$$\langle \delta, v \circ \Phi \rangle = v(\Phi(0)) = \langle \delta_{\Phi(0)}, v \rangle$$

*c'est dire que  $\delta_{\Phi(0)} = \Phi(\delta)$ .*

Dans la suite nous nous intéresserons exclusivement à la mesure de Lebesgue, et nous nous limiterons à des changements de variables  $\Psi$  qui soient des difféomorphismes, c'est-à-dire des fonctions inversibles qui soient continûment dérivables ainsi que leur inverse.

### Le cas monodimensionnel

**Théorème 6.55 (Lebesgue)** Si  $u \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\forall a$ , la fonction

$$t \rightarrow \int_a^t u(x) dx$$

est presque partout dérivable, de dérivée (presque partout) égale à  $u$ .

Il s'agit là d'un théorème important mais difficile, dont nous n'aurons ici besoin que dans le cas où  $u \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$  ; nous nous limiterons donc à la démonstration du lemme suivant :

**Lemme 6.56** Si  $u \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , alors  $\forall a$ , la fonction

$$t \rightarrow \int_a^t u(x) dx$$

est dérivable, et sa dérivée est égale à  $u$ .

DÉMONSTRATION. On aura  $u(t) = u(x) + u(t) - u(x)$ , et par conséquent

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} u(t) dt = u(x) + \int_x^{x+h} \frac{u(t) - u(x)}{h} dt$$

Comme  $u$  est uniformément continue sur tout voisinage borné de  $x$ , il en résulte que  $\forall \varepsilon, \exists h_0$ , tel que  $|t - x| < h_0 \implies |u(t) - u(x)| < \varepsilon$ , et par conséquent, pour  $h$  assez petit, on aura

$$\left| \int_x^{x+h} \frac{u(t) - u(x)}{h} dt \right| < \varepsilon$$

Il en résulte que  $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} u(t) dt \rightarrow u(x)$  quand  $h \rightarrow 0$  ; le résultat annoncé en découle. □

**Proposition 6.57** Si  $\varphi$  est un difféomorphisme  $\Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}$  et  $v \in \mathcal{D}^0(\Omega')$ , alors

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\Omega} v \circ \varphi(x) |\varphi'(x)| dx$$

C'est dire que  $\varphi^{-1}(dx') = |\varphi'(x)| dx$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par remarquer que  $\varphi'(x) \neq 0$  en tout point de  $\Omega$  ; par continuité on peut donc trouver un voisinage de chaque point  $x$  où  $\varphi'$  est de signe constant (et  $|\varphi'|$  est minoré par  $|\varphi'(x)|/2$ ). Par compacité du support de  $v$ , ce dernier pourra être recouvert par un nombre fini de tels intervalles. Considérons alors une partition de l'unité  $\psi_i$  subordonnée à ce recouvrement, on aura  $v \circ \varphi = \sum_i v_i \circ \varphi$  avec  $v_i = \psi_i v$ . Par linéarité, il en résulte qu'on peut se contenter de démontrer la proposition pour une fonction  $\varphi$  de signe constant sur  $\Omega$ .

▷ Pour  $a$  assez petit et  $b$  assez grand, dans le cas où  $\varphi$  est croissante, par exemple, on aura

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} v(x') dx' \text{ et } \int_{\Omega} v \circ \varphi(x) |\varphi'(x)| dx = \int_a^b v \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx$$

Posons alors,

$$f(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} v(x') dx' \text{ et } g(t) = \int_a^t v \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx$$

on aura  $f'(t) = \varphi'(t) v \circ \varphi(t) = g'(t)$ , et  $f(a) = g(a) = 0$  ; il en résulte que  $f(t) = g(t) \forall t$ , et par conséquent  $f(b) = g(b)$ .

□

### Le cas multidimensionnel

**Proposition 6.58** Si  $\Phi$  est un difféomorphisme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathcal{D}^0(\Omega')$ , alors

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\Omega} v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| dx$$

où  $D_x(\Phi)$  est la matrice jacobienne de  $\Phi$  au point  $x$ . C'est encore dire que  $\Phi^{-1}(dx') = |\det D_x(\Phi)| dx$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $\Phi_1$  la première composante de  $\Phi$ , comme  $\Phi$  est un difféomorphisme, en tout point de  $\Omega$ , l'une des dérivées partielles de  $\Phi_1$  n'est pas nulle ; par partition de l'unité et permutation éventuelle des coordonnées, nous pouvons toujours nous ramener au cas où  $\partial\Phi_1/\partial x_1$  est de signe constant et minoré en module par un nombre strictement positif sur  $\Omega$ . Il en résulte alors, en vertu du théorème des fonctions implicites que la fonction  $\lambda_y(x_1) = \Phi_1(x_1, y)$  est inversible.

▷ On opère ici par récurrence en admettant que la formule est valable sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Notons

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta \end{pmatrix}$$

posons alors  $\xi = \varphi(x)$  avec  $\xi_1 = \lambda_y(x_1)$ , et  $\eta = y$  ; posons enfin  $x' = \phi(\xi)$ , avec  $x'_1 = \xi_1$ , et  $y' = \theta_{\xi_1}(\eta)$ , où  $x'_k = \Phi_k(\lambda_y^{-1}(\xi_1), \eta)$ ,  $k = 2, n$ . On aura

$$\Phi = \phi \circ \varphi$$

▷ le théorème de Fubini nous permet d'écrire

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}^n} v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} dx'_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x'_1, y') dy'$$

. Mais en vertu de l'hypothèse de récurrence, on aura

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x'_1, y') dy' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x'_1, \theta(\eta)) |\det D_\eta(\theta)| d\eta$$

soit

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}^n} v \circ \phi(\xi) |\det D_\xi(\phi)| d\xi.$$

puisque

$$D_\xi(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & D_\eta(\theta) \end{pmatrix}$$

▷ Si nous posons maintenant  $u(\xi) = v \circ \phi(\xi) |\det D_\xi(\phi)|$ , nous aurons

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\eta \int_{\mathbb{R}} u(\xi_1, \eta) d\xi_1$$

Si on applique alors le résultat obtenu en monodimensionnel, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} u(\xi_1, \eta) d\xi_1 = \int_{\mathbb{R}} u(\lambda_y(x_1), \eta) |\lambda'_y(x_1)| dx_1,$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u \circ \varphi(x) |\det D_x(\varphi)| dx$$

puisque

$$D_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda'_y(x_1) & \cdots \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

▷ Finalement donc, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} v(x') dx' &= \int_{\mathbb{R}^n} v \circ \phi \circ \varphi(x) |\det D_{\varphi(x)}(\phi)| |\det D_x(\varphi)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| dx \end{aligned}$$

puisque  $D_x(\Phi) = D_{\varphi(x)}(\phi) \circ D_x(\varphi)$ .

□



### Prolongement de la mesure image

Nous avons maintenant identifié la mesure image, il nous reste à vérifier que la formule que nous avons obtenue pour les fonctions continues à support compact se prolonge aux fonctions intégrables.

**Lemme 6.59** *Si  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  est de mesure nulle, alors il en est de même de  $\Phi(\omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert, sa mesure est donnée par

$$dx(\mathcal{O}) = \sup_{u \in \mathcal{D}^0(\mathcal{O}), 0 \leq u \leq 1} \int_{\mathcal{O}} u(x) dx.$$

En vertu de la formule de changement de variable, puisque  $v \circ \Phi$  décrit l'ensemble des fonctions positives majorées par 1 dans  $\mathcal{D}^0(\mathcal{O})$  dès que  $v$  en fait autant, la mesure de  $\mathcal{O}$  est égale à celle de son image  $\mathcal{O}'$  par  $\Phi$ . Le résultat annoncé en découle, puisque les ensembles négligeables sont ceux inclus dans des ouverts de mesure arbitrairement petite..

□

**Théorème 6.60** *Si  $\Phi$  est un difféomorphisme  $\Omega \rightarrow \Omega'$  et si  $v$  est intégrable sur  $\Omega'$ , alors il en est de même pour  $v \circ \Phi$  sur  $\Omega$ , et*

$$\int_{\Omega'} v(x') dx' = \int_{\Omega} v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| dx.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Nous savons que  $v$  est la limite dans  $L^1(\Omega')$ , et donc presque partout, d'une suite  $v_n$  de fonctions de  $\mathcal{D}^0(\Omega')$ , pour lesquelles nous venons de démontrer que

$$\int_{\Omega'} v_n(x') dx' = \int_{\Omega} v_n \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| dx.$$

Il en résulte que la suite  $v_n \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)|$  est de Cauchy dans  $L^1(\Omega)$ , et par conséquent d'après le théorème de Fischer qu'elle y converge, soit vers  $u(x)$ .

▷ Mais par ailleurs  $v_n \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| \rightarrow v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)|$  presque partout. Notons en effet  $\omega'$  l'ensemble des points de  $\Omega'$  où  $v_n \not\rightarrow v$ , et  $\omega$  l'ensemble des points de  $\Omega$  où  $v_n \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)| \not\rightarrow v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)|$ . Il est clair que  $\Phi^{-1}(\omega'^C) \subset \omega^C$ , soit comme  $\Phi$  est une bijection,  $\omega \subset \Phi^{-1}(\omega')$ . Comme  $\omega'$  est de mesure nulle, il résulte du lemme précédent que  $\omega$  est également de mesure nulle.

▷ Nous avons démontré que  $u(x) = v \circ \Phi(x) |\det D_x(\Phi)|$  presque partout, le résultat en découle.

□

## 6.5 Intégration sur un espace produit

Il s'agit ici de l'étude des intégrales itérées. Malgré le caractère naturel de la question : intégrer dans un domaine du plan revient-il à intégrer d'abord dans la direction  $x_1$  puis dans la direction  $x_2$  ? c'est en fait une question délicate. En effet du point de vue de l'intégrale interne, il ne s'agit plus d'intégrer une fonction  $x \rightarrow u(x)$  à valeurs réelles ou complexes, mais bien une fonction  $x \rightarrow w(x, \cdot)$  à valeurs dans un espace de fonctions.

Nous commencerons par étudier comment on peut associer une mesure, dite 'produit' à un couple de deux mesures de Radon, puis nous donnerons des conditions pour que l'intégration vis-à-vis de cette mesure produit se réduise à des intégrales itérées. Dans la suite de ce paragraphe,  $\mu$  et  $\nu$  seront deux mesures de Radon, respectivement sur  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Nous noterons couramment  $w^x(y)$  la fonction  $y \rightarrow w(x, y)$ .

### 6.5.1 Mesure produit

**Définition 6.61** Si  $u \in \mathcal{D}^0(X)$  et  $v \in \mathcal{D}^0(Y)$  on note  $u \otimes v$  la fonction de  $\mathcal{D}^0(X \times Y)$  définie par

$$(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$$

et  $\mathcal{D}^0(X) \otimes \mathcal{D}^0(Y)$  l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des  $u \otimes v$ .

Cette classe de fonctions, à variables séparées, semble plutôt restreinte, au sein des fonctions de deux variables, nous prouverons cependant le théorème suivant :

**Théorème 6.62** Si  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures de Radon, respectivement définies sur  $X$  et  $Y$ , il existe une et une seule mesure de Radon  $\lambda$  sur  $X \times Y$  vérifiant

$$\langle \lambda, u \otimes v \rangle = \langle \mu, u \rangle \langle \nu, v \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}^0(X), \quad \forall v \in \mathcal{D}^0(Y). \quad (6.4)$$

Cette mesure, notée  $\mu \otimes \nu$ , est appelée mesure produit de  $\mu$  et  $\nu$ , le théorème nous indique qu'elle est définie de façon unique par son action sur les seules fonctions à variables séparées.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $w \in \mathcal{D}^0(X \times Y)$ , posons  $f(x) = \langle \nu, w^x \rangle$ , on aura  $f \in \mathcal{D}^0(X)$  en vertu du corollaire 6.34 du théorème de convergence dominée. On peut donc calculer  $\langle \mu, f \rangle$  et il est clair que la forme linéaire  $\lambda$  sur  $\mathcal{D}^0(X \times Y)$  définie par  $\langle \lambda, w \rangle = \langle \mu, f \rangle$  vérifie la formule (6.4).

▷ Cette forme linéaire est continue, on a en effet

$$|f(x)| \leq D \|w^x\|_{L^\infty(Y)} \leq D \|w\|_{L^\infty(X \times Y)}$$

et

$$|\langle \lambda, w \rangle| = |\langle \mu, f \rangle| \leq C \|f\|_{L^\infty(X)} \leq C D \|w\|_{L^\infty(X \times Y)}$$

Il en résulte que  $\lambda$  est une mesure de Radon.

▷ La partie délicate est l'unicité. Le lemme 6.63, ci-dessous nous montre que si  $w \in \mathcal{D}^0(X \times Y)$  et  $\varepsilon > 0$  sont donnés, il existe  $\ell$ ,  $u_k \in \mathcal{D}^0(X)$  et  $v_k \in \mathcal{D}^0(Y)$  tels que  $\|w - f\|_{L^\infty(X \times Y)} \leq \varepsilon$ , où  $f = \sum_{k=1, \ell} u_k \otimes v_k$ . Si  $\lambda$  et  $\lambda'$  vérifient (6.4), on aura

$$\langle \lambda, f \rangle = \langle \lambda', f \rangle = \sum_{k=1, \ell} \langle \mu, u_k \rangle \langle \nu, v_k \rangle$$

et par conséquent

$$\forall w \in \mathcal{D}^0(X \times Y), \forall \varepsilon > 0, |\langle \lambda - \lambda', w \rangle| = |\langle \lambda - \lambda', w - f \rangle| \leq C \varepsilon$$

soit  $\langle \lambda, w \rangle = \langle \lambda', w \rangle$ .

□

**Lemme 6.63** Soient  $A$  et  $B$  respectivement deux compacts de  $X$  et  $Y$ , toute fonction continue sur  $X \times Y$ , à support dans  $A \times B$ , est limite uniforme de fonctions de  $\mathcal{D}^0(X) \otimes \mathcal{D}^0(Y)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varepsilon > 0$  et  $w \in \mathcal{C}_{A \times B}^0(X \times Y)$ , par continuité uniforme,  $\exists \delta > 0$  tel que

$$|x - x'| + |y - y'| \leq \delta \Rightarrow |w(x, y) - w(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Par compacité, il existe des suites finies  $x_j$ ,  $j = 1, m$  et  $y_k$ ,  $k = 1, \ell$  telles que  $A \subset \bigcup_{j=1}^m B_\delta(x_j)$  et  $B \subset \bigcup_{k=1}^\ell B_\delta(y_k)$ .

▷ Considérons alors deux partitions de l'unité (voir la proposition D.11)  $\varphi_j$  et  $\psi_k$  respectivement subordonnées aux familles  $B_\delta(x_j)$ ,  $j = 1, m$  et  $B_\delta(y_k)$ ,  $k = 1, \ell$ . Posons alors

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^\ell w(x_j, y_k) \varphi_j(x) \psi_k(y)$$

Dès que  $\varphi_j(x) \psi_k(y) \neq 0$ , on a  $|w(x, y) - w(x_j, y_k)| \leq \varepsilon$ , et par conséquent

$$|w(x, y) - v(x, y)| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^\ell \varphi_j(x) \psi_k(y) \leq \varepsilon.$$

C'est dire que  $\|w - v\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ , d'où le résultat.

□

### 6.5.2 Théorème de Fubini

La mesure produit étant définie, il s'agit maintenant de calculer l'intégrale par rapport à cette mesure produit.

**Théorème 6.64 (Fubini)** *Si  $w \in L^1(\mu \otimes \nu)$ , alors*

- (i) *La fonction  $w^x : y \rightarrow w(x, y) \in L^1(\nu)$  pour presque tout  $x$ .*
- (ii) *La fonction*

$$f(x) = \int_Y w^x(y) d\nu_y,$$

*définie presque partout est intégrable vis-à-vis de  $\mu$ , et*

$$\int_{X \times Y} w d(\mu \otimes \nu) = \int_X f d\mu$$

Commençons par une situation particulière dans laquelle le théorème est facile à démontrer.

**Lemme 6.65** *Le théorème de Fubini est vrai sous l'hypothèse supplémentaire que  $w$  est limite croissante de fonctions  $w_j$  réelles satisfaisant elles-mêmes les conclusions (i) et (ii) du théorème de Fubini.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $S_j$  une partie négligeable de  $X$  telle que  $w_j^x$  soit intégrable par rapport à  $\nu$  pour tout  $x \in X \setminus S_j$ . L'ensemble  $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$  est alors négligeable en vertu de la proposition 6.48. Pour  $x \in X \setminus S$  posons

$$f_j(x) = \int_Y w_j^x(y) d\nu_y,$$

il s'agit d'une suite croissante vérifiant

$$\int_X f_j d\mu = \int_{X \times Y} w_j d(\mu \otimes \nu) \leq \int_{X \times Y} w d(\mu \otimes \nu)$$

Le théorème de convergence monotone implique alors l'existence d'une fonction  $g$  intégrable par rapport à  $\mu$  et d'une partie négligeable  $R$  de  $X$ , tels que  $f_j \rightarrow g$  sur  $X \setminus R$  et

$$\int_X f_j d\mu \rightarrow \int_X g d\mu.$$

▷ Sur  $X \setminus R$ , on aura

$$\int_Y w_j^x(y) d\nu_y = f_j(x) \leq g(x),$$

une nouvelle application du théorème de convergence monotone nous montre que  $w^x$  est intégrable par rapport à  $\nu$  presque partout vis-à-vis de  $x$  et que

$$\int_Y w_j^x(y) d\nu_y \rightarrow \int_Y w^x d\nu.$$

C'est dire en fait que

$$g(x) = \int_Y w^x(y) d\nu_y = f(x).$$

▷ Comme la suite  $w_j$  est croissante et que

$$\int_{X \times Y} w_j d(\mu \otimes \nu) \leq \int_{X \times Y} w d(\mu \otimes \nu),$$

par le théorème de convergence monotone, on aura

$$\int_{X \times Y} w_j d(\mu \otimes \nu) \rightarrow \int_{X \times Y} w d(\mu \otimes \nu)$$

et comme

$$\int_{X \times Y} w_j d(\mu \otimes \nu) = \int_X f_j d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

il en résulte que

$$\int_{X \times Y} w d(\mu \otimes \nu) = \int_X f d\mu.$$

□

#### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FUBINI

▷ Soit  $w$  intégrable par rapport à la mesure  $\mu \otimes \nu$ , quitte à séparer les parties réelles et imaginaires, on peut la supposer à valeurs réelles. Par définition  $w$  est limite presque partout d'une suite  $w_j \in \mathcal{D}^0(X \times Y)$  de Cauchy dans  $\mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ . Grâce à l'extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut toujours supposer que  $\|w_{k+1} - w_k\|_{L^1(\mu \otimes \nu)} \leq 2^{-k}$ ; on posera  $f_1 = w_1$  et  $f_{k+1} = w_{k+1} - w_k$ . On aura alors presque partout

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1(\mu \otimes \nu)} < +\infty,$$

ce qui implique la convergence presque partout des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^+\|_{L^1(\mu \otimes \nu)} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^-\|_{L^1(\mu \otimes \nu)}$$

. Le théorème de convergence monotone implique alors l'intégrabilité de

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^+ \text{ et } v = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^-;$$

on aura de plus  $w = u - v$  presque partout.

▷ Posons alors  $u_j = \sum_{k=1}^j f_k^+ \in \mathcal{D}^0(X \times Y)$ , la définition même de la mesure produit nous prouve que les  $u_j$  vérifient les conclusions du théorème de Fubini et le lemme 6.65 nous montre que  $u$  lui-même vérifie les conclusions du théorème de Fubini, il en est de même pour  $v$ .

▷ Il ne reste plus qu'à remarquer qu'en vertu du lemme 6.67 ci-dessous, pour presque tout  $x$ ,  $w^x(y) = u^x(y) - v^x(y)$  presque partout vis-à-vis de  $y$ ; ; la conclusion en résulte.

□

**Lemme 6.66** *Le théorème de Fubini est vrai si  $w$  est la fonction caractéristique d'un ouvert  $\omega$  de  $X \times Y$  de mesure finie.*

DÉMONSTRATION. On a vu à la proposition 6.47 que la fonction caractéristique d'un ouvert est limite croissante d'une suite de fonctions de  $\mathcal{D}^0(X \times Y)$ , ces fonctions satisfont les conclusions du théorème de Fubini, en vertu du théorème 6.62. Si on suppose alors  $\omega$  de mesure finie, la proposition 6.47 nous montre que  $\chi_\omega$  est intégrable, le lemme précédent permet alors de conclure. □

**Lemme 6.67** *Soit  $S$  négligeable dans  $X \times Y$ , pour presque tout  $x \in X$ , la coupe*

$$S^x = \{y \in Y \mid (x, y) \in S\}$$

*est négligeable.*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $S$  est négligeable, alors, par définition, il existe une suite  $\omega_n$ , qu'on peut choisir décroissante, d'ouverts contenant  $S$ , tels que  $\mu \otimes \nu(\omega_n) \rightarrow 0$ . On aura  $S \subset A = \bigcap_n \omega_n$ . Notons  $\chi_n$  la fonction caractéristique de  $\omega_n$ , et  $\chi$  celle de  $A$ . Le théorème de convergence monotone nous montre que

$$\int \chi d(\mu \otimes \nu) = \lim_n \int \chi_n d(\mu \otimes \nu) = \lim_n \mu \otimes \nu(\omega_n) = 0.$$

▷ Considérons maintenant la suite des  $-\chi_n$ ; en vertu du lemme 6.66, elle est croissante et formée de fonctions vérifiant les conclusions du théorème de Fubini, sa limite  $-\chi$  les vérifiera donc également. C'est dire que  $\chi^x$  est intégrable par rapport à  $\nu$  pour presque tout  $x$  et que  $x \rightarrow \int \chi^x(y) d\mu_y$  est intégrable, avec

$$0 = \int \chi d(\mu \otimes \nu) = \int d\mu \int \chi^x(y) d\mu_y.$$

Il en résulte, puisque  $\chi^x$ , et donc  $\int \chi^x(y) d\mu_y$  est positive, que cette fonction est nulle  $\mu$  presque partout, et par conséquent que  $\chi^x(y)$  est nulle  $\nu$  presque partout, ce qui prouve bien que  $S^x$  est de mesure nulle pour presque tout  $x$ . □

**Remarque 6.68** *Le théorème de Fubini repose de façon essentielle sur l'hypothèse d'intégrabilité pour la mesure produit. Un exemple simple nous permettra de réaliser à quels risques on s'expose faute d'avoir pris la précaution de le vérifier. Considérons la fonction  $w$  définie sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  par  $w(x, y) = y^{-2}$  pour  $0 < x < y < 1$  et  $w(x, y) = -x^{-2}$  pour  $0 < y < x < 1$ . On aura* ◇

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 w(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left( \int_0^y y^{-2} dx - \int_y^1 x^{-2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{y} + \left(1 - \frac{1}{y}\right) \right) dy = 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 w(x, y) dy \right) dx &= \int_0^1 \left( - \int_0^x x^{-2} dy + \int_x^1 y^{-2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right) dx = -1. \end{aligned}$$

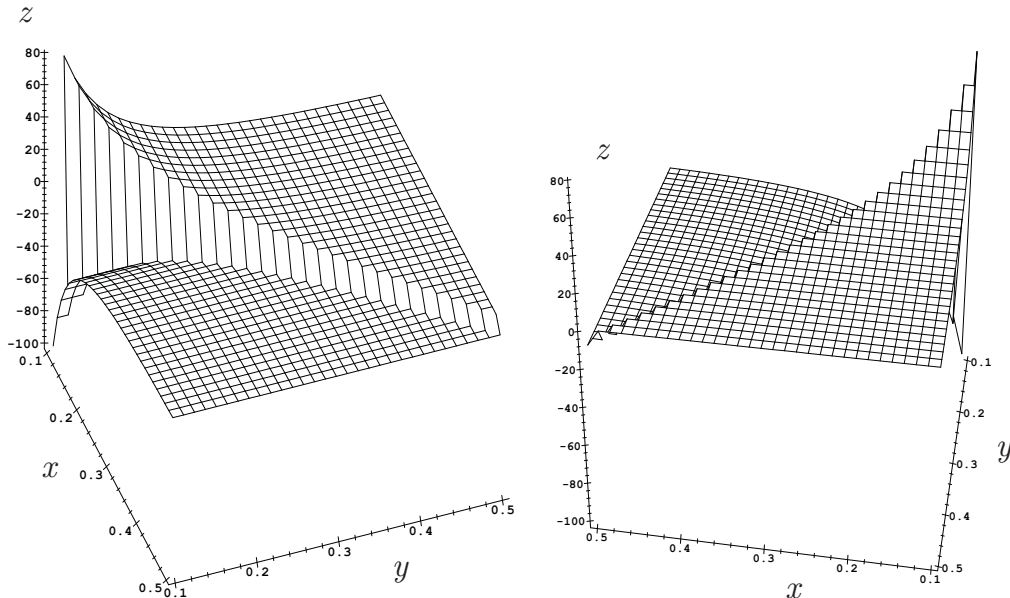


FIG. 6.7 – La fonction  $w$

Le théorème qui suit constitue une condition suffisante simple permettant d'assurer cette intégrabilité, et par là même d'éviter les phénomènes de compensation qui ont conduit à la situation détestable précédemment évoquée.

**Théorème 6.69 (Tonelli)** *Si  $w$  est mesurable sur  $X \times Y$ , si pour presque tout  $x \in X$ , la fonction  $|w^x| : y \rightarrow |w(x, y)|$  est intégrable par rapport à  $\nu$ , et si  $h(x) = \int_Y |w^x| d\nu$  est intégrable par rapport à  $\mu$ , alors  $w$  est intégrable par rapport à  $\mu \otimes \nu$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $g_j$  la suite croissante de fonctions de  $\mathcal{D}^0(X \times Y)$  convergeant partout vers 1, dont l'existence est assurée par la proposition 6.47. Posons  $v_j = g_j \inf(|w|, j)$ ; la mesurabilité de  $v_j$  découle de la proposition 6.39 et son intégrabilité du théorème 6.40.

▷ Le théorème de Fubini s'applique à  $v_j$ , et on aura

$$\int_{X \times Y} v_j d(\mu \otimes \nu) = \int_X d\mu \int_Y v_j^x d\nu \leq \int_X d\mu \int_Y |w^x| d\nu.$$

Le théorème de convergence monotone nous assure alors que  $|w| = \lim v_j$  est intégrable, et par conséquent  $w$  en vertu du théorème de comparaison 6.40

□

**Remarque 6.70** *En fait le théorème de Tonelli constitue un critère d'intégrabilité par rapport à la mesure produit. En effet si  $w$  est intégrable par rapport à  $\mu \otimes \nu$ , alors il en est de même de  $|w|$ , selon la proposition 6.24; le théorème de Fubini nous montre alors que  $|w^x(y)|$  est  $\nu$ -intégrable pour presque tout  $x$ , et que  $h(x)$  est  $\mu$ -intégrable.*

## 6.6 Le produit de convolution

L'opération que nous allons étudier dans ce paragraphe revêt une importance particulière, tant par l'utilisation qui en est faite en analyse où elle est à la source de méthodes d'approximation extrêmement utiles, mais aussi en raison de son rôle en physique. On peut d'ailleurs soutenir que l'un des intérêts majeurs de la théorie des distributions, que nous allons étudier par la suite, consiste à étendre à des situations beaucoup plus générales le domaine d'utilisation de la convolution; elle se révélera alors comme apte, sinon à résoudre dans tous les cas, du moins à fournir une représentation de la solution de toutes les équations aux dérivées partielles linéaires. Nous ne devrions donc plus être surpris de son apparition récurrente dans la plupart des domaines de la physique.

La principale propriété sur laquelle se fonde la convolution est *l'invariance par translation*, tant du domaine d'intégration que de la mesure sur ce domaine; dans ce paragraphe nous nous restreindrons donc à intégrer sur  $\mathbb{R}^n$  vis-à-vis de la mesure de Lebesgue.

**Lemme 6.71** *Si  $u$  et  $v$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $u(x-y)v(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , et  $y \rightarrow u(x-y)v(y)$  l'est également sur  $\mathbb{R}^n$  pour presque tout  $x$ .*

DÉMONSTRATION. On utilise le théorème de Tonelli, on remarque tout d'abord que  $u(x-y)v(y)$  est mesurable sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , puis que  $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(z)| dz < +\infty$ ; il en résulte que  $u(x-y)v(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , et d'après le théorème de Fubini, que  $u(x-y)v(y)$  est intégrable vis-à-vis de  $y$ , pour presque tout  $x$ . □

**Définition 6.72** *On appelle produit de convolution de  $u$  et  $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , et on note  $u * v$  la fonction*

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy$$

**Proposition 6.73** *Si  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors*

- (i)  $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,
- (ii)  $\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$
- (iii)  $u * v = v * u$ .

DÉMONSTRATION.





▷ On a vu au lemme ci-dessus que  $u(x-y)v(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , le théorème de Fubini nous prouve donc que  $u * v$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ . On aura de plus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u * v|(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u(x-y)v(y)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |u(z)| dz \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}. \end{aligned}$$

▷ On a pour presque tout  $x$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z) dz$ .

□

Ce résultat se généralise aux espaces  $L^p$  sous la forme suivante :

**Proposition 6.74** Soient  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$

(i) si  $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ , avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2,$$

alors  $(u * v) f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|(u * v) f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^r} \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

(ii)  $u * v \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $1/r + 1/r' = 1$ , soit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r'},$$

et

$$\|u * v\|_{L^{r'}} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons

$$\alpha(x, y) = f^{r/q'}(x) u^{p/q'}(x-y)$$

$$\beta(x, y) = u^{p/r'}(x-y) v^{q/r'}(y)$$

$$\gamma(x, y) = f^{r/p'}(x) v^{q/p'}(y),$$

où  $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1/r + 1/r' = 1$ . On aura

$$\|\alpha\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{2n})}^{q'} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r dx \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)|^p dy = \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

et de même

$$\|\beta\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^{2n})}^{r'} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q$$

$$\|\gamma\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2n})}^{p'} = \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q.$$

▷ D'après l'inégalité de Hölder (proposition F.2), il en résulte que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha(x, y) \beta(x, y) \gamma(x, y) dx dy \right| &\leq \|\alpha\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{2n})} \|\beta\gamma\|_{L^q(\mathbb{R}^{2n})} \\ &\leq \|\alpha\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{2n})} \|\beta\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^{2n})} \|\gamma\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2n})}, \end{aligned}$$

car  $1/r = 2 - 1/p - 1/q = 1/p' + 1/q'$ , soit encore

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (u * v)(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^{r(1/q'+1/p')}(x) u^{p(1/q'+1/r')}(x-y) v^{q(1/r'+1/p')}(y) dx dy \right| \\ &\leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{r/q'} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p/q'} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p/r'} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q/r'} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{r/p'} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q/p'} \\ &\leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

puisque  $1/q = 2 - 1/p - 1/r = 1/p' + 1/r'$  et  $1/p = 2 - 1/q - 1/r = 1/q' + 1/r'$

▷ D'après le théorème F.20, il en résulte que

$$\|u * v\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

□

### 6.6.1 Support

**Remarque 6.75** *La convolution est en fait une moyenne de  $v$  pondérée par les valeurs de  $u$ ; il est facile de voir que sa valeur au point  $x$  est nulle dès que  $u(x-y) = 0 \forall y \in \text{Supp } v$ , et qu'elle ne dépend pas des valeurs que prend  $u$  à l'extérieur de  $\{\xi \mid x - \xi \in \text{Supp } v\}$ .*

#### Lemme 6.76

(i) Si  $\text{Supp } v \subset B_r(0)$ , alors  $(u*v)(x) = (\chi_{B_r(x)} u*v)(x)$ , c'est encore dire que  $(u*v)(x)$  est indépendant des valeurs que prend  $u$  à l'extérieur de  $B_r(x)$ .

(ii) Si de plus  $\text{Supp } u \subset A$ , alors  $\text{Supp}(u * v) \subset A_r$ , où  $A_r = \{\xi \mid d(\xi, A) \leq r\} = A + B_r(0)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En effet

$$\chi_{B_r(x)}(x-y)u(x-y)v(y) = \chi_{B_r(0)}(y)u(x-y)v(y) = u(x-y)v(y).$$

▷ Si  $d(x, A) > r$ , alors  $\forall y \in \text{Supp } u$ ,  $d(x, y) > r$ , soit  $x - y \notin \text{Supp } v$ , et par conséquent  $u(y)v(x-y) = 0$ .

□

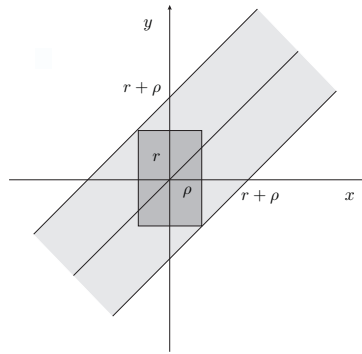


FIG. 6.8 –  $\chi_\rho(x)\chi_r(y) = \chi_\rho(x)\chi_{r+\rho}(x-y)\chi_r(y)$

**Définition 6.77** On dit que la fonction  $f$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , ou que  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  si  $\chi_\rho f$  est intégrable  $\forall \rho > 0$ , où  $\chi_\rho$  est la fonction caractéristique de  $B_\rho(0)$ .

**Proposition 6.78** Si  $v$  est à support compact, le produit de convolution existe dès que  $u$  est localement intégrable, il est alors lui-même localement intégrable.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $\text{Supp } v \subset B_r(0)$ , en notant  $\chi_r = \chi_{B_r(0)}$ , on a en effet

$$u(x-y)v(y) = \chi_r(y)u(x-y)v(y) = \chi_{B_r(x)}(x-y)u(x-y)v(y),$$

et par conséquent

$$\forall x, \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy = (\chi_{B_r(x)}u * v)(x).$$

▷ Choisissons  $\rho > 0$ , on aura

$$\begin{aligned} \chi_\rho(x)(u * v)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\rho(x)u(x-y)\chi_r(y)v(y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\rho(x)\chi_{r+\rho}(x-y)u(x-y)\chi_r(y)v(y) dx = \chi_\rho(x)(\chi_{r+\rho}u * v)(x). \end{aligned}$$

en effet,  $\chi_\rho(x)\chi_r(y) = \chi_\rho(x)\chi_r(y)\chi_{r+\rho}(x-y)$  (voir la figure 6.8).

Il en résulte que  $\chi_\rho(u * v)$  est intégrable, en tant que produit de convolution de deux fonctions intégrables.

□

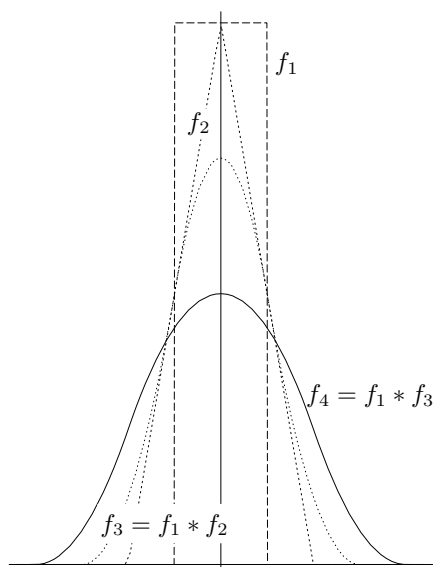


FIG. 6.9 – Effet régularisant de la convolution

**Théorème 6.79** Si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f * \varphi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ , et pour  $|\alpha| \leq m$ ,  $\partial^\alpha(f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On se contentera de faire la démonstration pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , en effet on a vu que  $f * \varphi$  n'est pas modifié localement quand on remplace  $f$  par une fonction intégrable.

▷ Commençons par le cas  $m = 0$ , on aura  $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) f(y) dy$  qui est continue par application du corollaire 6.34.

▷ Dans le cas où  $|\alpha| = 1$ , on applique le corollaire 6.36 de dérivation sous le signe somme et on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x - y) f(y) dy = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

qu'on montre être continue comme à l'item précédent

▷ le cas général s'en déduit par récurrence.

□

## 6.6.2 Régularisation

**Définition 6.80** La suite  $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \theta(x/\varepsilon)$ , où la fonction positive  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $B_1(0)$  vérifie  $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1$ , est appelée approximation de l'identité ou suite régularisante. Notons que  $\text{Supp } \theta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ .

L'existence d'une fonction indéfiniment dérivable à support compact n'est pas d'une totale évidence, elle découle du fait que les fonctions indéfiniment dérivables ne sont

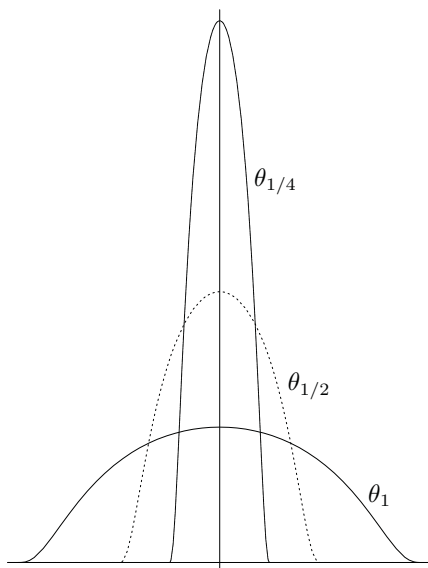


FIG. 6.10 – Approximation de l'identité

pas nécessairement analytiques ; cette découverte fut d'ailleurs à l'origine d'un progrès important dans l'approfondissement de la notion de fonction. En fait il n'est pas difficile de montrer que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = e^{1/(\|x\|^2-1)} \text{ pour } \|x\| \leq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } \|x\| > 1$$

est indéfiniment dérivable et a pour support  $B_1(0)$ . On prendra alors par exemple

$$\theta(x) = f(x) / \|f\|_{L^1}.$$

**Théorème 6.81** Soit  $\theta_\varepsilon$  une approximation de l'identité,

(i) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ , les fonctions  $f * \theta_\varepsilon$  convergent vers  $f$  uniformément sur tout compact, ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $m$ .

(ii) Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , les fonctions  $f * \theta_\varepsilon$  convergent vers  $f$  en moyenne.

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par le cas  $m = 0$ , soit  $K$  un compact, et  $K'$  l'ensemble des points dont la distance à  $K$  est inférieure à 1. On a

$$f * \theta_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \theta_\varepsilon(y) dy,$$

et par conséquent, dès que  $\varepsilon < 1$ , pour  $x \in K$ ,

$$|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \max_{z \in K', x \in K', |x-z| \leq \varepsilon} |f(z) - f(x)|.$$

Comme  $f$  est uniformément continue sur le compact  $K'$ ,  $f * \theta_\varepsilon$  tend uniformément vers  $f$  sur  $K$ .

▷ Dans le cas où  $|\alpha| \leq m$ , on utilise le fait que  $\partial^\alpha(f * \theta_\varepsilon) = \partial^\alpha f * \theta_\varepsilon$ .

▷ Comme  $f$  est intégrable, il existe une suite  $f_j$  de fonctions continues à support compact convergeant en moyenne vers  $f$ . On a

$$\|f * \theta_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \|(f - f_j) * \theta_\varepsilon\|_{L^1} + \|f_j * \theta_\varepsilon - f_j\|_{L^1} + \|f_j - f\|_{L^1}$$

Fixons  $\beta > 0$ , on peut choisir  $j$  assez grand pour que  $\|f_j - f\|_{L^1} \leq \beta/3$ , mais alors on aura

$$\|(f - f_j) * \theta_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|f_j - f\|_{L^1} \|\theta_\varepsilon\|_{L^1} \leq \beta/3.$$

L'indice  $j$  étant désormais fixé, on note  $K$  le support de  $f_j$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  les fonctions  $f_j * \theta_\varepsilon$  et  $f_j$  ont leur support dans  $K'$  et  $f_j * \theta_\varepsilon$  converge uniformément vers  $f_j$ , et par conséquent en moyenne, il en résulte que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\|f * \theta_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \beta$ , ce qui démontre le théorème.

□

**Remarque 6.82** *Ce résultat justifie l'appellation d'approximation de l'identité dont nous avons gratifié la suite  $\theta_\varepsilon$ , ce que nous venons de démontrer c'est en fait, qu'en un certain sens, elle tend vers l'élément neutre de la convolution. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point par la suite et de préciser cette remarque.*



# Appendice D

## Partitions de l'unité

On se place dans le cadre des *espaces métriques*.

### D.1 Bornes supérieures et inférieures

**Proposition D.1** *Un sous-ensemble  $A$  minoré dans  $\mathbb{R}$  possède une borne inférieure*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $x$  un minorant de  $A$ , alors  $(-\infty, x]$  est inclus dans l'ensemble  $\mathcal{M}$  des minorants de  $A$ . Il en résulte que  $\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (-\infty, x]$ , et que par conséquent, si  $A \neq \emptyset$ , il existe  $a$  tel que  $\mathcal{M}$  soit de la forme  $(-\infty, a[$  ou  $(-\infty, a]$ .

▷ Supposons que  $b \in \mathcal{M}^c$ , alors  $\exists z \in A$ , tel que  $z < b$ ; il en résulte que  $B_{b-z}(b) \in \mathcal{M}^c$ , qui est par conséquent ouvert. On a donc montré que  $\mathcal{M}$  est fermé, et que par conséquent  $a$  est le plus grand des minorants de  $A$ , ou encore sa borne inférieure.

□

**Définition D.2** *Si  $E$  est un espace métrique,  $B$  un sous-ensemble de  $E$  et  $x \in E$ , on note  $d(x, B)$  la borne inférieure de  $\{d(x, y) \mid y \in B\}$ .*

**Lemme D.3** *Si  $B$  est fermé,  $d(x, B) = 0 \Leftrightarrow x \in B$*

DÉMONSTRATION. Si  $d(x, B) = 0$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$ ; c'est dire que tout voisinage de  $x$  rencontre  $B$  ou encore que  $x \in \bar{B} = B$ .

□

**Lemme D.4** *L'application  $x \rightarrow d(x, B)$  est continue*

DÉMONSTRATION. En effet, si  $x, y \in E$  et  $z \in B$ , on a  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , et par conséquent  $d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B)$ ; de même  $d(y, B) \leq d(x, y) + d(x, B)$ . Le résultat en découle.

□



## D.2 Prolongements continus

**Théorème D.5 (Tietze-Urisohn)** *Si  $A$  est un sous-ensemble fermé de  $E$ , espace métrique, si  $f$  est continue et bornée  $A \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $\exists g$ , continue et bornée  $E \rightarrow \mathbb{R}$  prolongeant  $f$  et vérifiant  $\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{y \in A} f(y)$  et  $\inf_{x \in E} g(x) = \inf_{y \in A} f(y)$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Nous supposons  $f$  non constante, le prolongement est en effet trivial dans ce cas. Un changement de fonction de la forme  $y \rightarrow \alpha f(y) + \beta$  permet alors de se ramener au cas où  $\sup_{y \in A} f(y) = 2$  et  $\inf_{y \in A} f(y) = 1$ , ce que nous supposons désormais.

▷ Nous définissons alors  $g$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) && \text{pour } x \in A \\ g(x) &= \frac{\inf_{y \in A} (f(y) d(x, y))}{d(x, A)} && \text{pour } x \notin A \end{aligned}$$

ce qui est loisible car pour  $x \notin A$ ,  $d(x, A) \neq 0$  en vertu du lemme précédent.

▷ Démontrons tout d'abord l'égalité des bornes supérieures et inférieures. Pour  $x \in E \setminus A$ , on aura

$$g(x) \geq (\inf_{y \in A} f(y) \inf_{y \in A} d(x, y)) / d(x, A) = \inf_{y \in A} f(y),$$

Par ailleurs,

$$\forall y \in A, f(y) d(x, y) \leq \sup_{z \in A} f(z) d(x, y),$$

et par conséquent

$$\inf_{y \in A} (f(y) d(x, y)) \leq \sup_{z \in A} f(z) d(x, A),$$

il en résulte que  $g(x) \leq \sup_{z \in A} f(z)$ . Comme  $g(x) = f(x)$  pour  $x \in A$ , l'égalité des bornes de  $f$  et  $g$  en découle.

▷ Montrons maintenant la continuité de  $g$ . Sur  $\overset{\circ}{A}$ , la continuité résulte de l'identité de  $g$  et  $f$ . Sur  $E \setminus A$ , il nous suffira de démontrer la continuité de  $h(x) = \inf_{y \in A} (f(y) d(x, y))$ , puisque  $d(x, A)$  est continue et ne s'annule pas. Choisissons  $\varepsilon > 0$ , posons  $r = d(x, A)$ , et considérons  $x' \in E \setminus A$  tel que  $d(x, x') \leq \varepsilon < r$ . On aura

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq \varepsilon + d(x', y),$$

et par conséquent

$$f(y) d(x, y) \leq \varepsilon f(y) + f(y) d(x', y) \leq 2\varepsilon + f(y) d(x', y).$$

Il en résulte que  $h(x) \leq 2\varepsilon + h(x')$ ; mais on aurait pu démontrer de même que  $h(x') \leq 2\varepsilon + h(x)$ , dont découle la continuité de  $h$ .

▷ Reste à traiter le cas où  $x \in A \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  étant continue en  $x$ , il existe  $r > 0$  tel que  $y \in C = B_r(x) \cap A \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Posons  $D = A \setminus C$ , considérons tout d'abord  $x' \in E \setminus A$ , et choisissons  $x'$  tel que  $d(x, x') \leq r/4$ .

Prenons un point  $y \in D$ , on aura  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$  et par conséquent  $d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq 3r/4$ ; il en résulte que  $\inf_{y \in D} (f(y) d(x', y)) \geq 3r/4$ . Par ailleurs  $f(x) d(x, x') \leq r/2$  et par conséquent  $\inf_{y \in A} (f(y) d(x', y)) = \inf_{y \in C} (f(y) d(x', y))$ .

▷ On est donc conduit à considérer un point  $y \in C$ , on aura d'une part  $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$ , et d'autre part  $d(x', C) \leq d(x', x) \leq r/4 \leq r \leq d(x', D)$ , ce qui implique  $d(x', A) = \inf_{y \in C} d(x', y)$ . Mais comme pour  $y \in C$ , on a

$$(f(x) - \varepsilon)d(x', y) \leq f(y)d(x', y) \leq (f(x) + \varepsilon)d(x', y),$$

il en résulte que

$$(f(x) - \varepsilon)d(x', A) \leq \inf_{y \in C} (f(y)d(x', y)) \leq (f(x) + \varepsilon)d(x', A),$$

ce qui implique  $|g(x') - f(x)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall x' \in A \setminus A$  vérifiant  $d(x', x) \leq r/4$ .

▷ Quant au cas où  $x' \in A$ , on aura  $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$  dès que  $d(x, x') \leq r/4$ . La continuité de  $g$  en résulte. □

**Corollaire D.6** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles fermés non vides, disjoints d'un espace métrique  $E$ , il existe une fonction continue  $g : E \rightarrow [0, 1]$  prenant la valeur 1 sur  $A$  et 0 sur  $B$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le théorème de Tietze-Urisohn pour prolonger la fonction  $f$  continue sur  $A \cup B$  qui vaut 1 sur  $A$  et 0 sur  $B$ . □

### D.3 Partitions continues de l'unité

**Définition D.7** On dit qu'une famille  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  de parties de  $E$  est localement finie si  $\forall x \in E$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $V \cap A_\lambda = \emptyset$  sauf pour un nombre fini d'indices  $\lambda \in \Lambda$ .

**Lemme D.8** Soit  $A_n$  un recouvrement ouvert dénombrable, localement fini d'un espace métrisable  $E$ . Il existe un recouvrement ouvert dénombrable  $B_n$  de  $E$  tel que  $\bar{B}_n \subset A_n \forall n$ .

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence en supposant construits les ouverts  $B_n$ ,  $n \leq k$  tels que  $\bar{B}_n \subset A_n$ ,  $n \leq k$  et  $(\bigcup_{k=1, n-1} B_k) \cup (\bigcup_{j \geq n} A_j)$  forme un recouvrement de  $E$ .

▷ Posons  $C = (\bigcup_{k=1, n-1} B_k) \cup (\bigcup_{j \geq n+1} A_j)$  d'après l'hypothèse de récurrence,  $A_n \cup C$  recouvre  $E$ , c'est encore dire que  $E \setminus A_n \subset C$ .

▷ Construisons un ouvert  $V$  tel que  $V \subset \bar{V} \subset C$ . Si  $E = A_n$ , on prendra  $V = \emptyset$ , si  $E = C$ , on prendra  $V = E$ . Si aucun de ces deux occurrences ne se produit, on constate que  $E \setminus C$  et  $E \setminus A_n$  sont deux fermés disjoints non vides; en vertu du corollaire D.6, il existe donc  $f$  continue, valant 1 sur  $E \setminus C$  et 0 sur  $E \setminus A_n$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ . On posera  $V = \{y \in E \mid f(y) < 1/2\}$ . On posera alors  $B_n = E \setminus \bar{V}$ , on aura  $\bar{V}_n \subset E \setminus V \subset A_n$  et  $B_n \cup C = E$ .

▷ Il reste à s'assurer que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  recouvre  $E$ . Soit donc  $x \in E$ , comme les  $A_j$  forment un recouvrement localement fini,  $\exists n, \forall j > n, x \notin A_j$ , il en résulte que  $\exists k \leq n, x \in B_k$ ; c'est dire que les  $B_n$  constituent un recouvrement de  $E$ .

□

**Définition D.9** On appelle partition continue de l'unité subordonnée à un recouvrement localement fini  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ , un ensemble  $f_\lambda, \lambda \in \Lambda$  de fonctions positives continues vérifiant  $\text{Supp } f_\lambda \subset A_\lambda$  et  $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda = 1$  sur  $E$ . Remarquons bien que en chaque point  $x \in E$ , la somme qui précède ne porte que sur un nombre fini de termes.

**Proposition D.10** Pour tout recouvrement ouvert dénombrable, localement fini  $A_n$  de  $E$ , il existe une partition continue de l'unité subordonnée.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme D.8, il existe un recouvrement ouvert dénombrable localement fini  $B_n$  de  $E$  tel que  $\bar{B}_n \subset A_n$ . Considérons alors les applications continues  $h_n : E \rightarrow [0, 1]$  telles que  $h_n = 1$  sur  $\bar{B}_n$  et  $h_n = 0$  sur  $E \setminus A_n$ , dont l'existence est assurée par le corollaire D.6. Si on pose  $g^n = (h_n - 1/2)^+$ , les  $g^n$  sont continues,  $\text{Supp } g^n \subset A_n$  et  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n$  ne s'annule pas sur  $E$ , puisque les  $B_n$  recouvrent  $E$ . La partition de l'unité recherchée est alors formée des  $f_n = g^n/g$ .

□



**Proposition D.11**

(i) Si  $\Omega$  est un ouvert de  $E$  métrisable, si  $K \subset \Omega$  est un compact de  $E$ , et  $B_n, n = 1, N$  un recouvrement fini de  $K$  par des ouverts de  $\Omega$  relativement compacts, il existe une partition de l'unité subordonnée  $f_n \in \mathcal{D}^0(B_n)$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $\psi = \sum_{n=1, N} f_n$  est identique à 1 sur  $K$ .

(ii) On peut toujours construire un tel recouvrement, la fonction  $\psi$  est à support compact dans  $\Omega$  et prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ , elle est appelée fonction de troncature continue.

DÉMONSTRATION.

▷ On considère une partition de l'unité  $f_n$  subordonnée au recouvrement ouvert de  $E$  formé de  $B_0 = E \setminus K$  et des  $B_j, j = 1, J$ . Les  $f_n$  positives vérifient  $\sum_{n=0, J} f_n = 1$  sur  $\Omega$  et  $f_0(x) = 0$  sur  $K$ . Par conséquent  $\psi = \sum_{n=1, N} f_n$  constitue bien une fonction de troncature.

▷ Par compacité, on peut effectuer un recouvrement fini de  $K$  par des ouverts bornés  $A_n, n = 1, N$ , de  $\Omega$ ; le lemme D.8 permet d'en déduire un recouvrement ouvert fini par des  $B_n$  relativement compacts dans  $\Omega$ .

□

Dans le cas des espaces séparables, les recouvrements ouverts *quelconques* se ramènent aisément à des recouvrements *dénombrables*.



**Lemme D.12** Soit  $E$  un espace métrique localement compact séparable et  $\mathcal{B}$  une base d'ouverts de la topologie de  $E$ . Pour tout recouvrement ouvert  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  de  $E$ , il existe un recouvrement ouvert dénombrable  $B_j$ , formé d'ensembles relativement compacts appartenant à  $\mathcal{B}$ , localement fini, plus fin que  $A_\lambda$  et tel que chaque  $B_j$  ne rencontre qu'un nombre fini de  $B_\ell$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Selon le lemme D.14 ci-dessous, il existe une suite  $U_n$  d'ouverts relativement compacts, tels que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  et  $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ . Posons  $K_n = \overline{U}_n \setminus U_{n-1}$ , c'est un compact, et  $O_n = U_{n+1} \setminus \overline{U}_{n-2}$ , est un voisinage ouvert de  $K_n$ . Soit alors  $x \in K_n$ ; comme les  $A_\lambda$  recouvrent  $E$ ,  $\exists \lambda(x)$  tel que  $x \in A_{\lambda(x)}$ , et comme  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts,  $\exists V_n(x) \in \mathcal{B}$ , contenant  $x$  et inclus dans  $W_n(x) = O_n \cap A_{\lambda(x)}$ .

▷ Les  $W_n(x)$  recouvrent  $K_n$  quand  $x$  parcourt  $K_n$ , et par compacité on peut en extraire une suite finie  $x_i$ ,  $i = 1, p_n$  telle que les  $W_n(x_i)$  recouvrent  $K_n$ . Les  $W_n(x_i)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, p_n$  forment une suite  $B_j$  d'ouverts relativement compacts appartenant à  $\mathcal{B}$  et constituent un recouvrement de  $E$  plus fin que  $A_\lambda$ .

▷ Il reste à montrer que ce recouvrement est localement fini. Soit donc  $z \in E$ , et  $n$  le plus petit entier tel que  $z \in U_n$ . Comme  $z \notin U_{n-1}$ ,  $U_n \setminus \overline{U}_{n-2}$  est un voisinage de  $z$ ; on vérifie aisément qu'il ne rencontre  $O_k$ , et par conséquent les  $W_k(x_i)$  que pour  $n+1 \geq k \geq n-2$ , soit un nombre fini de  $B_j$ .

□

**Lemme D.13** Soit  $E$  un espace métrique et  $A$  compact inclus dans  $E$ , alors

- (i) les  $\mathcal{V}_r(A) = \bigcup_{y \in A} \overset{\circ}{B}_r(y)$  forment un système fondamental de voisinages de  $A$
- (ii)  $r > 0$  peut être choisi assez petit pour que  $\mathcal{V}_r(A)$  soit relativement compact.

DÉMONSTRATION.

▷ En effet si  $U$  est un voisinage de  $A$ , la fonction continue  $x \rightarrow d(x, U)$  atteint son minimum sur  $A$ , or  $d(x, U) > 0$ ,  $\forall x \in A$ ; ce minimum est donc strictement positif, soit  $r$ . Par conséquent  $d(x, U) > r \forall x \in A$ ; c'est dire que  $\mathcal{V}_r(A) \subset U$ .

▷ De plus  $A$  peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts relativement compacts, dont l'union en constitue un voisinage ouvert relativement compact. Comme les  $\mathcal{V}_r(A)$  forment un système fondamental de voisinages de  $A$ , il en résulte que  $r > 0$  peut être choisi de telle sorte que  $\mathcal{V}_r(A)$  soit relativement compact.

□

**Lemme D.14** Soit  $E$  un espace métrique localement compact séparable, il existe une suite  $U_n$  d'ouverts relativement compacts, tels que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  et  $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $E$  est séparable, il possède une base dénombrable d'ouverts  $V_n$ , qui peuvent être choisis relativement compacts, puisque  $E$  est localement compact. Nous poserons  $U_1 = V_1$  et nous définirons la suite  $U_n$  par récurrence :  $U_{n-1}$  étant supposé relativement compact, nous poserons  $U_n = V_n \cup \mathcal{V}_r(\overline{U}_{n-1})$ , où selon le lemme D.13  $r$  est choisi de telle sorte que  $\mathcal{V}_r(\overline{U}_{n-1})$  et par conséquent  $U_n$ , soit relativement compact. □



**Corollaire D.15** Soit  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , alors il existe un recouvrement ouvert dénombrable  $B_n$  localement fini de  $\mathbb{R}^m$ , plus fin que  $A_\lambda$ , et une partition de l'unité subordonnée  $f_n \in \mathcal{D}^0(B_n)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ .

Dans le cas d'une partition de l'unité relative à un ouvert  $\Omega$  de  $E$ , à condition d'abandonner l'exigence d'un recouvrement ouvert localement fini et de se contenter d'une partition de l'unité  $f_n$  localement finie, c'est-à-dire telle que tout point de  $\Omega$  possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de  $\text{Supp } f_n$ , on peut imposer aux supports des  $f_n$  d'être inclus dans  $\Omega$ .



**Proposition D.16** Soit  $E$  un espace métrique localement compact séparable,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , un recouvrement ouvert de  $\Omega$ . Alors

(i) il existe une partition de l'unité localement finie  $f_n \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $\forall n, \exists \lambda$  avec  $\text{Supp } f_n \subset A_\lambda$ .

(ii) Si de plus  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $K$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{i=1, n} f_i(x) = 1, \forall x \in W$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $s_n$  une suite dense dans  $F$ . Pour tout  $n, \exists \lambda$  tel que  $s_n \in A_\lambda$ . Notons alors  $V_n$  un voisinage relativement compact de  $s_n$ , choisissons  $r_n$  tel que  $\overset{\circ}{B}_{r_n}(s_n) \subset A_\lambda \cap V_n$  et posons  $B_n = \overset{\circ}{B}_{r_n/2}(s_n)$ . Les boules ouvertes  $B_n$  sont relativement compactes et par densité de la suite  $s_n$ , on aura  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Il en résulte que les  $B_n$  forment un recouvrement dénombrable de  $\Omega$ , constitué d'ensembles relativement compacts, plus fin que celui constitué par les  $A_\lambda$ .

▷ Notons alors  $\varphi_n$  la fonction de  $\mathcal{D}^0(\Omega)$  égale à 1 sur  $\overline{B}_n$  et nulle à l'extérieur de  $\overset{\circ}{B}_{r_n}(s_n)$  qui découle du corollaire D.6. On posera  $f_1 = \varphi_1$  et  $\forall k, f_{k+1} = (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \cdots (1 - \varphi_k) \varphi_{k+1}$ . La fonction  $f_n$  a son support inclus dans celui de  $\varphi_n$ , et elle vérifie  $0 \leq f_n \leq 1$

▷ Par récurrence, on démontre que  $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \cdots (1 - \varphi_k)$ , et par conséquent  $\sum_{n=1, k} f_n(x) = 1$ , pour  $x \in \bigcup_{n=1, k} B_n$ . Si de plus  $K$  est compact, alors il est recouvert par un nombre  $k$  fini de  $B_n$  et on aura donc  $\sum_{n=1, k} f_n(x) = 1$ , pour  $x \in K$ .

▷ Pour  $x \in K$ , on aura donc

$$\sum_{n=1, k} f_n(x) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x),$$

d'où il résulte que  $f_n(x) = 0 \forall n > k$ . C'est dire que  $K$  ne rencontre pas  $\text{Supp } f_n$  pour  $n > k$ .

□

## D.4 Partitions régulières de l'unité

Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^m$ , les partitions continues de l'unité formées de fonctions à support compact peuvent aisément être transformées en partitions indéfiniment dérivables subordonnées au même recouvrement de l'unité.

**Corollaire D.17** Soit  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , alors il existe un recouvrement dénombrable  $B_n$  localement fini de  $\mathbb{R}^m$ , plus fin que  $A_\lambda$ , et une partition de l'unité subordonnée  $\psi_n$  telle  $\psi_n \in \mathcal{D}(B_n)$ .



DÉMONSTRATION.

▷ On sait déjà, d'après le corollaire D.15 qu'il existe une partition de l'unité  $f_n$  continue dénombrable localement finie subordonnée au recouvrement  $A_\lambda$ .

▷ Soit alors  $\theta_\varepsilon$  une approximation de l'identité. Posons  $\varphi_n^\varepsilon = f_n * \theta_\varepsilon$ , d'après le lemme 6.76, on aura  $\text{Supp } \varphi_n^\varepsilon \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\text{Supp } f_n)$ , et comme  $\text{Supp } f_n$  est compact, d'après le lemme D.13, pour  $\varepsilon$  assez petit  $\mathcal{V}_\varepsilon(\text{Supp } f_n) \subset A_\lambda$ , ce qui montre que  $\text{Supp } \varphi_n^\varepsilon \subset A_\lambda$ .

▷ Toujours d'après le lemme D.13  $\exists \varepsilon_1$  tel que pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$   $\mathcal{V}_\varepsilon(\text{Supp } f_n)$  soit relativement compact, d'où il résulte que  $\text{Supp } \varphi_n^\varepsilon$  est compact.

▷ Notons  $S_n = \text{Supp } \varphi_n^{\varepsilon_1}$ , selon le théorème 6.81,  $\varphi_n^\varepsilon \rightarrow f_n$  dans  $\mathcal{C}^0(S_n)$ , et par conséquent on peut choisir  $\varepsilon_n$  assez petit pour que  $\|\varphi_n^{\varepsilon_n} - f_n\| \leq 2^{-n}$ . Posons alors  $\varphi_n = \varphi_n^{\varepsilon_n}$ , nous aurons  $\left\| \sum_{n \geq 1} \varphi_n - \sum_{n \geq 1} f_n \right\| \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1/2$ ; par conséquent comme  $\sum_{n \geq 1} f_n = 1$ , on aura  $\Phi = \sum_n \varphi_n \geq 1/2$ , où la somme est localement finie, d'où il résulte que  $1/\Phi$  est indéfiniment dérivable. La suite  $\psi_n = \varphi_n/\Phi$  constitue donc la partition de l'unité annoncée.

□

De même, on peut obtenir une version indéfiniment différentiable de la proposition D.16 :

**Corollaire D.18** Soit  $E$  un espace métrique localement compact séparable,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , un recouvrement ouvert de  $\Omega$ . Alors



(i) il existe une partition de l'unité localement finie  $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $\forall n, \exists \lambda$  avec  $\text{Supp } \psi_n \subset A_\lambda$ .

(ii) Si de plus  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $K$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{i=1, n} \psi_i(x) = 1, \forall x \in W$ .



# Appendice E

## Intégrale de Riemann

### E.1 Définition

Notons  $S$  une subdivision de l'intervalle borné  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , c'est-à-dire une suite finie croissante de points :  $S = s_0, s_1, \dots, s_n$  avec  $s_0 = a$  et  $s_n = b$ . On se donne une fonction  $f$  bornée sur  $[a, b]$  et on note

$$\sigma_S(f) = \sum_{i=1, n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{[s_{i-1}, s_i]} f$$
$$\Sigma_S(f) = \sum_{i=1, n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{[s_{i-1}, s_i]} f$$

Les quantités  $\sigma_S(f)$  et  $\Sigma_S(f)$  sont respectivement appelées *sommes de Darboux* inférieure et supérieure de  $f$ . Dans le cas d'une fonction  $f$  continue et croissante, elles ne sont rien d'autre que les surfaces respectives délimitées par les fonctions en escalier

$$\sum_{i=1, n} f(s_i) \chi_{[s_{i-1}, s_i[} \text{ et } \sum_{i=1, n} f(s_{i+1}) \chi_{[s_{i-1}, s_i[}.$$

Rappelons que  $\chi_A$  note classiquement la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ , soit  $\chi_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\chi_A(x) = 0$  sinon. Nous appellerons *pas* de  $S$ , la quantité

$$h(S) = \sup_{j=1, n} |s_j - s_{j-1}|$$

#### Lemme E.1

(i) Si  $S$  et  $T$  sont deux subdivisions de  $[a, b]$ ,  $T$  étant plus fine que  $S$ , alors

$$\sigma_S(f) \leq \sigma_T(f) \text{ et } \Sigma_S(f) \geq \Sigma_T(f).$$

(ii) Si  $S$  et  $S'$  sont deux subdivisions quelconques, alors

$$\sigma_S(f) \leq \Sigma_{S'}(f)$$



DÉMONSTRATION.

▷ Traitons le cas où  $T = s_0, s_1, \dots, s_j, t, s_{j+1}, \dots, s_n$ ; le cas général s'en déduit par récurrence. On aura

$$\sigma_T(f) - (s_{j+1} - s_j) \inf_{[s_j, s_{j+1}]} f = \sigma_S(f) - (t - s_j) \inf_{[s_j, t]} f - (s_{j+1} - t) \inf_{[t, s_{j+1}]} f$$

et par conséquent

$$\sigma_T(f) - \sigma_S(f) = (t - s_j) \left( \inf_{[s_j, s_{j+1}]} f - \inf_{[s_j, t]} f \right) + (s_{j+1} - t) \left( \inf_{[s_j, s_{j+1}]} f - \inf_{[t, s_{j+1}]} f \right) \geq 0.$$

L'inégalité relative à  $\Sigma_S(f)$  se démontre de façon similaire.

▷ Considérons la subdivision  $T = S \cup S'$ , on aura d'après l'item précédent

$$\sigma_S(f) \leq \sigma_T(f) \leq \Sigma_T(f) \leq \Sigma_{S'}(f).$$

□

Il en résulte que l'ensemble des  $\sigma_S(f)$  où  $S$  parcourt l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$  admet une borne supérieure, de même l'ensemble des  $\Sigma_S(f)$  admet une borne inférieure.

**Définition E.2** On dit que la fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur le segment  $[a, b]$  si elle est bornée sur  $[a, b]$  et si

$$\sup_S \sigma_S(f) = \inf_S \Sigma_S(f),$$

L'intégrale de  $f$ , notée  $I(f)$ , est alors la valeur commune de  $\sup_S \sigma_S(f)$  et  $\inf_S \Sigma_S(f)$ .

## E.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

### Proposition E.3

(i) L'ensemble  $E$  des fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle  $[a, b]$  est un espace vectoriel

(ii) L'intégrale de Riemann est une forme linéaire positive sur  $E$ . C'est encore dire que  $I(f) \geq 0$  dès que  $f \geq 0$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons  $f$  et  $g$  bornées sur l'intervalle  $A \subset [a, b]$ , on aura

$$\inf_A f + \inf_A g \leq \inf_A (f + g) \text{ et } \sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g,$$

et par conséquent

$$\sigma_S(f) + \sigma_S(g) \leq \sigma_S(f + g) \leq \Sigma_S(f + g) \leq \Sigma_S(f) + \Sigma_S(g).$$

Il en résulte que  $f + g$  est intégrable dès que  $f$  et  $g$  le sont, et que  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ . On montre de même que  $I(\lambda f) = \lambda I(f)$ .

▷ Supposons maintenant que  $f \leq g$ ; il en résulte que  $\inf_A f \leq \inf_A g$  et par conséquent  $\sigma_S(f) \leq \sigma_S(g)$ . Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, on aura donc  $I(f) \leq I(g)$ .

□

Si  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ , et  $A$  est un sous-ensemble de  $[a, b]$ , nous noterons

$$\omega_A(f) = \sup_A f - \inf_A f.$$

C'est l'oscillation de  $f$  sur  $A$ . On aura

$$\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) = \sum_{i=1, n} (s_i - s_{i-1}) \omega_{[s_{i-1}, s_i]}(f)$$

Remarquons que si  $A \subset B$ , alors  $\omega_A(f) \leq \omega_B(f)$ .

**Lemme E.4** Pour que la fonction  $f$ , bornée sur l'intervalle  $[a, b]$ , soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que  $\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) \rightarrow 0$  quand  $h(S) \rightarrow 0$ .

DÉMONSTRATION.

▷ La condition est suffisante, en effet elle implique  $\sup_S \sigma_S(f) \geq \inf_S \Sigma_S(f)$ .

▷ Réciproquement soit  $\varepsilon > 0$ , si  $f$  est intégrable,  $\exists S'$  et  $S''$  telles que  $\Sigma_{S''} - \sigma_{S'} \leq \varepsilon$ ; posons alors  $S = S' \cup S''$ , on aura  $\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) \leq \varepsilon$ . Soit alors  $n$  le nombre de segments composant la subdivision  $S$ . Si  $T$  note une subdivision quelconque de  $[a, b]$  telle que  $h(T) \leq h(S)$ , les intervalles composant  $T$  peuvent être répartis en deux catégories :  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  respectivement composées des intervalles contenant un point de de  $S$  et de ceux qui n'en contiennent pas. Les intervalles de la catégorie  $\mathcal{A}_1$  sont en nombre inférieur ou égal à  $n$ , tandis que ceux de  $\mathcal{A}_2$  sont contenus dans un intervalle de  $S$ . Il en résulte que

$$\Sigma_T(f) - \sigma_T(f) = \sum_{A \in \mathcal{A}_1} |A| \omega_A(f) + \sum_{A \in \mathcal{A}_2} |A| \omega_A(f) \leq n \omega_{[a,b]}(f) h(T) + \Sigma_S(f) - \sigma_S(f).$$

▷ Choisissons maintenant  $h(T) \leq \varepsilon/n\omega$ , on aura  $\Sigma_T(f) - \sigma_T(f) \leq 2\varepsilon$ , ce qui prouve la convergence de  $\Sigma_T(f) - \sigma_T(f)$  vers 0 avec le pas  $h(T)$ .

□

**Proposition E.5**

- (i) L'intégrale de Riemann est continue pour la topologie de la convergence uniforme.
- (ii) L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann est fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura en effet

$$\forall x \in [a, b], -\sup_{[a,b]} |f| \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} |f|,$$

et par conséquent, en vertu de la positivité,  $|I(f)| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |f|$ .

▷ Nous montrerons qu'une limite uniforme de fonctions intégrables au sens de Riemann est intégrable. Soit donc  $f_n$  une suite de fonctions intégrables de limite  $f$ . Il est tout d'abord clair que  $f$  est bornée. Choisissons alors  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que

$$\forall x \in [a, b], \forall n > N, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

et par conséquent  $\omega_A(f) \leq \omega_A(f_n) + 2\varepsilon$ , pour tout segment  $A \subset [a, b]$ . Pour toute subdivision  $S$  de  $[a, b]$ , on aura donc

$$\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) \leq \Sigma_S(f_n) - \sigma_S(f_n) + 2\varepsilon(b - a)$$

et si  $h(S)$  est choisi assez petit, en vertu du Lemme E.4, on aura de plus  $\Sigma_S(f_n) - \sigma_S(f_n) \leq \varepsilon$ ; il en résulte que  $\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) \leq \varepsilon(1 + 2(b - a))$ . La fonction  $f$  est donc intégrable. □

**Lemme E.6** *L'ensemble des fonctions bornées sur  $[a, b]$  est complet pour la topologie de la convergence uniforme.*

DÉMONSTRATION. Soit  $f_n$  une suite de Cauchy de fonctions bornées sur  $[a, b]$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $N$  tel que

$$\forall m, n > N, \forall x \in [a, b], |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour chaque  $x$ , la suite  $f_n(x)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , elle converge donc, soit vers  $f(x)$ . On aura  $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , ce qui prouve que  $f$  est bornée. □

Comme un sous-ensemble fermé dans un espace complet est lui même complet, on déduit de la proposition E.5 (ii) et du lemme précédent le

**Théorème E.7** *L'ensemble  $E$  des fonctions intégrables au sens de Riemann est complet pour la topologie de la convergence uniforme.*

### E.3 Fonctions intégrables

Caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann n'est pas immédiat ; c'est à vrai dire dans le cadre de la théorie de Lebesgue que se résout cette question. Nous nous contenterons donc d'indiquer quelles sont les classes les plus élémentaires de fonctions intégrables au sens de Riemann. On peut tout d'abord noter qu'une fonction en escalier est trivialement intégrable au sens de Riemann, l'intégrale étant exactement égale aux sommes de Darboux correspondant à la subdivision associée.

**Proposition E.8** *Les fonctions monotones sur  $[a, b]$  sont intégrables au sens de Riemann.*

DÉMONSTRATION.

▷ Tout d'abord, une fonction monotone est bornée. Supposons par exemple que  $f$  est croissante, on aura  $\forall x \in [a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ .

▷ Si  $S$  est une subdivision de  $[a, b]$ , de pas  $h(S) \leq \varepsilon$ . On aura  $\omega_{[s_{i-1}, s_i]}(f) \leq f(s_i) - f(s_{i-1})$  et par conséquent

$$\Sigma_S(f) - \sigma_S(f) \leq \sum_{i=1, n} (s_i - s_{i-1})(f(s_i) - f(s_{i-1})) \leq \varepsilon(f(b) - f(a)),$$

ce qui prouve l'intégrabilité en vertu du lemme E.4.

□

**Lemme E.9** *Si  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , alors  $f^+ = \sup(f, 0)$  l'est également ; de plus  $I(f^+) \geq I(f)$ .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que  $\omega_A(f^+) \leq \omega_A(f)$  pour tout intervalle  $A \subset [a, b]$ . Il en résulte que  $\Sigma_S(f^+) - \sigma_S(f^+) \leq \Sigma_S(f) - \sigma_S(f)$  pour toute subdivision  $S$  de  $[a, b]$ , et la conclusion en vertu du lemme E.4 et de la positivité de l'intégrale de Riemann.

□

**Corollaire E.10** *Si  $f$  est intégrable au sens de Riemann, alors  $|f|$  l'est également, et  $I(|f|) \geq I(f)$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, on a  $|f| = f^+ + f^-$ , où  $f^- = \sup(-f, 0)$ .

□

**Remarque E.11** *Attention, l'inverse est faux : si  $|f|$  est intégrable,  $f$  ne l'est pas nécessairement, il suffit pour s'en convaincre de considérer la fonction définie sur  $[0, 1]$  qui vaut 1 sur les rationnels et  $-1$  ailleurs.*

**Corollaire E.12** *Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont bornées intégrables au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , alors  $\inf(f, g)$  et  $\sup(f, g)$  le sont également avec*

$$I(\inf(f, g)) \leq \inf(I(f), I(g)) \text{ et } I(\sup(f, g)) \geq \sup(I(f), I(g)).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que  $\sup(f, g) = g + \sup(f - g, 0)$  et que  $\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$ .

□

**Lemme E.13** *Une fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions en escalier.*

DÉMONSTRATION. Considérons une subdivision  $S$  de  $[a, b]$ , et définissons la fonction en escalier  $f_S$  comme égale à  $\inf_{s_{i-1}, s_i}(f)$  sur  $[s_{i-1}, s_i[$ . Comme  $f$  est continue sur l'intervalle compact  $[a, b]$ , elle est uniformément continue ; par conséquent  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ , tel que pour toute subdivision  $S$  vérifiant  $h(S) \leq \eta$ , on ait  $\forall i = 1, n, \omega_{[s_{i-1}, s_i]}(f) \leq \varepsilon$ . Il en résulte que  $f_S$  converge uniformément vers  $f$  quand  $h(S) \rightarrow 0$ .

□

**Proposition E.14** Une fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la proposition E.5, en effet les fonctions en escalier sont intégrables au sens de Riemann. □

## E.4 Intégrale de Stieltjès

Il s'agit d'une généralisation de l'intégrale de Riemann ; on se donne une fonction  $\phi$  croissante et continue à gauche, appelée *fonction de répartition*, et on note

$$\sigma_S^\phi(f) = \sum_{i=1, n} (\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})) \inf_{[s_{i-1}, s_i]} f \text{ et } \Sigma_S^\phi(f) = \sum_{i=1, n} (\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})) \sup_{[s_{i-1}, s_i]} f,$$

avec  $\phi(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \phi(s)$ .

Démontrons que les fonctions continues à support compact sont intégrables au sens de Stieltjès, c'est-à-dire que  $\sup_S \sigma_S^\phi(f) = \inf_S \Sigma_S^\phi(f)$ ; on notera alors  $I^\phi(f)$  cette valeur commune. On aura

$$\Sigma_S^\phi(f) - \sigma_S^\phi(f) = \sum_{i=1, n} (\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})) \omega_{[s_{i-1}, s_i]}(f)$$

et il nous suffira de montrer que  $\Sigma_S^\phi(f) - \sigma_S^\phi(f) \rightarrow 0$  quand  $h(S) \rightarrow 0$  pour conclure : la fonction  $f$ , continue sur le compact  $[a, b]$ , sera uniformément continue ; si  $\phi$  n'est pas la fonction constante, alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que

$$\forall h(S) \leq \eta, \forall i, \omega_{[s_{i-1}, s_i]}(f) \leq \varepsilon / (\phi(b) - \phi(a)),$$

et par conséquent  $\Sigma_S^\phi(f) - \sigma_S^\phi(f) \leq \varepsilon$ . Le même raisonnement qu'à la proposition E.3 nous conduit alors à énoncer la

**Proposition E.15** L'intégrale de Stieltjès est une forme linéaire positive sur  $\mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ .

# Appendice F

## Les espaces $L^p$

### F.1 Outils techniques

**Lemme F.1** Si  $a, b > 0$ , et  $1/p' + 1/q' = 1$ ,  $p', q' > 0$ , alors

$$ab \leq \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^{q'}}{q'}.$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$f(a, b) = \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^{q'}}{q'} - ab,$$

on aura

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = a^{p'-1} - b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b) = (p' - 1)a^{p'-2}.$$

Il en résulte que  $a \rightarrow f(a, b)$  atteint son minimum en  $a = b^{1/(p'-1)}$ , et comme ce minimum est nul, le résultat en découle. □

**Proposition F.2 (Inégalité de Hölder)** Soient  $p, q \in [1, +\infty[$ , si  $|f|^p$  et  $|g|^q$  sont intégrables, alors  $|fg|^r$  l'est également dès que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

avec

$$\left( \int |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $p' = p/r$  et  $q' = q/r$ , ainsi que

$$f' = \frac{|f|^r}{\left( \int |f|^p d\mu \right)^{r/p}} \quad \text{et} \quad g' = \frac{|g|^r}{\left( \int |g|^q d\mu \right)^{r/q}}$$

on aura  $1/p' + 1/q' = 1$  et d'après le lemme F.1,

$$|f'g'| \leq \frac{1}{p'} |f'|^{p'} + \frac{1}{q'} |g'|^{q'} = \frac{r}{p} \frac{|f|^p}{\int |f|^p d\mu} + \frac{r}{q} \frac{|g|^q}{\int |g|^q d\mu},$$

ce qui montre que  $f'g'$  est intégrable. Il en résulte que

$$\int |f'g'| d\mu \leq \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

Mais

$$|fg|^r = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{r/q} |f'g'|,$$

et par conséquent  $|fg|^r$  est intégrable et

$$\left( \int |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

□

**Lemme F.3** Si  $a, b > 0$ ,  $p > 0$ , alors

$$(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p).$$

DÉMONSTRATION. En effet  $(a + b) \leq 2 \max(a, b)$  et par conséquent

$$(a + b)^p \leq 2^p (\max(a, b))^p \leq 2^p (a^p + b^p).$$

□

**Proposition F.4 (Inégalité de Minkovski)** Soient  $p \in [1, +\infty[$ , si  $|f|^p$  et  $|g|^p$  sont intégrables, alors  $|f + g|^p$  l'est également et

$$\left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION. On aura tout d'abord, d'après le lemme F.3,  $|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$ , ce qui montre que  $|f + g|^p$  est intégrable. Mais de plus

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1},$$

et par conséquent, avec  $1/q = 1 - 1/p$ , d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p d\mu &\leq \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \left( \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right). \end{aligned}$$

La conclusion en résulte.

□

## F.2 Espaces de Banach

### Définition F.5

(i) Pour  $p \in [1, +\infty[$  On dit que  $f \in L^p$  si  $f$  est mesurable et  $|f|^p$  est intégrable. On munit l'espace  $L^p$  de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

(ii) On dit que  $f \in L^\infty$  si  $f$  est mesurable et si  $\exists C > 0$ , tel que  $|f(x)| \leq C$  presque partout. On munit l'espace  $L^\infty$  de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C \mid |f(x)| \leq C \text{ p.p.} \}.$$

Qu'il s'agisse bien de normes découle de l'inégalité de Minkovski pour  $p < +\infty$ , et pour  $p = +\infty$ , de la remarque suivante :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \text{ p.p.,}$$

et par conséquent  $\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$ .

**Définition F.6** Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

**Théorème F.7** Les espaces  $L^p$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , sont des espaces de Banach. ♥

Il s'agit de démontrer la complétude, la démonstration diffère selon que  $p = +\infty$  ou non, nous la scinderons en deux parties distinctes.

DÉMONSTRATION DU CAS  $p = \infty$

▷ Soit  $f_n$  une suite de Cauchy dans  $L^\infty$ , nous poserons

$$A_{m,n} = \{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \geq \|f_n - f_m\|_{L^\infty}\}.$$

Par définition,  $A_{m,n}$  est négligeable, ainsi, par conséquent que  $A = \cup_{m,n} A_{m,n}$ .

▷ Posons maintenant  $f'_n = \chi_{[A^c]} \times f_n$ , nous aurons

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| = |f_n(x) - f_m(x)| \chi_{[A^c]}(x) \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty}, \forall x,$$

et par conséquent  $\sup_x |f'_n(x) - f'_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty}$ .

▷ Montrons que  $f \in L^\infty$  : pour  $x$  fixé, la suite  $f'_n(x)$  est de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers  $f(x)$ . Nous aurons  $|f(x)| \leq |f'_n(x) - f(x)| + |f'_n(x)|$  ; la suite  $f'_n$  étant de Cauchy dans  $L^\infty$  est bornée, et par conséquent  $|f'_n(x)| \leq |f'_n(x) - f'(x)| + C$ . Comme de plus  $f'_n(x) \rightarrow f(x)$ , il en résulte que  $\forall \varepsilon$ ,  $|f(x)| \leq \varepsilon + C$ , ce qui prouve que  $f \in L^\infty$ .



▷ Montrons maintenant que  $f'_n \rightarrow f$  dans  $L^\infty$ . Nous aurons

$$|f'_n(x) - f(x)| \leq |f'_n(x) - f'_m(x)| + |f'_m(x) - f(x)|.$$

Choisissons  $\varepsilon > 0$ , alors  $\exists N$  tel que  $\forall m, n > N$ ,  $\|f'_n - f'_m\|_{L^\infty} \leq \varepsilon/2$ . Choisissons alors  $n > N$ ; pour tout  $x$ ,  $\exists M_x$  tel que

$$(m > M_x) \implies (|f'_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2),$$

et par conséquent, si  $m > \max(N, M_x)$ , on aura  $|f'_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall x$ , c'est-à-dire  $\|f'_n - f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ .

▷ Comme  $f'_n = f_n$  presque partout, on aura  $\|f_n - f\|_{L^\infty} = \|f'_n - f\|_{L^\infty}$ , et par conséquent  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^\infty$ .

□

#### DÉMONSTRATION DU CAS $p < \infty$

▷ Soit  $f_n$  une suite de Cauchy dans  $L^p$ , on peut alors trouver une sous-suite  $f_{n_i}$  telle que  $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L^p} \leq 2^{-i}$ . Posons  $g_k(x) = \sum_{i=1, k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ , on aura  $g_k \in L^p$  et  $\|g_k\|_{L^p} \leq \sum_{i=1, k} 2^{-i} \leq 1$ . La suite  $g_k(x)$  étant croissante, on pourra poser  $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$  (que la limite soit ou non finie) et on aura  $|g_k(x)|^p \uparrow |g(x)|^p$ .

▷ En vertu du théorème de la convergence monotone, on aura  $g \in L^p$  et  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  presque partout; c'est dire que la série  $\sum_{i=1, \infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$  converge presque partout, et donc également la série  $\sum_{i=1, \infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ . Il en résulte que  $f_{n_i}(x)$  converge presque partout, soit vers  $f(x)$ .

▷ Montrons que  $f \in L^p$ , On aura

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| \leq \sum_{i=1, \infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| = g(x),$$

et par conséquent  $|f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + g(x)$ .

▷ Montrons maintenant que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p$ . La suite  $f_n$  étant de Cauchy, si on fixe  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tel que  $\forall m, n > N$ ,  $\int |f_m(x) - f_n(x)|^p d\mu < \varepsilon$ . Choisissons  $m > N$  et  $i$  assez grand pour que  $n_i > N$ , alors  $\int |f_m(x) - f_{n_i}(x)|^p d\mu < \varepsilon$ . Si on pose  $\varphi_i(x) = |f_m(x) - f_{n_i}(x)|^p$ , on aura  $\varphi_i \in L^1$ ,  $\varphi_i \geq 0$ , et  $\int \varphi_i(x) d\mu < \varepsilon$ , on pourra donc appliquer le lemme de Fatou, dont il résulte que  $\liminf_i \varphi_i \in L^1$  et

$$\int \liminf_i \varphi_i(x) d\mu \leq \liminf_i \int \varphi_i(x) d\mu.$$

Mais comme  $\varphi_i(x) \rightarrow |f_m(x) - f(x)|^p$  presque partout, on aura en fait  $\int |f_m(x) - f(x)|^p d\mu \leq \liminf_i \int \varphi_i(x) d\mu \leq \varepsilon$ . On a donc montré que  $\|f_m(x) - f(x)\|_{L^p} \rightarrow 0$ .

□

### F.3 Convexité uniforme

Il s'agit là d'un paragraphe assez technique dont l'objectif consiste à démontrer que les espaces  $L^p$ ,  $p \in ]1, +\infty[$  sont uniformément convexes, selon la définition suivante :

**Définition F.8** On dit qu'un espace normé  $E$  est uniformément convexe si  $\forall \varepsilon \in ]0, 2[$ ,  $\exists \delta_\varepsilon \in ]0, 1]$  tel que

$$(\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon) \implies \left( \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta_\varepsilon \right).$$

La notion de convexité uniforme est une notion métrique et non topologique : des deux normes équivalentes dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$  et  $|x| = \sum_i |x_i|$ , seule la première est uniformément convexe. ◇

**Proposition F.9** Si  $E$  est un espace de Banach uniformément convexe, et  $K$  un convexe fermé dans  $E$ , alors  $\forall x \in E$ , il existe  $y_x \in K$ , unique tel que  $\|x - y_x\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$ , cette dernière quantité est encore notée  $d(x, K)$ . ♡

**Remarque F.10**

- (i) Une telle propriété est spécifique aux espaces de Banach uniformément convexes.
- (ii) Le point  $y_x$  est la projection du point  $x$  sur le convexe  $K$ , c'est une opération idempotente. En général elle n'est pas linéaire même quand  $K$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , sauf pour un espace de Hilbert, comme nous le verrons par la suite.

DÉMONSTRATION.

▷ Au prix d'une éventuelle translation, nous pouvons toujours supposer que  $x = 0 \notin K$ . Posons  $d = d(0, K)$ , et considérons une suite minimisante de points de  $K$ , soit une suite  $x_n$  telle que  $\|x_n\| \rightarrow d$ . On aura  $\|x_n\| \geq d, \forall n$ , et par convexité,  $\|(x_n + x_m)/2\| \geq d, \forall m, n$ . Choisissons  $\zeta$  tel que  $\delta_\varepsilon = d/(d + \zeta)$  et posons  $t_m = x_m/(d + \zeta)$  ; pour  $m$  et  $n$  assez grands, on aura  $\|t_m\| \leq 1, \|t_n\| \leq 1$ , et  $\|(t_n + t_m)/2\| \geq \delta_\varepsilon$ . En vertu de la convexité uniforme, on en déduit que  $\|t_m - t_n\| \leq \varepsilon$ , et par conséquent que la suite  $t_m$ , et donc la suite  $x_m$  converge, soit vers  $y$ . Comme  $K$  est fermé,  $y \in K$ , et par continuité, on a  $\|y\| = d$ .

▷ Supposons que  $z \in K$  vérifie également  $\|z\| = d$ , et considérons la suite  $x_{2n} = y, x_{2n+1} = z$ , nous venons de démontrer qu'elle converge, l'unicité de la projection et résulte. □

**Corollaire F.11** Si  $\varphi \in E'$  et  $\|\varphi\|_{E'} = 1$ , alors  $\exists y \in E$  unique vérifiant

$$\langle \varphi, y \rangle_{E', E} = \|y\|_E = 1.$$

DÉMONSTRATION. Posons  $F = \{t \mid \langle \varphi, t \rangle = 1\}$ , c'est un sous-espace affine fermé de  $E$ , et il est clair que  $\|t\| \geq 1, \forall t \in F$ . Soit par ailleurs  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $s_n$  tel que  $|\langle \varphi, s_n \rangle| > (n - 1) \|s_n\| / n$ , et en posant  $t_n = s_n / \langle \varphi, s_n \rangle$ , on obtient une suite  $t_n \in F$  vérifiant  $\|t_n\| < n / (n - 1)$  ; il en résulte que  $\inf_{t \in F} \|t\| = 1$ . C'est dire, d'après la proposition F.9 qu'il existe  $y$  unique qui vérifie  $\langle \varphi, y \rangle = 1 = \|y\|$ . □

### F.3.1 Les inégalités de Clarkson

#### Lemme F.12

- (i) Si  $p \in [2, +\infty[$ , on a  $|a + b|^p + |a - b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$ .  
(ii) Si  $p \in ]1, 2]$ , on a  $|a + b|^p + |a - b|^p \geq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons la fonction

$$f(x) = \left(1 + x^{1/p}\right)^p + \left(1 - x^{1/p}\right)^p, \quad x \in ]0, 1]$$

on a

$$f'(x) = \left(x^{-1/p} + 1\right)^{p-1} - \left(x^{-1/p} - 1\right)^{p-1}$$

et, avec  $1/p + 1/q = 1$ ,

$$f''(x) = \frac{x^{-1-1/p}}{q} \left[ \left(x^{-1/p} + 1\right)^{p-2} - \left(x^{-1/p} - 1\right)^{p-2} \right]$$

▷ Pour  $p \in [2, +\infty[$ , il en résulte que  $f''(x) \leq 0$ , et comme  $f'(1) = 2^{p-1}$ ,  $f'(x) \geq 2^{p-1}$ . Comme  $f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t) dt$ , et  $f(1) = 2^p$ , il en résulte que  $f(x) \leq 2^{p-1} (1 + x)$ .

▷ De même, si  $p \in ]1, 2]$ , on obtient  $f''(x) \geq 0$ , et finalement  $f(x) \geq 2^{p-1} (1 + x)$ .

▷ Comme la formule annoncée est symétrique relativement au couple  $(a, b)$ , on peut supposer  $|b| \leq |a|$ . Posant  $x = (|b|/|a|)^p$ , on constate que

$$(|a| + |b|)^p + (|a| - |b|)^p = |a|^p f(x)$$

et

$$2^{p-1} (|a|^p + |b|^p) = 2^{p-1} |a|^p (1 + x).$$

Comme de plus

$$|a + b|^p + |a - b|^p = (|a| + |b|)^p + (|a| - |b|)^p,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} |a + b|^p + |a - b|^p &\leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p) \quad \text{pour } p \in [2, +\infty[, \text{ et} \\ |a + b|^p + |a - b|^p &\geq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p) \quad \text{pour } p \in ]1, 2]. \end{aligned}$$

□

**Lemme F.13** Si  $1/p + 1/q = 1$ , alors

- (i) Pour  $p \in ]1, 2]$ , on a  $|a + b|^q + |a - b|^q \geq 2 (|a|^p + |b|^p)^{q/p}$ .  
(ii) Pour  $p \in [2, +\infty[$ , on a  $|a + b|^q + |a - b|^q \leq 2 (|a|^p + |b|^p)^{q/p}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Examinons tout d'abord le cas  $p \in ]1, 2]$ . Comme la formule proposée est symétrique, on peut faire l'hypothèse que  $|a| \geq |b|$  et poser  $x = |b|/|a|$ . D'après le lemme F.15 on aura

$$\left(1 + \frac{|b|}{|a|}\right)^q + \left(1 - \frac{|b|}{|a|}\right)^q \leq 2 \left(1 + \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^p\right)^{q/p},$$

soit

$$|a + b|^q + |a - b|^q = (|a| + |b|)^q + (|a| - |b|)^q \leq 2(|a|^p + |b|^p)^{q/p}.$$

▷ Dans le cas où  $p \in [2, +\infty[$ , on pose  $p' = q$ ,  $q' = p$ ,  $a' = a + b$ , et  $b' = a - b$ , et on applique le résultat de l'item précédent, soit

$$|a' + b'|^{q'} + |a' - b'|^{q'} \geq 2 \left(|a'|^{p'} + |b'|^{p'}\right)^{q'/p'},$$

ou encore

$$|a|^{q'} + |b|^{q'} \geq 2^{1-q'} \left(|a + b|^{p'} + |a - b|^{p'}\right)^{q'/p'},$$

et par conséquent

$$\left(|a|^{q'} + |b|^{q'}\right)^{p'/q'} \geq 2^{-1} \left(|a + b|^{p'} + |a - b|^{p'}\right),$$

c'est-à-dire

$$2(|a|^p + |b|^p)^{q/p} \geq |a + b|^q + |a - b|^q.$$

□

**Lemme F.14** Si  $1 > x > 0$ , la fonction  $f(s) = (1 - x^s)/s$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

DÉMONSTRATION. On a

$$f'(s) = (g(x^s) - 1)/s^2 \text{ avec } g(t) = t(1 - \text{Log } t).$$

La fonction  $g$  étant croissante sur  $]0, 1]$  et son maximum étant égal à  $g(1) = 1$ , on aura  $g(x^s) \leq 1 \forall x \in ]0, 1[$  et par conséquent  $f'(s) \leq 0$ .

□

**Lemme F.15** Pour  $p \in ]1, 2]$ , et  $1/p + 1/q = 1$ , on a

$$(1 + x)^q + (1 - x)^q \leq 2(1 + x^p)^{q/p}, \forall x \in [0, 1].$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $x = (1 - y)/(1 + y)$ , la correspondance entre  $x$  et  $y$  est décroissante et bijective  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , et l'inégalité annoncée équivaut à

$$2^{q-1}(1 + y^q) \leq ((1 + y)^q + (1 - y)^q)^{q/p}, \forall y \in [0, 1],$$

soit encore, puisque  $p > 1$ ,

$$2^{(q-1)(p-1)}(1 + y^q)^{p-1} \leq ((1 + y)^q + (1 - y)^q)^{(p-1)q/p}, \forall y \in [0, 1],$$

ce qui nous conduit à démontrer que

$$\frac{1}{2}(1 + y)^q + (1 - y)^q - (1 + y^q)^{p-1} \geq 0, \forall y \in [0, 1].$$

▷ On peut développer le membre de gauche en série entière dans le disque de rayon 1, on obtient, avec  $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1+y)^q + (1-y)^q - (1+y^q)^{p-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{p}{n} (y^n + (-y)^n) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{p-1}{n} y^{nq} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{p}{2n} y^{2n} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{p-1}{2n} y^{2nq} - \sum_{n \geq 1} \binom{p-1}{2n-1} y^{(2n-1)q} \\ &= \sum_{n \geq 1} \binom{p}{2n} y^{2n} - \binom{p-1}{2n} y^{2nq} - \binom{p-1}{2n-1} y^{(2n-1)q}. \end{aligned}$$

Le terme général de cette somme s'écrit encore

$$\begin{aligned} & \binom{p-1}{2n-1} y^{2n} \left[ \frac{p}{2n} - \frac{p-2n}{2n} y^{2n(q-1)} - y^{2n(q-1)-q} \right] \\ &= \binom{p-1}{2n-1} y^{2n} \left[ \frac{p-2n}{2n} (1 - y^{2n/(p-1)}) + 1 - y^{(2n-p)/(p-1)} \right] \\ &= \frac{p-2n}{p-1} \binom{p-1}{2n-1} y^{2n} \left[ \frac{p-1}{2n} (1 - y^{2n/(p-1)}) - \frac{p-1}{2n-p} (1 - y^{(2n-p)/(p-1)}) \right]. \end{aligned}$$

On constate alors que d'une part

$$\begin{aligned} \frac{p-2n}{p-1} \binom{p-1}{2n-1} &= \frac{(p-2)(p-3) \cdots (p-2n+1)(p-2n)}{(2n-1)!} \\ &\leq 0, \text{ car } p \leq 2, \end{aligned}$$

et

$$\frac{p-1}{2n} (1 - y^{2n/(p-1)}) - \frac{p-1}{2n-p} (1 - y^{(2n-p)/(p-1)}) \leq 0,$$

en vertu du lemme F.14, puisque  $p > 1$ .

▷ Tous les termes de son développement étant positifs, on en déduit que la fonction  $\frac{1}{2} (1+y)^q + (1-y)^q - (1+y^q)^{p-1}$  est positive. □

**Lemme F.16 (Inégalité de Hölder inverse)** Si  $p \in ]0, 1[$ , et  $1/p + 1/q = 1$ , alors,  $\forall f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , si  $fg$  est intégrable,

$$\int |fg| d\mu \geq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

DÉMONSTRATION. On pose  $\varphi = |g|^{-p}$  et  $\psi = |fg|^p$ , on aura  $\psi \in L^h$ , avec  $h = 1/p$ , et  $\varphi \in L^j$  avec  $j = -q/p = 1-p$ . Comme  $1/j + 1/h = 1$ , on peut appliquer l'inégalité de Hölder, et on obtient

$$\left( \int |\varphi\psi| d\mu \right) \leq \left( \int |\varphi|^j d\mu \right)^{1/j} \left( \int |\psi|^h d\mu \right)^{1/h},$$

soit

$$\int |f|^p d\mu \leq \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1-p} \left( \int |fg| d\mu \right)^p,$$

ou encore

$$\left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |g|^q d\mu \right)^{-1/q} \int |fg| d\mu.$$

□

**Lemme F.17 (Inégalité de Minkovski inverse)** Si  $p \in ]0, 1[$ , alors,  $\forall f, g \in L^p$ ,

$$\left( \int (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION. Si nous appliquons l'inégalité inverse de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int (|f| + |g|)^p d\mu &= \int (|f| + |g|)^{p-1} (|f| + |g|) d\mu \\ &= \int (|f| + |g|)^{p-1} |f| d\mu + \int (|f| + |g|)^{p-1} |g| d\mu \\ &\geq \left( \int (|f| + |g|)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \left[ \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right] \\ &= \left( \int (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{1/q} \left[ \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right], \end{aligned}$$

soit

$$\left( \int (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

□

**Proposition F.18 (Inégalités de Clarkson)** Si  $f, g \in L^p$ , alors

(i) Si  $p \in [2, +\infty[$ , on a

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad (\text{F.1})$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \geq \left[ \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \right]^{q-1} \quad (\text{F.2})$$

(ii) Pour  $p \in ]1, 2]$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \leq \left[ \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \right]^{q-1} \quad (\text{F.3})$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \geq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad (\text{F.4})$$

DÉMONSTRATION.

- ▷ Les inégalités (F.1) et (F.4) découlent directement du lemme F.12.
- ▷ D'après l'inégalité de Minkovski, pour  $p \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q &= \left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^q \right\|_{L^{p-1}} + \left\| \left| \frac{f-g}{2} \right|^q \right\|_{L^{p-1}} \\ &\geq \left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^q + \left| \frac{f-g}{2} \right|^q \right\|_{L^{p-1}} \\ &= \left( \int \left( \left| \frac{f+g}{2} \right|^q + \left| \frac{f-g}{2} \right|^q \right)^{p/q} d\mu \right)^{1/(p-1)} \\ &\geq \left( \frac{1}{2} \int |f|^p + |g|^p d\mu \right)^{1/(p-1)} \end{aligned}$$

d'après le lemme F.13, soit l'inégalité (F.2) :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \geq \frac{1}{2} \left( \|f\|_p + \|g\|_p \right)^{p/(p-1)}.$$

- ▷ Enfin l'inégalité de Minkovski inverse permet d'écrire, pour  $p \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q &\leq \left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^q + \left| \frac{f-g}{2} \right|^q \right\|_{L^{p-1}} \\ &= \left( \int \left( \left| \frac{f+g}{2} \right|^q + \left| \frac{f-g}{2} \right|^q \right)^{p/q} d\mu \right)^{1/(p-1)} \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \int |f|^p + |g|^p d\mu \right)^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

selon le lemme F.13, d'où découle l'inégalité (F.3).

□

**Théorème F.19** Pour  $p \in ]1, \infty[$ , les espaces  $L^p$  sont uniformément convexes.

DÉMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$ , supposons que  $\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$ , avec  $\|f\|_{L^p} \leq 1$  et  $\|g\|_{L^p} \leq 1$ .

- ▷ Pour  $p \geq 2$ , on déduit de l'inégalité (F.3) de la proposition F.18 que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^q \leq 1 - \frac{1}{q} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^q,$$

puisque  $(1-t)^{1/p} \leq 1-t/p$ .

- ▷ Pour  $p \leq 2$ , on utilise l'inégalité (F.1), et on obtient

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \leq 1 - \frac{1}{p} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p.$$

□

## F.4 Dualité

Il s'agit ici de décrire l'ensemble des applications linéaires continues  $L^p \rightarrow \mathbb{R}$ , ou *dual topologique* de  $L^p$ , noté  $(L^p)'$ ; il est lui-même muni de la norme, dite *norme du dual fort* :

$$\|T\|_{(L^p)'} = \sup_{\substack{g \in L^p \\ g \neq 0}} \frac{|T(g)|}{\|g\|_{L^p}}.$$

**Théorème F.20** Pour  $p \in [1, +\infty[$ , et  $1/p + 1/q = 1$ , l'application  $T : L^q \rightarrow (L^p)'$  définie par

$$\langle T(f), g \rangle_{(L^p)', L^q} = \int fg \, d\mu,$$

est un isomorphisme, et même en fait une isométrie. De façon abrégée, on note  $(L^p)' = L^q$ . Si  $p = 1$ , on a  $q = \infty$ , et en fait  $(L^1)' = L^\infty$ .

Là encore, la démonstration dépend cruciallement de  $p$ , et nous traiterons les divers cas successivement, notons que le cas  $p = 2$  peut être abordé de façon plus élémentaire et sera revu ultérieurement dans le chapitre relatif aux espaces de Sobolev. Le résultat est *faux* pour  $p = +\infty$  :  $L^1$  s'identifie à un sous-ensemble *strict* du dual de  $L^\infty$ .

DÉMONSTRATION DU CAS  $p > 1$

▷ Montrons que  $T(f) \in (L^p)'$ , c'est une conséquence de l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \left| \int fg \, d\mu \right| &\leq \int |fg| \, d\mu \\ &\leq \left( \int |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \left( \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $T(f) \in (L^p)'$  et  $\|T(f)\|_{(L^p)'} \leq \|f\|_{L^q}$ .

▷ Réciproquement,  $\forall g \in L^p$ , on a  $\|T(f)\|_{(L^p)'} \geq |\int fg \, d\mu| / \|g\|_{L^p}$ , soit avec  $g(x) = |f(x)|^{q-1} \times \operatorname{sgn} f(x)$ , (qui appartient à  $L^p$ , puisque  $p(q-1) = q$ ),

$$\|T(f)\|_{(L^p)'} \geq \|f\|_{L^q}^q / \|f\|_{L^q}^{q/p} = \|f\|_{L^q}.$$

On a donc montré que  $T$  est une isométrie.

▷ Il reste à démontrer que  $T$  est surjective :  $L^q \rightarrow (L^p)'$ . Soit donc  $\varphi \neq 0$  dans  $(L^p)'$ , qu'on pourra choisir de norme 1. D'après le corollaire F.11, il existe  $f \in L^p$  unique telle que  $\langle \varphi, f \rangle_{(L^p)', L^p} = \|\varphi\|_{(L^p)'} = 1$ , mais le lemme F.21 ci-dessous nous montre alors que  $\varphi = T(g)$  où  $g(x) = |f(x)|^{p-1} \times \operatorname{sgn} f(x)$ .

□



**Lemme F.21** Si  $f \in L^p$  et  $\|f\|_{L^p} = 1$ , alors  $\psi = T(g)$ , où  $g(x) = |f(x)|^{p-1} \times \operatorname{sgn} f(x)$ , est l'unique élément de  $(L^p)'$  vérifiant  $\|\psi\|_{(L^p)'} = \langle \psi, f \rangle_{(L^p)', L^p} = 1$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $g(x) = |f(x)|^{p-1} \times \operatorname{sgn} f(x)$ , on aura  $g \in L^q$ , puisque  $q(p-1) = p$ , et si on choisit  $\psi = T(g)$ , on obtient  $\langle \psi, f \rangle = \|f\|_{L^p} = 1$  ; comme de plus  $T$  est une isométrie, on aura  $\|\psi\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} = 1$ .

▷ La difficulté consiste à démontrer l'unicité. Supposons donc qu'il existe  $\psi_1 \neq \psi_2 \in (L^p)'$  tels que  $\|\psi_1\|_{(L^p)'} = \|\psi_2\|_{(L^p)'} = \langle \psi_1, f \rangle = \langle \psi_2, f \rangle = 1$ . On peut alors trouver  $h' \in L^p$  tel que  $\langle \psi_1, h' \rangle \neq \langle \psi_2, h' \rangle$ , et même au prix d'une éventuelle homothétie,  $\langle \psi_1, h' \rangle - \langle \psi_2, h' \rangle = 2$ . Posons  $h = \lambda f + h'$ , un choix judicieux de  $\lambda$  permet d'obtenir  $\langle \psi_1, h \rangle = 1$  et  $\langle \psi_2, h \rangle = -1$ . On aura alors  $\langle \psi_1, f + \mu h \rangle = 1 + \mu$ , et par conséquent, comme  $\|\psi_1\|_{(L^p)'} = 1$ ,  $\|f + \mu h\|_{L^p} \geq 1 + \mu$ . De même  $\langle \psi_2, f - \mu h \rangle = 1 + \mu$ , d'où  $\|f - \mu h\|_{L^p} \geq 1 + \mu$ .

▷ Considérons tout d'abord le cas où  $p \in ]1, 2]$ , d'après l'inégalité (F.4) du lemme F.15, on a

$$\begin{aligned} 1 + \mu^p \|h\|_{L^p}^p &= \left\| \frac{(f + \mu h) + (f - \mu h)}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{(f + \mu h) - (f - \mu h)}{2} \right\|_{L^p}^p \\ &\geq \frac{1}{2} (\|f + \mu h\|_{L^p}^p + \|f - \mu h\|_{L^p}^p) \\ &\geq (1 + \mu)^p, \quad \forall \mu. \end{aligned}$$

C'est impossible, car  $\mu \rightarrow 1 + \mu^p \|h\|_{L^p}^p$  a pour pente 0 à l'origine, tandis que  $\mu \rightarrow (1 + \mu)^p$  a pour pente  $p$ .

▷ Considérons maintenant le cas où  $p \in [2, +\infty[$ , d'après l'inégalité (F.2) du lemme F.15, avec  $1/p + 1/q = 1$ , on a

$$\begin{aligned} 1 + \mu^p \|h\|_{L^p}^p &\geq \left[ \frac{1}{2} (\|f + \mu h\|_{L^p}^p + \|f - \mu h\|_{L^p}^p) \right]^{q-1} \\ &\geq (1 + \mu)^{p(q-1)} = (1 + \mu)^q, \quad \forall \mu, \end{aligned}$$

ce qui constitue comme précédemment une contradiction. □

DÉMONSTRATION DU CAS  $p = 1$

▷ Montrons que  $T(f)$  est continue sur  $L^1$ . On a

$$\langle T(f), g \rangle = \int f g d\mu \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1},$$

et par conséquent  $\|T(f)\|_{(L^1)'} \leq \|f\|_{L^\infty}$ .

▷ Montrons que  $T$  est une isométrie. Si  $\|f\|_{L^\infty} \neq 0$ ,  $\exists C$  tel que  $0 < C \leq \|f\|_{L^\infty}$  et  $|E| \neq 0$ , où  $E = \{x \mid |f(x)| \geq C\}$ ; quitte à réduire  $E$ , on peut même choisir  $|E| < +\infty$ . Posons alors  $g(x) = \chi_E(x) \operatorname{sgn} f(x)$ , on aura

$$\frac{\int f g d\mu}{\|g\|_{L^1}} = \frac{\int_E |f| d\mu}{|E|} \geq C,$$

et par conséquent  $\int f g d\mu \geq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$ . Il en résulte que  $\|T(f)\|_{(L^1)'} \geq \|f\|_{L^\infty}$ .

▷ Pour démontrer la surjectivité, commençons par considérer le cas d'un domaine  $\Omega$  vérifiant  $|\Omega| < +\infty$ . Soit  $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ , comme  $|\Omega| < +\infty$ , on aura  $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ ,  $\forall p \geq 1$ , et  $\varphi|_{L^p(\Omega)} \in (L^p(\Omega))'$ , puisque

$$\begin{aligned} \left| \langle \varphi|_{L^p(\Omega)}, u \rangle \right| &\leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} \|u\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{1/q}, \end{aligned}$$

soit

$$\left\| \varphi|_{L^p(\Omega)} \right\|_{(L^p(\Omega))'} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} |\Omega|^{1/q},$$

d'après l'inégalité de Hölder. Il en résulte d'après la première partie de la démonstration qu'il existe  $f \in L^q(\Omega)$  tel que

$$\langle \varphi|_{L^p(\Omega)}, u \rangle = \int_{\Omega} f u \, d\mu, \forall u \in L^p(\Omega).$$

Comme il s'agit d'une isométrie, nous aurons

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} = \left\| \varphi|_{L^p(\Omega)} \right\|_{(L^p(\Omega))'} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} |\Omega|^{1/q}.$$

▷ Un autre choix nous aurait conduit à l'existence de  $f' \in L^{q'}(\Omega)$  tel que

$$\langle \varphi|_{L^{p'}(\Omega)}, u \rangle = \int_{\Omega} f u \, d\mu, \forall u \in L^{p'}(\Omega),$$

et comme  $L^\infty(\Omega) \subset \cap_{p \geq 1} L^p(\Omega)$ , on aura  $\int_{\Omega} (f - f') v \, d\mu, \forall v \in L^\infty(\Omega)$ , soit en fait  $f = f'$ , comme on le voit en prenant  $v(x) = \text{sgn}(f(x) - f'(x))$ . Il en résulte que  $f \in \cap_{q \geq 1} L^q(\Omega)$ , et comme  $\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} |\Omega|^{1/q}, \forall q \geq 1$ , on aura  $f \in L^\infty(\Omega)$ , d'après le lemme F.22 ci-dessous.

▷ Il reste à montrer que  $\langle \varphi, u \rangle = \int_{\Omega} f u \, d\mu, \forall u \in L^1(\Omega)$ . Soit donc  $u \in L^1(\Omega)$ , posons  $u_n(x) = u(x)$  pour  $|u(x)| \leq n$ , et  $u_n(x) = n \text{sgn} u(x)$  pour  $|u(x)| \geq n$ . Il est clair que  $u_n \in \cap_{p \geq 1} L^p(\Omega)$ , et que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^1(\Omega)$ ; par conséquent  $\langle \varphi, u_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$ . Mais par ailleurs,  $f u_n \rightarrow f u$  dans  $L^1(\Omega)$ , puisque  $f \in L^\infty(\Omega)$ , soit en fait  $\langle \varphi, u_n \rangle = \int_{\Omega} f u_n \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f u \, d\mu$ ; c'est dire que  $\langle \varphi, u \rangle = \int_{\Omega} f u \, d\mu$ .

▷ Considérons maintenant le cas où  $\Omega$  n'est pas borné, et posons  $\Omega_n = \{x \in \Omega \mid \|x\| < n\}$ . Si  $f_n$  est définie sur  $\Omega_n$ , nous noterons  $\tilde{f}_n$  son prolongement par 0 à  $\Omega$ , et si  $f_n \in L^1(\Omega_n)$ , alors  $\tilde{f}_n \in L^1(\Omega)$ . Soit maintenant  $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ , l'application  $\varphi_n : f_n \rightarrow \langle \varphi, \tilde{f}_n \rangle$  appartient à  $(L^1(\Omega_n))'$ , car

$$|\langle \varphi_n, f_n \rangle| = \left| \langle \varphi, \tilde{f}_n \rangle \right| \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} \|\tilde{f}_n\|_{L^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} \|f_n\|_{L^1(\Omega_n)}.$$

Comme  $|\Omega_n| < +\infty$ , on peut appliquer le résultat de l'item précédent, et par conséquent  $\exists g_n \in L^\infty(\Omega_n)$  tel que  $\langle \varphi, \tilde{f}_n \rangle = \int_{\Omega_n} g_n f_n \, d\mu, \forall f_n \in L^1(\Omega_n)$ . On sait de plus que  $\|\varphi_n\|_{(L^1(\Omega_n))'} = \|g_n\|_{L^\infty(\Omega_n)}$ , et par conséquent  $\|g_n\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$ .

▷ De même  $\exists g_{n+1} \in L^\infty(\Omega_{n+1})$  tel que  $\langle \varphi, \tilde{f}_{n+1} \rangle = \int_{\Omega_{n+1}} g_{n+1} f_{n+1} d\mu, \forall f_{n+1} \in L^1(\Omega_{n+1})$ , et comme  $f_{n+1}|_{\Omega_n} \in L^1(\Omega_n)$ , on en déduit que  $\int_{\Omega_n} g_{n+1}|_{\Omega_n} f_n d\mu = \int_{\Omega_n} g_n f_n d\mu, \forall f_n \in L^1(\Omega_n)$ . Comme  $|\Omega_n| < +\infty$ , avec  $f_n = g_{n+1}|_{\Omega_n} - g_n$ , il en résulte que  $g_{n+1}|_{\Omega_n} = g_n$ .

▷ Il existe donc une fonction  $g$  définie sur  $\Omega$  qui vérifie  $g|_{\Omega_n} = g_n$ , et par conséquent  $\langle \varphi, \tilde{f}_n \rangle = \int_{\Omega_n} g|_{\Omega_n} f_n d\mu, \forall f_n \in L^1(\Omega_n)$ . Comme de plus  $\sup_n \|g_n\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$ , on aura  $g \in L^\infty(\Omega)$ , avec  $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$ .

▷ Soit maintenant  $f \in L^1(\Omega)$ , on aura  $\chi_{\Omega_n} f \rightarrow f$  dans  $L^1(\Omega)$ , et par conséquent  $\langle \varphi, \chi_{\Omega_n} f \rangle \rightarrow \langle \varphi, f \rangle$ ; comme de plus  $\langle \varphi, \chi_{\Omega_n} f \rangle = \int_{\Omega_n} g|_{\Omega_n} f d\mu = \int_{\Omega} g \chi_{\Omega_n} f d\mu \rightarrow \int_{\Omega} g f d\mu$ , il en résulte que  $\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} g f d\mu, \forall f \in L^1(\Omega)$ .

□

**Lemme F.22** Si  $f \in L^p$  et si  $\exists C, K$  tels que  $\|f\|_{L^p} \leq CK^{1/p} \forall p \in ]1, +\infty[$ , alors  $f \in L^\infty$  et  $\|f\|_{L^\infty} \leq C$ .

DÉMONSTRATION. Choisissons  $C' > C$  et notons  $E' = \{x \mid |f(x)| \geq C'\}$ . On aura

$$(C')^p |E'| \leq \int_{E'} |f(x)|^p d\mu \leq \int |f(x)|^p d\mu \leq C^p K,$$

et par conséquent  $|E'| \leq K(C/C')^p, \forall p \in ]1, +\infty[$ ; soit en fait  $|E'| = 0$ . Il en résulte que  $f \in L^\infty$  et  $\|f\|_{L^\infty} \leq C$ .

□

## F.5 Compacité

Si  $\Omega$  est un ouvert, on dit que  $\omega$  est fortement inclus dans  $\Omega$  si  $\bar{\omega}$  est compact et  $\bar{\omega} \subset \Omega$ ; on notera  $\omega \Subset \Omega$ .

**Définition F.23** On dira que le sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $L^2(\Omega)$  est équicontinu, au sens de  $L^2(\omega)$  si

$$\forall \eta > 0, \exists \delta, \text{ tel que } |h| \leq \delta \implies \|\tau_h f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \eta, \forall f \in \mathcal{F}. \quad (\text{F.5})$$

**Théorème F.24 (Fréchet, Kolmogorov)** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  un ensemble de fonctions nulles à l'extérieur de  $\Omega$ , borné dans  $L^2(\Omega)$ . Soit  $\omega \Subset \Omega$  tel que  $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$  et  $\mathcal{F}$  soit équicontinu dans  $L^2(\omega)$ , alors  $\mathcal{F}|_\omega$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\theta_\varepsilon$  une approximation de l'identité, posons  $f_\varepsilon = f * \theta_\varepsilon$  et  $\mathcal{F}^\varepsilon = \{f_\varepsilon \mid f \in \mathcal{F}\}$ , où  $|\varepsilon| \leq d$ , et choisissons  $\rho > 0$ .

▷ Tout d'abord, on aura

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) f(x - \varepsilon z) dz, \quad (\text{F.6})$$

d'où

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) (f(x - \varepsilon z) - f(x)) dz \\ &= \int_{|z| < 1} \theta(z) (\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)) dz, \end{aligned}$$

et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)|^2 \leq \int_{|z| < 1} |\theta(z)|^2 dz \int_{|z| < 1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2 dz,$$

Par conséquent, selon le théorème de Fubini

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \int_{\omega} dx \int_{|z| < 1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2 dz = C \int_{|z| < 1} \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^2(\omega)}^2 dz.$$

A l'aide de (F.5), on en déduit que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on aura

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(\omega)} \leq \rho, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (\text{F.7})$$

▷ Montrons alors que  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$  est un ensemble borné et équicontinu dans  $\mathcal{C}(\bar{\omega})$ . Selon (F.6) on aura d'une part

$$|f_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = C\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq C'\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{F.8})$$

et d'autre part, comme

$$\left| \theta\left(\frac{x' - y}{\varepsilon}\right) - \theta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right| \leq \frac{\|x' - x\|}{\varepsilon} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|D\theta(z)\|,$$

il en résulte que

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| = M\varepsilon^{1-n} \|x' - x\| \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq M'\varepsilon^{1-n} \|x' - x\| \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

▷ On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli à  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$ , qui se trouve donc être relativement compact dans  $\mathcal{C}(\bar{\omega})$ , et à plus forte raison dans  $L^2(\omega)$ , puisque  $\mathcal{C}(\bar{\omega}) \subseteq L^2(\omega)$ , et que l'image continue d'un compact est compacte. De la compacité relative de  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$ , il résulte que  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$  peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon  $\rho$  dans  $L^2(\omega)$ , et de la formule (F.7) que les boules correspondantes de rayon  $2\rho$  recouvrent  $\mathcal{F}_{|\omega}$ . Comme  $L^2(\omega)$  est complet, on en déduit que  $\mathcal{F}_{|\omega}$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ . □

**Corollaire F.25** *Si les hypothèses du théorème F.24, sont vérifiées  $\forall \omega \Subset \Omega$ , et si  $\forall \varepsilon, \exists \omega \Subset \Omega$  tel  $\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$ , alors  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $\omega$  tel que  $\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$ . D'après le théorème F.24,  $\mathcal{F}_{|\omega}$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ , et par conséquent  $\mathcal{F}_{|\omega}$  peut être recouvert par un nombre fini de boules  $B_\varepsilon(g_i)$  de rayon  $\varepsilon$  dans  $L^2(\omega)$ . Si  $\tilde{g}_i$  note le prolongement de  $g_i$  par 0 à l'extérieur de  $\omega$ , les  $B_{2\varepsilon}(\tilde{g}_i)$  recouvrent alors  $\mathcal{F}$ . La compacité relative de  $\mathcal{F}$  dans  $L^2(\Omega)$  en résulte. □



# Troisième partie

## Distributions



# Chapitre 7

## Propriétés élémentaires

### 7.1 Introduction

De façon purement formelle, nous allons tenter dans un premier temps de décrire une utilisation classique des distributions ; nous choisirons un exemple simple mais d'une grande importance : soit  $f$  une fonction définie dans le plan, nous cherchons une fonction  $\varphi$  qui vérifie  $\Delta\varphi = f$ .

Ce qui est bien tentant c'est d'utiliser la propriété fondamentale de la convolution :

$$\forall g, \Delta(g * f) = \Delta g * f.$$

Si  $\Delta g$  est élément neutre de la convolution, alors  $\varphi = g * f$  constitue une solution du problème. Il s'agit donc de déterminer une fonction  $d$  qui soit élément neutre de la convolution et de résoudre une fois pour toutes (c'est-à-dire sans qu'intervienne le second membre  $f$ ) l'équation  $\Delta g = d$ , dans laquelle  $g$  est la fonction inconnue. On aura alors

$$\Delta(g * f) = d * f = f$$

La difficulté pour réaliser ce beau programme, c'est qu'il n'existe pas de fonction qui soit élément neutre de la convolution, nous le constaterons ultérieurement. Faut-il définitivement baisser les bras ?

En fait le problème a été résolu au prix d'un détour que nous allons décrire ci-dessous. Dans un premier temps on crée de toutes pièces un ensemble d'objets (les distributions) tel que l'ensemble des fonctions 'raisonnables' soit en correspondance bijective, (notée  $T$ ) avec une partie  $\mathcal{F}$  de l'ensemble des distributions.

Dans un second temps, on transporte sur  $\mathcal{F}$  les opérations de dérivation et de convolution par les formules suivantes, qui constituent une *définition* des opérateurs  $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{*}$  :

$$\tilde{\Delta}T(\psi) = T(\Delta\psi) \text{ et } T(\varphi)\tilde{*}T(\psi) = T(\varphi * \psi) \text{ où } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont des fonctions}$$

Comme on a été habile dans la construction de l'ensemble des distributions et de l'injection  $T$ , ces opérations se prolongent aux distributions, et la formule fondamentale

$$\tilde{\Delta}(\Phi\tilde{*}\Psi) = \tilde{\Delta}\Phi\tilde{*}\Psi \text{ où } \Phi \text{ et } \Psi \text{ sont des distributions.}$$



reste valable pour ce prolongement.

Dans un troisième temps, on transporte par  $T$  notre problème au sein des distributions, soit donc à résoudre  $\tilde{\Delta}\Phi = T(f)$ . On cherche parmi les distributions l'élément neutre de  $\tilde{*}$ , et là on le trouve (c'est en fait la mesure de Dirac  $\delta$ ). Il ne reste plus qu'à opérer suivant le schéma proposé : on détermine une distribution  $G$  telle que  $\tilde{\Delta}G = \delta$  et on obtient, comme prévu

$$\tilde{\Delta}(G\tilde{*}T(f)) = T(f).$$

On bénéficie maintenant d'un (modeste) miracle : il se trouve qu'il existe une fonction  $g$  telle que  $G = T(g)$ , on aura donc  $\tilde{\Delta}(T(g)\tilde{*}T(f)) = T(f)$ , soit

$$T(\Delta(g * f)) = \tilde{\Delta}(T(g * f)) = \tilde{\Delta}(T(g)\tilde{*}T(f)) = T(f),$$

et comme  $T$  est une injection

$$\Delta(f * g) = f.$$

On voit donc que *le résultat ne fait intervenir que des fonctions* et des opérations entre fonctions, et qu'il n'a pourtant été obtenu grâce à un calcul relatif aux distributions, d'ailleurs,  $g$  n'est pas dérivable, et on ne pourra pas parler de la fonction  $\Delta g$ . Si on y réfléchit un peu on constate que cette démarche n'est pas aussi originale qu'il y paraît, ne démontre-t-on pas qu'une matrice réelle symétrique est diagonalisable à l'aide d'un raisonnement faisant intervenir les nombres complexes ?

La formulation avec les  $T$  et les  $\tilde{\cdot}$  est particulièrement lourde, les mathématiciens ne s'embarrassent généralement pas de scrupules, ils disent qu'ils *identifient* les fonctions avec des distributions, et omettent le  $T$  ; de plus ils notent de la même façon les opérateurs et leurs transportés, faisant disparaître le  $\tilde{\cdot}$ . Finalement on aboutit à une formulation résumée de la démarche qui vient d'être décrite, sous la forme suivante : puisque  $g$  est solution de  $\Delta g = \delta$  *au sens des distributions*, on a  $\Delta(g * f) = f$ .

Bien entendu, tout ceci est purement formel, et dans la vie réelle, on doit construire soigneusement les nouveaux objets mathématiques à partir des anciens, et s'assurer que toutes les propriétés nécessaires sont vérifiées, c'est ce qu'on appelle la théorie des distributions. Sa forme actuelle est due à Laurent Schwartz et date des années 50, le développement considérable des connaissances relatives aux équations aux dérivées partielles (qui sont universellement utilisées en mécanique et en physique) lui doit beaucoup.

## 7.2 Divers types de distributions

Les distributions constituent une généralisation des mesures de Radon. Dans l'affaire on va beaucoup perdre, en particulier *la continuité ne résultera plus de la monotonie*, mais on va aussi beaucoup gagner car on va pouvoir généraliser aux distributions la notion de dérivation. Obtenir un espace plus gros que celui constitué par les mesures de Radon en suivant une démarche analogue, revient à considérer les formes linéaires continues sur un espace plus petit que  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ , muni bien entendu d'une topologie plus fine. De façon générale on posera la définition suivante :

**Définition 7.1** Si  $E$  est un espace vectoriel topologique, on appelle dual topologique de  $E$ , et on note  $E'$ , l'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$ .

**Définition 7.2** On appelle distribution d'ordre inférieur ou égal à  $m$  sur l'ouvert  $\Omega$ , un élément du dual  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega)$  de  $\mathcal{D}^m(\Omega)$ . Le dual  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  est tout simplement appelé espace des distributions.

**Remarque 7.3** Les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  sont souvent appelées 'fonctions d'essai', la valeur  $S(\varphi)$  de la distribution  $S$  appliquée à la fonction d'essai  $\varphi$  se note  $\langle S, \varphi \rangle$ . Cette notation est à rapprocher de celle des physiciens qui, dans le cadre de la mécanique quantique, à la suite d'un mauvais jeu de mots, appellent  $\langle S|$  un 'bra' et  $|\varphi\rangle$  un 'ket'.

Dans la pratique, vérifier cette continuité n'est pas trop difficile, nous savons en effet d'après la proposition 5.11, qu'une forme linéaire sur  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  est continue si et seulement si sa restriction à chaque  $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$  est continue pour tout compact  $K \subset \Omega$ . A l'aide du lemme 4.17, on démontre donc aisément la

**Proposition 7.4** Si

$$p_K^m(\psi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|,$$



(i) La forme linéaire  $S \in (\mathcal{D}^m)'(\Omega)$  si et seulement si  $\forall K \subset \Omega$ ,  $\exists C_K > 0$  tel que

$$|\langle S, \psi \rangle| \leq C_K p_K^m(\psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_K^m(\Omega). \quad (7.1)$$

(ii) De même, la forme linéaire  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  si et seulement si  $\forall K \subset \Omega$ ,  $\exists m_K \in \mathbb{N}$  et  $C_K > 0$  tels que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C_K p_K^{m_K}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \quad (7.2)$$

**Remarque 7.5**

(i) Remarquons bien qu'il est plus facile d'être élément de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  que d'appartenir à  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega)$ , en effet on dispose d'une plus grande marge de manœuvre pour réaliser l'estimation (7.2), puisque  $m_K$  n'est pas fixé à l'avance.

(ii) Notons également que, si pour un certain multi-indice  $\alpha$ ,

$$|\langle S, \psi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_K^{|\alpha|}(\Omega),$$

alors, a fortiori  $|\langle S, \psi \rangle| \leq C_K p_K^{|\alpha|}(\psi)$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{D}_K^{|\alpha|}(\Omega)$ , soit  $S \in (\mathcal{D}^{|\alpha|})'(\Omega)$ .

Nous voilà donc à la tête non pas d'un espace de distributions mais d'une collection de tels espaces. Mettons-y un peu d'ordre.

**Lemme 7.6** Si  $S \in (\mathcal{D}^m)'(\Omega)$ , et  $\infty \geq \ell \geq m$ , l'application  $\varphi \in \mathcal{D}^\ell(\Omega) \rightarrow \langle S, \varphi \rangle$  est continue.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que  $\mathcal{D}^\ell(\Omega) \subset \mathcal{D}^m(\Omega)$ , et que par conséquent  $S$  opère bien sur  $\mathcal{D}^\ell(\Omega)$ . De plus l'injection canonique  $\mathcal{I}, \mathcal{D}^\ell(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$  est continue, il en résulte que  $S \circ \mathcal{I}$  est continue sur  $\mathcal{D}^\ell(\Omega)$ . □

◇ On voit donc que les distributions d'ordre inférieur ou égal à  $m$ , et en particulier les mesures de Radon, définissent bien des distributions (prendre  $\ell = \infty$ ) ce qui nous rassure quant à la pertinence du vocabulaire. Pour pouvoir les considérer effectivement comme des sous-espaces de l'ensemble des distributions, il faut s'assurer que deux distributions d'ordre inférieur ou égal à  $m$  différentes ne définissent pas une seule et même distribution. Le résultat essentiel à cet effet est la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^m(\Omega)$ .

**Proposition 7.7** *Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{D}^m(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit donc  $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ , si  $\theta_\varepsilon$  est une approximation de l'identité, alors selon le théorème 6.79, les  $f * \theta_\varepsilon$  sont indéfiniment dérivables et, selon le lemme 6.76, pour  $\varepsilon$  assez petit, ont leur support dans un compact  $K \subset \Omega$  fixe, c'est dire que  $f * \theta_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Le théorème 6.81 nous montre alors que  $f * \theta_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$  et par conséquent dans  $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ . □

**Corollaire 7.8** *L'application  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ , qui à  $S \in (\mathcal{D}^m)'(\Omega)$  fait correspondre la distribution  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \langle S, \varphi \rangle$ , est injective.*

DÉMONSTRATION. Soit en effet  $S \in (\mathcal{D}^m)'(\Omega)$  telle que  $\langle S, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Considérons  $\psi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ , par densité, il existe une suite  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$  qui converge vers  $\psi$  dans  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  ; on aura alors  $\langle S, \psi \rangle = \lim \langle S, \varphi_k \rangle = 0$ . □

On peut se poser la question inverse : comment reconnaître qu'une distribution  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est d'ordre inférieur ou égal à  $m$  ? Il suffit en fait que pour tout  $K$ , compact inclus dans  $\Omega$ ,  $\exists C_K$  tel que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \quad (7.3)$$

La forme linéaire  $S$  sera ainsi continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , muni de la topologie de  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  ; elle se prolongera donc par densité, de façon unique, en un élément de  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega)$ .

Il est donc possible de considérer le fait pour une distribution d'être continue pour la topologie de  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  comme une particularité, lui conférant des propriétés supplémentaires. On appellera distributions d'ordre  $m$  les distributions appartenant à  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega) \setminus (\mathcal{D}^{m-1})'(\Omega)$  ; dans ce cadre les mesures de Radon forment l'ensemble des distributions d'ordre 0.

### 7.2.1 Fonctions localement intégrables

Nous avons annoncé que l'ambition des distributions était de généraliser la notion de fonction, montrons donc comment à *chaque fonction localement intégrable on peut associer une distribution*.

**Lemme 7.9** *Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , la forme linéaire  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx$  est une distribution.*

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\left| \int_{\Omega} f \varphi dx \right| \leq \|f\|_{L^1(\text{Supp } \varphi)} \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|.$$

□

Cette distribution est notée  $T_f$ , ce qui revient à dire que, par définition,

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

**Remarque 7.10** *Ce que nous avons démontré en fait, c'est que  $T_f$  est une mesure de Radon.*

**Lemme 7.11** *L'application  $f \rightarrow T_f$  de  $L^1_{loc}$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est injective, c'est encore dire que si  $T_f = T_g$ , alors  $f = g$  presque partout.*

DÉMONSTRATION. Supposons donc que  $T_h = 0$ , nous avons vu au théorème 6.81 que la suite de fonctions  $h_j = h * \theta_{\varepsilon(j)}$ , où les  $\theta_{\varepsilon}$  forment une approximation de l'identité et  $\varepsilon(j) \rightarrow 0$  quand  $j \rightarrow \infty$ , convergent en moyenne vers  $h$ . Mais

$$h_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \theta_{\varepsilon(j)}(x-z) dz = 0,$$

par hypothèse. Il en résulte que  $h$  est la limite en moyenne d'une suite de fonctions nulles, elle est donc nulle presque partout en vertu du corollaire 6.27.

□

On voit donc que la correspondance entre fonctions localement intégrables et distributions permet d'identifier les fonctions localement intégrables à un sous-espace de l'ensemble des distributions. Dans la pratique une phrase telle que : '*Etant donnée la distribution  $S$ , il existe une fonction localement intégrable  $f$  telle que  $S = T_f$* ' se dira tout simplement '*La distribution  $S$  est une fonction*'. ◇

### 7.2.2 Valeur principale de Cauchy

Les distributions permettent de *manipuler aisément des intégrales qui ne convergent pas*. Etudions par exemple la forme linéaire

$$\varphi \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

C'est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1, (et en fait d'ordre 1). En effet, selon la formule de Taylor rappelée ci-dessous, on aura  $\varphi(t) = \varphi(0) + t \int_0^1 \varphi'(\zeta t) d\zeta$  ; si on choisit  $K \subset B_R(0)$  compact et  $\varphi \in \mathcal{C}_K^1(\mathbb{R})$ , on aura

$$\int_{R>|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_{R>|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{t} dt + \int_{R>|t|>\varepsilon} dt \int_0^1 \varphi'(\zeta t) d\zeta = \int_{R>|t|>\varepsilon} dt \int_0^1 \varphi'(\zeta t) d\zeta,$$

d'où tout d'abord l'existence de la limite, qui n'est autre que  $\int_{R>|t|} dt \int_0^1 \varphi'(\zeta t) d\zeta$  ; on notera

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Mais on aura de plus

$$\left| \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \right| \leq C \sup_{t \in K} |\varphi'(t)|,$$

ce qui montre, d'après (7.3), que  $\text{vp}(1/x) \in (\mathcal{D}'^1)'(\mathbb{R})$ .

**Lemme 7.12 (Formule de Taylor avec reste intégral)**



$$f(x+t) = f(x) + \sum_{k=1, p-1} \frac{1}{k!} D^k f(x) \cdot (t, \dots, t) + \left( \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(x+\zeta t) d\zeta \right) \cdot (t, \dots, t)$$

### 7.3 Topologie faible sur $\mathcal{D}'(\Omega)$

Si on veut aller plus loin, il est nécessaire de définir une notion de convergence sur l'ensemble des distributions. Nous pourrions ainsi par exemple étudier la convergence d'une suite de fonctions localement intégrables vers une distribution et transformer en outil pratique de calcul un certain nombre de notions qui resteraient sinon passablement abstraites.

Le dual d'un espace topologique peut être muni de diverses topologies, l'étude de ces dernières est la théorie de la dualité, la topologie du dual fort n'étant autre que celle de la convergence uniforme sur les parties bornées. Nous n'irons pas aussi loin et nous nous contenterons de la topologie de la convergence simple ou topologie \*-faible qui, dans le cas particulier des espaces de fonctions d'essai auxquels nous avons affaire se révèle suffisante pour nombre d'applications. On montre en effet que, *dans le cas des suites de distributions, convergence faible et convergence forte sont équivalentes*, désormais nous parlerons donc, sans précision supplémentaire, de la *convergence d'une suite de distributions*.



**Définition 7.13** On appelle topologie \*-faible, ou topologie de la convergence simple, sur le dual  $E'$  de l'espace vectoriel topologique  $E$ , la topologie définie par la famille de semi-normes  $p_\varphi(S) = |\langle S, \varphi \rangle|$ , où  $\varphi \in E$ .

Traduisons cette définition en termes plus concrets à l'aide des lemmes 4.10 et 4.17 et du corollaire 4.18 :

**Proposition 7.14** *Si  $E'$  et  $F'$  sont munis de la topologie  $*$ -faible,*

(i) *La suite  $S_k \in E'$  converge vers  $S \in E'$  si et seulement si*

$$\langle S_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in E.$$

*Au lieu de  $S_k \rightarrow S$  (convergence faible), on se permettra alors de noter  $S_k \rightarrow S$ , puisque les deux notions coïncident.*

(ii) *L'application linéaire  $v : F' \rightarrow E'$  est continue si et seulement si  $\forall \varphi \in E$ ,  $S \rightarrow \langle v(S), \varphi \rangle$  est continue sur  $F'$ , soit encore*

$$\forall \varphi \in E, \exists \psi \in F \text{ et } C \text{ tels que } |\langle v(S), \varphi \rangle| \leq C |\langle S, \psi \rangle| \quad \forall S \in F'.$$

*Il en résulte alors en particulier que  $|\langle v(S_k), \varphi \rangle| \rightarrow |\langle v(S), \varphi \rangle| \quad \forall \varphi \in E$  dès que  $S_k \rightarrow S$  dans  $F'$ .*

Nous utiliserons essentiellement ces résultats dans le cas où  $E$  et  $F$  sont des espaces du type  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  ou  $\mathcal{D}(\Omega)$  ; ils peuvent être considérés comme constituant une définition de la notion de convergence dans les espace de distributions.

**Proposition 7.15** *Si  $f_j \rightarrow f$  presque partout, avec  $|f_j| \leq g$ , où  $g \in L^1_{loc}$ , alors*

$$T_{f_j} \rightarrow T_f,$$

*dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. On a en effet  $f_j \varphi \rightarrow f \varphi$  presque partout et  $|f_j \varphi| \leq g |\varphi|$  ; par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\langle T_{f_j}, \varphi \rangle = \int_{\text{Supp } \varphi} f_j \varphi \, dx \rightarrow \int_{\text{Supp } \varphi} f \varphi \, dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

□

En fait il existe un résultat *beaucoup plus fort et extrêmement commode*, découlant du théorème de Banach-Steinhaus :

**Théorème 7.16** *Si les  $S_k$  forment une suite de distributions telle que  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\langle S_k, \varphi \rangle$  converge, alors la suite  $S_k$  converge dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , soit vers  $S$ , et on a*

$$\langle S, \varphi \rangle = \lim \langle S_k, \varphi \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $K$  un compact inclus dans  $\Omega$  ; la restriction de  $\varphi \rightarrow \langle S_k, \varphi \rangle$  à  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est continue, et comme cet espace est métrisable, selon le théorème de Banach-Steinhaus C.16, la restriction de l'application  $\varphi \rightarrow \langle S, \varphi \rangle$  à  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est également continue. Il en résulte que  $S$  est une distribution d'après la proposition 5.10.

□



**Remarque 7.17** *Il faut bien voir ce que ce théorème a d'étonnant. La convergence des diverses suites  $\langle S_k, \varphi \rangle$  de façon indépendante suffit à assurer que la forme linéaire  $\varphi \rightarrow \lim \langle S_k, \varphi \rangle$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  et constitue donc une distribution.* ◇

Etudions la convergence de la suite des distributions  $S_k$  respectivement associées aux fonctions  $f_k$  définies de la façon suivante :  $f_k(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1/k$  et  $f_k(x) = k^2(1/k - |x|)$  sinon. On aura

$$\begin{aligned} \langle T_{f_k}, \varphi \rangle &= \int_{-1/k}^0 k^2 \left( \frac{1}{k} + x \right) \varphi(x) dx + \int_0^{1/k} k^2 \left( \frac{1}{k} - x \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (1+y) \varphi(y/k) dy + \int_0^1 (1-y) \varphi(y/k) dy \end{aligned}$$

et par conséquent  $\langle T_{f_k}, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ , soit  $T_{f_k} \rightarrow \delta$ . On voit donc qu'en fait la mesure de Dirac ne constitue pas un objet trop insolite, puisque ce n'est rien d'autre que la limite (au sens des distributions) d'une suite de fonctions.

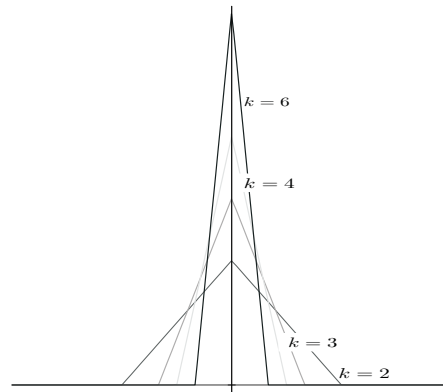


FIG. 7.1 – La suite  $f_k$  convergeant vers  $\delta$

# Chapitre 8

## Opérations élémentaires

Maintenant que nous savons que les fonctions localement intégrables peuvent être considérées comme des distributions, nous pouvons poursuivre notre programme et tenter de généraliser aux distributions les opérations habituelles que nous faisons subir aux fonctions, au premier rang desquelles la dérivation. Commençons par un exemple très simple :

### 8.1 La Translation

Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , il est clair que la fonction translatée  $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a)$  est également indéfiniment dérivable à support compact. Pour toute distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , on peut donc calculer  $\langle S, \tau_a \varphi \rangle$ , et on est tenté de définir la distribution  $W$  translatée de  $S$  par la formule

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle S, \tau_a \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

La première difficulté est de nature théorique : *a-t-on bien défini ainsi une distribution, c'est-à-dire une application continue sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ?* Il en est bien ainsi, selon le corollaire 5.12, car l'application  $\varphi \rightarrow \tau_a \varphi$  est continue :  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . En effet, dès que  $\ell$  est assez grand, les semi-normes

$$p_\ell^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_\ell} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

qui définissent la topologie de  $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$  sont invariantes par translation de  $a$ . Il subsiste cependant une question pratique : *si  $S$  est associée à une fonction  $f$ , soit  $S = T_f$ , que peut-on dire de  $W$  ?* On aura

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_a \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x-a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y+a) \varphi(y) dy = \langle T_{\tau_{-a}f}, \varphi \rangle,$$

soit  $W = T_{\tau_{-a}f}$ . Si on veut conserver la compatibilité entre opérations sur les fonctions et sur les distributions, il est donc hautement souhaitable de poser  $W = \tau_{-a}S$ . On aura donc, *par définition*,

$$\langle \tau_{-a}S, \varphi \rangle = \langle S, \tau_a \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (8.1)$$



et on a montré qu'alors  $\tau_{-a}S$  est une distribution et que

$$\tau_{-a}T_f = T_{\tau_{-a}f}.$$

Cette opération a une portée très générale, qui dépasse largement le cadre de la translation, il est donc commode de la systématiser sous le vocable de 'transposition'.

## 8.2 Transposition

La transposition est la technique de base qui permet de transférer aux distributions les opérations définies sur les fonctions d'essai, elle fonctionne selon le principe bien connu du 'bouc émissaire', consistant à faire subir à la fonction d'essai ce que nous voudrions infliger à la distribution. Notons tout d'abord que si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels topologiques,  $u$  une application linéaire continue  $E \rightarrow F$ , et si  $S \in F'$ , alors la forme linéaire  $S \circ u : \varphi \in E \rightarrow \langle S, u(\varphi) \rangle$  est continue, et que c'est par conséquent élément de  $E'$ . Il est donc loisible de poser la définition suivante :

**Définition 8.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques et  $u$  une application linéaire continue  $E \rightarrow F$ , on appelle transposé de  $u$  et on note  ${}^t u$ , l'application linéaire  $E' \rightarrow F'$  définie par  ${}^t u S = S \circ u$ . On aura

$$\langle {}^t u S, \varphi \rangle = \langle S, u(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in E. \quad (8.2)$$

**Proposition 8.2** Si l'application  $u$  est continue  $E \rightarrow F$ ,

- (i) L'application transposée  ${}^t u$  est continue  $F' \rightarrow E'$ ,
- (ii) Si de plus  $\mathfrak{Im}(u)$  est dense dans  $F$ , alors  ${}^t u$  est injective.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura  $\langle {}^t u S, \varphi \rangle = \langle S, u(\varphi) \rangle$ , d'où la continuité de  ${}^t u$ , d'après la proposition 7.14.

▷ Supposons donc que  $S \in F'$  et  ${}^t u S = 0$ , c'est-à-dire que  $\langle S, u(\varphi) \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in E$ . Soit alors  $\psi \in F$ , c'est la limite d'une suite d'éléments de la forme  $u(\varphi_n)$ , où  $\varphi_n \in E$ , et on aura  $\langle S, u(\varphi_n) \rangle = 0 \quad \forall n$ ; comme  $S$  est continue, il en résulte que  $\langle S, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in F$ . C'est dire que  $S$  est nulle.

□

**Remarque 8.3** Nous venons de pratiquer sans le savoir la transposition lors de la définition de la translatée d'une distribution, où nous avons en fait posé

$$\tau_{-a}S = ({}^t \tau_a) S.$$

ainsi que de façon occulte, en transposant l'injection canonique  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$ , pour en déduire une injection continue  $(\mathcal{D}^m)'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ .

### 8.3 Symétrie

Posons maintenant  $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ ,  $\check{\varphi}$  est la symétrique de  $\varphi$ , et l'application  $\varphi \rightarrow \check{\varphi}$  est continue sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , pour toute distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . On définira  $\check{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  comme étant le résultat de l'application de la transposée de la symétrie à la distribution  $S$ , soit encore

$$\langle \check{S}, \varphi \rangle = \langle S, \check{\varphi} \rangle. \quad (8.3)$$

Dans le cas d'une fonction, on aura

$$\langle \check{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y) \varphi(y) dy = \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle.$$

### 8.4 Dérivation

Considérons maintenant l'application linéaire  $\partial_i$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans lui-même que constitue la dérivation dans la direction  $x_i$ ; elle est continue en vertu du corollaire 5.12 et sa transposée est une application linéaire de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans lui-même. Etudions son effet sur une distribution  $T_f$  associée à une fonction  $f$  localement intégrable et continûment dérivable. On aura  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle {}^t\partial_i(T_f), \varphi \rangle = \langle T_f, \partial_i \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} \partial_i f \varphi dx = - \langle T_{\partial_i f}, \varphi \rangle,$$

soit

$${}^t\partial_i(T_f) = -T_{\partial_i f}.$$

**Définition 8.4** On définit la dérivée  $\partial^\alpha S$  comme étant égale à  $(-1)^{|\alpha|} {}^t\partial^\alpha S$ , soit encore

$$\langle \partial^\alpha S, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \quad (8.4)$$

c'est une application continue sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

#### Remarque 8.5

(i) Ainsi définie, la dérivation des distributions constitue une extension de la dérivée des fonctions, en effet, si  $f$  est localement intégrable et  $|\alpha|$  fois continûment dérivable, on a

$$T_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha(T_f).$$

(ii) La dérivation des distributions n'est soumise à aucune condition : toute distribution est indéfiniment dérivable, l'opération de dérivation est continue sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Il s'agit là d'un progrès extraordinaire par rapport à la situation qui prévaut parmi les fonctions et qui va nous permettre de dériver sans précautions, ce qui constitue un élément de confort inappréciable. ◇

**Proposition 8.6** Si  $S \in (\mathcal{D}^m)'(\Omega)$ , alors  $\partial^\alpha S \in (\mathcal{D}^{m+|\alpha|})'(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION. On a en effet

$$\left| \langle \partial^\beta S, \varphi \rangle \right| = \left| \langle S, \partial^\beta \varphi \rangle \right| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left| \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right| \leq C_K \sup_{|\gamma| \leq m+|\beta|} \sup_{x \in K} |\partial^\gamma \varphi|.$$

□

Dans le cas de la mesure de Dirac dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , on obtient

$$\langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a) \quad (8.5)$$

## 8.5 Primitives

L'un de nos objectifs essentiels consistera à résoudre des équations aux dérivées partielles au sein d'espaces de distributions, nous aurons l'occasion d'y revenir longuement par la suite, mais dans l'immédiat, nous pouvons déjà étudier un cas particulièrement simple : la résolution de l'équation  $S' = 0$ .

**Proposition 8.7** *Pour que la distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vérifie  $S' = 0$ , il faut et il suffit que  $S$  soit égale à une constante.*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , choisissons  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} \xi dx = 1$ . La fonction  $\zeta = \varphi - \xi \int_{\mathbb{R}} \varphi dx$  est un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\int_{\mathbb{R}} \zeta dx = 0$ , et admet donc une primitive :  $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \zeta(t) dt$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

▷ On aura alors

$$\langle S, \zeta \rangle = \langle S, \psi' \rangle = - \langle S', \psi \rangle = 0,$$

et par conséquent

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \xi \int_{\mathbb{R}} \varphi dx \rangle = \langle S, \xi \rangle \langle 1, \varphi \rangle.$$

□

On démontre un résultat similaire dans le cas multidimensionnel :

**Proposition 8.8** *Pour que la distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $\nabla T = 0$ , il faut et il suffit que  $T$  soit égale à une constante.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à la précédente : on pose de même

$$\zeta^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \xi(x_1) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1,$$

et si  $\psi^1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est la primitive à support compact de  $\zeta^1$  dans la direction  $x_1$ , on aura

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \left\langle T, \xi(x_1) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1 \right\rangle + \langle T, \partial_1 \psi^1 \rangle \\ &= \left\langle T, \xi(x_1) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1 \right\rangle. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à poser

$$\begin{aligned}\varphi^1(x_2, \dots, x_n) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1, \\ \zeta^1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi^1(x_2, \dots, x_n) - \xi(x_2) \int_{\mathbb{R}} \varphi^1(t_2, x_3, \dots, x_n) dt_2\end{aligned}$$

et à opérer par récurrence pour aboutir à

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \xi(x_1)\xi(x_2) \cdots \xi(x_n) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt \right\rangle$$

La conclusion en découle. □

Considérons maintenant la fonction  $g : t \rightarrow \int_a^t f(x) dx$  où  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , nous avons indiqué que sa dérivée est presque partout égale à  $f$ , mais il s'agit là d'un théorème difficile. Il est par contre très facile, et souvent suffisant, de montrer que  $f$  est la dérivée de  $g$  au sens des distributions. Soit en effet  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on aura  $\langle T'_g, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi'(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) dt \int_a^t f(x) dx$ . D'après le théorème de Fubini, il en résulte que

$$\langle T'_g, \varphi \rangle = - \int_a^{+\infty} f(x) dx \int_x^{+\infty} \varphi'(t) dt + \int_{-\infty}^a f(x) dx \int_{-\infty}^x \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

et par conséquent  $T'_g = T_f$ .

## 8.6 Multiplication

Autant l'opération de dérivation est considérablement simplifiée par l'introduction des distributions, autant celle de multiplication se trouve soumise à de nouvelles contraintes.

**Lemme 8.9** Si  $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , alors l'application  $\varphi \rightarrow \beta\varphi : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  est continue.

DÉMONSTRATION. Rappelons la formule de Leibnitz : si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est un multi-indice,

$$\partial^\alpha(\beta\varphi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \beta \partial^{\alpha-\gamma} \varphi, \text{ où } \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!},$$

avec  $\alpha! = \prod_{i=1,n} \alpha_i!$ . Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on en déduit que

$$\sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha(\beta\varphi)(x)| \leq C_m \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \beta(x)| \times \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

le corollaire 5.12 permet alors de conclure. □

La transposée de cette application permet de définir le produit d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable :

**Définition 8.10** Si  $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on pose

$$\langle \beta S, \varphi \rangle = \langle S, \beta \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

L'application  $S \rightarrow \beta S : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue.

Cette définition prolonge le produit d'une fonction localement intégrable par une fonction indéfiniment dérivable ; en effet  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle \beta T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \beta \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \beta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \beta f \varphi \, dx = \langle T_{\beta f}, \varphi \rangle.$$

**Remarque 8.11**



(i) On peut de même définir le produit d'une distribution d'ordre  $m$  par une fonction  $m$  fois continûment dérivable. Mais il faut prendre garde à ce que le produit d'une distribution quelconque par une fonction quelconque n'a en général pas de signification, et à plus forte raison le produit de deux distributions quelconques !



(ii) Le produit d'une distribution par une fonction constitue un exemple d'opération binaire :  $(\beta, S) \rightarrow \beta S$ , pour laquelle divers types de continuité peuvent être invoqués ; la continuité séparée où l'un des deux termes est fixé, la continuité globale, relative à la topologie de l'espace produit, ou même une notion intermédiaire ayant pour nom hypocontinuité, relative à la continuité en 0 vis-à-vis de l'une des variables, l'autre restant bornée. Dans ce genre de situation, la continuité séparée est en général facile à démontrer, tandis que la continuité globale est généralement fautive ; il existe en fait un théorème non trivial qui, selon les cas, permet de déduire soit la continuité globale soit seulement l'hypocontinuité, de la continuité séparée. Dans le cas des suites :  $\beta_j \rightarrow \beta, S_j \rightarrow S$ , qui sera pour nous le seul utile, ces deux notions se confondent pour notre plus grand soulagement. Désormais, dans une telle situation, nous énoncerons le résultat le plus fort, relatif à la continuité séquentielle conjointe :  $\beta_j \rightarrow \beta$  et  $S_j \rightarrow S \Rightarrow \beta_j S_j \rightarrow \beta S$ , mais nous ne démontrerons que la continuité séparée :

**Proposition 8.12** Si  $\beta_j \rightarrow \beta$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $S_j \rightarrow S$ , dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $\beta_j S_j \rightarrow \beta S$ .

DÉMONSTRATION. La convergence de  $\beta S_j$  vers  $\beta S$  est une conséquence de la continuité de l'application transposée. Celle de  $\beta_j S$  vers  $\beta S$ , découle de la convergence de  $\beta_j \varphi$  vers  $\beta \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ . En effet, d'une part les  $\beta_j \varphi$  ont leur support dans un même compact :  $K = \text{Supp } \varphi$ , d'autre part comme  $\beta_j \rightarrow \beta$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , on aura

$$\forall \varepsilon, \forall m, \exists J, \forall j > J, \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha (\beta_j - \beta)(x)| \leq \varepsilon$$

et par conséquent, en vertu de la formule de Leibnitz,

$$\forall \varepsilon, \forall m, \exists J, \forall j > J, \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha ((\beta_j - \beta)\varphi)(x)| \leq \varepsilon$$

soit en fait la convergence de  $\beta_j \varphi$  vers  $\beta \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , d'après la proposition 5.10.

□

### Dérivation du produit d'une fonction par une distribution

La règle de Leibnitz pour la dérivée d'un produit s'applique à la dérivée du produit d'une distribution par une fonction régulière : si  $\alpha$  est un multi-indice,

$$\partial^\alpha(\beta S) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma u \partial^{\alpha-\gamma} v.$$

La démonstration s'effectue par récurrence, exactement comme dans le cas des fonctions, il nous suffit donc de la démontrer dans le cas d'une dérivée première ; on aura en effet

$$\begin{aligned} \langle \partial_k(\beta S), \varphi \rangle &= -\langle \beta S, \partial_k \varphi \rangle = -\langle S, \beta \partial_k \varphi \rangle = -\langle S, \partial_k(\beta \varphi) - \varphi \partial_k \beta \rangle \\ &= \langle \partial_k S, \beta \varphi \rangle + \langle S \partial_k \beta, \varphi \rangle = \langle \beta \partial_k S + S \partial_k \beta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

## 8.7 Division des distributions

Penchons nous maintenant sur la résolution de l'équation  $xS = 0$ , où  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Nous allons voir apparaître un phénomène très particulier qui n'a pas son équivalent au sein des fonctions : *l'équation admet des solutions non nulles*. Ce résultat est essentiel, car la transformation de Fourier ramène l'étude locale des équations différentielles linéaires à la résolution d'équations du type  $P(x)S = T$ , où  $P(x)$  est un polynôme. ♠

### Proposition 8.13

(i) Pour que  $S$  soit solution dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de  $xS = 0$ , il faut et il suffit que  $S$  soit de la forme  $C\delta$ .

(ii) Les solutions de l'équation  $xS = 1$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  sont de la forme  $S = \text{vp}(1/x) + C\delta$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , et notons  $\xi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\xi(0) = 1$ . Posons  $\zeta = \varphi - \varphi(0)\xi$ , on aura  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\zeta(0) = 0$  et  $\zeta(x)/x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , en effet  $\zeta(x)/x = \int_0^1 \zeta'(xy) dy$  qui est indéfiniment dérivable.

▷ Posons  $\psi(x) = \zeta(x)/x$ , on aura  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , et si nous supposons que  $xS = 0$ , on aura

$$\langle S, \varphi \rangle = \varphi(0) \langle S, \xi \rangle + \langle S, x\psi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \langle S, \xi \rangle + \langle xS, \psi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \langle S, \xi \rangle,$$

soit  $S = \langle S, \xi \rangle \delta$ .

▷ Par linéarité, il suffit de vérifier qu'une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par  $S = \text{vp}(1/x)$ . On aura

$$\langle x \text{vp}(1/x), \varphi \rangle = \langle \text{vp}(1/x), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

□

**Remarque 8.14** Ce résultat s'étend aisément à  $\mathbb{R}^n$ , contentons nous de résoudre le système homogène :  $x_i S = 0$ ,  $i = 1, n$ . Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{i=1, n} x_i \psi_i(x) \text{ avec } \psi_i(x) = \int_0^1 \partial_i \varphi(tx) dt.$$

Les fonctions  $\psi_i$  appartenant  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , il nous reste à noter  $\xi(x)$  une fonction de troncature dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  égale à 1 sur le support de  $\varphi$ , et on aura

$$\begin{aligned} \langle S, \varphi \rangle &= \langle S, \xi \varphi \rangle = \varphi(0) \langle S, \xi \rangle + \sum_{i=1, n} \langle S, \xi x_i \psi_i \rangle \\ &= \varphi(0) \langle S, \xi \rangle + \sum_{i=1, n} \langle x_i S, \xi \psi_i \rangle = \varphi(0) \langle S, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $S$  est de la forme  $C\delta$ .

# Chapitre 9

## Dérivée des fonctions au sens des distributions

De façon générale nous identifierons désormais les fonctions localement intégrables avec des distributions, et nous noterons  $f$  à la fois la fonction et la distribution  $T_f$  associée. Il faut alors être attentif au fait que  $f'$  désigne alors la distribution dérivée de  $T_f$ , qui existe même si  $f$  n'est pas dérivable en tant que fonction, on dira que  $f'$  est la dérivée de  $f$  au sens des distributions. Ceci ne constitue pas un grave inconvénient puisque dans le cas où  $f$  est continûment dérivable, la distribution associée à la dérivée de  $f$  est la dérivée de la distribution associée à  $f$ . Dans le cas où  $f$  n'est régulière que par morceaux on peut malgré tout expliciter le lien entre dérivée classique (au sens des fonctions) et dérivée au sens des distributions ; c'est l'objet de ce chapitre. ◇

### 9.1 Le cas monodimensionnel

**Proposition 9.1 (Formule des sauts)** *Si la fonction  $f$  est régulière sur chacun des segments  $[a_i, a_{i+1}]$ , (et donc localement intégrable), alors la dérivée de  $f$  au sens des distributions est donnée par*

$$f' = \{f'\} + \sum_i (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}, \quad (9.1)$$

où  $\{f'\}$  est la fonction définie presque partout comme étant égale à la dérivée de  $f$  au sens des fonctions, sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  séparément.



DÉMONSTRATION. Par définition de la dérivée au sens des distributions, on aura

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = -\sum_i \int_{]a_i, a_{i+1}[} f \varphi' dx \\ &= \sum_i \int_{]a_i, a_{i+1}[} f' \varphi dx - (f(a_i^+) \varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-) \varphi(a_{i+1})) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \{f'\} \varphi dx + \sum_i (f(a_i^+) - f(a_i^-)) \varphi(a_i). \end{aligned}$$

□

Ce résultat se généralise aisément au cas des dérivées d'ordre supérieur, on aura en effet

$$\begin{aligned} f'' &= \{f'\}' + \left( \sum_i (f(a_i^+) - f(a_i^-)) \delta_{a_i} \right)' \\ &= \{f''\} + \sum_i (\{f'\}(a_i^+) - \{f'\}(a_i^-)) \delta_{a_i} + \sum_i (f(a_i^+) - f(a_i^-)) \delta'_{a_i}. \end{aligned} \quad (9.2)$$



**Remarque 9.2** Il faut être attentif aux notations utilisées dans cette dernière formule qui pourraient aisément conduire à des incohérences : au premier membre  $f''$  désigne la dérivée seconde de la distribution  $T_f$ , et au second membre  $\{f'\}(a_i^+)$  désigne  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{f'\}(a_i + \varepsilon)$ . L'allègement des notations engendré par l'identification des fonctions localement intégrables à des distributions est tel qu'on ne s'arrête pas à cette petite difficulté.

Le calcul de la dérivée de la fonction  $\text{Log } |x|$  au sens des distributions est particulièrement intéressant, en effet l'utilisation directe de la définition ne permet pas de conclure, l'utilisation de l'intégration par parties pour le calcul de  $\int_{\mathbb{R}} \text{Log } |x| \varphi'(x) dx$  se révélant particulièrement malaisée. On fera donc appel à l'approximation de la fonction  $\text{Log } |x|$  par des fonctions plus régulières, susceptibles de se prêter à une intégration par parties, puis on utilisera le théorème 7.16 pour réaliser un passage à la limite.

**Proposition 9.3** La dérivée au sens des distributions de  $\text{Log } |x|$  est égale à  $\text{vp}(1/x)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $f(x) = \text{Log } |x|$ , et considérons la suite de fonctions  $f_j(x)$  égale à  $f(x)$  pour  $|x| > 1/j$ , et à  $\text{Log}(1/j)$  pour  $|x| \leq 1/j$ ; elle converge presque partout en décroissant vers  $\text{Log } |x|$ . Il en résulte d'après la proposition 7.15 que  $T_{f_j} \rightarrow T_f$ , et par conséquent que  $dT_{f_j}/dx \rightarrow dT_f/dx$ .

▷ Par ailleurs, on aura  $dT_{f_j}/dx = T_{df_j/dx}$ , puisque que  $f_j$  est continue, et par conséquent

$$\left\langle \frac{d}{dx} \text{Log } |x|, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| > 1/j} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (9.3)$$

□

**Remarque 9.4** Notons que nous venons en passant de démontrer une nouvelle fois que  $\text{vp}(1/x)$  est une distribution : la dérivée de  $\text{Log}(|x|)$ .

## 9.2 Le cas multidimensionnel

Nous avons vu l'importance de l'intégration par parties dans les calculs qui font intervenir la dérivée au sens des distributions ; nous allons donc être amenés à généraliser cette opération à  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit de la *formule de Stokes*. La seule difficulté découle du fait que les termes de bord ne font plus intervenir ici les extrémités d'un segment mais la surface constituée par le bord d'un domaine ; il sera donc nécessaire de définir avec précision ce qu'est la normale à une telle surface et la façon d'y calculer des intégrales.

### 9.2.1 La formule de Stokes pour un surgraphe

Commençons par le cas simple où le domaine considéré est constitué par l'ensemble des points dont la  $n^{\text{ième}}$  coordonnée est supérieure à la valeur d'une fonction numérique  $\Phi$  des  $n - 1$  premières variables. Soit donc  $\omega'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\omega')$ , à valeurs dans  $]a, b[$ . On note

$$\begin{aligned} y &= (y', y_n) \in \omega' \times ]a, b[, \\ \Omega &= \{x \in \omega' \times ]a, b[ \mid y_n > \Phi(y')\}, \\ \tilde{\Omega} &= \{x \in \omega' \times ]a, b[ \mid y_n \geq \Phi(y')\}, \\ \Gamma &= \{x \in \omega' \times ]a, b[ \mid y_n = \Phi(y')\}; \end{aligned}$$

c'est dire que  $\Omega$  est d'un seul côté de  $\Gamma$ , dont l'équation est donnée par  $y_n = \Phi(y')$ , ou encore que  $\Omega$  est le surgraphe de  $\Phi$ ;

**Définition 9.5** L'intégrale de  $f$  sur la surface  $\Gamma$  est définie par la formule suivante :

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\omega'} f(y', \Phi(y')) ds(y')$$

où  $ds(y') = \sqrt{1 + \|\nabla\Phi(y')\|^2} dy'$  est, par définition, l'élément de surface induit par la métrique de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\Gamma$ .

Notons que le vecteur  $\begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal à  $\Gamma$ , puisqu'il est orthogonal au vecteur tangent  $\begin{pmatrix} 1 \\ \nabla\Phi \end{pmatrix}$ .

**Lemme 9.6** Si  $X$  est un champ de vecteurs dont les composantes, à support compact dans  $\tilde{\Omega}$ , appartiennent à  $\mathcal{C}^1(\tilde{\Omega})$ , et si  $\Omega$  est le surgraphe d'une application  $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty(\omega')$ , alors

$$\int_{\Omega} \text{div } X dx = \int_{\Gamma} (X | \nu) ds \tag{9.4}$$

où  $\nu$  est la normale extérieure au domaine  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par la partie de la divergence associée à la  $n^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $X$  :

$$\int_{\Omega} \partial_n X_n(y) dy = \int_{\omega'} dy' \int_{\Phi(y')}^{+\infty} \partial_n X_n(y', y_n) dy_n = - \int_{\omega'} X_n(y', \Phi(y')) dy'.$$

▷ En ce qui concerne les autres composantes, on effectuera le changement de variable  $t = y_n - \Phi(y')$ , et on posera  $h(y', t) = X_i(y', t + \Phi(y'))$  ; pour  $i < n$ , on aura donc

$$\partial_i X_i(y', y_n) = \partial_i h(y', y_n - \Phi(y')) - \partial_n h(y', y_n - \Phi(y')) \partial_i \Phi(y').$$

Comme la matrice Jacobienne du changement de variable  $(y', y_n) \rightarrow (y', t)$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \times & 1 \end{pmatrix}$$

le déterminant jacobien est égal à 1, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i X_i(y) dy &= \int_{\omega' \times [0, +\infty[} \partial_i h(y', t) dy' dt - \int_{\omega' \times [0, +\infty[} \partial_n h(y', t) \partial_i \Phi(y') dy' dt \\ &= \int_{\omega'} h(y', 0) \partial_i \Phi(y') dy' = \int_{\omega'} X_i(y', \Phi(y')) \partial_i \Phi(y') dy', \end{aligned}$$

et par conséquent  $\int_{\Omega} \operatorname{div} X dy = \int_{\Gamma} (X | \nu) ds$ , puisque  $\nu ds(y') = \begin{pmatrix} \nabla \Phi \\ -1 \end{pmatrix} dy'$ .

□

## 9.2.2 La formule de Stokes pour un ouvert borné régulier

### Intégrale au bord d'un ouvert borné régulier

Commençons par préciser ce que nous entendons par ouvert régulier.

**Définition 9.7** Nous dirons que l'ouvert  $\Omega$  est régulier si pour chaque point  $x$  de sa frontière, il existe un système local de coordonnées orthonormales  $y = (y', y_n)$  tel que, si  $x = (x', x_n)$  dans ce repère, on puisse trouver

- (i) un ouvert  $\omega'$  contenant  $x'$  et un segment  $]a, b[$  contenant  $x_n$ .
- (ii) une fonction régulière  $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow ]a, b[$  tels que

$$\Omega \cap (\omega' \times ]a, b]) = \{(y', y_n) \mid y_n > \Phi(y')\}.$$

▷ Si nous voulons démontrer une formule analogue à 9.4, il nous faut tout d'abord définir l'expression  $\int_{\Gamma} f ds$ , où  $\Gamma = \partial\Omega$ . On utilisera à cet effet une partition de l'unité  $(\chi_{\ell}, \omega_{\ell})$ ,  $\ell = 1, L$  telle que les  $\omega_{\ell}$  recouvrent  $\partial\Omega$ . et soient chacun contenu dans un cylindre  $\omega'_{\ell} \times ]a_{\ell}, b_{\ell}[$ , satisfaisant aux conditions de la définition ci-dessus.

▷ On aura  $f = \sum_{\ell} g_{\ell}$ , avec  $g_{\ell} = \chi_{\ell} f$ , chaque  $g_{\ell}$  ayant son support contenu dans  $\omega'_{\ell} \times ]a_{\ell}, b_{\ell}[$ . Si  $\mathbb{S}_{\ell}$  note la transformation unitaire de changement de base :  $x = \mathbb{S}_{\ell} \begin{pmatrix} y' \\ y_n \end{pmatrix}$ , et si  $y_n = \Phi_{\ell}(y')$  est l'équation locale de  $\Gamma$  dans cette base, on pose par définition

$$\int_{\partial\Omega} f(x) ds = \sum_{\ell} \int_{\omega'_{\ell}} g_{\ell} \circ \mathbb{S}_{\ell}(y', \Phi_{\ell}(y')) ds(y'),$$

où  $ds(y') = \sqrt{1 + \|\nabla\Phi_{\ell}(y')\|^2} dy'$ .

Il s'agit maintenant de démontrer qu'une telle définition est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante du choix de la partition de l'unité et des bases locales.

▷ Supposons donc disposer d'une autre partition de l'unité  $(\tau_m, \theta_m), m = 1, M$ . Nous sommes conduits à poser  $h_m = \tau_m f$ , à noter  $\mathbb{T}_m$  la transformation unitaire de changement de base :  $x = \mathbb{T}_m z$ , et  $z_n = \Psi(z')$  l'équation locale de  $\Gamma$ .

▷ Nous devons démontrer que

$$\sum_{\ell} \int_{\omega'_{\ell}} g_{\ell} \circ \mathbb{S}_{\ell}(y', \Phi_{\ell}(y')) ds(y') = \sum_m \int_{\theta'_m} h_m \circ \mathbb{T}_m(z', \Psi_m(z')) ds(z')$$

avec  $ds(z') = \sqrt{1 + \|\nabla\Psi_m(z')\|^2} dz'$ .

▷ Posons à cet effet  $f_{\ell m} = \tau_m \chi_{\ell} f = \tau_m g_{\ell} = \chi_{\ell} h_m$ , on aura  $g_{\ell} = \sum_m f_{\ell m}$  et  $h_m = \sum_{\ell} f_{\ell m}$ , il nous suffira donc que de démontrer que

$$\int_{\omega'_{\ell}} f_{\ell m} \circ \mathbb{S}_{\ell}(y', \Phi_{\ell}(y')) ds(y') = \int_{\theta'_m} f_{\ell m} \circ \mathbb{T}_m(z', \Psi_m(z')) ds(z')$$

c'est-à-dire en fait le lemme suivant :

**Lemme 9.8** *L'élément de surface  $ds$  est invariant par changement de repère orthonormé.*

De façon générale, si  $\varphi$  est une carte locale, soit en fait ici une application  $U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , l'élément de surface est donné par

$$ds = \sqrt{g_{\varphi}} dy',$$

où  $g_{\varphi}$  est le déterminant de Gram de  $D\varphi$ , soit si  $e_i$  note la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$g_{\varphi} = \det G_{\varphi},$$

où

$$G_{\varphi} = [(D\varphi e_i | D\varphi e_j)]$$

est la matrice de Gram. Dans le cas d'un surgraphe, on a  $\varphi(y) = (y, \Phi(y))$ , et par conséquent

$$D\varphi e_i = \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{ik} \\ \vdots \\ D\Phi e_i \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (D\varphi e_i | D\varphi e_j) &= \sum_{k=1, n-1} \delta_{ik} \delta_{jk} + (D\Phi e_i | D\Phi e_j) \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \end{aligned}$$

soit

$$G_\varphi = I + G_\Phi.$$

Cette matrice, étant symétrique est diagonalisable, et si  $\lambda$  en est une valeur propre et  $X$  un vecteur propre associé, on a  $G_\Phi X = (\lambda - 1)X$ , c'est-à-dire  $\nabla \Phi (X | \nabla \Phi) = (\lambda - 1)X$ , d'où

$$\|\nabla \Phi\|^2 (X | \nabla \Phi) = (\lambda - 1) (X | \nabla \Phi).$$

Deux situations se présentent alors : si  $(X | \nabla \Phi) \neq 0$ , alors  $\lambda_0 = 1 + \|\nabla \Phi\|^2$  et  $X_0 = \mu \frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|}$ , ce qui prouve que  $\lambda_0$  est une valeur propre simple, et si  $(X | \nabla \Phi) = 0$ , alors  $\lambda = 1$ , valeur propre de multiplicité  $n - 2$ . Il en résulte que  $\det G_\varphi = \lambda_0$ .

DÉMONSTRATION DU LEMME Si  $\psi$  est une autre carte, notons  $\chi$  l'application de changement de carte, soit

$$\varphi = \psi \circ \chi,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} G_\varphi &= [(D\varphi e_i | D\varphi e_j)] = [(D\psi \circ D\chi e_i | D\psi \circ D\chi e_j)] \\ &= [(D\chi e_i | {}^t D\psi \circ D\psi \circ D\chi e_j)], \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} g_\varphi &= \det D\chi \times \det [(e_i | {}^t D\psi \circ D\psi \circ D\chi e_j)] \\ &= \det D\chi \times \det [({}^t D\psi \circ D\psi e_i | D\chi e_j)] \\ &= (\det D\chi)^2 \times \det [({}^t D\psi \circ D\psi e_i | e_j)] \\ &= (\det D\chi)^2 \times g_\psi \end{aligned}$$

□

Dans le cas d'un surgraphe, on écrira  $z' = F(y')$  et  $\Phi = \Psi \circ F$ , d'où

$$\sqrt{1 + |\nabla\Phi|^2} = |\det DF| \sqrt{1 + |\nabla\Psi|^2}. \tag{9.5}$$



**Théorème 9.9 (Formule de Stokes)** Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier et  $X$  un champ de vecteurs dont les composantes appartiennent à  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , alors

$$\int_{\partial\Omega} (X | \nu) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} X dx, \tag{9.6}$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par compléter notre partition de l'unité selon  $(\chi_\ell, \omega_\ell), \ell = 0, n$  de telle sorte que  $\omega_0$  soit inclus dans  $\Omega$  ; il nous suffira de démontrer que pour chaque  $\ell > 1$ ,  $\int_{\partial\Omega \cap \omega_\ell} (X_\ell | \nu) ds = \int_{\omega_\ell} \operatorname{div} X_\ell dx$ , le lemme 9.6 nous montrant déjà que  $\int_{\omega_0} \operatorname{div} X_0 dx = 0$ .

▷ Nous allons opérer un changement de repère dans chaque  $\omega_\ell$  de façon à nous ramener au cas d'un surgraphe. Si  $\mathbb{S}_\ell$  est l'opérateur de rotation, on aura  $Y_\ell = \mathbb{S}_\ell \circ X_\ell \circ {}^t\mathbb{S}_\ell$ , et par conséquent

$$\operatorname{div} Y_\ell = \operatorname{tr}(DY_\ell) = \operatorname{tr}(\mathbb{S}_\ell \circ DY_\ell \circ {}^t\mathbb{S}_\ell) = \operatorname{tr}(DX_\ell) = \operatorname{div} X_\ell ;$$

comme  $dx = |\det {}^t\mathbb{S}_\ell| dy = dy$ , il en résulte que

$$\int_{\omega_\ell} \operatorname{div} X_\ell dx = \int_{\omega'_\ell \times ]a_\ell, b_\ell[} \operatorname{div} Y_\ell dy' dy_n.$$

▷ Par ailleurs, le produit scalaire étant invariant par changement de base orthonormé, il en résulte que

$$\int_{\partial\Omega \cap \omega_\ell} (X_\ell | \nu_x) ds = \int_{\omega'_\ell} (Y_\ell | \nu_y) ds(y'),$$

et la conclusion, en vertu de la définition de l'intégrale de bord et du lemme 9.6.

□

**Corollaire 9.10 (Formule de Green)** Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier

(i) pour  $u$  et  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ,



$$\int_{\Omega} u \partial_i v dx = - \int_{\Omega} \partial_i u v dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i ds, \tag{9.7}$$

(ii) pour  $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  et  $v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} (\nabla u | \nabla v) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \tag{9.8}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Il suffit d'appliquer la formule de Stokes au champ de vecteurs dont toutes les composantes sont nulles hormis la  $i^{\text{ème}}$  égale à  $f(x)g(x)$ .

▷ Avec la convention de l'indice muet, on aura

$$\int_{\Omega} u \partial_{ii}^2 v \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v \, dx - \int_{\partial\Omega} u \partial_i v \nu_i \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla u | \nabla v) \, dx + \int_{\partial\Omega} u (\nabla v | \nu) \, dx.$$

□

### 9.2.3 La formule des sauts

Nous noterons  $\delta_{\Gamma}$  la mesure de Dirac sur la surface  $\Gamma$ . Elle est définie par la formule

$$\langle \delta_{\Gamma}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi \, ds. \quad (9.9)$$

**Proposition 9.11 (Formule des sauts)** *Si  $f$  est une fonction localement intégrable, régulière séparément sur les domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  séparés par la frontière régulière  $\Gamma$ , alors si  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega^-$ ,  $f^+ = f|_{\Omega^+}$  et  $f^- = f|_{\Omega^-}$ , on a*

$$(i) \quad \partial_i f = \{\partial_i f\} + \nu_i [f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}, \quad \text{où } [f]_{\Gamma} = f|_{\Gamma^+} - f|_{\Gamma^-}. \quad (9.10)$$

$$(ii) \quad \Delta f = \{\Delta f\} + \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} f \right]_{\Gamma} \delta_{\Gamma} + \frac{\partial}{\partial \nu} ([f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}), \quad \text{avec } \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} f \right]_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \nu} f|_{\Gamma^+} - \frac{\partial}{\partial \nu} f|_{\Gamma^-}. \quad (9.11)$$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura

$$\begin{aligned} \langle \partial_i f, \varphi \rangle &= - \langle f, \partial_i \varphi \rangle = - \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f \partial_i \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega^+} \partial_i f \varphi \, dx + \int_{\Omega^-} \partial_i f \varphi \, dx - \int_{\Gamma} f^+ \varphi \nu_i^+ \, ds - \int_{\Gamma} f^- \varphi \nu_i^- \, ds \\ &= \int_{\Omega} \{\partial_i f\} \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nu_i [f] \varphi \, ds, \end{aligned}$$

soit le résultat annoncé.

▷ Réitérant le procédé, et faisant usage de la convention de l'indice muet, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, \varphi \rangle &= \partial_i \{\partial_i f\} + \partial_i (\nu_i [f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}) \\ &= \{\Delta f\} + \nu_i [\partial_i f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma} + \frac{\partial}{\partial \nu} ([f] \delta_{\Gamma}) = \{\Delta f\} + \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} f \right]_{\Gamma} \delta_{\Gamma} + \frac{\partial}{\partial \nu} ([f] \delta_{\Gamma}). \end{aligned}$$

□



**Remarque 9.12** *Cette formule présente un intérêt tout particulier car elle intervient de façon cruciale pour l'étude des équations de Poisson  $\Delta \varphi = f$ , ou de Helmholtz  $\Delta \psi + k^2 \psi = g$ , qui gouvernent respectivement l'électrostatique et l'acoustique, et servent de modèle pour nombre d'autres phénomènes. Les distributions  $\left[ \frac{\partial}{\partial \nu} f \right]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}$  et  $\frac{\partial}{\partial \nu} ([f] \delta_{\Gamma})$  portent respectivement le nom de potentiel de simple et de double couche.*

# Chapitre 10

## Structure

Nous savons déjà qu'il existe divers types de distributions que nous avons distingués par leur ordre, et au sein des distributions d'ordre 0, la classe particulière de celles qui sont définies par des fonctions. C'est là un point de vue très global, qu'il est facile de dépasser lorsque nous nous intéressons à une fonction : nous savons étudier ses propriétés locales (sinon ponctuelles puisque nous traitons de classes de fonctions définies presque partout).

Dans le cas des distributions de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on peut adopter ce même point de vue et interroger les propriétés de leur restriction à un ouvert inclus dans  $\Omega$ . On pourra ainsi parler de distribution localement égale à une fonction, ou localement d'ordre  $m$ , ainsi que du support d'une distribution, et préciser les conditions dans lesquelles le produit d'une fonction par une distribution peut être effectué. Il paraît par exemple bien restrictif d'être limité au produit de la mesure de Dirac par des fonctions continues, alors que seule la valeur à l'origine de la fonction incriminée intervient.

### 10.1 Support

Nous avons déjà assoupli la définition des distributions, quelque peu rigide, en distinguant des distributions de divers ordres, ce qui nous permet d'envisager l'utilisation de fonctions d'essai qui ne soient pas indéfiniment dérivables. La notion de support que nous introduisons ici permet une souplesse de nature différente en autorisant dans certains cas l'utilisation de fonctions d'essai *qui ne soient pas à support compact*. ◇

Si  $\Omega \subset \Omega'$ , alors le prolongement naturel  $\mathcal{P}^{\Omega'} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega')$  qui à  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  associe  $\varphi'$ , égale à  $\varphi$  sur  $\Omega$  et à 0 sur  $\Omega' \setminus \Omega$ , est linéaire et continu. Par transposition on en déduit une opération de restriction  $\mathcal{D}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  :

**Définition 10.1** Si  $\mathcal{P}^{\Omega'}$  note le prolongement naturel  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega')$ , où  $\Omega \subset \Omega'$ , on définit la restriction  $S|_{\Omega}$  de  $S \in \mathcal{D}'(\Omega')$  à  $\Omega$  par la formule

$$\langle S|_{\Omega}, \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{P}^{\Omega'} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$



Dans le cas d'une fonction  $f$  définie sur  $\Omega'$ , on aura

$$\langle (T_f)|_{\Omega}, \varphi \rangle = \int_{\Omega'} f \mathcal{P}^{\Omega'} \varphi dx = \int_{\Omega} f|_{\Omega} \varphi dx$$

soit  $(T_f)|_{\Omega} = T_{f|_{\Omega}}$ .

### Remarque 10.2

(i) Bien entendu, il n'est pas question ici de démontrer que la restriction est une opération injective, et d'ailleurs, si  $\Omega \subsetneq \Omega'$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $\mathcal{D}(\Omega')$ .

(ii) En général on oublie de mentionner le prolongement  $\mathcal{P}^{\Omega'}$ , et on considère que  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega')$ .

**Lemme 10.3** Soient  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , et  $\sigma = \{\omega \subset \Omega \mid \omega \text{ ouvert, } S|_{\omega} = 0\}$ , alors la restriction de  $S$  à  $\omega_0 = \bigcup_{\omega \in \sigma} \omega$  est nulle.

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_0) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ , comme le support de  $\varphi$  est compact, on pourra extraire de  $\sigma$  un sous-recouvrement fini  $\omega_i$ ,  $i = 1, k$  de  $\text{Supp } \varphi$ . Considérons alors une partition de l'unité régulière  $\psi_i$  subordonnée aux  $\omega_i$ , on aura  $\langle S, \varphi \rangle = \sum_{i=1,k} \langle S, \varphi \psi_i \rangle = 0$ , puisque  $S|_{\omega_i} = 0$ .

□

Il est donc possible de parler du plus grand ouvert où une distribution s'annule et de poser la définition suivante :

**Définition 10.4** On appelle support de la distribution  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , le complémentaire dans  $\Omega$  du plus grand ouvert où elle est nulle.

**Lemme 10.5** Si l'ouvert  $\Omega$  est inclus dans  $\text{Supp } T$ , alors  $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tel que  $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. En effet, si tel n'était pas le cas, alors en vertu du lemme 10.3,  $T$  s'annulerait sur  $\Omega \cup (\text{Supp } T)^c$ , ce qui constitue une contradiction.

□

Un premier exemple est constitué par la distribution  $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  : si  $\text{Supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ , on a  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$ , et par conséquent  $\text{Supp } \delta_a \subset \{a\}$ ; comme par ailleurs  $\delta_a \neq 0$ , on aura  $\text{Supp } \delta_a = \{a\}$ .

Dans le cas où la distribution  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est définie par la fonction localement intégrable  $f$ , si  $0 = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\omega} f \varphi dx \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$  alors en vertu du lemme 7.11, on a  $f|_{\omega} = 0$  presque partout. Il en résulte que  $\text{Supp } f = \text{Supp } T_f$ .

Le procédé que nous venons d'utiliser peut être généralisé pour permettre de construire une distribution en recousant diverses pièces vivant sur des ouverts différents.

**Théorème 10.6 (Recollement des morceaux)** Si les  $\omega_i$   $i \in I$  forment un recouvrement ouvert de  $\Omega$ , si les  $S_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ , et si de plus

$$\forall i, j \in I, S_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = S_j|_{\omega_i \cap \omega_j},$$

alors il existe une unique distribution  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que  $S|_{\omega_i} = S_i \forall i \in I$ .

DÉMONSTRATION. Selon le corollaire D.18, il existe une partition localement finie de l'unité  $\psi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$  subordonnée au recouvrement  $\omega_i$ .

▷ L'unicité découle du lemme 10.3 ; supposons en effet qu'il existe deux telles distributions, soient  $S$  et  $S'$ , et posons  $T = S - S'$ , on aura  $T|_{\omega_i} = 0 \forall i \in I$ , et par conséquent  $T = 0$ .

▷ Soit réciproquement  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on posera  $\langle S, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} \langle S_i, \varphi \psi_i \rangle$ , la somme étant en fait finie pour chaque fonction  $\varphi$  à support compact. Que  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  découle du fait que  $\varphi \rightarrow \varphi \psi_i$  est continue  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\omega_i)$ , de même qu'au lemme 8.9.

▷ Il ne reste plus qu'à étudier  $S|_{\omega_j}$  ; on aura pour  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\omega_j)$

$$\langle S|_{\omega_j}, \varphi_j \rangle = \sum_{i \in I} \langle S_i, \varphi_j \psi_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle S_j, \varphi_j \psi_i \rangle = \left\langle S_j, \varphi_j \sum_{i \in I} \psi_i \right\rangle,$$

soit par conséquent  $\langle S|_{\omega_j}, \varphi_j \rangle = \langle S_j, \varphi_j \rangle$ .

□

Ces résultats rendent extrêmement souple la manipulation des distributions ; considérons par exemple le produit d'une distribution par une fonction. Soit  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , avec  $\Omega = \bigcup_{i=1,k} \omega_i$ , supposons que  $S|_{\omega_i}$  est d'ordre  $m_i$ ,  $i = 1, k$ . Si  $f$  est alors une fonction localement intégrable sur  $\Omega$  telle que  $f|_{\omega_i} \in \mathcal{C}^{m_i}(\omega_i)$ , on définira  $fS$  comme étant la distribution dont les restrictions aux divers  $\omega_i$  est égale à  $f|_{\omega_i} S|_{\omega_i}$ , ce qui étend considérablement la portée de la définition 8.10 initialement donnée. D'un point de vue pratique, si  $\psi_i$  est une partition de l'unité régulière subordonnée au recouvrement  $\omega_i$ ,  $i = 1, k$ , on aura



$$\langle fS, \varphi \rangle = \sum_{i=1,k} \langle fS, \psi_i \varphi \rangle = \sum_{i=1,k} \langle S, f|_{\omega_i} \psi_i \varphi \rangle. \tag{10.1}$$

**Remarque 10.7** Notons de plus que

$$\text{Supp}(fS) \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } S, \tag{10.2}$$

en effet si  $\text{Supp } \varphi \subset (\text{Supp } f)^c \cup (\text{Supp } S)^c$ , alors  $\text{Supp}(f\varphi) \subset (\text{Supp } S)^c$ .

## 10.2 Distributions à support compact

On note classiquement  $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Rappelons que sa topologie découle de la famille de semi-normes

$$p_\ell^k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_\ell} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

pour une suite croissante exhaustive de compacts  $K_\ell \subset \Omega$ .

**Lemme 10.8** Soit  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , notons

$$\mathcal{E}_S(\Omega) = \{ \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) \mid \text{Supp } S \cap \text{Supp } \varphi \text{ est compact} \}.$$

Si  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  est identique à 1 au voisinage de  $\text{Supp } S \cap \text{Supp } \varphi$ , l'application

$$\varphi \rightarrow \langle S, \psi\varphi \rangle \quad (10.3)$$

constitue un prolongement de  $S$  à  $\mathcal{E}_S(\Omega)$ , ce prolongement est indépendant du choix de  $\psi$ .

DÉMONSTRATION. Il est clair tout d'abord que  $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , et que  $\langle S, \psi\varphi \rangle$  est donc bien défini. Par ailleurs si  $\psi$  et  $\psi'$  sont identiques à 1 au voisinage de  $\text{Supp } S \cap \text{Supp } \varphi$ , on aura  $\langle S, \psi\varphi \rangle - \langle S, \psi'\varphi \rangle = \langle S, (\psi - \psi')\varphi \rangle = 0$ , car  $\text{Supp}(\psi - \psi')\varphi \subset (\text{Supp } S)^c$ . Enfin, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a  $\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \psi\varphi \rangle + \langle S, (1 - \psi)\varphi \rangle = \langle S, \psi\varphi \rangle$ .

□

### 10.2.1 Extension de la dualité

**Lemme 10.9** *L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{E}(\Omega)$*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit donc  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ , nous noterons  $K_j$  une suite exhaustive croissante de compacts dans  $\Omega$ ,  $\chi_j$  la fonction caractéristique de  $K_j$  et  $\chi_\varepsilon$  celle de  $B_\varepsilon(0)$ . Si  $\theta_\varepsilon$  est une approximation de l'identité et  $\varepsilon(j) < d(K_j, \Omega^c)/2$ , nous démontrerons la convergence de la suite  $\chi_j f * \theta_{\varepsilon(j)} \in \mathcal{D}(\Omega)$  vers  $f$  dans  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ , pour chaque  $K$  compact de  $\Omega$ . Or nous savons qu'il existe  $\ell$  tel que  $K \subset K_\ell$ , il nous suffit donc de prendre pour  $K$  l'un des  $K_\ell$ .

▷ Comme  $x - y \in K_\ell + B_{\varepsilon(j)}$  dès que  $x \in K_\ell$  et  $y \in B_{\varepsilon(j)}$ , on aura

$$\chi_\ell(x)\chi_{K_\ell+B_{\varepsilon(j)}}(x-y)\chi_{\varepsilon(j)}(y) = \chi_\ell(x)\chi_{\varepsilon(j)}(y)$$

(voir figure 10.1). Par conséquent, comme  $\text{Supp } \theta_{\varepsilon(j)} \subset B_{\varepsilon(j)}$ ,

$$\chi_\ell(\chi_j f * \theta_{\varepsilon(j)}) = \chi_\ell(\chi_j f * \chi_{\varepsilon(j)}\theta_{\varepsilon(j)}) = \chi_\ell(\chi_{K_\ell+B_{\varepsilon(j)}}\chi_j f * \theta_{\varepsilon(j)}) = \chi_\ell(\chi_{K_\ell+B_{\varepsilon(j)}} f * \theta_{\varepsilon(j)}),$$

si on choisit  $j$  suffisamment grand pour que  $K_\ell + B_{\varepsilon(j)} \subset K_j$ . Mais on aura de même

$$\chi_\ell(f * \theta_{\varepsilon(j)}) = \chi_\ell(\chi_{K_\ell+B_{\varepsilon(j)}} f * \theta_{\varepsilon(j)}),$$

et par conséquent,

$$\chi_\ell(\chi_j f * \theta_{\varepsilon(j)}) = \chi_\ell(f * \theta_{\varepsilon(j)}).$$

Or le théorème 6.81 nous montre que  $f * \theta_{\varepsilon(j)} \rightarrow f$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , d'où il résulte que  $\chi_j f * \theta_{\varepsilon(j)} \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ .

□

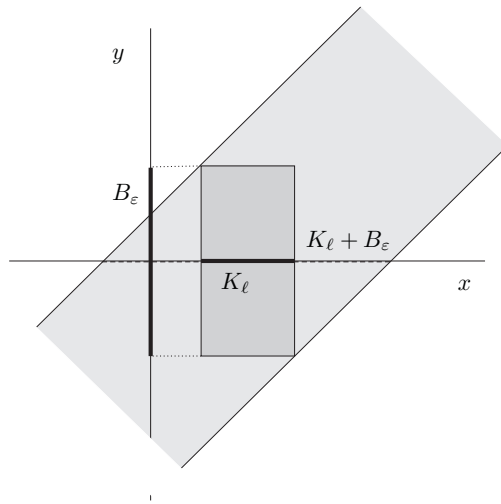


FIG. 10.1 -  $\chi_\ell(x)\chi_{K_\ell+B_\varepsilon(j)}(x-y)\chi_{\varepsilon(j)}(y) = \chi_\ell(x)\chi_{\varepsilon(j)}(y)$

**Remarque 10.10** La même démonstration permet de montrer que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^1(\Omega)$ .

Comme dans le cas des distributions d'ordre fini, on va donc pouvoir transposer l'injection continue  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  pour identifier les éléments de  $\mathcal{E}'(\Omega)$  à des distributions.

**Théorème 10.11**

- (i) Les distributions à support compact sont d'ordre fini.
- (ii) L'ensemble des distributions à support compact de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , est égal à  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons une forme linéaire  $S$  sur  $\mathcal{E}(\Omega)$ , pour que  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  il faut et il suffit qu'il existe  $C > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , et  $K \subset \Omega$ , compact tels que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Bien entendu, le compact  $K$  et l'entier  $m$  dépendent de la distribution  $S$ .

▷ Supposons alors que  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ , et choisissons  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tel que  $\text{Supp } \varphi \subset \Omega \setminus K$ , alors  $\langle S, \varphi \rangle = 0$ ; il en résulte que  $\text{Supp } S \subset K$ .

▷ Réciproquement si  $S$  est une distribution à support compact, soit  $K_0$ , choisissons  $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$  telle que  $\beta|_{K_0} = 1$ ; notant  $K_1 = \text{Supp } \beta$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on aura

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \beta\varphi \rangle + \langle S, (1 - \beta)\varphi \rangle = \langle S, \beta\varphi \rangle.$$

▷ Par conséquent, puisque pour tout compact  $K \subset \Omega$ , et en particulier pour  $K = K_1$ ,  $S$  est continue sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ,  $\exists C_1$  et  $m_1$  tels que

$$|\langle S, \varphi \rangle| = |\langle S, \beta\varphi \rangle| \leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq m_1} \sup_{x \in K_1} |\partial^\alpha(\beta\varphi)(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

soit en fait, d'après la formule de Leibnitz

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m_1} \sup_{x \in K_1} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il en résulte d'une part que  $S$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la topologie de  $\mathcal{E}(\Omega)$ , mais également pour tout compact  $K \supset K_1$ , sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  pour la topologie de  $\mathcal{D}_K^{m_1}(\Omega)$  ; par densité elle se prolonge à  $\mathcal{E}(\Omega)$  en un élément de  $\mathcal{E}'(\Omega)$  et à  $\mathcal{D}^{m_1}(\Omega)$  en un élément de  $(\mathcal{D}^{m_1})'(\Omega)$ , c'est donc une distribution d'ordre inférieur ou égal à  $m_1$ . □

**Remarque 10.12** *De façon plus générale, on démontre exactement de la même façon que si  $\omega$  est un ouvert d'adhérence compacte dans  $\Omega$ , et si  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $S|_\omega$  est d'ordre fini.*

## 10.2.2 Le théorème de structure

Le théorème suivant, qui est particulièrement suggestif :

**Théorème 10.13** *Une distribution  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , à support compact, est une somme finie de dérivées (au sens des distributions!) de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ , dont le support peut être choisi dans un voisinage arbitraire de celui de  $S$ .*



Ce résultat, hormis son intérêt pratique (il peut être plus facile de réaliser certains calculs sur des fonctions plutôt que sur des distributions), prouve que lors de la construction de l'ensemble des distributions, nous avons été particulièrement économes. L'objectif consistant à trouver un ensemble dans lequel il n'y avait pas de restriction à la dérivation des fonctions a été réalisé au plus juste. Les seules distributions parasites, ne correspondant pas à celles qui sont engendrées en dérivant des fonctions sont à support non borné ; il s'agit en fait du prix que nous avons payé pour obtenir un espace de distributions qui soit complet. DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\omega$  un ouvert relativement compact dans  $\Omega$ , posons  $K = \bar{\omega}$ , il existe alors  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $|\langle S, \varphi \rangle| \leq C_K p_K^m(\varphi)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . Notons  $d^m \varphi(x) = \partial^\mu \varphi(x)$ , avec  $\mu_j = m \quad \forall j = 1, n$ . Pour tout  $\alpha$  vérifiant  $|\alpha| \leq m$ , on peut écrire  $\partial^\mu \varphi = \partial^{\mu-\alpha} \partial^\alpha \varphi$ , et comme  $\text{Supp } \varphi$  est borné, on aura  $p_K^m(\varphi) \leq C p_K^0(d^m \varphi)$  Mais de plus

$$|d^m \varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} d^{m+1} \varphi(t) dt_1 \cdots dt_n \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\omega |d^{m+1} \varphi(t)| dt,$$

et par conséquent  $p_K^0(d^m \varphi) \leq C \|d^{m+1} \varphi\|_{L^1(\omega)}$ , soit  $|\langle S, \varphi \rangle| \leq C \|d^{m+1} \varphi\|_{L^1(\omega)}$ .

▷ Posons alors  $\psi = d^{m+1}\varphi$  ; comme l'application  $\Delta : \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow \psi$  est injective, on pourra poser  $U(\psi) = \langle S, \varphi \rangle$ , et on aura  $|U(\psi)| \leq C \|\psi\|_{L^1(\omega)} \forall \psi \in A$ , sous-espace vectoriel des fonctions de la forme  $d^{m+1}\varphi$ , où  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, il en résulte que  $U$  se prolonge à  $L^1(\omega)$  tout entier en une forme linéaire continue. Selon le théorème F.20, le dual de  $L^1(\omega)$  n'est autre que  $L^\infty(\omega)$  ; c'est dire qu'il existe  $f \in L^\infty(\omega)$  telle que  $U(\psi) = \int_\omega f \psi \forall \psi \in L^1(\omega)$ . On aura alors

$$\langle S, \varphi \rangle = U(d^{m+1}\varphi) = \langle T_f, d^{m+1}\varphi \rangle = (-1)^{n(m+1)} \langle d^{m+1}T_f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

▷ Prolongeons  $f$  par 0 à l'extérieur de  $\omega$  et notons  $F$  la fonction continue définie par  $F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t) dt_1 \cdots dt_n$ , nous aurons  $T_f = d^1 T_F$ . Si  $V$  est un voisinage de  $K$ , selon la proposition D.11, il existe  $\alpha \in \mathcal{D}(V)$  égale à 1 sur  $K$ , posant alors  $G = (-1)^{n(m+1)} \alpha F$ , on constate qu'en restriction à  $\omega$ ,  $S = d^{m+2} T_G$ .

▷ Dans le cas où  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , est à support compact  $K$ , on note  $\omega$  un ouvert relativement compact de  $\Omega$  contenant  $K$ ,  $V$  un voisinage de  $\bar{\omega}$  et  $\alpha$  une fonction de troncature dans  $\mathcal{D}(V)$ , identique à 1 sur  $K$ . Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on aura  $\langle S, \varphi \rangle = \langle S|_\omega, \alpha\varphi \rangle$ , et par conséquent d'après ce qui précède,  $\exists k \in \mathbb{N}$  et  $G$  continue à support dans  $V$ , tels que

$$\begin{aligned} \langle S, \varphi \rangle &= \langle d^k T_G, \alpha\varphi \rangle = (-1)^{nk} \langle T_G, d^k(\alpha\varphi) \rangle \\ &= (-1)^{nk} \left\langle T_G, \sum_{|\beta| \leq nk} C_\beta d^\beta(\varphi) \right\rangle = (-1)^{nk} \sum_{|\beta| \leq nk} C_\beta \langle T_G, d^\beta(\varphi) \rangle \\ &= \sum_{|\beta| \leq nk} C'_\beta \langle d^\beta T_G, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

□

**Proposition 10.14** *Si  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  est d'ordre  $k$ , alors  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nulle ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $k$  sur  $\text{Supp } S$ , on a  $\langle S, \varphi \rangle = 0$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ On utilisera une approximation de l'identité  $\theta_\varepsilon$ . Notons  $K$  le support de  $S$ ,  $K_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega \mid d(x, K) \leq 2\varepsilon\}$  et  $\chi_\varepsilon$  la fonction caractéristique de  $K_{2\varepsilon}$ . Posons alors  $\psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \theta_\varepsilon$ , on aura  $\partial^\alpha \psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \partial^\alpha \theta_\varepsilon$ , et par conséquent

$$\sup |\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x)| \leq \|\partial^\alpha \theta_\varepsilon\|_{L^1} \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|},$$

car  $\partial^\alpha \theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-|\alpha|} \partial^\alpha \theta(x/\varepsilon)$ .

▷ Par ailleurs, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  est nulle ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $k$  sur  $K$ , en opérant un développement limité de  $\varphi$  au voisinage d'un point  $x_0 \in K$  vérifiant  $\|x - x_0\| \leq 4\varepsilon$ , on obtient  $\sup_{x \in K_{3\varepsilon}} |\partial^\beta \varphi(x)| \leq C \varepsilon^{k+1-|\beta|}$

▷ On écrira alors

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \psi_\varepsilon \varphi \rangle + \langle S, (1 - \psi_\varepsilon) \varphi \rangle = \langle S, \psi_\varepsilon \varphi \rangle,$$

soit par conséquent, puisque  $S$  est d'ordre  $k$ ,

$$|\langle S, \varphi \rangle| = |\langle S, \psi_\varepsilon \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_{3\varepsilon}} |\partial^\alpha (\psi_\varepsilon \varphi)(x)|.$$

En vertu de la formule de Leibnitz,

$$\partial^\alpha (\psi_\varepsilon \varphi)(x) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |\partial^\gamma \psi_\varepsilon(x)| |\partial^{\alpha-\gamma} \varphi(x)| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{-|\gamma|} \varepsilon^{k+1-|\alpha|+|\gamma|},$$

il en résulte que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C\varepsilon,$$

et ceci pour tout  $\varepsilon > 0$  ; et par conséquent que  $\langle S, \varphi \rangle = 0$ .

□

### 10.3 Distributions à support ponctuel

La structure des distributions à support ponctuel est particulièrement simple et d'usage fréquent, elle peut être élucidée directement sans faire appel au théorème 10.13.



**Proposition 10.15** *Si le support de la distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est réduit à l'origine, alors  $S$  est une combinaison linéaire finie de dérivées de la mesure de Dirac ; c'est encore dire qu'il existe un entier  $k$  et des coefficients  $C_\alpha$  tels que*

$$S = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha \partial^\alpha \delta$$

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le théorème 10.11, la distribution  $S$  est d'ordre fini, soit  $k$ . Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , la formule de Taylor nous prouve que

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) + \rho(x),$$

avec

$$\rho(x) = (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha \varphi(tx) dt,$$

dont les dérivées sont nulles en 0 jusqu'à l'ordre  $k$ .

▷ Si  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est égale à 1 au voisinage de l'origine, on aura  $\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \psi \varphi \rangle + \langle S, (1-\psi)\varphi \rangle = \langle S, \psi \varphi \rangle$ , car  $\text{Supp } S = \{0\}$ . Mais  $\langle S, \psi \varphi \rangle = 0$ , d'après la proposition qui 10.14 ; il en résulte que

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \varphi(0) \left\langle S, \psi \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right\rangle$$

soit  $S = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha \partial^\alpha \delta$ .

□

Ce résultat permet d'étudier le problème de la division par un monôme de façon particulièrement élégante. Soit donc à résoudre  $x^\ell S = 0$ , considérons  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , on aura  $\langle S, \psi \rangle = \langle x^\ell S, \psi/x^\ell \rangle = 0$ , ce qui prouve que  $\text{Supp } S = \{0\}$ . Par conséquent  $S = \sum_{s \leq k} C_s \delta^{(s)}$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$0 = \langle x^\ell S, \varphi \rangle = \sum_{s \leq k} (-1)^s C_s (x^\ell \varphi)^{(s)}(0) = \sum_{k \geq s \geq \ell} (-1)^s \ell! C_s \varphi^{(s-\ell)}(0).$$

Il en résulte que les  $C_s$  sont nuls pour  $s \geq \ell$ , car étant donné  $s$ , on peut toujours construire une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi^{(\theta)}(0) = 0 \forall \theta \neq s - \ell$  et  $\varphi^{(s-\ell)}(0) = 1$ . Finalement, on a montré que  $S = \sum_{s < \ell} C_s \delta^{(s)}$ .





# Chapitre 11

## La convolution

### 11.1 Produit tensoriel

Notre propos consiste ici à généraliser aux distributions la notion de produit tensoriel que nous avons étudiée dans le cas des mesures de Radon. Nous ne disposons plus dans le cadre des distributions des théorèmes puissants de convergence dominée ou monotone que nous avons utilisés lors de la démonstration du théorème de Fubini, nous nous limiterons donc dans un premier temps à des fonctions d'essai à support compact ; par la suite nous tirerons parti des éventuelles précisions supplémentaires relatives aux supports pour étendre les résultats obtenus à un ensemble plus vaste de fonctions d'essai.

Nous noterons dans la suite  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts respectivement inclus dans  $\mathbb{R}^p$  et dans  $\mathbb{R}^q$ , nous poserons

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad n = p + q ;$$

un point  $\xi \in \Omega$  sera de la forme  $\xi = (x, y)$ , où  $x \in \Omega_1$  et  $y \in \Omega_2$ . Rappelons que  $u^x$  note la fonction  $y \rightarrow u(x, y)$ .

**Lemme 11.1 (Dérivation sous le crochet de dualité)** *Si  $T^2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors la fonction*

$$f : x \rightarrow \langle T_y^2, \varphi^x(y) \rangle$$

*appartient à  $\mathcal{D}(\Omega_1)$ , et on a*

$$\partial^{\alpha_1} \langle T_y^2, \varphi^x(y) \rangle = \langle T_y^2, \partial^\alpha \varphi(x, y) \rangle \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, 0, 0, \dots, 0).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts respectivement inclus dans  $\Omega_1$  et dans  $\Omega_2$  tels que  $\text{Supp } \varphi \subset K_1 \times K_2$ . Si  $x \in \Omega_1 \setminus K_1$ , on aura  $\varphi^x = 0$  ; par conséquent  $\text{Supp } f \subset K_1$ .

▷ Commençons par démontrer la continuité de  $f$ . Soient  $x, x' \in \Omega_1$  on aura

$$\begin{aligned} \left| \langle T_y^2, \varphi^x(y) - \varphi^{x'}(y) \rangle \right| &\leq C_2 \sup_{|\alpha| \leq m_2} \sup_{y \in K_2} |\partial^\alpha (\varphi(x, y) - \varphi(x', y))| \\ &\leq C_2 \|x - x'\| \sup_{|\beta| \leq m_2 + 1} \sup_{x \in K_1, y \in K_2} \left| \partial^\beta \varphi(x, y) \right| \end{aligned}$$

en vertu du théorème de accroissements finis appliqué à la variable  $x$ .

▷ Démontrons maintenant que  $f$  a des dérivées partielles continues, la dérivabilité de  $f$  en découlera, et par récurrence l'appartenance de  $f$  à  $\mathcal{D}(\Omega_1)$ . Posons donc

$$\Phi_\lambda^x(y) = (\varphi^{x+\lambda e_1} - \varphi^x)(y) / \lambda - \partial_1 \varphi(x, y),$$

où  $e_1$  est le vecteur unitaire dans la direction  $x_1$ . On aura

$$(f(x + \lambda e_1) - f(x)) / \lambda = \langle T_y^2, \Phi_\lambda^x(y) \rangle + \langle T_y^2, \partial_1 \varphi(x, y) \rangle$$

et, de même que ci-dessus,

$$\begin{aligned} \left| \langle T_y^2, \Phi_\lambda^x(y) \rangle \right| &\leq C_2 \sup_{|\alpha| \leq m_2} \sup_{y \in K_2} |\partial^\alpha \Phi_\lambda^x(y)| \\ &\leq C_2 \sup_{|\alpha| \leq m_2} \sup_{y \in K_2} \left| \partial^\alpha \left( \frac{\varphi(x + \lambda e_1, y) - \varphi(x, y)}{\lambda} - \partial_1 \varphi(x, y) \right) \right| \\ &\leq C \lambda \sup_{|\beta| \leq m_2 + 2} \sup_{(x, y) \in K_1 \times K_2} \left| \partial^\beta \varphi(x, y) \right| \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\partial_1 f(x) = \langle T_y^2, \partial_1 \varphi(x, y) \rangle$ , dont la continuité se démontre de façon analogue à celle de  $f$ ; le résultat annoncé en découle. □

### Théorème 11.2 (et définition)

(i) Si  $T^1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$  et  $T^2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ , il existe une distribution et une seule  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que  $\forall \psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1), \forall \psi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ , on ait  $\langle S, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle T^1, \psi_1 \rangle \langle T^2, \psi_2 \rangle$ . On notera  $S = T^1 \otimes T^2$ , et on aura donc

$$\langle T^1 \otimes T^2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle T^1, \psi_1 \rangle \langle T^2, \psi_2 \rangle.$$

(ii) Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\langle T^1 \otimes T^2, \varphi \rangle = \langle T_x^1, \langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y^2, \langle T_x^1, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , posons  $\rho(x) = \langle T_y^2, \varphi^x(y) \rangle$ ; selon le lemme 11.1,  $\rho \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ . On pourra donc poser  $\langle S, \varphi \rangle = \langle T_x^1, \rho(x) \rangle$ , et il est clair que, pour  $\varphi = \psi_1 \otimes \psi_2$ , on aura  $\rho(x) = \psi_1(x) \langle T_y^2, \psi_2(y) \rangle$ ; par conséquent  $\langle S, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle T_x^1, \psi_1(x) \rangle \langle T_y^2, \psi_2(y) \rangle$ .

▷ Il nous faut montrer que  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Soit donc  $K$  un compact de  $\Omega$ , et  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ , si  $K \subset K_1 \times K_2$ , on a vu au lemme 11.1 que  $\text{Supp } \rho \subset K_1$ ; par conséquent il existe  $C_1$  et  $m_1$  tels que

$$|\langle T_x^1, \rho(x) \rangle| \leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq m_1} \sup_{x \in K_1} |\partial^\alpha \rho(x)| \leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq m_1} \sup_{x \in K_1} |\langle T_y^2, \partial^\alpha \varphi(x, y) \rangle|,$$

mais, comme  $\text{Supp } \varphi^x \subset K_2$ , il existe  $C_2$  et  $m_2$  tels que

$$|\langle T_y^2, \partial^\alpha \varphi(x, y) \rangle| \leq C_2 \sup_{|\beta| \leq m_2} \sup_{y \in K_2} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x, y)|$$

et par conséquent

$$|\langle T_x^1, \rho(x) \rangle| \leq C \sup_{|\beta| \leq m_1+m_2} \sup_{(x,y) \in K_1 \times K_2} |\partial^\beta \varphi(x, y)|.$$

Il en résulte que  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

▷ L'unicité de  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  vérifiant  $\langle S, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle T_x^1, \psi_1(x) \rangle \langle T_y^2, \psi_2(y) \rangle$  découle du corollaire 11.4 ci-dessous, qui nous prouve la densité de l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions de la forme  $\psi_1 \otimes \psi_2$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . On en déduit immédiatement que

$$\langle T^1 \otimes T^2, \varphi \rangle = \langle T_x^1, \langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y^2, \langle T_x^1, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

□

**Lemme 11.3** *Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une suite de polynômes  $\mathcal{P}_k(x)$  tels que  $\forall \rho, \forall m$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_m^\rho(\mathcal{P}_k - \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{\|x\| \leq \rho} |\partial^\alpha (\mathcal{P}_k(x) - \varphi(x))| = 0.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons une approximation de l'identité  $\theta_\varepsilon$ , et posons  $\varphi_\varepsilon = \varphi * \theta_\varepsilon$ . D'après le théorème 6.81,  $\forall \alpha, \partial^\alpha \varphi_\varepsilon$  converge uniformément sur tout compact vers  $\partial^\alpha \varphi$ , soit  $\forall \rho, \forall m, p_m^\rho(\varphi_\varepsilon - \varphi) \rightarrow 0$ .

▷ Si nous prenons maintenant  $\theta(x) = e^{-\|x\|^2}$ , nous aurons

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^\ell}{\varepsilon^{2\ell} \ell!} \|x\|^{2\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_\ell^\varepsilon(x),$$

où les  $\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon$  forment une suite de polynômes convergeant uniformément sur tout compact ainsi que toutes leurs dérivées. Posons alors  $\mathcal{P}_\ell^\varepsilon(x) = (\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon * \varphi)(x)$ , nous aurons

$$\partial^\alpha (\mathcal{P}_\ell^\varepsilon - \varphi_\varepsilon) = \partial^\alpha (\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon - \theta_\varepsilon) * \varphi$$

Notons maintenant que si  $\text{Supp } \varphi \subset B_r(0)$ , on aura

$$\sup_{x \in B_r(0)} |\partial^\alpha (\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon - \theta_\varepsilon) * \varphi| \leq \sup_{z \in B_{r+\rho}(0)} |\partial^\alpha (\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon - \theta_\varepsilon)(z)| \|\varphi\|_{L^1},$$

d'où il résulte que  $p_m^\rho(\mathcal{P}_\ell^\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \rightarrow 0$  quant  $\ell \rightarrow \infty$ . On en déduit que  $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon$  et  $\ell(\varepsilon)$  tel que  $p_m^\rho(\mathcal{P}_{\ell(\varepsilon)}^\varepsilon - \varphi) < \eta$ .

▷ Montrons enfin que les  $\mathcal{P}_\ell^\varepsilon$  sont des polynômes : on aura en effet

$$(\mathcal{Q}_\ell^\varepsilon * \varphi)(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \|y\|^{2\ell} dy = C \int_{] -\beta, \beta ]^n} \varphi(x-y) \|y\|^{2\ell} dy,$$

que des intégrations par parties successives permettent de mettre sous la forme d'un polynôme. □

**Corollaire 11.4** *L'ensemble  $\mathcal{H}$  formé des combinaisons linéaires finies des fonctions à variables séparées  $\psi_1 \otimes \psi_2$ , où  $\psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  et  $\psi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ , est dense dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit donc  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ , avec  $K = K_1 \times K_2$  compact dans  $\Omega$ ; choisissons  $H = H_1 \times H_2$  compact de  $\Omega$  contenant un voisinage de  $K$ . Si  $\rho_1 \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{H}_1)$  et  $\rho_2 \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{H}_2)$ , avec  $\rho_1|_{K_1} = 1$ , et  $\rho_2|_{K_2} = 1$ , alors  $\rho_1(x)\rho_2(y)\mathcal{P}_k(x,y) \in \mathcal{H}$ . Nous déduisons alors du lemme 11.3 qu'il existe une suite de polynômes  $\mathcal{P}_k$  telle que

$$\rho_1(x)\rho_2(y) (\mathcal{P}_k(x,y) - \varphi(x,y)) = \rho_1(x)\rho_2(y)\mathcal{P}_k(x,y) - \varphi(x,y)$$

converge vers 0 dans  $\mathcal{D}_H(\Omega)$ ; la conclusion en découle. □

Selon la coutume, vérifions que l'application de la définition du produit tensoriel à des distributions définies par des fonctions localement intégrables, respecte la compatibilité avec la notion classique de produit tensoriel de deux fonctions; soient donc  $f_1 \in L^1_{loc}(\Omega_1)$  et  $f_2 \in L^1_{loc}(\Omega_2)$ , on aura

$$\begin{aligned} \langle T_{f_1} \otimes T_{f_2}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle &= \langle T_{f_1}, \varphi_1 \rangle \langle T_{f_2}, \varphi_2 \rangle \\ &= \int_{\Omega} f_1(x)f_2(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y) dx dy = \langle T_{f_1 \otimes f_2}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle, \end{aligned}$$

et par conséquent  $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1 \otimes f_2}$ .

### 11.1.1 Propriétés

**Proposition 11.5** *Si  $T^1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$  et  $T^2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ , alors*

- (i)  $\text{Supp } T^1 \otimes T^2 = \text{Supp } T^1 \times \text{Supp } T^2$
- (ii)  $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (T^1 \otimes T^2) = (\partial_x^\alpha T^1) \otimes (\partial_y^\beta T^2)$
- (iii) Si  $f_1 \in \mathcal{E}(\Omega_1)$  et  $f_2 \in \mathcal{E}(\Omega_2)$ ,  $(f_1 T^1) \otimes (f_2 T^2) = (f_1 \otimes f_2) (T^1 \otimes T^2)$
- (iv) Si  $T_j^1 \rightharpoonup T^1$  et  $T_j^2 \rightharpoonup T^2$ , alors  $T_j^1 \otimes T_j^2 \rightharpoonup T^1 \otimes T^2$

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par démontrer que  $\text{Supp}(T^1 \otimes T^2) \subset \text{Supp } T^1 \times \text{Supp } T^2$ . Si  $(x_0, y_0) \notin \text{Supp } T^1 \times \text{Supp } T^2$ , on aura par exemple  $x_0 \notin \text{Supp } T^1$ , ce qui implique la nullité de  $T^1$  dans un voisinage de  $x_0$ , et par conséquent celle de  $T^1 \otimes T^2$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

▷ Réciproquement si  $(x_0, y_0) \in \text{Supp } T^1 \times \text{Supp } T^2$ , il existe  $V_1(x_0)$  et  $V_2(y_0)$ , voisinages respectifs de  $x_0$  et  $y_0$  tels que  $V_1 \times V_2 \subset \text{Supp } T^1 \times \text{Supp } T^2$ , par conséquent  $\exists \varphi_1 \in \mathcal{D}'(V_1)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{D}'(V_2)$  tels que  $\langle T^1 \otimes T^2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T^1, \varphi_1 \rangle \langle T^2, \varphi_2 \rangle \neq 0$ .

▷ En effet

$$\begin{aligned} \langle \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (T^1 \otimes T^2), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle (T^1 \otimes T^2), \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle T_x^1, \langle T_y^2, \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\beta|} \langle \partial_x^\alpha T_x^1, \langle T_y^2, \partial_y^\beta \varphi \rangle \rangle = \langle \partial_x^\alpha T_x^1, \langle \partial_y^\beta T_y^2, \varphi \rangle \rangle. \end{aligned}$$

▷ De même

$$\langle (f \otimes g)(T^1 \otimes T^2), \varphi \rangle = \langle T^1 \otimes T^2, (f \otimes g)\varphi \rangle = \langle T^1, \langle T^2, (f \otimes g)\varphi \rangle \rangle = \langle fT^1, \langle gT^2, \varphi \rangle \rangle.$$

▷ Comme nous l'avons annoncé précédemment nous nous contenterons de démontrer la continuité séparée. Supposons par exemple que  $T_j^2 \rightarrow T^2$ , on aura

$$\langle T^1 \otimes T_j^2, \varphi \rangle = \langle T_j^2, \langle T^1, \varphi \rangle \rangle \rightarrow \langle T^2, \langle T^1, \varphi \rangle \rangle = \langle T^1 \otimes T^2, \varphi \rangle.$$

□

**Proposition 11.6** *Le produit tensoriel des distributions est associatif :*

$$T^1 \otimes (T^2 \otimes T^3) = (T^1 \otimes T^2) \otimes T^3$$

DÉMONSTRATION. On a en effet

$$\begin{aligned} \langle T^1 \otimes (T^2 \otimes T^3), \varphi \rangle &= \langle T^1, \langle T^2 \otimes T^3, \varphi \rangle \rangle = \langle T^1, \langle T^2, \langle T^3, \varphi \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle T^1 \otimes T^2, \langle T^3, \varphi \rangle \rangle = \langle (T^1 \otimes T^2) \otimes T^3, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

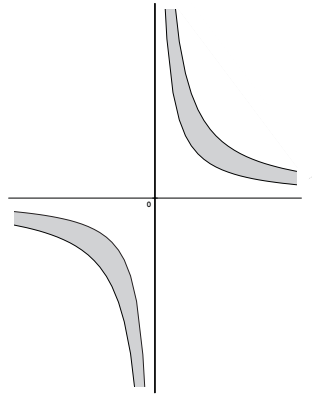
□

### Extension de la dualité

Il est bien entendu possible d'utiliser les informations dont on dispose relativement au support de la distribution  $T^1 \otimes T^2$  pour étendre son application au delà de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . La plus grande prudence est cependant recommandée quand il s'agit d'utiliser les formules de dualité itérées. Considérons par exemple la distribution  $\delta'_x \otimes 1_y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , son support n'est autre que  $\{0\} \times \mathbb{R}$ . Si  $\theta$  note une fonction de  $\mathcal{D}([1, 2])$  d'intégrale égale à 1, nous poserons  $\varphi(x, y) = -\text{sgn}(x)x^2\theta(xy)$  ; son support est contenu dans le complémentaire de l'axe des  $y$ , et on aura par conséquent

$$\langle \delta'_x \otimes 1_y, \varphi(x, y) \rangle = 0.$$



FIG. 11.1 – Le support de  $\varphi$ 

Mais

$$\langle \delta'_x, \langle 1, \varphi \rangle \rangle = -\frac{d}{dx} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dy \right) (0) = \frac{d}{dx} \left( x \int_{\mathbb{R}} \theta(z) dz \right) (0) = 1.$$

Des précautions supplémentaires s'imposent donc, le théorème suivant fournit une solution à cette difficulté :

**Théorème 11.7** Soient  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G$  fermés, si

$$\text{Supp } T^1 \subset E_1 \subset \overset{\circ}{U}_1, \text{ Supp } T^2 \subset E_2 \subset \overset{\circ}{U}_2, \text{ et } \text{Supp } \varphi \subset G,$$

où

$$U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont fermés et } (U_1 \times U_2) \cap G \text{ est compact,}$$

alors

(i) La fonction  $x \rightarrow \langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle$  est définie sur  $U_1$ , elle y est égale à la restriction d'une fonction  $\rho_2(x)$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ;

(ii) de même, la fonction  $y \rightarrow \langle T_x^1, \varphi(x, y) \rangle$  est définie sur  $U_2$ , et y est égale à la restriction d'une fonction  $\rho_1(y)$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$ .

(iii) Les quantités  $\langle T_x^1, \rho_2(x) \rangle$  et  $\langle T_y^2, \rho_1(y) \rangle$  sont indépendantes du choix de  $\rho_2(x)$  et  $\rho_1(y)$  prolongeant respectivement  $\langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle$  et  $\langle T_x^1, \varphi(x, y) \rangle$  et on aura

$$\langle T_x^1 \otimes T_y^2, \varphi(x, y) \rangle = \langle T_x^1, \rho_2(x) \rangle = \langle T_y^2, \rho_1(y) \rangle,$$

que l'on notera

$$\langle T_x^1 \otimes T_y^2, \varphi(x, y) \rangle = \langle T_x^1, \langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y^2, \langle T_x^1, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Dans un premier temps, nous pouvons choisir une fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  qui soit identique à 1 dans un voisinage de  $K = G \cap (U_1 \times U_2)$  et définir  $\langle T_x^1 \otimes T_y^2, \varphi(x, y) \rangle$  comme étant égal à  $\langle T_x^1 \otimes T_y^2, \psi(x, y)\varphi(x, y) \rangle$  ; nous aurons alors, en vertu du théorème 11.2,

$$\langle T_x^1 \otimes T_y^2, \varphi(x, y) \rangle = \langle T_x^1, \langle T_y^2, \psi(x, y)\varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y^2, \langle T_x^1, \psi(x, y)\varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

▷ Choisissons  $\rho_2(x) = \langle T_y^2, \psi(x, y)\varphi(x, y) \rangle$  et calculons sa restriction à  $U_1$ . On aura  $\rho_2(x) = \langle T_y^2, \psi^x(y)\varphi^x(y) \rangle$  et pour  $x \in U_1$ ,

$$(y \in \text{Supp } \varphi^x \cap \text{Supp } T^2) \Rightarrow (x, y) \in K,$$

soit par conséquent  $\psi(x, y) = 1$ . Il en résulte que  $\rho_2(x) = \langle T_y^2, \varphi(x, y) \rangle$ .

▷ Deux prolongements  $\rho_2$  et  $\rho'_2$  ne différant qu'en dehors d'un voisinage du support de  $T_x^1$ , il est clair que le résultat ne dépend pas du choix du prolongement.

□

On peut tenter d'aller plus loin et s'interroger sur la structure de l'espace vectoriel engendré par les produits tensoriels de distributions appartenant respectivement à  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$  et  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ , soit encore l'espace des combinaisons linéaires finies de tels produits tensoriels. En fait un tel espace n'est intéressant que s'il est muni d'une topologie convenable puis complété, auquel cas on montre qu'il est isomorphe à la fois à  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et à l'ensemble des applications linéaires continues  $L : \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ . L'isomorphisme en question se matérialise dans la formule suivante :

$$\langle L(\varphi_2), \varphi_1 \rangle = \langle K, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle \quad \forall \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2), \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

La distribution  $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$  est appelée noyau de  $L$ . Il s'agit là du célèbre *théorème des noyaux* de Schwartz, dont l'importance est considérable car d'une part, l'ensemble des applications linéaires continues  $\mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$  est extrêmement vaste et contient en particulier les opérateurs différentiels, et d'autre part l'étude du noyau  $K$  constitue un outil de choix dans l'investigation des propriétés de  $L$ . La théorie des opérateurs pseudo-différentiels utilise la transformation de Fourier, qui fera l'objet du chapitre suivant, à l'étude de ces noyaux.

## 11.2 Le produit de convolution

Il s'agit de l'une des notions essentielles autour desquelles s'organise le cours. La convolution est en effet un outil fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires ; la *transformation de Fourier* que nous étudierons au chapitre suivant, ainsi que ses extensions telle la *transformation de Laplace*, peuvent dans une large mesure être considérées comme des outils facilitant le calcul des produits de convolution.



### 11.2.1 Ensembles convolutifs

On a déjà pu constater dans le paragraphe relatif à la convolution des fonctions, que les questions de support sont essentielles pour l'étude de la convolution. Cette difficulté subsiste dans le cadre des distributions; c'est même là le point principal auquel il faut porter attention. La notion de supports convolutifs permet d'éclaircir quelque peu la situation.

**Définition 11.8** Soient  $E_j$ ,  $j = 1, k$  des sous-ensembles fermés de  $\mathbb{R}^n$ , si  $x_j \in E_j$ , on pose  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , et on note

$$\mathcal{B}_\rho(0) = \{x \in \prod_{i=1, k} E_i \mid \|x\| \leq \rho\}$$

et

$$\Pi_r(E_i, i = 1, k) = \{x \in \prod_{i=1, k} E_i \mid \|\sum_{i=1, k} x_i\| \leq r\}.$$

On dit que les sous-ensembles fermés  $E_j$ ,  $i = 1, k$  de  $\mathbb{R}^n$  sont convolutifs si

$$\forall r > 0, \exists \rho(r) \text{ tel que } \Pi_r(E_i, i = 1, k) \subset \mathcal{B}_\rho(0).$$

Autrement dit, les  $E_i$  sont convolutifs si

$$\left(x_i \in E_i, \sum x_i \text{ bornée}\right) \implies \text{chaque } x_i \text{ est borné.}$$

#### Proposition 11.9

(i) Si les  $E_j$  sont fermés, et s'ils sont compacts, sauf l'un d'eux au plus, alors ils sont convolutifs.

(ii) Si on adjoint un ensemble compact à une collection d'ensemble convolutifs, ils restent convolutifs.

(iii) Sur  $\mathbb{R}$ , les ensembles  $F_j = [a_j, +\infty[$  sont convolutifs.

DÉMONSTRATION.

▷ Si les  $E_j$ ,  $j = 1, k-1$  sont compacts,  $\exists R > 0$ , tel que  $x_i \in E_i \implies \|x_i\| \leq R$ ,  $i = 1, k-1$   
Par conséquent

$$\left\| \sum_{i=1, k-1} x_i + x_k \right\| \geq \|x_k\| - \sum_{i=1, k-1} \|x_i\| \geq \|x_k\| - (k-1)R;$$

il en résulte que  $\|x_k\| \leq r + (k-1)R$  dès que  $x \in \Pi_r^k(E_i)$ .

▷ Si  $E_k \subset B_R(0)$ , on aura

$$\left\| \sum_{i=1, k-1} x_i + x_k \right\| \geq \left\| \sum_{i=1, k-1} x_i \right\| - \|x_k\| \geq \left\| \sum_{i=1, k-1} x_i \right\| - R,$$

et par conséquent

$$x \in \Pi_r^k(E_i) \implies (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \in \Pi_{r+R}^{k-1}(E_i),$$

ce qui implique l'existence de  $\rho$  tel que  $\|x_i\| \leq \rho$ ,  $i = 1, k-1$ .

▷ En effet si  $x \in \Pi_r^k(E_i)$ , on aura

$$r \geq \left\| \sum_{i=1,k} x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1,k} (x_i - a_i) \right\| - \left\| \sum_{i=1,k} a_i \right\|,$$

et par conséquent

$$\left\| \sum_{i=1,k} (x_i - a_i) \right\| \leq r + \left\| \sum_{i=1,k} a_i \right\|,$$

soit comme  $x_i \geq a_i$ ,  $x_i \leq a_i + r + \left\| \sum_{i=1,k} a_i \right\|$ .

□

**Lemme 11.10** *Si les  $E_j$  sont convolutifs, alors*

$$\sum_{j=1,k} E_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_j \in E_j, x = \sum_{j=1,k} x_j \right\}$$

*est fermé dans  $\mathbb{R}^n$ .*

DÉMONSTRATION. Soit donc  $x^\ell$ , une suite dans  $\sum_{j=1,k} E_j$  qui converge, soit vers  $x$ . On aura  $x^\ell = \sum_{j=1,k} x_j^\ell$ , où  $x_j^\ell \in E_j$ . Comme la suite  $x^\ell$  converge,  $\exists r$  tel que  $\|x^\ell\| \leq r$ , et par conséquent  $\exists \rho$  tel que  $\|x_j^\ell\| \leq \rho$ ,  $\forall j = 1, k, \forall \ell$ . D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on démontre de proche en proche que les  $x_j^\ell$  convergent quand  $\ell \rightarrow \infty$ , à l'extraction près d'une sous-suite, respectivement vers les  $x_j \in E_j$ , qui sont fermés. Par continuité, il en résulte que  $x = \sum_{j=1,k} x_j \in \sum_{j=1,k} E_j$ .

□

### 11.2.2 Divers aspects du produit de convolution

Commençons par mettre en œuvre la notion de supports convolutifs dans le cas du produit de convolution de deux fonctions localement intégrables ; jusqu'ici nos résultats étaient relatifs soit au cas où les deux fonctions étaient intégrables, soit à celui où l'une des deux fonctions était à support compact.

**Lemme 11.11** *Si  $f$  et  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  et si leurs supports sont convolutifs, alors*

- (i) *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $y \rightarrow f(y)g(x - y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ .*
- (ii) *La fonction*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy,$$

*est localement intégrable.*

- (iii) *On a, pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)\varphi(x + y) dx dy$$

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, si les supports de  $f$  et  $g$  sont convolutifs, alors

$$(y \in \text{Supp } f, x - y \in \text{Supp } g, \|x\| \leq r) \Rightarrow \|y\| \leq \rho;$$

par conséquent, si on choisit  $\psi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , identique à 1 sur  $B_\rho(0)$ , pour  $x \in B_r(0)$  on aura  $f(y)g(x - y) = \psi_r(y)f(y)g(x - y)$ , dont le support est compact.

▷ Il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_r(y)f(y)g(x - y) dy = (\psi_r f) * g(x),$$

quantité qui ne dépend pas en fait du choix de  $\psi_r$ , du moins tant que  $\|x\| < r$ . De la proposition 6.78 on déduit alors que  $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle T_{f * g}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x) f(y)g(x - y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(s)\varphi(y + s) dy ds, \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini.

□

Il est alors tentant d'écrire ce dernier résultat sous la forme



$$\langle T_{f * g}, \varphi \rangle = \langle T_{f(x)} \otimes T_{g(y)}, \varphi(x + y) \rangle,$$

mais cela ne peut pas se faire sans précautions, en effet, la fonction  $\zeta(x, y) = \varphi(x + y)$  n'est pas à support compact dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et on a bien vu au paragraphe précédent que la prudence était de mise dans ces conditions. En fait, on a vu au lemme 10.8, que si  $S$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , si  $H = \text{Supp } \zeta \cap (\text{Supp } S \otimes T)$  est compact, et si on choisit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  qui vérifie  $\psi = 1$  dans un voisinage de  $H$ , alors la forme linéaire

$$\zeta \rightarrow \langle S_x \otimes T_y, \psi \zeta \rangle$$

constitue une extension de  $S_x \otimes T_y$  aux fonctions  $\zeta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$  telles que  $\text{Supp } \zeta \cap \text{Supp}(S_x \otimes T_y)$  soit compact, cette extension étant indépendante du choix de  $\psi$ , mais par contre on a vu au théorème 11.7 que des précautions supplémentaires sont nécessaires si on veut pouvoir utiliser les formules de dualité itérées.

**Lemme 11.12** Soient  $S$  et  $T$  deux distributions dont les supports sont convolutifs, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , et  $\zeta(x, y) = \varphi(x + y)$ , alors  $H = \text{Supp } \zeta \cap (\text{Supp } S \times \text{Supp } T)$  est compact.

DÉMONSTRATION. On a en effet  $H = \Pi_r(\text{Supp } S, \text{Supp } T)$ , pour  $\text{Supp } \varphi \subset B_r(0)$ .

□

Comme d'habitude, on omettra de mentionner la fonction de troncature  $\psi$ , puisque le résultat n'en dépend pas, et on posera la définition suivante :

**Définition 11.13** Si  $S$  et  $T$  sont deux distributions de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  dont les supports sont convolutifs, on pose

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle.$$

**Proposition 11.14** Si  $S$  et  $T$  sont deux distributions de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  dont les supports sont convolutifs, on a

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x + y) \rangle \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Comme  $\text{Supp } \zeta$  n'est pas compact, nous devons démontrer que nous sommes dans les conditions d'application du théorème 11.7. Il nous faut donc démontrer l'existence de  $U_1$  et  $U_2$  convolutifs tels que  $\text{Supp } S \subset \overset{\circ}{U}_1$  et  $\text{Supp } T \subset \overset{\circ}{U}_2$ . C'est en fait une conséquence de la proposition 11.9, considérons en effet  $V_1 = V_2 = B_1(0)$ , ce sont des compacts, l'ensemble formé de  $\text{Supp } S, \text{Supp } T, V_1, V_2$  est donc convolutif; c'est encore dire que  $\text{Supp } S + V_1$  et  $\text{Supp } T + V_2$  sont convolutifs. Il suffira donc de prendre  $U_1 = \text{Supp } S + V_1$  et  $U_2 = \text{Supp } T + V_2$ . □

**Remarque 11.15**

(i) La notion de support convolutif n'épuise pas la question. En particulier si deux fonctions intégrables sont convolables, c'est en raison de propriétés de leur comportement à l'infini plus fines que la simple considération de la géométrie de leurs supports. C'est ainsi que les mesures bornées (c'est-à-dire prolongeables aux fonctions bornées), au nombre desquelles les mesures de probabilité, sont convolables.

(ii) Si  $S$  et  $T$  sont à support compact, alors  $S_x \otimes T_y$  également et la formule

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle$$

définissant le produit de convolution, constitue en fait un produit de dualité entre  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 11.16** Si les supports des distributions  $S$  et  $T$  sont convolutifs

(i)  $\text{Supp}(S * T) \subset \text{Supp } S + \text{Supp } T$

(ii) Leur produit de convolution est symétrique :

$$S * T = T * S.$$

(iii) Le produit de convolution de distributions dont les supports sont globalement convolutifs est associatif :

$$S * (T * U) = (S * T) * U$$

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $\xi_0 \notin \text{Supp } S + \text{Supp } T$ ; comme en vertu du lemme 11.10,  $\text{Supp } S + \text{Supp } T$  est fermé, il existe un voisinage  $V(\xi_0)$  tel que si  $x + y \in V(\xi_0)$ ,  $(x, y) \notin \text{Supp } S \times \text{Supp } T$ . Il en résulte que  $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle = 0$  dès que  $\text{Supp } \varphi$  est inclus dans un voisinage de  $\xi_0$ , soit par conséquent  $\xi_0 \notin \text{Supp}(S * T)$ . La conclusion en résulte.

▷ On aura en effet

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(y + x) \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle.$$

▷ Supposons maintenant que les supports de  $S$ ,  $T$  et  $U$  soient convolutifs, alors d'une part  $\text{Supp } T$  et  $\text{Supp } U$  sont convolutifs, ainsi que d'autre part  $\text{Supp } S$  et  $\text{Supp } T + \text{Supp } U$ , et par conséquent  $\text{Supp } S$  et  $\text{Supp } T * U$ , puisque  $\text{Supp } T * U \subset \text{Supp } T + \text{Supp } U$ . Il en résulte que

$$\langle S * (T * U), \varphi \rangle = \langle S_x, \langle (T * U)_\xi, \varphi(x + \xi) \rangle \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \langle U_z, \varphi(x + y + z) \rangle \rangle \rangle.$$

Par ailleurs, on aura

$$\langle (S * T) * U, \varphi \rangle = \langle (S * T)_\zeta, \langle U_z, \varphi(\zeta + z) \rangle \rangle,$$

car les supports de  $S * T$  et de  $U$  sont convolutifs au voisinage du support de  $S * T$ , la fonction  $\zeta \rightarrow \langle U_z, \varphi(\zeta + z) \rangle$  étant la trace d'une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , en vertu du théorème 11.7 et de la proposition 11.14. Le calcul habituel des produits de convolution s'applique alors et on aura

$$\langle (S * T)_\zeta, \langle U_z, \varphi(\zeta + z) \rangle \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \langle U_z, \varphi(x + y + z) \rangle \rangle \rangle,$$

la conclusion en découle. □

**Proposition 11.17** *Si  $A$  et  $B$  sont convolutifs, si  $S_j \rightarrow S$ , et  $T_j \rightarrow T$ , avec  $\text{Supp } S_j$  et  $\text{Supp } S \subset A$ ,  $\text{Supp } T_j$  et  $\text{Supp } T \subset B$ , alors  $S_j * T_j \rightarrow S * T$ .*

DÉMONSTRATION. Soient en effet  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  qui vérifie  $\psi = 1$  dans un voisinage de  $H = \text{Supp } \zeta \cap (A + B)$ , où  $\zeta(x, y) = \varphi(x + y)$ , on aura

$$\langle S_j * T_j, \varphi \rangle = \left\langle (S_j)_x \otimes (T_j)_y, \zeta \psi(x, y) \right\rangle \rightarrow \langle S_x \otimes T_y, \zeta \psi(x, y) \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle,$$

d'après la proposition 11.5 (iv). □



**Remarque 11.18** *Il faut prendre garde à ne pas considérer l'associativité du produit de convolution comme automatique dès que ce dernier à un sens! Considérons par exemple les distributions suivantes :  $1$ , dont le support est  $\mathbb{R}$ ,  $\delta'$ , dont le support est  $\{0\}$ , et  $Y$ , dont le support est égal à  $\mathbb{R}^+$ . On aura  $(1 * \delta') * Y = 0 * Y = 0$ , et  $1 * (\delta' * Y) = 1 * \delta = 1$ . Les supports de ces distributions ne sont en effet pas globalement convolutifs, bien que l'une d'entre elles soit à support compact.*

### 11.2.3 Propriétés

**Proposition 11.19** Pour tout  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , on a

- (i)  $\delta_a * S = \tau_a S$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , et en particulier  $\delta * S = S$
- (ii)  $(\partial^\alpha \delta) * S = \partial^\alpha S$

DÉMONSTRATION.

▷ On a

$$\langle S * \delta_a, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle \delta_a(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S_x, \varphi(x+a) \rangle = \langle S_x, \tau_{-a} \varphi(x) \rangle = \langle \tau_a S, \varphi \rangle.$$

▷ De même

$$\langle S * \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle \partial^\alpha \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S_x, \partial^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle \partial^\alpha S_x, \varphi(x) \rangle$$

□

**Corollaire 11.20** Si  $S$  et  $T$  sont deux distributions dont les supports sont convolutifs, alors

$$\partial^\alpha (S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T).$$

DÉMONSTRATION. En effet, comme  $\partial^\alpha \delta$  est à support compact, selon la proposition 11.9, les supports de ces trois distributions sont *globalement* convolutifs, on pourra donc écrire

$$\partial^\alpha (S * T) = \partial^\alpha \delta * (S * T) = (\partial^\alpha \delta * S) * T = (\partial^\alpha S) * T.$$

□

**Proposition 11.21** Si  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$S * T_\psi = T_\pi \text{ où } \pi(t) = \langle S_y, \psi(t-y) \rangle \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n).$$

DÉMONSTRATION. On aura en effet, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \langle S * T_\psi, \varphi \rangle &= \langle S_y, \langle (T_\psi)_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \left\langle S_y, \int \psi(x) \varphi(x+y) dx \right\rangle \\ &= \left\langle S_y, \int \psi(t-y) \varphi(t) dt \right\rangle = \langle S_y, \langle (T_\varphi)_t, \psi(t-y) \rangle \rangle \\ &= \langle S_y \otimes (T_\varphi)_t, \psi(t-y) \rangle = \langle (T_\varphi)_t, \langle S_y, \psi(t-y) \rangle \rangle = \langle (T_\pi)_t, \varphi(t) \rangle, \end{aligned}$$

soit  $S * T_\psi = T_\pi$ . D'après le lemme 11.1,  $\pi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ .

□

Dans la pratique on dit que  $S * \psi = \langle S_y, \psi(t - y) \rangle \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ .

### 11.2.4 Applications

**Lemme 11.22** *Si  $\theta_k$  est une approximation de l'identité, alors*

$$\theta_k \rightarrow \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer que  $\check{\theta}_k \rightarrow \delta = \check{\delta}$ . On aura en effet, pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle \check{\theta}_k, \varphi \rangle = \langle \theta_k(y), \varphi(-y) \rangle = (\theta_k * \varphi)(0)$$

et on a vu au théorème 6.29 que  $\theta_k * \varphi \rightarrow \varphi$  uniformément sur tout compact. □

**Théorème 11.23** *Si  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , alors il existe  $\psi_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $T_{\psi_k} \rightarrow S$ .*

DÉMONSTRATION. Posons  $\psi_k = S * \theta_k$ , d'après la proposition 11.21, on aura  $\psi_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  et comme  $\theta_k \rightarrow \delta$ , selon la proposition 11.17 on aura  $\psi_k = S * \theta_k \rightarrow S * \delta = S$ . □

**Remarque 11.24** *Ce résultat, tout de même assez spectaculaire, signifie que tous les produits de dualité  $\langle S, \varphi \rangle$ , peuvent se calculer comme des limites de quantités du type  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k \varphi dx$ . Bien entendu, la convergence de la suite  $\psi_k$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est loin d'être assurée; en ce sens la théorie des distributions peut être considérée comme une manière particulièrement puissante de manipuler des intégrands auxquels ne s'appliquent pas les théorèmes de passage à la limite issus de la théorie de Lebesgue.*

**Théorème 11.25** *Si  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , et si toutes les dérivées partielles  $\partial_j S$ ,  $j = 1, n$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $S$  est une fonction continûment dérivable et les  $\partial_j S$  sont ses dérivées usuelles.*

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons une approximation de l'identité  $\theta_k$ , et notons  $f_k$  la fonction indéfiniment dérivable  $f_k = S * \theta_k$ ; d'après le lemme qui précède,  $f_k \rightarrow S$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Par ailleurs, on a  $\partial_j f_k = v_j * \theta_k$ , où  $v_j = \partial_j S$  est par hypothèse une fonction continue, et le théorème 6.29 nous montre que  $\partial_j f_k \rightarrow v_j$  uniformément sur tout compact. La formule de Taylor nous montre alors que  $f_k(x) = f_k(0) + g_k(x)$  où  $g_k(x) = \sum_{j=1, n} x_j \int_0^1 \partial_j f_k(tx) dt$  converge uniformément vers  $g(x) = \sum_{j=1, n} x_j \int_0^1 v_j(tx) dt$  sur tout compact.

▷ Soit alors  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$ , on aura

$$\langle S, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(0) + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui montre la convergence de la suite  $f_k(0)$ , et par conséquent la convergence uniforme sur tout compact de la suite  $f_k$ , soit vers  $g$ . Il en résulte que la distribution  $S$  n'est autre que la fonction  $g$ .

▷ Considérons de plus près la suite  $f_k$ , elle converge vers  $g$  dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$  et  $y$  est donc de Cauchy, ainsi que les suites  $\partial_j f_k$  qui convergent vers les  $v_j$ . Il en résulte que  $f_k$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ; elle y converge donc et on a  $\partial_j g = v_j$ . Nous avons donc démontré que la distribution  $S$  est en fait une fonction continûment dérivable dont les dérivées sont données par les  $v_j$ .

□

**Théorème 11.26** *Les applications linéaires continues  $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  qui commutent avec les translations, c'est-à-dire qui vérifient  $L(\tau_a \varphi) = \tau_a(L\varphi)$ , sont de la forme  $L\varphi = S * \varphi$ , où  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  est déterminée par  $L$  de façon unique.*

DÉMONSTRATION.

▷ Montrons tout d'abord que, si  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\varphi \rightarrow S * \varphi$  est continue  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ . C'est dire en fait que  $\forall K$  compact, sa restriction à  $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$  est continue. Comme il s'agit d'espaces de Fréchet, on peut appliquer le théorème du graphe fermé C.16, et il nous suffira de démontrer que si  $\varphi_j$  converge dans  $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ , soit vers  $\varphi$  et  $S * \varphi_j$  converge dans  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ , soit vers  $f$ , alors  $S * \varphi = f$ . Soit donc  $y \in \mathbb{R}^n$ , on aura  $\tau_y \varphi_j \rightarrow \tau_y \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , et par conséquent

$$f(x) = \lim (S * \varphi_j)(x) = \lim (S * \tau_{-x} \varphi_j)(0) = (S * \tau_{-x} \varphi)(0) = (S * \varphi)(x).$$

▷ Notons  $S_L$  la forme linéaire  $\varphi \rightarrow L\varphi(0)$ ; c'est une distribution, puisque  $L$  est continue et que l'application  $\psi \rightarrow \psi(0) : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  l'est également. Montrons que  $L\varphi = \check{S}_L * \varphi$ . En effet

$$\begin{aligned} \check{S}_L * \varphi(x) &= \langle \check{S}_L(y), \varphi(x - y) \rangle = \langle S_L(y), \varphi(x + y) \rangle = \langle S_L(y), \tau_{-x} \varphi(y) \rangle \\ &= L(\tau_{-x} \varphi)(0) = (\tau_{-x} L(\varphi))(0) = L(\varphi)(x). \end{aligned}$$

La question qui subsiste est celle de l'unicité : si  $L(\varphi) = \check{S} * \varphi$ , alors

$$L(\varphi)(0) = (\check{S} * \varphi)(0) = \langle \check{S}(y), \varphi(-y) \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

et par conséquent  $S = S_L$ .

□

Il s'agit là en fait d'un théorème de représentation extrêmement précieux, cas particulier du théorème de noyaux, qui nous éclaire sur la raison qui rend la convolution aussi importante dans tous les domaines de la physique. Si  $\varphi$  constitue la donnée et  $L(\varphi)$  la résultat de la mesure, les hypothèses que nous avons fait porter sur  $L$  ont une interprétation tout à fait claire : la linéarité a pour nom 'principe de superposition', la continuité 'stabilité' et la commutation avec les translations 'invariance par changement de repère'.

**Remarque 11.27** *Il est intéressant de constater que ce théorème, qui fournit une caractérisation des distributions, est en fait à l'origine de la théorie : c'est de cette façon qu'elles avaient été initialement découvertes par Schwartz, avant qu'il en trouve la présentation sous forme de dualité, universellement adoptée aujourd'hui.*





**Quatrième partie**  
**Transformation de Fourier**



# Introduction

La transformation de Fourier est un outil fondamental de l'analyse. Elle est utilisée dans des domaines très divers : l'étude des équations aux dérivées partielles, l'analyse des signaux etc...Elle permet (dans de nombreux cas que l'on précisera dans la suite) de représenter une fonction ou une distribution comme une somme de fonctions exponentielles complexes.

Une propriété fondamentale de la transformation de Fourier est le fait qu'elle transforme les dérivations par rapport à une variable en multiplication par cette variable : ainsi, les équations différentielles (à coefficients constants) se ramènent à des équations algébriques et les équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ou même algébriques. Plus généralement, la transformation de Fourier transforme la convolution en produit. Ainsi la résolution d'une équation de convolution se ramène à un problème de division. Cette propriété simplifie bien-sûr grandement les calculs et permet d'accéder plus facilement à la résolution de nombreux problèmes.

Il est important de remarquer que la transformation de Fourier ne s'applique que lorsque l'ouvert  $\Omega$  est égal à l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Cependant, on peut encore utiliser la transformation de Fourier lorsque  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$  à condition de multiplier au préalable les fonctions (ou distributions) que l'on cherche à transformer par une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Ceci permet d'obtenir des informations locales sur la solution d'un problème posé dans  $\Omega$ .

Nous commençons par décrire la transformation de Fourier dans le cas des fonctions intégrables. Naturellement, afin de pouvoir utiliser les outils introduits au cours des chapitres précédents, et en particulier la théorie des distributions, nous serons tentés par la suite d'étendre cette transformation aux distributions. Nous verrons que cela n'est pas possible en général, mais seulement pour certaines distributions dites *tempérées*. Cette extension de la définition de la transformation de Fourier nous permettra d'établir facilement des résultats essentiels comme la formule de réciprocity ou la formule de Plancherel.



# Chapitre 12

## Transformation de Fourier des fonctions

### 12.1 La transformation de Fourier dans $L^1$

#### 12.1.1 Le théorème de Riemann-Lebesgue

Dans ce qui suit,  $f$  désigne une fonction à valeurs complexes de la variable  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 12.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on appelle transformée de Fourier de  $f$  et on note  $\widehat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$  la fonction à valeurs complexes de la variable réelle  $\xi$  définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx. \quad (12.1)$$

Plus généralement, pour  $n \geq 1$  et  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on appelle transformée de Fourier de  $f$  et on note  $\widehat{f}$  (ou  $\mathcal{F}(f)$ ) la fonction à valeurs complexes de la variable  $\xi \in \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (12.2)$$

où  $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ .

**Remarque 12.2** Dans le cas particulier d'une fonction à variables séparées :

$$f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

on vérifie facilement que :

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1) \widehat{f}_2(\xi_2) \dots \widehat{f}_n(\xi_n).$$

Il est clair que  $\widehat{f}$  est bien définie quand  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . De plus, on peut établir le résultat suivant, appelé *théorème de Riemann-Lebesgue* :

**Théorème 12.3** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\widehat{f}$  est une fonction continue de  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et tend vers 0 à l'infini.

DÉMONSTRATION. La continuité de  $\widehat{f}$  est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Démontrons que  $\widehat{f}$  tend vers 0 à l'infini. Cela se démontre en deux temps. On établit tout d'abord le résultat pour les fonctions  $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$  puis on l'étend aux fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  en utilisant un résultat de densité.

Si  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ , une intégration par parties donne :

$$i\xi_j \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \text{ pour tout } j, : 1 \leq j \leq n, \quad (12.3)$$

d'où

$$\left( \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right) |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{j=1}^n |\xi_j| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^1}.$$

On a donc finalement

$$|\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\xi| \left( \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^1}^2 \right)^{1/2},$$

ce qui montre que  $\widehat{f}$  tend vers 0 lorsque  $|\xi|$  tend vers l'infini.

Soit maintenant  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\varepsilon > 0$ . On a vu au chapitre 2 que  $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Cela signifie qu'il existe une fonction  $g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\|f - g\|_{L^1} \leq (2\pi)^{n/2} \varepsilon.$$

Par ailleurs :

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \widehat{g}(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g(x)) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \leq |\widehat{g}(\xi)| + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - g\|_{L^1}.$$

D'après la première partie de la preuve, il existe  $A$  tel que

$$|\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon \quad \text{si } |\xi| \geq A.$$

On a donc, pour  $|\xi| \geq A$  :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème. □

### 12.1.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $L^1$

En réalité, on peut vérifier que la formule (12.3) est valable dès que  $f$  et sa dérivée partielle au sens des distributions  $\partial f / \partial x_j$  sont intégrables.

Supposons pour fixer les idées que  $j = 1$  et posons, pour presque tout  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$  :

$$g(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,  $g$  est une fonction continue de  $x_1$  qui admet des limites finies en  $x_1 \rightarrow +\infty$  et en  $x_1 \rightarrow -\infty$ . De plus, on peut facilement vérifier que (au sens des distributions) :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \text{ pour presque tout } (x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Par conséquent, la fonction  $f - g$  est égale presque partout à une fonction  $h$  indépendante de  $x_1$ . Il en résulte que  $f$  est également une fonction continue de  $x_1$  qui admet des limites finies en  $x_1 \rightarrow +\infty$  et en  $x_1 \rightarrow -\infty$ . Mais comme  $f$  est intégrable en  $x_1$  pour presque tout  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ , ces limites sont nécessairement nulles.

On peut alors écrire que, pour presque tout  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$  :

$$\int_{\mathbb{R}} \left( -i\xi_1 f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_1} (f(x) e^{-ix \cdot \xi}) dx_1 = 0.$$

En intégrant cette identité par rapport à  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ , on obtient finalement la formule suivante :

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = i\xi_j \mathcal{F} f \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.4)$$

En appliquant ce résultat aux dérivées successives de  $f$ , on montre sans difficulté le

**Lemme 12.4** *Si  $f$  et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $m$  sont intégrables, alors :*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \mathcal{F} f, \quad (12.5)$$

pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  tel que

$$|\alpha| = \sum_{j=1, n} \alpha_j \leq m.$$

Il en résulte en particulier que  $\mathcal{F} f$  tend vers 0 à l'infini plus vite que  $1/|\xi|^m$ .

Supposons maintenant que l'on veuille dériver la transformée de Fourier d'une fonction intégrable  $f$  par rapport à  $\xi_j$ . On est alors tenté de dériver sous le signe somme et d'écrire :

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \mathcal{F}(-ix_j f)(\xi). \quad (12.6)$$

Ceci est justifié lorsque la fonction  $x_j f(x)$  est intégrable, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. Plus généralement, on a le :



**Lemme 12.5** Si  $x^\alpha f(x)$  est intégrable pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq m$ , alors  $\mathcal{F}f$  est de classe  $\mathcal{C}^m$  et :

$$\partial^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi). \quad (12.7)$$

Ces deux lemmes nous montrent que la transformation de Fourier “échange” de la régularité avec de la décroissance. Autrement dit, plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier est décroissante à l’infini. Réciproquement, mieux la fonction décroît à l’infini, plus sa transformée de Fourier est régulière.

Observons maintenant l’effet d’une translation sur la transformation de Fourier. On rappelle que :

$$\tau_a f(x) = f(x - a).$$

**Lemme 12.6** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}f \quad (12.8)$$

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} f) = \tau_a \mathcal{F}f \quad (12.9)$$

DÉMONSTRATION. Ces deux identités s’obtiennent sans aucune difficulté. On a par exemple

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) e^{-ix \cdot \xi} dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ia \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy.$$

□

Enfin, on vérifie facilement le

**Lemme 12.7** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Alors :

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

où  $f_\lambda$  désigne la fonction définie par :

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

### 12.1.3 Exemples

Observons quelques exemples :

**Exemple 1 :**

Soit  $\lambda$  un réel positif et  $f_1$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $f_1(x) = e^{-\lambda^2 x^2/2}$ . Pour calculer sa transformée de Fourier, nous allons considérer tout d’abord le cas  $\lambda = 1$  puis nous appliquerons le lemme 12.7.

Il s'agit bien entendu d'une fonction intégrable et l'on a :

$$\widehat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx.$$

De plus, on peut appliquer les lemmes 12.4 et 12.5 car  $f_1$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , toutes ses dérivées sont intégrables et  $x^j f_1(x)$  est intégrable pour tout  $j$ . Il en résulte en particulier que  $\widehat{f}_1$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et qu'elle tend vers 0 plus vite que toute puissance de  $1/\xi$ .

Pour calculer explicitement  $\widehat{f}_1$ , on peut remarquer, en effectuant une intégration par parties, que :

$$\widehat{f}_1'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx = -\xi \widehat{f}_1(\xi).$$

On a donc :

$$\widehat{f}_1(\xi) = C e^{-\xi^2/2}$$

avec

$$C = \widehat{f}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

On a finalement montré que

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2/2}\right) = e^{-\xi^2/2} \tag{12.10}$$

Autrement dit, lorsque  $\lambda = 1$ , la fonction  $f_1$  est égale à sa transformée de Fourier. Plus généralement, en appliquant le lemme 12.7, on en déduit que pour tout réel positif  $\lambda$ ,

$$\widehat{f}_1(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}}.$$

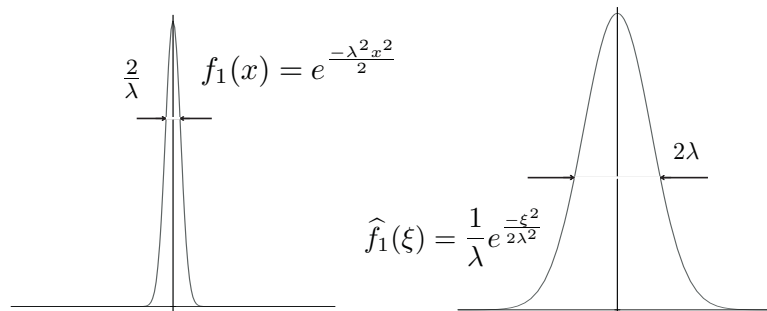


FIG. 12.1 – Transformée de Fourier d'une gaussienne

Enfin, en dimension supérieure, on obtient directement, en utilisant la remarque 12.2, que :

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|^2/2}\right) = e^{-|\xi|^2/2} \tag{12.11}$$

Ce résultat nous sera très utile dans la suite.

**Exemple 2 :**

La fonction de l'exemple 1 est indéfiniment dérivable. Considérons maintenant l'exemple de la fonction  $f_2(x) = e^{-|x|}$  qui est continue mais qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0. Il est facile de vérifier que

$$\widehat{f}_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Il s'agit là encore d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (ce que l'on pouvait prévoir puisque  $f_2$  est exponentiellement décroissante à l'infini) ; en revanche, sa décroissance est plus lente que celle de  $\widehat{f}_1$ , car  $f_2$  est moins régulière que  $f_1$  en 0.

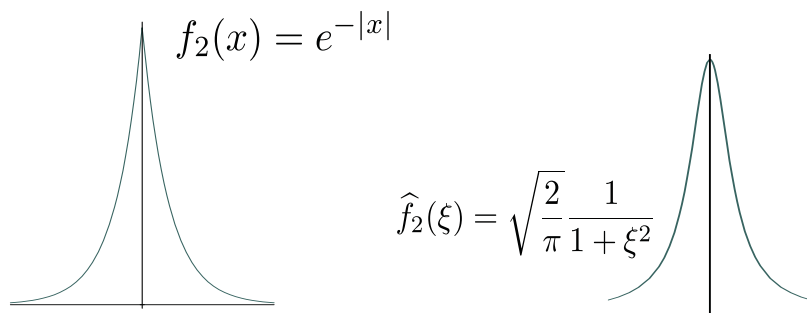


FIG. 12.2 – Une fonction non dérivable à l'origine

**Exemple 3 :**

Ce phénomène peut également être illustré à l'aide de la fonction  $f_3$  suivante :

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

On vérifie alors que :

$$\widehat{f}_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-x) \cos(x\xi) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

A nouveau,  $\widehat{f}_3$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ce qui résulte de la très bonne décroissance de  $f_3$  (qui est à support compact!). Par ailleurs,  $\widehat{f}_3$  décroît à l'infini comme  $\widehat{f}_2$ , c'est à dire en  $1/\xi^2$ , car  $f_2$  et  $f_3$  ont la même régularité.

**Exemple 4 :**

Soit maintenant  $f_4$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $] -\mu, \mu[$ . On obtient directement :

$$\widehat{f}_4(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu}^{\mu} e^{-ix\xi} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\mu\xi)}{\xi}$$

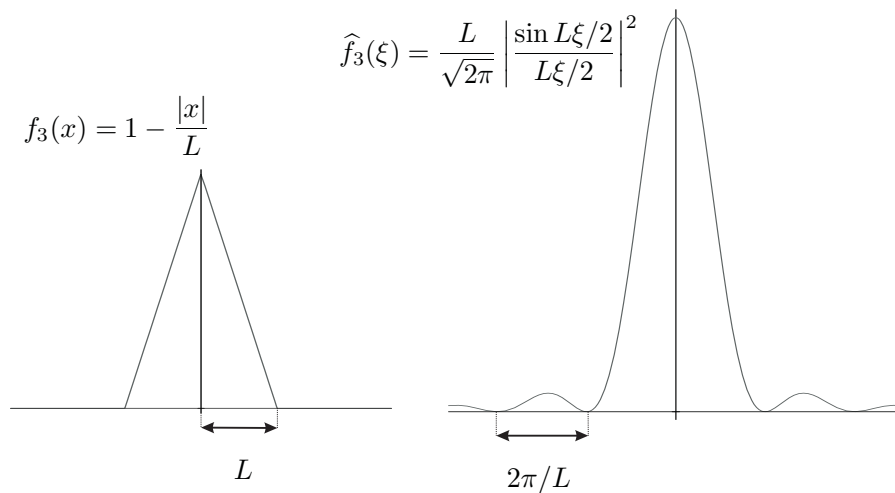


FIG. 12.3 – Transformée de Fourier d'une fonction 'chapeau'

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . On vérifie bien que  $\widehat{f}_4$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui tend vers 0 à l'infini. En revanche, la dérivée au sens des distributions de  $f_4$  n'est pas une fonction, et on ne peut donc pas appliquer le lemme 12.4. Le manque de régularité de  $f_4$  se traduit par une faible décroissance de  $\widehat{f}_4$ . On remarque en particulier sur cet exemple que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est en général pas intégrable.

Plus généralement, si  $f$  est la fonction caractéristique du pavé

$$] - \mu_1, \mu_1[ \times ] - \mu_2, \mu_2[ \times \dots \times ] - \mu_n, \mu_n[ ,$$

alors il résulte de la remarque 12.2 que :

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \frac{\sin(\mu_1 \xi_1)}{\xi_1} \frac{\sin(\mu_2 \xi_2)}{\xi_2} \dots \frac{\sin(\mu_n \xi_n)}{\xi_n} .$$

**Exemple 5 :**

Pour illustrer le lemme 12.7, considérons la fonction suivante :

$$f_5 = \tau_a f_4 + \tau_{-a} f_4 ,$$

avec  $a > \mu$ . Autrement dit :

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - a| \leq \mu \text{ ou si } |x + a| \leq \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les résultats de l'exemple 4 et du lemme 12.7 montrent que :

$$\widehat{f}_5(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{-ia\xi} + e^{ia\xi}) \frac{\sin(\mu\xi)}{\xi} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\cos(a\xi) \sin(\mu\xi)}{\xi} .$$

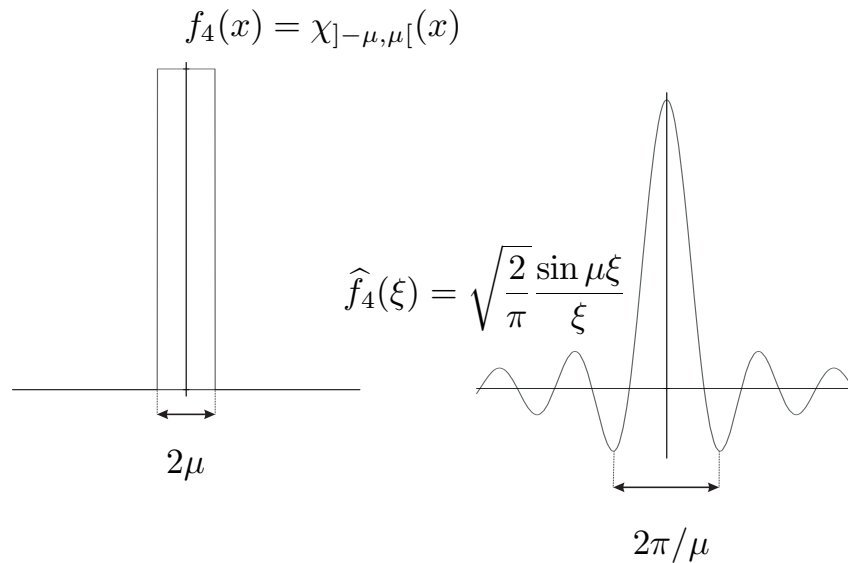


FIG. 12.4 – Transformée de Fourier d'un 'créneau'

On remarque que des oscillations de période  $2\pi/a$  viennent s'inscrire dans une enveloppe qui oscille elle-même avec la période  $2\pi/\mu$ . Les translations de la fonction génèrent des oscillations de la transformée de Fourier.

**Exemple 6 :**

Considérons enfin le cas d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  singulière en 0 :

$$f_6(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|^{1/2}}.$$

Le calcul donne alors

$$\widehat{f}_6(\xi) = 2 \frac{((1 + \xi^2)^{1/2} + 1)^{1/2}}{(1 + \xi^2)^{1/2}}.$$

Il s'agit bien d'une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini comme le prévoit le théorème de Riemann-Lebesgue. On remarque que sa décroissance à l'infini est très lente, encore plus lente que celle de l'exemple 4. Cela est du à la singularité de la fonction en  $x = 0$ .

**12.1.4 Convolution et transformation de Fourier dans  $L^1$** 

Dans ce paragraphe, nous allons établir le résultat fondamental suivant annoncé dans l'introduction : la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égal au produit des transformées de Fourier. Plus précisément, on a le

**Théorème 12.8** Soit  $f$  et  $g$  deux fonction de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g). \quad (12.12)$$

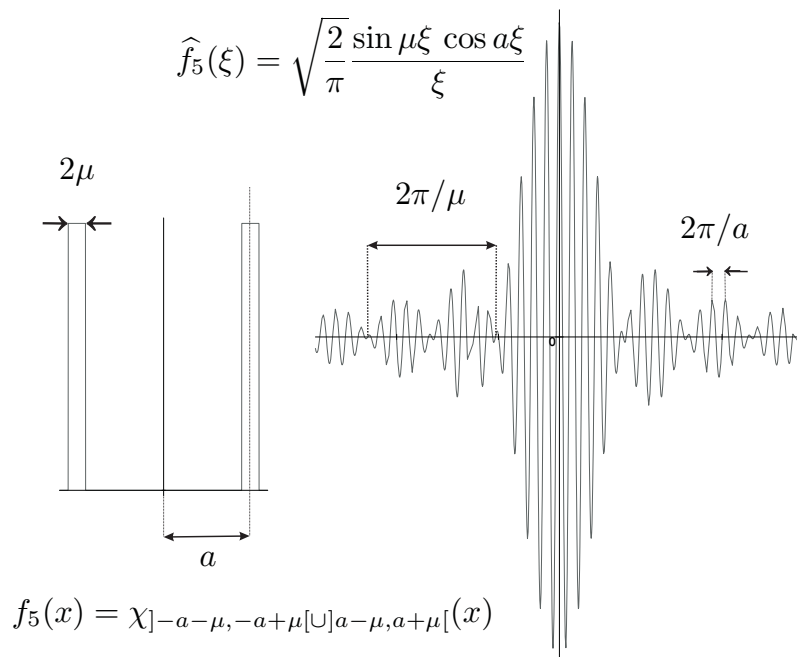


FIG. 12.5 – Le double créneau

DÉMONSTRATION. On a déjà vu que, si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , leur produit de convolution  $y$  est également. On peut donc calculer sa transformée de Fourier qui s'écrit :

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy \right) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Le théorème de Fubini s'applique alors sans difficulté, car la fonction  $f(y)g(x - y)e^{-ix \cdot \xi}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et l'on a donc :

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y)e^{-ix \cdot \xi} dx \right) dy.$$

Le changement de variable  $z = x - y$  donne finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-i(z+y) \cdot \xi} dz \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy \cdot \xi} dy \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-iz \cdot \xi} dz. \end{aligned}$$

□

**Exemple** On peut par exemple vérifier, en reprenant les notations du paragraphe précédent, que si  $\mu = 1/2$  :

$$f_4 * f_4 = f_3 \text{ et } \widehat{f}_3 = \sqrt{2\pi} \left( \widehat{f}_4 \right)^2.$$

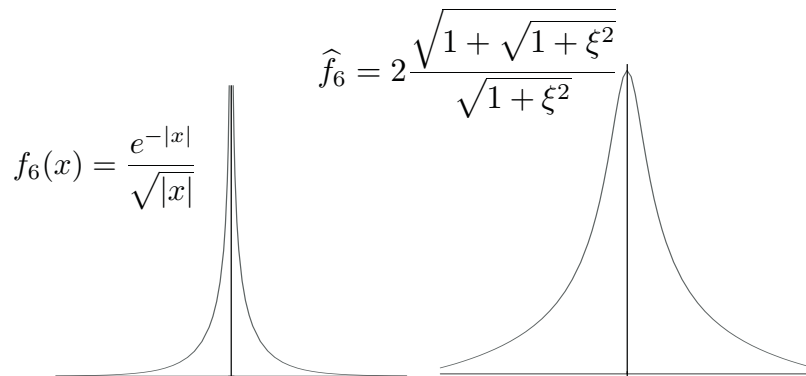


FIG. 12.6 – Une fonction singulière

## 12.2 Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide

On voudrait maintenant étendre la transformation de Fourier aux distributions  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . L'idée habituelle est de réaliser cela par transposition. Dans le cas particulier d'une distribution définie à partir d'une fonction intégrable  $f$ , on vérifie à l'aide du Théorème de Fubini que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \right) dx$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , soit

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

Pour une distribution quelconque, on aimerait donc poser

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Malheureusement, ceci n'est pas possible car il n'y a aucune raison pour que  $\widehat{\varphi}$  appartienne à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On peut même montrer, en utilisant la théorie des fonctions analytiques, que la seule fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dont la transformée de Fourier est dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est la fonction nulle. Ceci nous conduit à rechercher un espace de fonctions test  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  contenant  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  qui soit stable par la transformation de Fourier, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

D'après les lemmes 12.4 et 12.5, la transformée de Fourier d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  qui tend vers 0 à l'infini (ainsi que toutes ses dérivées) plus vite que toute puissance de  $1/|\xi|$ . On dit alors que  $\varphi$  et ses dérivées sont à *décroissance rapide*. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

### 12.2.1 L'espace $\mathcal{S}$

**Définition 12.9** On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$|x|^j \partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty \quad (12.13)$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Il est clair que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et l'inclusion est stricte. En particulier, la fonction  $f(x) = e^{-|x|^2/2}$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et n'est pas à support compact.

On munit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$p_{j,\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^j |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Cette famille de semi-normes étant dénombrable, on sait déjà que l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est métrisable. De plus, on vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 12.10**

- (i) L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est complet.
- (ii) L'injection de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continue.
- (iii) L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varphi_m$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Il en résulte que  $\varphi_m$  converge uniformément ainsi que toutes ses dérivées vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De plus,  $|x|^j \partial^\alpha \varphi_m$  converge uniformément vers  $|x|^j \partial^\alpha \varphi$  pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$  et tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{N}^n$ . Ceci prouve que  $|x|^j \partial^\alpha \varphi$  tend vers 0 à l'infini. Donc  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Nous admettrons ce résultat, en nous contentant de vérifier que toute suite convergente de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  converge dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\varphi_m$  une suite de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tendant vers 0 dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Alors il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les supports des fonctions  $\varphi_m$ . On a donc :

$$p_{j,\alpha}(\varphi_m) \leq C \left( \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_m(x)| \right)$$

avec  $C = \sup_{x \in K} |x|^j$ . Il en résulte que  $p_{j,\alpha}(\varphi_m)$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini.

▷ Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  égale à 1 dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\varphi_m(x) = \psi(|x|/m) \varphi(x).$$

On vérifie alors aisément l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $m$  telle que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^j |\partial^\alpha \varphi_m - \psi(|x|/m) \partial^\alpha \varphi| \leq C/m.$$

Il en résulte que :

$$p_{j,\alpha}(\varphi_m - \varphi) \leq C/m + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^j |\partial^\alpha \varphi(x)| |1 - \psi(|x|/m)|,$$

qui peut être rendu arbitrairement petit, pour  $m$  assez grand.

□



On vérifie aisément le

**Lemme 12.11**

- (i) La dérivation est une application continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.
- (ii) Si  $q$  est un polynôme, l'application  $\varphi \rightarrow q\varphi$  est une application continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

### 12.2.2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$

**Théorème 12.12** *La transformation de Fourier est une application linéaire continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $|x|^j \partial^\alpha \varphi(x)$  est intégrable pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Pour s'en convaincre, on peut remarquer par exemple que la fonction  $|x|^{j+n+1} \partial^\alpha \varphi(x)$  est régulière et tend vers 0 à l'infini. Elle est donc bornée sur  $\mathbb{R}^n$  et ceci prouve que  $|x|^j \partial^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . D'après les lemmes 12.4 et 12.5, cela prouve que  $\widehat{\varphi}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui tend vers 0 à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées, plus vite que toute puissance de  $1/\xi$ . Autrement dit,  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Montrons que  $\mathcal{F}$  est une application continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $\mathcal{F}$  est linéaire, il suffit de montrer que, si  $\varphi_m$  est une suite tendant vers 0 dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors il en est de même pour  $\widehat{\varphi}_m$ . D'après les formules (12.7) et (12.5), on a

$$\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_m = \mathcal{F} \left( \partial^\beta (x^\alpha \varphi_m) \right)$$

d'où

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_m \right| \leq \left\| \partial^\beta (x^\alpha \varphi_m) \right\|_{L^1}.$$

Le résultat s'en déduit facilement.

□

# Chapitre 13

## Transformation de Fourier des distributions tempérées

### 13.1 L'espace $\mathcal{S}'$

**Définition 13.1** On appelle espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$  et on note  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Par définition, si  $T$  est une distribution tempérée, il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une constante  $C$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq j \leq k, 0 \leq |\alpha| \leq k} p_{j,\alpha}(\varphi). \quad (13.1)$$

On munit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  de la topologie faible du dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En particulier, une suite  $T_n$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si on a :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De la proposition 12.10, on déduit le

**Théorème 13.2** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une constante  $C$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq j \leq k, 0 \leq |\alpha| \leq k} p_{j,\alpha}(\varphi), \quad (13.2)$$

alors  $T$  se prolonge d'une manière unique en une distribution tempérée (que l'on notera encore  $T$ .)

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . D'après la proposition 12.10, il existe une suite  $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . D'après la majoration (13.2), il en résulte que  $\langle T, \varphi_m \rangle$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . On vérifie aisément que sa limite ne dépend que de  $\varphi$  (et non de la suite  $\varphi_m$ ), on la note donc  $\langle T, \varphi \rangle$ . Il est facile de voir que  $T$  ainsi définie vérifie (13.1), c'est donc une distribution tempérée.

□

Ceci montre que l'on peut identifier  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  à un sous-espace (strict) de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Quelques exemples et contre-exemples :**

- (i) Les distributions à support compact sont des distributions tempérées.
- (ii) Les fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  définissent des distributions tempérées. En effet, si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la forme linéaire

$$\varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

est continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , car

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} p_{0,0}(\varphi).$$

- (iii) De même, si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $x^\alpha f(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  définit une distribution tempérée. En effet :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} p_{|\alpha|,0}(\varphi).$$

En particulier, une fonction polynomiale définit une distribution tempérée.

- (iv) La fonction  $f(x) = e^x$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ , ne définit pas une distribution tempérée.

A nouveau, on a le

**Lemme 13.3**

- (i) La dérivation est une application continue de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.
- (ii) Si  $q$  est un polynôme, l'application  $\varphi \rightarrow q\varphi$  est une application continue de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

**Remarque 13.4** Attention, le produit d'une distribution tempérée par une fonction  $C^\infty$  n'est pas toujours une distribution tempérée !

## 13.2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$

On peut maintenant énoncer le

**Lemme 13.5**

- (i) Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors l'application

$$\varphi \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

définit une distribution tempérée que l'on note  $\widehat{T}$  (ou  $\mathcal{F}(T)$ ) et que l'on appelle la transformée de Fourier de  $T$ . On a donc par définition :

$$\langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) La transformation de Fourier est une application continue de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que l'application  $\varphi \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$  est continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit donc  $\varphi_m$  une suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, d'après le théorème 12.12, la suite  $\widehat{\varphi}_m$  converge vers  $\widehat{\varphi}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $T$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a finalement :

$$\langle T, \widehat{\varphi}_m \rangle \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

La continuité de  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même est immédiate

□

Étudions quelques exemples :

(i) La masse de Dirac est une distribution tempérée. Calculons sa transformée de Fourier. On a :

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Autrement dit, on a :

$$\mathcal{F}(\delta) = \widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (13.3)$$

(ii) De même, on a :

$$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta), \varphi \rangle = -1^{|\alpha|} \langle \delta, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}((ix)^\alpha \varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On a donc :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = \frac{(ix)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (13.4)$$

En fait, il y a une méthode plus simple pour obtenir la transformée de Fourier d'une distribution à support compact  $T$ . En effet, on peut montrer le

**Théorème 13.6** Si  $T$  est une distribution à support compact sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\widehat{T}$  est la fonction de  $\xi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donnée par :

$$\widehat{T}(\xi) = \langle T, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  et une constante réelle  $C$  tels que

$$|\partial^\alpha \widehat{T}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|^m) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que  $\widehat{T}$  est une fonction à croissance lente.

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons de donner les idées de la démonstration. Notons tout d'abord que, comme  $T$  est à support compact et  $e^{-ix \cdot \xi}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $x$ , le produit de dualité a bien un sens. On peut ensuite vérifier, en utilisant une version étendue du théorème de Fubini, que :

$$\langle T, \widehat{\varphi} \rangle_x = \langle T, \langle \varphi, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix \cdot \xi} \rangle_\xi \rangle_x = \langle \langle T, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi \rangle_\xi$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le théorème de dérivation sous le crochet permet finalement de montrer que :

$$\partial^\alpha \widehat{T}(\xi) = \langle T, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (-ix)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Si  $K$  est un compact contenant le support de  $T$  et si  $m$  désigne l'ordre de  $T$ , on en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|\partial^\alpha \widehat{T}(\xi)| \leq C \sup_{x \in K, 0 \leq |\beta| \leq m} \left| \partial^\beta \left( (-ix)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \right) \right|.$$

Cela fournit la dernière majoration. □

On peut généraliser aux distributions tempérées les formules (12.5) et (12.7) :

**Lemme 13.7** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T) \tag{13.5}$$

et

$$\partial^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T). \tag{13.6}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Démontrons la première identité. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a par définition de la transformée de Fourier et de la dérivation des distributions :

$$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha T), \varphi \rangle_\xi = \langle T, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (\mathcal{F}\varphi) \rangle_x.$$

En utilisant l'identité (12.7), on obtient alors :

$$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha T), \varphi \rangle_\xi = \langle T, \mathcal{F}((i\xi)^\alpha \varphi) \rangle_x = \langle (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_\xi.$$

▷ De même, on a pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\langle \partial^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_\xi = \langle T, (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) \rangle_x$$

et en utilisant (12.5), on obtient :

$$\langle \partial^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_\xi = \langle T, (-ix)^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle_x = \langle \mathcal{F}((-ix)^\alpha T), \varphi \rangle_\xi.$$

□

Le lemme précédent fournit une méthode simple pour calculer la transformée de Fourier d'une fonction constante ou même de la fonction de Heaviside  $Y(x)$ , ainsi que nous le verrons au paragraphe suivant.

On peut également établir le lemme suivant (dont la démonstration est laissée en exercice) :

**Lemme 13.8** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ . Alors on a :

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}T \tag{13.7}$$

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} T) = \tau_a \mathcal{F}T \tag{13.8}$$

où l'on rappelle que

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

En particulier, on déduit des lemmes précédents les formules suivantes :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = \frac{(i\xi)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \text{ et } (\delta_a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ia \cdot \xi}.$$

### 13.3 Les formules de réciprocity et de Plancherel

Nous allons montrer dans ce paragraphe que la transformation de Fourier est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On trouve dans la littérature diverses démonstrations de ce résultat. Celle que nous proposons ici est particulièrement simple et utilise de façon essentielle la théorie des distributions. Elle repose sur le résultat suivant :

**Lemme 13.9**

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^{n/2} \delta \tag{13.9}$$

DÉMONSTRATION. Posons  $\widehat{T} (= \widehat{T}_\xi) = \mathcal{F}(1)$ . Alors, d'après l'identité (13.5), on a :

$$\xi_j \widehat{T} = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n. \tag{13.10}$$

D'après le cours sur les distributions (voir la remarque 8.14) , il en résulte que  $\widehat{T}$  est nécessairement de la forme :

$$\widehat{T} = C\delta.$$

Pour déterminer la valeur de la constante  $C$ , on peut utiliser la fonction test particulière  $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$ . On trouve ainsi, en utilisant (12.10) :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle_\xi = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_x = \langle 1, \varphi \rangle_x = (2\pi)^{n/2}.$$

□

Ceci va nous permettre de montrer que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même dont l'inverse est la transformation de Fourier conjuguée  $\overline{\mathcal{F}}$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{ix \cdot \xi} dx = \mathcal{F}(\varphi)(-\xi). \quad (13.11)$$

**Théorème 13.10**

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi. \quad (13.12)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(\xi) e^{ia \cdot \xi} d\xi.$$

Mais d'après (12.8) :

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) e^{ia \cdot \xi} = \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)(\xi).$$

Par conséquent :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(a) = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right), \tau_{-a}\varphi \right\rangle.$$

En utilisant (13.9), on obtient finalement :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(a) = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \varphi(a).$$

□

On en déduit immédiatement que la transformation de Fourier est également une bijection de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même :

**Théorème 13.11**

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T. \quad (13.13)$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

□

On déduit également de la formule de réciprocity deux formules très utiles, la formule de Parseval et la formule de Plancherel, qui nous permettront de montrer, au chapitre suivant, que la transformation de Fourier est un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 13.12** *Pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a :*

(i) **Identité de Parseval :**

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \langle \varphi, \overline{\psi} \rangle = \langle \mathcal{F}(\varphi), \overline{\mathcal{F}(\psi)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi \quad (13.14)$$

(ii) **Identité de Plancherel :**

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \quad (13.15)$$

DÉMONSTRATION. On déduit tout d'abord l'identité (13.14) de la formule de réciprocity. En effet :

$$\langle \varphi, \overline{\psi} \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}\psi}) \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, \overline{\mathcal{F}\psi} \rangle.$$

On déduit ensuite (13.15) en prenant  $\varphi = \psi$  dans (13.14).

□

## 13.4 Transformation de Fourier et convolution

Nous avons déjà vu dans le premier paragraphe que, dans le cas des fonctions intégrables, la transformée de Fourier du produit de convolution est égale (au facteur  $(2\pi)^{n/2}$  près) au produit des transformées de Fourier. Peut-on étendre ces résultats à d'autres distributions tempérées ? Autrement dit, a-t-on

$$\mathcal{F}(T * U) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(U) \quad (13.16)$$

lorsque  $T$  et  $U$  sont deux distributions tempérées. Bien entendu, une condition nécessaire est que l'on puisse définir le produit de convolution  $T * U$ . Nous verrons plus loin sur un exemple que cette condition n'est pas suffisante : en effet, même si les supports de  $T$  et de  $U$  sont convolutifs, il se peut que le produit des distributions  $\mathcal{F}(T)$  et  $\mathcal{F}(U)$  n'ait pas de sens.

Le théorème suivant fournit une première condition (très restrictive) pour que l'identité (13.16) soit vérifiée.

**Théorème 13.13** *Si  $T$  et  $U$  sont des distributions à support compact, alors l'identité (13.16) est vérifiée.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 13.6, les transformées de Fourier de  $T$ , de  $U$  et de  $T * U$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En particulier, le produit  $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U)$  a bien un sens. Toujours d'après le théorème 13.6, on a :



$$\mathcal{F}(T * U)(\xi) = \langle T * U, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Par définition de la convolution, ceci s'écrit aussi :

$$\mathcal{F}(T * U)(\xi) = \langle T, \langle U, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i(x+y)\xi} \rangle_x \rangle_y = \langle T, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y \langle U, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x,$$

d'où le résultat. □

Ce théorème admet l'extension suivante :

**Théorème 13.14** *Si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $U$  est une distribution à support compact, alors l'identité (13.16) est vérifiée.*

DÉMONSTRATION. A nouveau, le produit de convolution a bien un sens dans ce cas et comme  $\mathcal{F}(U)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le produit  $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U)$  définit une distribution. Pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on cherche à définir  $\langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi$  de la manière suivante :

$$\langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi = \langle T * U, \mathcal{F}\varphi \rangle_x = \langle T_x, \langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x + y) \rangle_y \rangle_x. \quad (13.17)$$

Or d'après la formule (12.8), on a à  $x$  fixé :

$$\langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x + y) \rangle_y = \langle U_y, \mathcal{F}\left(e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi)\right)(y) \rangle_y = \langle \mathcal{F}(U), e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) \rangle_\xi.$$

Mais comme  $\mathcal{F}(U)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ceci s'écrit encore :

$$\langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x + y) \rangle_y = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\mathcal{F}(U)\varphi)(x).$$

En revenant à (13.17), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi &= (2\pi)^{n/2} \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(U)\varphi) \rangle_x \\ &= (2\pi)^{n/2} \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(U)\varphi \rangle_\xi = (2\pi)^{n/2} \langle \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U), \varphi \rangle_\xi. \end{aligned}$$

□

**Remarque 13.15** *Si  $Y$  désigne la fonction de Heaviside, on a*

$$\widehat{Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \pi\delta - i \operatorname{vp} \frac{1}{\xi} \right).$$

En effet, d'après (13.5) :

$$\mathcal{F}\left(\frac{dY}{dx}\right) = i\xi \mathcal{F}(Y).$$

Or

$$\frac{dY}{dx} = \delta$$

donc  $\mathcal{F}(Y)$  doit vérifier :

$$i\xi\mathcal{F}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'après le cours sur les distributions (voir la proposition 8.13), il existe donc une constante  $C$  telle que :

$$\mathcal{F}(Y) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{vp}(1/\xi) + C\delta).$$

On peut alors déterminer la valeur de la constante  $C$  en remarquant que :

$$\langle \mathcal{F}(Y), e^{-\xi^2/2} \rangle = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}C = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi,$$

d'où  $C = i\pi$ . On a donc finalement :

$$\mathcal{F}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\pi\delta - i\text{vp}(1/\xi)).$$

Remarquons alors que comme  $Y$  est causale, le produit de convolution  $Y * Y$  a un sens mais le produit  $\widehat{Y}\widehat{Y}$  n'en a pas.



**Cinquième partie**

**Equations aux dérivées partielles**



# Chapitre 14

## Quelques équations aux dérivées partielles de la physique

Nous étudions ici quelques unes des propriétés essentielles des solutions de deux des modèles les plus universellement rencontrés en physique et en mécanique : l'équation de Laplace et l'équation des ondes. Ce sera pour nous l'occasion de mettre en œuvre les outils que nous avons construits au cours des chapitres précédents et de prendre conscience de leur puissance. C'est également la possibilité qui nous est offerte d'appréhender le lien que forment les mathématiques entre des domaines a priori étrangers tels la mécanique des fluides et l'électromagnétisme, et la profondeur de la compréhension des phénomènes qui en découle.

Plus prosaïquement nous espérons également inciter le lecteur à poursuivre au delà de cette introduction et à explorer plus avant le champ de la modélisation et de l'analyse numérique.

### 14.1 L'équation de Laplace

Il s'agit d'une équation de conservation pour des champs statiques, tels le champ des vitesses pour un écoulement stationnaire irrotationnel ou le champ électrostatique.

Considérons un écoulement incompressible irrotationnel, le champ des vitesses  $V$  vérifie  $\text{rot } V = 0$ , d'où il résulte que la vitesse dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$ , soit  $V = \nabla\varphi$ . Comme la conservation du volume a pour expression  $\text{div } V = 0$ , il en résulte que  $\Delta\varphi = 0$ .

Dans le cas statique, les équations de Maxwell nous montrent que le champ électrique  $E$  vérifie  $\text{rot } E = 0$ , et par conséquent  $\text{rot rot } E = 0$ . La conservation de la charge nous apprend par ailleurs que  $\text{div } E = \rho$ , où  $\rho$  est la densité de charge. Il en résulte que  $\text{grad div } E = \text{grad } \rho$ , et par conséquent  $\Delta E = -\text{rot rot } E + \text{grad div } E = \nabla\rho$ .

Cette relation entre écoulements stationnaires et électrostatique avait été mise à profit avant le développement des méthodes d'approximation numérique pour mettre au point les méthodes de calcul analogiques qui ont servi au dessin des profils d'aile en configuration d'approche.

L'équation de Laplace constitue en fait le modèle des équations elliptiques, et les méthodes que nous allons mettre en œuvre pour l'étude de ses solutions sont à l'origine des techniques subtiles utilisées pour des situations beaucoup plus générales.

### 14.1.1 La solution élémentaire

La méthode variationnelle n'est pas la seule qui permet d'accéder aux propriétés qualitatives des solutions de l'équation de Laplace. Un autre outil à cet effet est constitué par la solution élémentaire ou fonction de Green, c'est-à-dire la fonction  $G$  solution de

$$\Delta G = \delta$$

Comme l'équation qui précède est invariante par rotation, il est loisible de chercher  $G$  radiale, c'est-à-dire vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

soit  $\partial G / \partial r = \mu / r^{n-1}$ , ou encore

$$G = \lambda + \mu \operatorname{Log} r \text{ en bidimensionnel}$$

et

$$G = \lambda + \frac{\mu}{r} \text{ en tridimensionnel,}$$

fonctions qui toutes deux appartiennent à  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Nous choisirons de prendre  $\lambda = 0$ , la seule contribution de cette constante au résultat étant de dégrader éventuellement le comportement à l'infini de la fonction de Green.

Nous venons de déterminer une forme nécessaire de  $G$  considérée par hypothèse comme radiale, encore faut-il vérifier qu'il existe une valeur de  $\mu$  pour laquelle  $G$  est solution élémentaire de l'équation de Laplace et déterminer sous quelles conditions il s'agira de l'unique solution élémentaire.

Considérons tout d'abord une fonction d'essai  $\psi$  elle-même radiale, on aura

$$\begin{aligned} \langle \Delta G, \psi \rangle &= \langle G, \Delta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} G \Delta \psi \\ &= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^\infty G \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} \psi') dr \\ &= - \operatorname{mod} S^{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} G' \psi' dr + \operatorname{mod} S^{n-1} [r^{n-1} G \psi']_0^\infty \\ &= \operatorname{mod} S^{n-1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} G') \psi dr - \operatorname{mod} S^{n-1} [r^{n-1} G' \psi]_0^\infty \\ &= \operatorname{mod} S^{n-1} \psi(0) (r^{n-1} G')(0), \end{aligned}$$

où  $|S^{n-1}|$  est la surface de la sphère  $S^{n-1}$  et  $d\sigma$  l'élément de surface associé. On obtient

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \text{Log } r \text{ en bidimensionnel}$$

et

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} \text{ en tridimensionnel}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier la validité de ce calcul dans le cas d'une fonction d'essai  $\psi$  quelconque. En notant  $(r, \sigma)$  les coordonnées sphériques, on aura

$$\begin{aligned} \langle \Delta G, \varphi \rangle &= \left\langle \Delta G_r \otimes \frac{1_\sigma}{\text{mod } S^{n-1}}, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \Delta G_r, \left\langle 1_\sigma, \frac{\varphi(r, \sigma)}{\text{mod } S^{n-1}} \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \Delta G_r, \frac{1}{\text{mod } S^{n-1} \int_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma) d\sigma} \right\rangle \end{aligned}$$

Si nous posons maintenant  $\psi(r) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma) d\sigma$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \Delta G, \varphi \rangle &= \frac{1}{\text{mod } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(0, \sigma) d\sigma \\ &= \varphi(0) \end{aligned}$$

en vertu du fait que  $\langle \Delta G_r, \psi \rangle = \psi(0)$ , si  $\psi$  est radiale.

### Résolution de l'équation de Poisson

Nous nous intéresserons ici à la résolution du problème suivant posé dans  $\mathbb{R}^n$  tout entier :

$$\Delta \varphi = f, \text{ où } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n). \quad (14.1)$$

Il est clair tout d'abord que  $G * f$  est une solution du problème, puisque  $f$  étant à support compact, on a  $\Delta(G * f) = (\Delta G) * f = \delta * f = f$ . Il est également clair que ce n'est pas la seule solution. Résolvons en effet par transformation de Fourier dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'équation homogène  $\Delta T = 0$ , soit  $\|\xi\|^2 \hat{T} = 0$ . Il en résulte que  $\text{Supp } \hat{T} = \{0\}$  et par conséquent que  $\hat{T}$  est une combinaison linéaire finie de dérivées de la mesure de Dirac ; c'est encore dire que  $T$  est un polynôme. Les polynômes dont le laplacien est nul sont appelés *polynômes harmoniques*, il est facile d'en construire, mais bien entendu le seul à être borné au voisinage de l'infini est le polynôme constant, et aucun ne décroît. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 14.1** *Il n'y a pas plus d'une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}^n$  qui décroisse au voisinage de l'infini.*



Par ailleurs, dans le cas où le second membre est à support compact, nous avons exhibé une solution :  $G * f$  de l'équation de Poisson 14.1, la question est donc de savoir si cette solution décroît au voisinage de l'infini, nous allons voir que la réponse est positive en dimension 3, mais pas nécessairement en dimension 2.

**Proposition 14.2** *Si  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$  la seule solution de l'équation de Poisson  $\Delta\varphi = f$  posée dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par  $\varphi = G * f$  où  $G(x) = -1/4\pi \|x\|$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $\text{Supp } f \subset B_\rho(0)$  et que  $\|x\| > \rho + 2\varepsilon$ , il est alors possible de trouver  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\theta = 1$  dans  $B_\rho(0)$  et  $\theta = 0$  à l'extérieur de  $B_{\rho+\varepsilon}(0)$ , on aura alors d'une part  $G * f(x) = G * (\theta f)(x) = \langle f_y, \theta(y)G(x - y) \rangle$  et d'autre part  $y \rightarrow \theta(y)G(x - y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Comme par ailleurs une distribution à support compact telle  $f$  est d'ordre fini, et à ce titre combinaison linéaire finie de dérivées de fonctions continues, on aura

$$\begin{aligned} G * f(x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \langle \partial^{\alpha} g_{\alpha}(y), \theta(y)G(x - y) \rangle \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{\text{mod } \alpha} a_{\alpha} \langle g_{\alpha}(y), \partial^{\alpha}(\theta(y)G(x - y)) \rangle \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{\text{mod } \alpha} a_{\alpha} \int_{\text{Supp}(\theta)} g_{\alpha}(y) \partial^{\alpha}(\theta(y)G(x - y)) dy \end{aligned}$$

▷ Sous cette forme, il est clair que le comportement asymptotique de  $G * f(x)$  est gouverné par celui de  $G$  et de ses dérivées, et qu'en particulier  $G * f(x) \rightarrow 0$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  en tridimensionnel, mais pas nécessairement en bidimensionnel, où il dépend de l'éventuelle nullité du coefficient  $a_{(0,0,\dots,0)}$  dans l'expression du second membre  $f$ .

□

**Remarque 14.3** *De cette façon, on pourrait également démontrer la régularité de  $G * f$ , mais nous allons voir ci-dessous qu'il y a une façon plus habile d'aborder la question, qui ne nécessite ni la connaissance explicite de la fonction de Green, ni l'utilisation d'un théorème de structure relatif aux distributions à support compact.*

### 14.1.2 La régularité à l'intérieur

L'étude pourrait être poursuivie à l'aide de la fonction de Green que nous venons de déterminer, mais il est intéressant de remarquer que pour nombre de questions la connaissance explicite n'en est pas nécessaire. Tentons d'utiliser la transformation de Fourier pour déterminer cette solution élémentaire, soit donc de résoudre l'équation

$$-\|\xi\|^2 \widehat{G} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Il s'agit là d'une réelle difficulté, en effet la fonction  $\|\xi\|^{-2}$  est singulière à l'origine, et pour  $n < 3$  n'est même pas localement intégrable; cette difficulté peut être surmontée

au prix de quelques efforts et on aboutit alors à la fonction de Green précédemment déterminée. Mais en fait cela n'est pas nécessaire si notre ambition n'est pas de résoudre l'équation de Poisson mais seulement d'étudier la régularité de sa solution. On pourra alors se contenter d'une fonction  $E$  vérifiant

$$\Delta E = \delta - \omega,$$

où  $\omega$  est une quelconque fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Une telle fonction  $E$  s'appelle une paramétrix. Sa transformée de Fourier est solution de l'équation

$$-\|\xi\|^2 \widehat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - \widehat{\omega}$$

où  $\widehat{\omega} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On prendra en fait

$$\widehat{E}(\xi) = -\frac{1 - \chi(\xi)}{(2\pi)^{n/2} \|\xi\|^2}$$

où  $\chi$  est une fonction de troncature élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , identique à 1 au voisinage de  $\xi = 0$ . La fonction  $\widehat{\omega} = (2\pi)^{-n/2} \chi$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et par conséquent sa transformée de Fourier inverse est  $\omega$ .

**Proposition 14.4** *La fonction  $E$  est indéfiniment dérivable en dehors de l'origine.*

DÉMONSTRATION. Nous aurons en effet

$$\mathcal{F}(x^\gamma \partial^\alpha E) = i^{|\gamma|+|\alpha|} \partial^\gamma \xi^\alpha \mathcal{F}(E) = C \partial^\gamma \left( \frac{\xi^\alpha}{\|\xi\|^2} (1 - \chi(\xi)) \right) = O(\xi^{\alpha-\gamma} / \|\xi\|^2) \text{ pour } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Il en résulte que pour tout  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}(x^\gamma \partial^\alpha E) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  dès que  $\gamma$  est assez grand, et par conséquent que  $\partial^\alpha E$  est continue en dehors de l'origine ; la conclusion en découle.  $\square$

Nous allons voir que ce simple résultat permet non pas de résoudre exactement l'équation de Poisson (17.6), mais d'obtenir des renseignements très précis sur la régularité de sa solution  $\varphi$ . Remarquons déjà que  $\psi = E * f$  est une solution approchée de l'équation, au sens où il suffit d'ajouter à  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pour obtenir une solution. En effet,  $f$  étant à support compact, on pourra écrire

$$\Delta(E * f) = \Delta E * f = (\delta - \omega) * f = f - \omega * f,$$

où  $\omega * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , en tant que produit de convolution d'une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par une distribution à support compact.

**Définition 14.5** *On appelle support singulier de la fonction  $f$ , et on note  $\text{SuppSing}(f)$  le complémentaire du plus grand ouvert  $\mathcal{O}$  où  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ .*

**Lemme 14.6**  $\text{SuppSing}(E * f) = \text{SuppSing}(f)$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $\psi = E * f$ , on aura tout d'abord  $\Delta\psi - f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ce qui prouve que  $\text{SuppSing}(\psi) \subset \text{SuppSing}(f)$ .

▷ Réciproquement si  $f$  est indéfiniment dérivable dans un voisinage de  $x_0$ , on note  $\chi$  une fonction de troncature identique à 1 au voisinage de  $x_0$ , indéfiniment dérivable, et dont le support soit inclus dans la boule  $B_\delta(x_0)$ , elle même incluse dans le complémentaire de  $\text{SuppSing}(f)$ . Il est alors clair que  $\chi f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On aura alors  $\psi = E * (\chi f) + E * (1 - \chi)f$ , avec  $E * (\chi f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Qu'en-est-il du second terme ?

▷ On aura

$$(E * (1 - \chi)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y)(1 - \chi(y))f(y)dy$$

Comme  $1 - \chi(y) = 0$  dès que  $\|y - x_0\| \leq \delta$ , il suffit de choisir  $x$  tel que  $\|x - x_0\| \leq d = \delta/2$  pour que  $(\|x - y\| \leq d) \Rightarrow (1 - \chi(y) = 0)$ . Par conséquent si  $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  est nulle au voisinage de  $x$  et identique à 1 pour  $\|x - y\| \geq d$ , on aura  $(\theta E)(x - y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et

$$(E * (1 - \chi)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\theta E)(x - y)(1 - \chi(y))f(y)dy$$

Il en résulte que  $E * (1 - \chi)f$  est indéfiniment dérivable au voisinage de  $x_0$ , et par conséquent que  $\text{SuppSing}(f) \subset \text{SuppSing}(\psi)$ .

□

**Théorème 14.7** *Si  $\varphi$  est solution de  $\Delta\varphi = f$  dans  $\Omega$ , alors*

$$\Omega \cap \text{SuppSing}(\varphi) = \Omega \cap \text{SuppSing}(f).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair tout d'abord que  $f$  est indéfiniment dérivable en tout point où l'est  $\varphi$ .

▷ Réciproquement, soit  $x_0 \in \Omega$  un point au voisinage duquel  $f$  est indéfiniment dérivable. Si la fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est choisie identique à 1 au voisinage de  $x_0$ , on aura  $\Delta(\chi\varphi) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\Delta(\chi\varphi) = f$  au voisinage de  $x_0$ . En vertu du lemme précédent  $E * \Delta(\chi\varphi)$  est indéfiniment dérivable au voisinage de  $x_0$ , mais on sait par ailleurs que

$$E * \Delta(\chi\varphi) = \Delta E * (\chi\varphi) = \chi\varphi - \omega * \chi\varphi,$$

et par conséquent  $\chi\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , puisque  $\omega * \chi\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . La régularité de  $\varphi$  au voisinage de  $x_0$  en résulte.

□

**Remarque 14.8** *Il faut bien prêter attention au fait que le résultat que nous avons obtenu est relatif à la régularité de la solution dans l'ouvert  $\Omega$  et que nous n'avons rien dit du voisinage du bord. Il est possible d'obtenir des résultats à cet égard mais c'est significativement plus difficile, et la régularité de la solution dans  $\bar{\Omega}$  ne dépend pas seulement de la régularité du second membre  $f$ , mais aussi des conditions aux limites et de la régularité du bord.*

### 14.1.3 Le principe du maximum fort

Si nous utilisons l'expression analytique de la solution élémentaire et non pas seulement les propriétés de régularité d'une paramétrix nous pouvons obtenir des résultats extrêmement précis sur la solution du problème de Poisson.

#### La propriété de moyenne

##### Proposition 14.9

(i) Si  $\Delta\varphi = 0$  dans l'ouvert  $\Omega$  et si  $B_R(x) \subset \Omega$ , alors  $\varphi(x)$  est égal à la moyenne de  $\varphi$  sur la sphère  $\partial B_R(x)$ , soit encore

$$\varphi(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} \varphi \, d\sigma_R$$

(ii) Si  $-\Delta\varphi \leq 0$  dans  $\Omega$ , alors

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} \varphi \, d\sigma_R$$

DÉMONSTRATION.

▷ Par translation on se ramène au cas où le point  $x$  est l'origine. Posons alors  $g_R(r) = G(r) - G(R)$  dans  $B_R(0)$  et  $g_R(r) = 0$  pour  $r \geq R$ . On peut encore écrire que  $g_R(r) = G(r) + \tilde{G}_R(r)$  où  $\tilde{G}_R(r) = -G(R)$  dans  $B_R(0)$  et  $\tilde{G}_R(r) = -G(r)$  à l'extérieur. La formule des sauts nous montre que

$$\Delta\tilde{G}_R = \{\Delta\tilde{G}_R\} + \left[ \frac{\partial\tilde{G}_R}{\partial n} \right] \delta_{\partial B_R} + \frac{\partial}{\partial n} \left( [\tilde{G}_R] \delta_{\partial B_R} \right)$$

soit par conséquent,

$$\Delta g_R = \delta - \frac{\partial G}{\partial r}(R) \delta_{\partial B_R}.$$

▷ On aura donc

$$\int_{\Omega} g_R f = \langle g_R, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta g_R, \varphi \rangle = \varphi(0) - \frac{\partial G}{\partial r}(R) \int_{\partial B_R} \varphi \, d\sigma_R ;$$

un calcul direct ou, plus habilement, la considération du cas où  $\varphi = 1$  et par conséquent  $f = 0$ , nous montre que

$$\frac{\partial G}{\partial r}(R) = \frac{1}{|\partial B_R|} = \frac{1}{R^{n-1} |S^{n-1}|}$$

et par conséquent,

▷ Pour  $f = 0$ ,

$$\varphi(0) = \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} \varphi \, d\sigma_R$$

▷ Comme  $g_R \geq 0$ , pour  $f \leq 0$  presque partout on aura

$$\varphi(0) \leq \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} \varphi \, d\sigma_R$$

□

L'unicité de la solution du problème de Poisson est encore une conséquence évidente de la propriété de moyenne :

**Corollaire 14.10** *Si  $\varphi$  est harmonique dans  $\mathbb{R}^n$  et tend vers 0 à l'infini, alors  $\varphi = 0$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, quand  $R \rightarrow \infty$ , la moyenne de  $\varphi$  sur  $\partial B_R$  tend vers 0, soit par conséquent  $\varphi(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ . □

### Minima et maxima locaux

**Théorème 14.11** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe*

(i) *Si  $-\Delta\varphi \leq 0$  dans l'ouvert  $\Omega$  et si  $\varphi$  atteint son maximum dans  $\Omega$ , alors  $\varphi$  est constante.*

(ii) *En conséquence, si  $\Delta\varphi = 0$  dans l'ouvert  $\Omega$  et si  $\varphi$  atteint son maximum ou son minimum dans  $\Omega$ , alors  $\varphi$  est constante.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\varphi$  atteigne son maximum  $M$  au point  $x \in \Omega$ , et notons

$$Y = \{y \in \Omega \mid \varphi(y) = M\}$$

L'ensemble  $Y$  est fermé par continuité de  $\varphi$ . Mais par ailleurs, en vertu de la propriété de moyenne, pour  $R$  assez petit, on aura  $\forall r \leq R$ ,

$$0 = \varphi(x) - M \leq \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} (\varphi - M) d\sigma_R$$

et par conséquent  $\varphi = M$  pour  $r \leq R$ . Il en résulte que  $Y$  est ouvert, et en vertu de la connexité, que  $Y = \Omega$ , puisque  $x \in Y$ . □

**Remarque 14.12** *Bien entendu, comme nous pouvons restreindre l'ouvert  $\Omega$  à notre guise, le théorème porte en fait sur des minima et des maxima locaux.*

## 14.2 L'équation des ondes

L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = f$$

constitue le modèle privilégié des phénomènes propagatifs. Elle est associée à la conservation de l'énergie totale

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2$$

où on peut reconnaître la somme entre une énergie potentielle et une énergie cinétique ; c'est le fait qu'elle autorise ces deux formes d'énergie à s'échanger mutuellement au cours du temps qui est à la source des propriétés propagatives présentées par ses solutions.

En mécanique des fluides, moyennant une adimensionnalisation adéquate, elle découle de l'étude des petits mouvements autour du repos, c'est là le domaine de *l'acoustique*, l'inconnue  $\varphi$  peut alors être indifféremment interprétée comme étant la pression ou le potentiel des vitesses de l'écoulement.

En électromagnétisme, elle découle des équations de Maxwell lorsque le milieu est supposé homogène et isotrope, on aura alors  $\operatorname{rot} E + \partial H / \partial t = 0$  et  $\operatorname{rot} H - \partial E / \partial t = 0$  soit par exemple  $\operatorname{div} E = Cte$  que nous supposons nulle, et  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} E + \partial^2 E / \partial t^2 = 0$ . Par la formule magique  $\Delta E = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} E + \operatorname{grad} \operatorname{div} E$ , il en résulte alors que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0$$

Classiquement l'opérateur  $\partial^2 / \partial t^2 - \Delta$  s'appelle le d'Alembertien et se note  $\square$ . Nous allons voir ci-dessous que les propriétés de la solution élémentaire de l'équation des ondes, et corrélativement celles de ses solutions sont très différentes de celles de l'équation de Laplace. Nous limiterons à la dimension 3 d'espace, nous engageons vivement le lecteur à tenter d'adapter les raisonnements et les méthodes décrites ci-dessous à la dimension 2.

Les données que nous envisagerons seront nulles pour  $t < 0$  et les solutions seront également nulles pour  $t < 0$ , on dit alors qu'elles sont *causales*, ce qui signifie que les données ne sont censées avoir d'effet que dans le futur.

### 14.2.1 La solution élémentaire du d'Alembertien

Si  $G(x; t)$  est la solution élémentaire de l'équation des ondes, nous aurons

$$\square G = \delta,$$

soit encore

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta_x \otimes \delta_t$$

Nous résoudrons cette équation par transformation de Fourier relativement à la variable d'espace  $x$ . Notons donc  $\mathcal{F}_x(G) = \widehat{G}$  la transformée de Fourier partielle de  $G$  par rapport à la variable  $x$ .

**Lemme 14.13** *Si on cherche  $G$  tempérée par rapport à  $x$ , sa transformée de Fourier partielle est donnée par*

$$\widehat{G}(\xi; t) = Y(t) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin \|\xi\| t}{\|\xi\|}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Nous aurons

$$\frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial t^2} + \|\xi\|^2 \widehat{G} = \frac{1_\xi}{(2\pi)^{3/2}} \otimes \delta_t$$

Comme indiqué précédemment, nous chercherons  $G$  nulle pour  $t < 0$ , et nous aurons par conséquent

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\xi; t) &= 0 && \text{pour } t < 0 \\ \widehat{G}(\xi; t) &= a^+(\xi)e^{i\|\xi\|t} + a^-(\xi)e^{-i\|\xi\|t} && \text{pour } t > 0 \end{aligned}$$

▷ Il en résulte que

$$\frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial t^2}(\xi; t) = -\|\xi\|^2 \widehat{G}(\xi; t) + i\|\xi\| (a^+(\xi) - a^-(\xi)) \delta_t + (a^+(\xi) + a^-(\xi)) \delta'_t,$$

et par conséquent  $a^-(\xi) = -a^+(\xi)$  et  $2i\|\xi\| a^+(\xi) = (2\pi)^{-3/2}$ , d'où

$$\widehat{G}(\xi; t) = Y(t) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin \|\xi\| t}{\|\xi\|}.$$

□

La difficulté consiste à en déduire  $G(x; t)$  à cet effet nous noterons  $\delta_{\partial B_t}$  la mesure surfacique sur la sphère de rayon  $\|x\| = t$ , soit en fait

$$\langle \delta_{\partial B_t}, \psi \rangle = \int_{\partial B_t} \psi d\sigma_t = t^2 \int_{S^2} \psi(t\sigma) d\sigma = t^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \psi(t, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta,$$

où  $\sigma$  note le point courant sur la sphère unité  $S^2$ ,  $d\sigma$  la mesure sur cette sphère,  $\theta$  et  $\varphi$  les coordonnées angulaires.

**Lemme 14.14** On a

$$\mathcal{F}(\delta_{\partial B_t}) = \frac{4\pi t}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin \|\xi\| t}{\|\xi\|}$$

DÉMONSTRATION. Comme  $\delta_{\partial B_t}$  est à support compact, on aura en effet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta_{\partial B_t})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left\langle \delta_{\partial B_t}(x), e^{-i(x|\xi)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\partial B_t} e^{-i(x|\xi)} d\sigma_t(x) \\ &= \frac{t^2}{(2\pi)^{3/2}} \int_{S^2} e^{-it\|\xi\| \cos \theta} d\sigma(\theta, \varphi) \\ &= \frac{2\pi t^2}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi e^{-it\|\xi\| \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi t}{(2\pi)^{3/2} \|\xi\|} \int_{-t\|\xi\|}^{t\|\xi\|} e^{-iz} dz = \frac{4\pi t}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin \|\xi\| t}{\|\xi\|} \end{aligned}$$

où on a pris pour  $\theta$  l'angle entre  $x$  et  $\xi$  et posé  $z = t\|\xi\| \cos \theta$ .

□

On aura donc, pour  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ,

$$\begin{aligned} \langle G(x; t), \widehat{\psi} \rangle &= \langle \widehat{G}(\xi; t), \psi(\xi; t) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi; t) \frac{\sin \|\xi\| t}{\|\xi\|} d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi t} \langle \mathcal{F}_x(\delta_{\partial B_t})(\xi), \psi(\xi; t) \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi t} \langle \delta_{\partial B_t}(x), \widehat{\psi}(x; t) \rangle = \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi t} \int_{\partial B_t} \widehat{\psi}(x; t) d\sigma_t(x). \end{aligned}$$

Notons alors  $\Gamma$  le bord du *demi cône d'onde d'avenir*, d'équation  $\|x\| = t$ ,  $t > 0$  et  $d\gamma$  l'élément de surface sur  $\Gamma$ , on aura

$$d\gamma(x) = \sqrt{1 + \sum_{i=1,3} \left( \frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} \right)^2} dx = \sqrt{2} dx$$

et par conséquent

$$\int_{\Gamma} f(x; t) d\gamma = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} f(x; \|x\|) dx = \sqrt{2} \int_0^\infty dt \int_{\partial B_t} f(x; t) d\sigma_t(x),$$

d'où

$$\langle G(x; t), \widehat{\psi} \rangle = \int_{\Gamma} \frac{\widehat{\psi}(x; t)}{4\pi t \sqrt{2}} d\gamma = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\psi}(x, \|x\|)}{4\pi \|x\|} dx.$$

Comme la transformation de Fourier est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 14.15** *La solution élémentaire causale  $G$  de l'équation des ondes est donnée par*

$$G(x; t) = \frac{1}{4\pi\rho} \delta_{\Gamma},$$

où  $\Gamma$  est le bord du demi cône d'onde d'avenir,  $\delta_{\Gamma}$  la mesure surfacique associée et  $\rho = t\sqrt{2}$  est la distance au sommet de ce cône.

### 14.2.2 Le principe de Huyghens

Il s'agit maintenant d'utiliser cette solution élémentaire pour résoudre l'équation des ondes soumise à une donnée  $f$ .

**Théorème 14.16** *Le problème  $\square u = f$ , où  $f$  est nulle dans le passé admet une unique solution causale, elle est donnée par*

$$u = G * f,$$



et on a

$$\text{Supp } u \subset \{(x; t) \mid \exists(x_0; t_0) \in \text{Supp } f, \text{ avec } t \geq 0, t - t_0 = \|x - x_0\|\}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par démontrer que  $\text{Supp } \delta_\Gamma$  et  $\text{Supp } f$  sont convolutifs. Soit en effet  $(x; t) \in \text{Supp } f$ , on aura  $t \geq 0$ . Si  $(x'; t') \in \Gamma$ , alors  $t' = \|x'\|$  et  $t' \geq 0$ . Si maintenant on suppose que  $\|t + t'\| \leq R$  et  $\|x + x'\| \leq R$ , on aura  $\|t\| \leq R$  et  $\|t'\| \leq R$ , soit  $\|x'\| \leq R$  et par conséquent  $\|x\| \leq 2R$ .

▷ Constatons maintenant que  $\square(G * f) = (\square G) * f = f$ ; il en résulte que  $G * f$  est solution de l'équation.

▷ Soit alors  $v$  solution de l'équation, nulle dans le passé, son support sera donc convolutif avec celui de  $G$ , on aura donc  $v = \delta * v = \square G * v = G * \square v = G * f$ .

▷ Enfin on sait que  $\text{Supp}(G * f) \subset \text{Supp } f + \Gamma$ .

□

**Remarque 14.17** *Le résultat relatif au support est particulièrement significatif, il signifie que la solution n'est différente de 0 au point  $x$  et à l'instant  $t$  que si ce point se situe sur le bord du demi cônes d'onde d'avenir issus de l'un des point  $(x_0, t_0)$  où la donnée est différente de 0.*

Nous allons maintenant préciser ce résultat dans le cas particulier où la donnée est une donnée initiale, on parle alors de *donnée de Cauchy*.

### Le problème de Cauchy

On va considérer le problème suivant posé dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  :

$$\square u = 0 \tag{14.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{14.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \tag{14.4}$$

où  $u$  est causale. On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x; t) &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(x; t) \right\} + u(x, 0)1_x \otimes \delta_t \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x; t) &= \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x; t) \right\} + \frac{\partial u}{\partial t}(x; 0)1_x \otimes \delta_t + u(x; 0)1_x \otimes \delta'_t \end{aligned}$$

soit finalement

$$\square u(x; t) = u_1(x) \otimes \delta_t + u_0(x) \otimes \delta'_t$$

En vertu du théorème précédent, il en résulte que

$$u(x; t) = G * (u_1(x) \otimes \delta_t) + \frac{\partial}{\partial t} (G * (u_0(x) \otimes \delta_t))$$

### Une formule explicite

Il s'agit donc de calculer  $G * \mu$  où  $\mu = h(x) \otimes \delta_t$  est une mesure portée par le plan  $\{(x; t) \mid t = 0\}$  et  $G$  est portée par le bord du demi cône d'onde positif. Nous ne disposons pas pour ce cas de formule explicite et nous serons donc amenés à faire appel à une technique de régularisation.

**Théorème 14.18** *La solution causale  $u$  du problème de Cauchy 14.2 est donnée par*

$$u(x; t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h_1(x - t\sigma) d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h_0(x - t\sigma) d\sigma \right)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Si nous choisissons une approximation de l'identité  $\chi_\varepsilon$ , nous aurons  $\chi_\varepsilon \rightarrow \delta$ , et par conséquent  $\mu_\varepsilon(x; t) = \chi_\varepsilon(t)h(x) \rightarrow h(x) \otimes \delta_t$ . Dès que  $\varepsilon$  est assez petit, on aura  $\text{Supp } \chi_\varepsilon \subset [-1, +\infty[$ , les supports de  $\mu_\varepsilon$  et  $G$  seront donc convolutifs, et on aura

$$\begin{aligned} G * \mu_\varepsilon(x; t) &= \langle G(x'; t'), \mu_\varepsilon(x - x'; t - t') \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\varepsilon(t - \|x'\|) h(x - x')}{4\pi \|x'\|} dx' = \int_0^\infty \frac{t' dt'}{4\pi} \int_{S^2} \chi_\varepsilon(t - t') h(x - t'\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

où  $x' = t'\sigma$  et  $d\sigma$  est l'élément de surface de la sphère unité  $S^2$ .

▷ Posons alors

$$M_{\|x'\|}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} h(x - t'\sigma) d\sigma ;$$

il s'agit de la moyenne de  $h$  sur la sphère de centre  $x$  et de rayon  $\|x'\|$ . On aura

$$G * \mu_\varepsilon(x; t) = \int_0^\infty \chi_\varepsilon(t - t') M_{t'}(x) t' dt'$$

et comme  $\chi_\varepsilon \rightarrow \delta_t$ , il en résulte que  $G * \mu(x; t) = tM_t(x)$  soit

$$G * \mu(x; t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h(x - t\sigma) d\sigma$$

et finalement

$$u(x; t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h_1(x - t\sigma) d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h_0(x - t\sigma) d\sigma \right)$$

□

**Remarque 14.19** *Ce résultat est encore plus frappant que celui obtenu dans le cas d'une donnée  $f$  quelconque. Il signifie que la solution au point  $x$  et à l'instant  $t$  s'obtient en sommant les contributions issues des conditions initiales ayant voyagé à la vitesse 1. Il s'agit là du Principe de Huyghens ; la formule donnant l'expression de la solution  $u$  s'appelle de façon imagée formule des potentiels retardés.*

*C'est là une conséquence extrêmement forte de la condition, a priori assez faible, de causalité ; elle met l'accent sur le fait, expérimentalement bien vérifié, que lors de l'audition d'une pièce musicale, les sons successifs arrivent successivement, leur vitesse de propagation ne dépend pas de leur fréquence, ils ne laissent pas de trace de leur passage à partir du moment où ils ont été reçus. La réalité est bien sûr plus complexe : l'audition n'est généralement pas réalisée en plein air mais dans une salle de concert dont une des qualités maîtresses est justement la façon dont elle réagit aux différentes fréquences. . .*

*En bidimensionnel, plus de musique possible, en effet la solution élémentaire n'est plus nulle à l'intérieur du demi cône d'onde d'avenir, ce qui conduit les sons nouvellement arrivés à se mélanger avec le souvenir qu'ont laissé ceux précédemment reçus !*

# Chapitre 15

## Espaces de Hilbert

Ce chapitre est consacré aux espaces de Hilbert dont nous donnons la définition et les principales propriétés. Il s'agit d'une classe particulière d'espaces vectoriels normés complets dont la norme *dérive* d'un produit scalaire, ce qui leur confère une structure très riche.

L'ensemble des propriétés spécifiques aux espaces de Hilbert reposent sur un résultat fondamental : il s'agit du théorème de la projection qui prouve l'existence d'un opérateur de projection sur un sous-ensemble fermé. Comme on le verra, sa démonstration met en jeu une utilisation conjointe du critère de Cauchy et de propriétés élémentaires telles que le théorème de Pythagore.

Une conséquence importante en est le théorème d'identification de Riesz qui prouve qu'un espace de Hilbert est isomorphe à son dual, ce qui conduit dans de nombreux cas à *identifier* l'espace et son dual.

Plus généralement, nous démontrerons au chapitre 17 une conséquence très utile du théorème de la projection : il s'agit du théorème de Lax-Milgram qui constitue, dans le cadre des espaces de Sobolev, un outil puissant pour l'étude des problèmes aux limites elliptiques.

La notion de base Hilbertienne est introduite à la fin du chapitre, et illustrée par l'exemple, très important en pratique, des séries de Fourier.

### 15.1 Propriétés élémentaires

Dans tout ce paragraphe,  $H$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Nous allons tout d'abord poser quelques définitions.

**Définition 15.1** Une application  $\ell$  de  $H$  dans  $\mathbb{C}$  est dite *anti-linéaire* si,  $\forall u \in V$ ,  $\forall v \in V$  et

$$\ell(u + v) = \ell(u) + \ell(v) \text{ et } \ell(\lambda u) = \bar{\lambda}\ell(u), \forall u \in V, \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Définition 15.2** On dit qu'une application de  $H \times H$  dans  $\mathbb{C}$  qui au couple  $(u, v)$

associe  $b(u, v)$  est une forme sesquilinéaire sur  $H \times H$  si pour tout  $u \in H$ , l'application  $v \rightarrow b(v, u)$  est linéaire et l'application  $v \rightarrow b(u, v)$  est anti-linéaire.

On vérifie sans difficulté le

**Lemme 15.3 (Identité du parallélogramme)** Soit  $b$  une forme sesquilinéaire sur  $H \times H$ . Alors pour tout couple  $(u, v)$  de  $H \times H$ ,

$$b(u + v, u + v) + b(u - v, u - v) = 2(b(u, u) + b(v, v)).$$

**Définition 15.4** Une forme sesquilinéaire  $b$  sur  $H \times H$  est dite hermitienne si pour tout couple  $(u, v)$  de  $H \times H$ ,

$$b(u, v) = \overline{b(v, u)}.$$

Bien entendu, si  $b$  est une forme sesquilinéaire hermitienne sur  $H$ , alors  $b(u, u) \in \mathbb{R}$  pour tout  $u \in H$ .

**Définition 15.5** Une forme sesquilinéaire hermitienne  $b$  sur  $H \times H$  est dite positive si pour tout  $u \in H$ ,  $b(u, u) \geq 0$ .

Nous allons maintenant démontrer deux propriétés très utiles des formes sesquilinéaires hermitiennes positives.

**Lemme 15.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Soit  $b$  une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur  $H \times H$ . Alors, pour tout couple  $(u, v)$  de  $H \times H$ ,

$$|b(u, v)| \leq b(u, u)^{1/2} b(v, v)^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout  $t$  réel,  $b(u + tv, u + tv) \geq 0$ . Ceci s'écrit aussi :

$$b(u, u) + 2t \Re b(u, v) + t^2 b(v, v) \geq 0.$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en  $t$  qui est positif ou nul pour tout réel  $t$ . On peut donc affirmer que son discriminant est négatif ou nul, ce qui s'écrit :

$$(\Re b(u, v))^2 \leq b(u, u) b(v, v).$$

Si  $b(u, v)$  est réel c'est fini. Sinon, on choisit  $\lambda \in \mathbb{C}$  de module 1 tel que  $b(u, \lambda v)$  soit réel (c'est toujours possible) et on pose  $t = \lambda s$ . On raisonne alors de la même façon sur la variable réelle  $s$ .

□

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit immédiatement le

**Lemme 15.7 (Inégalité de Minkowski)** *Soit  $b$  est une forme sesquilinéaire hermitienne positive  $b$  sur  $H \times H$ . Alors, pour tout couple  $(u, v)$  de  $H \times H$ ,*

$$b(u + v, u + v)^{1/2} \leq b(u, u)^{1/2} + b(v, v)^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a

$$b(u + v, u + v) = b(u + v, u) + b(u + v, v).$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux termes à droite de l'égalité.

□

Enfin, on a la

**Définition 15.8** *Une forme sesquilinéaire hermitienne positive  $b$  sur  $H \times H$  est dite définie si la propriété suivante est satisfaite : si  $u \in H$  est tel que  $b(u, u) = 0$ , alors  $u = 0$ . On dit alors que  $b$  est un produit scalaire sur  $H$ .*

Nous pouvons maintenant montrer qu'un produit scalaire sur  $H$  permet de définir une norme sur  $H$  :

**Lemme 15.9** *Si  $(\cdot, \cdot)_H$  est un produit scalaire sur  $H$ , alors l'application*

$$u \rightarrow (u, u)_H^{1/2}$$

*est une norme sur  $H$ .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire; les deux autres propriétés sont immédiates.

□

Ceci nous permet de poser la

**Définition 15.10** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Nous avons déjà vu de nombreux exemples d'espaces de Hilbert :

- (i) Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.
- (ii) De même les espaces  $H^m(\Omega)$  et  $H^s(\mathbb{R}^n)$  sont des espaces de Hilbert.
- (iii) On peut vérifier que l'espace  $\ell^2$  constitué des suites de nombres complexes  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\sum |a_n|^2 < +\infty,$$

est un espace de Hilbert.

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que, si  $a$  et  $b$  sont dans  $\ell^2$ , alors  $|a_n + b_n|^2 \leq 2|a_n|^2 + 2|b_n|^2$ , donc  $(a + b) \in \ell^2$ . Autrement dit,  $\ell^2$  est un espace vectoriel. Par ailleurs, pour tout  $n$ ,  $2|a_n b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2$ , donc la série  $\sum a_n \bar{b}_n$  est absolument convergente. On peut donc munir  $\ell^2$  du produit scalaire suivant :

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \bar{b}_n.$$

▷ Montrons maintenant que  $\ell^2$  muni de ce produit scalaire est un espace vectoriel complet. Soit  $a^j = (a_n^j)$  une suite de Cauchy dans  $\ell^2$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a pour  $j$  et  $k$  assez grands  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^j - a_n^k|^2 < \varepsilon$ . Il en résulte que, pour chaque  $n$  fixé, la suite  $(a_n^j)_j$  est de Cauchy dans  $\mathbb{C}$  et converge donc vers un complexe que nous notons  $a_n$ . On a pour  $k$  et  $j$  assez grands et pour tout  $N > 0$

$$\sum_{n=1}^N |a_n^j - a_n^k|^2 < \varepsilon.$$

▷ En passant à la limite sur  $j$  dans l'inégalité précédente, on trouve que pour  $k$  assez grand, on a pour tout  $N > 0$ ,  $\sum_{n=1}^N |a_n - a_n^k|^2 < \varepsilon$ . Notons  $a$  la suite  $(a_n)_n \in \ell^2$ , ce qui précède prouve que la suite  $a - a^k$  appartient à  $\ell^2$ . Par conséquent  $a \in \ell^2$ . De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n - a_n^k|^2 < \varepsilon$$

pour  $k$  assez grand, ce qui prouve la convergence de la suite  $a^k$  vers  $a$  dans  $\ell^2$ .

□

## 15.2 Le théorème de projection

A partir de maintenant,  $H$  désigne un espace de Hilbert. Son produit scalaire et la norme associée sont notés  $(u, v)$  et  $\|u\|$ .

On rappelle tout d'abord la

**Définition 15.11** *On dit qu'un sous-ensemble  $K$  de  $H$  est convexe si pour tout couple  $(u, v)$  de  $K \times K$  et pour tout réel  $t$  compris entre 0 et 1,  $(1 - t)u + tv$  appartient à  $K$ .*

En particulier, un sous-espace vectoriel de  $H$  est convexe.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental suivant :

**Théorème 15.12 (de projection)** *Soit  $K \subset H$  un convexe fermé non vide. Alors*

(i) *pour tout  $u$  dans  $H$ , il existe un unique élément de  $K$  que l'on notera  $Pu$  tel que :*

$$\|u - Pu\| \leq \|u - v\|, \quad \forall v \in K.$$

(ii) De plus,  $Pu$  est caractérisé par la propriété suivante :

$$Pu \in K \text{ et } \Re(u - Pu, v - Pu) \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (15.1)$$

$Pu$  est appelé la projection de  $u$  sur  $K$  et vérifie  $P^2u = Pu$ .

DÉMONSTRATION. La démonstration comporte trois étapes.

▷ **Existence de  $Pu$  :**

Posons

$$d = \inf_{v \in K} \|u - v\|$$

et considérons une suite minimisante  $v_n$  :

$$v_n \in H \text{ et } \|u - v_n\| \rightarrow d \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme à  $a = u - v_n$  et  $b = u - v_m$ , on trouve :

$$\|2u - v_n - v_m\|^2 + \|v_m - v_n\|^2 = 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2).$$

Comme  $K$  est convexe,  $(v_n + v_m)/2 \in K$  et par définition de  $d$ , on a

$$\|2u - v_n - v_m\|^2 = 4\|u - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 \geq 4d^2.$$

Par conséquent

$$\|v_m - v_n\|^2 \leq 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4d^2.$$

Ceci prouve que la suite  $v_n$  est de Cauchy dans  $H$ . Comme  $H$  est complet, elle converge donc vers un élément de  $H$  que nous notons  $Pu$  tel que  $\|u - Pu\| = d$ . Enfin, comme  $K$  est fermé,  $Pu \in K$ .

▷ **Unicité de  $Pu$  :**

Supposons qu'il existe deux éléments de  $K$ , notés  $Pu$  et  $\tilde{P}u$ , tels que :

$$\|u - Pu\| = \|u - \tilde{P}u\| = d.$$

Alors, en appliquant l'identité du parallélogramme à  $a = u - Pu$  et  $b = u - \tilde{P}u$ , on trouve :

$$\|2u - Pu - \tilde{P}u\| + \|Pu - \tilde{P}u\| = 4d^2.$$

En utilisant à nouveau la convexité de  $K$  et la définition de  $d$ , on voit que :

$$\|2u - Pu - \tilde{P}u\| = 4\|u - \frac{Pu + \tilde{P}u}{2}\|^2 \geq 4d^2,$$

d'où, nécessairement  $\|Pu - \tilde{P}u\| = 0$ .

▷ **Caractérisation de  $Pu$  :**

Montrons tout d'abord que  $Pu$  vérifie (15.1). Soit  $v \in K$  et  $t \in ]0, 1]$ . Alors  $w = (1-t)Pu + tv \in K$  et par conséquent,  $\|u - w\| \geq d$ . Or

$$\begin{aligned} \|u - w\|^2 &= \|(u - Pu) + t(Pu - v)\|^2 \\ &= \|u - Pu\|^2 + 2t\Re(u - Pu, Pu - v) + t^2\|Pu - v\|^2 \\ &= d^2 + 2t\Re(u - Pu, Pu - v) + t^2\|Pu - v\|^2. \end{aligned}$$



On a donc

$$2t \Re(u - Pu, Pu - v) + t^2 \|Pu - v\|^2 \geq 0.$$

En divisant par  $t$  puis en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient finalement (15.1).

▷ Réciproquement, soit  $w \in K$  tel que

$$\Re(u - w, w - v) \geq 0, \forall v \in K.$$

Alors, pour tout  $v \in K$

$$\|u - v\|^2 = \|(u - w) + (w - v)\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 + 2\Re(u - w, w - v)$$

et par conséquent  $\|u - v\|^2 \geq \|u - w\|^2$ . Ceci montre que  $w = Pu$ .

□

Bien entendu, le théorème précédent s'applique au cas où  $K$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ . L'opérateur  $P$  a dans ce cas plusieurs propriétés remarquables :

**Lemme 15.13** *Soit  $E$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$  et  $P$  l'opérateur qui à  $u \in H$  associe sa projection  $Pu$  sur le sous-espace  $E$ . Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout  $u \in H$ ,  $Pu$  est caractérisé par*

$$Pu \in E \text{ et } (u - Pu, v) = 0, \forall v \in E. \quad (15.2)$$

(ii)  *$P$  est un opérateur linéaire de  $H$  dans  $H$ .*

(iii) *Pour tout  $u \in H$ ,  $\|Pu\| \leq \|u\|$ .  $P$  est donc un opérateur continu de  $H$  dans  $H$ .*

*On dit que  $P$  est l'opérateur de projection orthogonale sur  $E$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $u \in H$ ,  $v \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , d'après le théorème précédent

$$\Re(u - Pu, Pu - w) \geq 0, \forall w \in E.$$

En particulier, si  $w = Pu + \lambda v$  (qui appartient bien à  $E$  puisque  $E$  est un espace vectoriel), on trouve  $\Re(u - Pu, \lambda v) \geq 0$ . En choisissant  $\lambda = -(u - Pu, v)$  on trouve finalement

$$-|(u - Pu, v)|^2 \geq 0,$$

d'où  $(u - Pu, v) = 0$ .

▷ Réciproquement, si  $w \in E$  est tel que  $(u - w, v) = 0, \forall v \in E$ , alors, par l'identité de Pythagore

$$\|u - v\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2, \forall v \in E,$$

d'où

$$\|u - w\| = \min_{v \in E} \|u - v\|.$$

Autrement dit,  $w = Pu$ .

▷ Pour tout  $u \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\lambda Pu \in E$  et

$$\lambda(u - Pu, v) = (\lambda u - \lambda Pu, v) = 0, \quad \forall v \in E.$$

D'après la caractérisation (15.2), cela prouve que  $P(\lambda u) = \lambda Pu$ . On prouve de même que  $P(u + v) = Pu + Pv, \forall u, v \in H$ .

▷ Pour tout  $u$  dans  $H$ , on a (à nouveau par Pythagore)  $\|u\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu\|^2$ , d'où  $\|Pu\| \leq \|u\|$ .

□

Avant d'énoncer quelques corollaires importants de ce lemme, il nous faut introduire la définition suivante :

**Définition 15.14** Soit  $F$  un sous-ensemble de  $H$ . On appelle espace orthogonal à  $F$  et on note  $F^\perp$  le sous-espace vectoriel de  $H$  défini par :

$$F^\perp = \{u \in H \mid (u, v) = 0 \quad \forall v \in F\}.$$

On a tout d'abord le

**Corollaire 15.15** Si  $E$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ , alors :

$$H = E \oplus E^\perp.$$

DÉMONSTRATION. Notons  $P$  la projection orthogonale sur  $E$ . Alors, si  $u \in H$ ,  $u = (u - Pu) + Pu$  avec  $Pu \in E$  et  $u - Pu \in E^\perp$ . Pour établir l'unicité d'une telle décomposition, on remarque que si

$$u_1 + u_2 = 0 \quad \text{avec } u_1 \in E \text{ et } u_2 \in E^\perp,$$

l'identité de Pythagore donne immédiatement  $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = 0$ , d'où  $u_1 = u_2 = 0$ .

□

Ce résultat nous donne une caractérisation très utile des sous-espaces denses d'un espace de Hilbert.

**Corollaire 15.16** Soit  $F$  un sous-espace de  $H$ . Alors  $F$  est dense dans  $H$  si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .

DÉMONSTRATION. Notons  $E$  l'adhérence de  $F$ . Il est facile de vérifier que

$$E^\perp = F^\perp,$$

car l'application  $v \rightarrow (u, v)$  est continue. Par ailleurs, il est clair que  $E$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ . Par conséquent, d'après le corollaire précédent

$$H = E \oplus E^\perp = E \oplus F^\perp,$$

ceci prouve que  $E = H$  si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .

□

Nous allons conclure ce paragraphe en démontrant un résultat qui nous sera très utile dans la suite. En utilisant le théorème de la projection, nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme entre un espace de Hilbert et son dual. Ce résultat, du à Riesz, conduira souvent à *identifier* un espace de Hilbert à son dual.

**Théorème 15.17 Théorème de Riesz** Soit  $\ell$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors il existe un et un seul élément  $u \in H$  tel que

$$\ell(v) = (v, u) \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\ell\| = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{\ell(v)}{\|v\|} = \|u\|.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $E$  le noyau de la forme  $\ell$  :

$$E = \{v \in H \mid \ell(v) = 0\}.$$

Comme  $\ell$  est linéaire et continue,  $E$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$  et l'on peut définir la projection orthogonale  $P$  de  $H$  sur  $E$ .

▷ Si  $\ell = 0$ , c'est fini. On suppose donc  $E \neq H$ . Autrement dit, il existe  $w \in H$  tel que  $Pw \neq w$ . Posons

$$z = w - Pw \text{ et } u = \frac{\ell(z)}{\|z\|^2} z.$$

Alors il est facile de voir que  $u$  engendre  $E^\perp$ . Par conséquent, tout élément  $v \in H$  peut s'écrire  $v = \lambda u + Pv$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a alors  $\ell(v) = \lambda \ell(u)$  et  $(v, u) = \lambda \|u\|^2$ , mais comme

$$\ell(u) = \frac{\ell(z)^2}{\|z\|^2} = \|u\|^2,$$

on trouve finalement  $\ell(v) = (v, u)$ ,  $\forall v \in H$ .

□

### 15.3 Bases Hilbertiennes

Tout espace de Hilbert possède des bases dites *Hilbertiennes* (en un sens qui sera précisé ci-dessous) qui généralisent les bases orthonormales de la dimension finie. Tous les espaces de Hilbert que nous considérons dans ce cours étant *séparables* (c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense), il s'agit en fait de bases Hilbertiennes *dénombrables*. Ainsi par exemple, on peut montrer facilement, à l'aide du théorème de Stone-Weierstraß, que les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , constituent une base Hilbertienne de  $L^2(]0, 2\pi[)$ . Plus généralement, la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints compacts, que nous étudierons au chapitre 18 nous permettra de construire

diverses bases Hilbertiennes, destinées à diagonaliser des opérateurs aux dérivées partielles.

Nous considérerons donc exclusivement dans ce paragraphe le cas d'un espace de Hilbert  $H$  séparable et de dimension infinie. Nous renvoyons à [?] pour le cas général.

**Définition 15.18** On appelle système orthonormé de  $H$  toute famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  de norme 1 et orthogonaux deux à deux :

$$(e_m, e_n) = \delta_{mn}.$$

**Lemme 15.19** Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système orthonormé de  $H$ .

(i) Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre complexes. Alors la série  $\sum \alpha_n e_n$  converge dans  $H$  si et seulement si

$$\sum |\alpha_n|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, on a

$$\left\| \sum \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum |\alpha_n|^2.$$

(ii) Soit  $u \in H$ , alors la série  $\sum (u, e_n) e_n$  converge dans  $H$  et

$$\left\| \sum (u, e_n) e_n \right\|^2 = \sum |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $s_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$ , alors on a (par le théorème de Pythagore)

$$\|s_N\|^2 = \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Donc si  $s_N$  converge dans  $H$ ,  $\|s_N\|$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers la somme de la série  $\sum |\alpha_n|^2$ , qui est donc convergente. Réciproquement, si cette série converge, alors la suite  $s_N$  est de Cauchy. En effet, soit  $\varepsilon > 0$  et  $M > N$ , pour  $N$  assez grand on aura

$$\|s_N - s_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\alpha_n|^2 < \varepsilon.$$

▷ Notons  $P_N$  la projection orthogonale sur le sous-espace de  $H$  engendré par les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_N$ . Alors, pour tout  $u \in H$ , on a  $P_N u = \sum_{n=1}^N (u, e_n) e_n$ , donc

$$\|P_N u\|^2 = \sum_{n=1}^N |(u, e_n)|^2.$$

Or on sait (cf. lemme 15.13) que  $\|P_N u\| \leq \|u\|$ , donc la série  $\sum |(u, e_n)|^2$  converge. D'après la première partie de la preuve, cela prouve que la série  $\sum (u, e_n) e_n$  converge dans  $H$ .

□

**Lemme 15.20** Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système orthonormé de  $H$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace vectoriel engendré par les  $e_n$  (c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de vecteurs  $e_n$ ) est dense dans  $H$ .
- (ii) Si  $u \in H$  est tel que  $(u, e_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $u = 0$ .
- (iii) Pour tout  $u \in H$ , on a

$$u = \sum (u, e_n) e_n.$$

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que le système  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est total et qu'il constitue une base Hilbertienne de  $H$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair que (i) implique (ii).

▷ Montrons maintenant que (ii) implique (iii). Soit  $u \in H$ . D'après le lemme précédent, la série  $\sum (u, e_n) e_n$  converge dans  $H$ . Notons  $v$  sa limite. Alors il est clair que  $(u - v, e_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la propriété 2, ceci implique que  $u = v$ .

▷ Supposons enfin la propriété (iii) vérifiée. Cela signifie que, pour tout  $u \in H$ ,  $u$  est la limite de  $P_N u$  dans  $H$ . Or  $P_N u$  appartient à l'espace vectoriel engendré par les  $e_n$ . Cela prouve que cet espace est dense dans  $H$ .

□

Autrement dit, si  $H$  admet une base Hilbertienne, tout vecteur de  $H$  est une combinaison linéaire *infinie* de vecteurs de la base, ou, plus précisément, tout vecteur de  $H$  est limite d'une suite de combinaisons linéaires *finies* de vecteurs de la base.

**Théorème 15.21** Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie admet une base Hilbertienne dénombrable.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dense dans  $H$ . A plus forte raison, l'espace vectoriel  $F$  engendré par les  $f_n$  est dense dans  $H$ . On peut alors supposer que tous les vecteurs  $f_n$  sont linéairement indépendants (en effet, si l'un d'eux est une combinaison linéaire finie des autres, on peut le supprimer de la suite  $f_n$  sans modifier l'espace  $F$ ).

▷ On applique alors le *procédé d'orthonormalisation de Schmidt* à la suite  $f_n$  : on note  $P_n$  la projection orthogonale sur l'espace engendré par les vecteurs  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , et on pose

$$e_1 = f_1, \quad e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - P_n f_{n+1}}{\|f_{n+1} - P_n f_{n+1}\|}.$$

Par construction, le système  $(e_n)$  est orthonormé et il engendre l'espace  $F$  qui est dense dans  $H$ . C'est donc bien une base Hilbertienne de  $H$ .

□

**Remarque 15.22** *La réciproque est également vraie. Si un espace de Hilbert  $H$  admet une base Hilbertienne dénombrable, alors il est séparable. En effet, l'ensemble dénombrable formé de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de la base, à coefficients de parties réelle et imaginaire rationnelles, est dense dans  $H$ .*

**Corollaire 15.23** *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à  $\ell^2$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base Hilbertienne de  $H$ . Alors l'application  $T$  qui à  $u \in H$  associe la suite  $(u, e_n)$  définit un isomorphisme de  $H$  dans  $\ell^2$ . □

### L'exemple des séries de Fourier

Nous allons terminer ce paragraphe par l'exemple des séries de Fourier dans l'espace  $L^2$ . Notons  $\Omega$  l'intervalle  $]0, 2\pi[$  et  $H$  l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $e_n$  la fonction suivante :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Il est facile de vérifier que les fonctions  $(e_n)$  forment un système orthonormé de  $H$ . Pour montrer qu'il s'agit d'un système total, il nous suffit de vérifier que si  $f \in H$  est tel que tous ses coefficients de Fourier sont nuls :

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

alors la fonction  $f$  est identiquement nulle.

Soit donc  $f$  une telle fonction. On a alors

$$\int_0^{2\pi} f(x) p(x) dx = 0$$

pour tout *polynôme trigonométrique*  $p$ , c'est-à-dire pour toute fonction de la forme suivante :

$$p(x) = \sum_{n=0}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad a_n \in \mathbb{C}, b_n \in \mathbb{C}.$$

Or, d'après le Théorème de Stone-Weierstraß, toute fonction  $g$  continue sur  $\Omega$  et telle que  $g(0) = g(2\pi)$  est limite uniforme de polynômes trigonométriques. On a donc pour toute fonction  $g$  continue et périodique :

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx = 0.$$

On conclut à la nullité de  $f$  en utilisant par exemple la densité des fonctions continues à support compact dans  $L^2(\Omega)$  (voir le théorème 16.4).

En conclusion, nous pouvons affirmer que pour toute fonction  $f$  de  $L^2(\Omega)$ , la série de Fourier de  $f$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (f, e_n) e_n$$

converge dans  $L^2$  vers  $f$ . On a a fortiori

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right|^2.$$

# Chapitre 16

## Espaces de Sobolev

Nous allons dans ce chapitre étudier des espaces vectoriels de distributions particuliers, appelés espaces de Sobolev. Une propriété importante est qu'il s'agit d'espaces de Hilbert. Pour de nombreuses équations aux dérivées partielles issues de la physique, l'espace de Sobolev adapté à la résolution de l'équation peut s'interpréter comme l'espace des solutions d'énergie finie.

Nous commençons ce chapitre par une description rapide de l'espace des fonctions de carré intégrable  $L^2(\Omega)$ , puis nous montrons que la transformation de Fourier est une isométrie sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On définit ensuite, dans le cas d'un ouvert  $\Omega$  quelconque, les espaces de Sobolev d'ordre entier  $H^m(\Omega)$ . Dans le cas particulier où le domaine  $\Omega$  est égal à  $\mathbb{R}^n$ , la transformation de Fourier permet de donner une autre définition des espaces de Sobolev qui s'étend à un exposant réel  $s$  quelconque. On démontre alors de nombreuses propriétés de ces espaces  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . On termine en énonçant les propriétés essentielles de l'espace  $H^1(\Omega)$  dans le cas d'un ouvert quelconque.

### 16.1 L'espace $L^2$

#### 16.1.1 Définition et propriétés de $L^2(\Omega)$

Dans toute cette section,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 16.1** Une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$  à valeurs complexes est dite de carré intégrable si  $u$  est mesurable et  $u^2 \in L^1(\Omega)$ . On pose alors :

$$\|u\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On note  $L^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$ .

On peut alors démontrer les propriétés suivantes :

#### Proposition 16.2



(i)  $L^2(\Omega)$  est un espace vectoriel et  $\|u\|_{L^2}$  est une norme sur  $L^2(\Omega)$ . En particulier, si  $u \in L^2(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega)$ , alors la somme  $u + v$  appartient à  $L^2(\Omega)$  et on a

$$\textbf{l'inégalité de Minkowski} : \|u + v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}.$$

(ii) Si  $u \in L^2(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega)$ , alors le produit  $uv$  appartient à  $L^1(\Omega)$  et on a

$$\textbf{l'inégalité de Cauchy-Schwarz} : \int_{\Omega} |uv| dx \leq \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}$$

qui s'écrit aussi

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

(iii)  $L$ 'application

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} u \bar{v} dx$$

est un produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$  que l'on notera  $(u, v)_{L^2}$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $u$  et  $v$  de carré intégrable sur  $\Omega$ .

▷ Pour tout  $x \in \Omega$ , on a

$$2|u(x)||v(x)| \leq |u(x)|^2 + |v(x)|^2,$$

d'où

$$|u(x) + v(x)|^2 = |u(x)|^2 + |v(x)|^2 + 2\Re(u\bar{v}) \leq 2(|u(x)|^2 + |v(x)|^2).$$

On déduit de la première inégalité que  $uv$  est intégrable et de la seconde que  $u + v$  est de carré intégrable.

▷ Pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut remarquer que

$$\| |u| + t|v| \|_{L^2} \geq 0$$

pour tout réel  $t$ . Or le membre de gauche est un polynôme de degré 2 en  $t$ , par conséquent, son discriminant est nécessairement négatif ou nul, ce qui s'écrit

$$\left( \int_{\Omega} |uv| dx \right)^2 - \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq 0.$$

▷ On a

$$\int_{\Omega} |u + v|^2 dx = \int_{\Omega} (u + v) \bar{u} dx + \int_{\Omega} (u + v) \bar{v} dx,$$

on en déduit l'inégalité de Minkowski en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chacun des deux termes.

□

La topologie déduite de la norme

$$\|u\|_{L^2} = (u, u)_{L^2}$$

est appelée *topologie de la convergence en moyenne quadratique*. Nous allons maintenant établir le résultat essentiel suivant :

**Théorème 16.3** Soit  $(u_j)$  une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Alors il existe  $u \in L^2(\Omega)$  tel que

$$\|u - u_j\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

De plus, il existe une sous-suite extraite qui converge presque uniformément dans  $\Omega$ .

L'espace  $L^2(\Omega)$  est donc complet pour la topologie de la convergence en moyenne quadratique.

DÉMONSTRATION. Soit  $(u_j)$  une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Alors on peut construire une sous-suite extraite que nous noterons encore  $(u_j)$  telle que

$$\|u_{j+1} - u_j\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^j}.$$

On pose alors

$$g_m(x) = \sum_{j=1}^m |u_{j+1}(x) - u_j(x)|,$$

d'où

$$\|g_m\|_{L^2} \leq \sum_{j=1}^m \|u_{j+1} - u_j\|_{L^2} \leq 1.$$

On peut appliquer le théorème de convergence monotone à la suite  $(g_m^2)$ . Il existe donc une fonction positive  $g \in L^2(\Omega)$  telle que  $g_m$  converge presque uniformément (et donc presque partout) vers  $g$  et telle que  $g_m^2$  converge en moyenne vers  $g^2$ . En remarquant que pour  $m > p$

$$|u_m(x) - u_p(x)| \leq \sum_{j=p}^{m-1} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| = g_{m-1}(x) - g_p(x), \quad (16.1)$$

on en déduit que  $u_j$  converge presque uniformément (et donc presque partout) vers une fonction  $u$ . De plus, en passant à la limite sur  $m$  dans (16.1), on vérifie que pour presque tout  $x \in \Omega$  :

$$|u(x) - u_p(x)| \leq g(x).$$

Par conséquent,  $(u - u_p)$  appartient à  $L^2(\Omega)$  et donc  $u$  également. On vérifie alors que  $u_p$  converge vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$  en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la fonction  $(u - u_p)$ . Pour conclure, on remarque que, comme la suite  $(u_j)$  est de Cauchy, c'est en fait toute la suite et non uniquement la suite extraite qui converge vers  $u$  en moyenne quadratique.

□

Ce théorème montre que  $L^2(\Omega)$  est un *espace de Hilbert*.

Nous aurons souvent recours dans la suite au résultat de densité suivant :

**Théorème 16.4**  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION. Nous admettrons ce résultat dont la démonstration utilise la convolution par des fonctions régularisantes. □

Pour terminer ce paragraphe, nous allons caractériser le dual de  $L^2(\Omega)$ . Le théorème de Riesz, que nous démontrerons au chapitre suivant, permet d'énoncer le

**Théorème 16.5** L'application qui à  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  associe la forme linéaire continue  $\ell$  sur  $L^2(\Omega)$  suivante :

$$u \rightarrow \ell(u) = \int_{\Omega} f u \, dx$$

définit un isomorphisme entre  $L^2(\Omega)$  et son dual.

En particulier, pour toute forme linéaire continue  $\ell$  sur  $L^2(\Omega)$ , il existe un unique  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  tel que  $\ell(u) = \int_{\Omega} f u \, dx$  pour tout  $u \in L^2(\Omega)$  et on a

$$\|\ell\| = \sup_{u \in L^2(\Omega)} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|_{L^2}} = \|f\|_{L^2}.$$

D'après le résultat de densité énoncé ci-dessus, une forme linéaire continue  $\ell$  sur  $L^2(\Omega)$  s'identifie à une distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . On peut également associer à  $\ell$  une fonction  $f$  de  $L^2(\Omega)$  par l'isomorphisme de Riesz, défini au théorème 16.5. On a finalement

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \ell(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Autrement dit,  $T$  est exactement la distribution  $\{f\}$ . On dit que l'on *identifie* la forme linéaire  $\ell$  à la fonction  $f$ . Pour cette raison, l'isomorphisme défini au théorème 16.5 est dit *canonique* et on écrit souvent :

$$L^2(\Omega)' = L^2(\Omega).$$

Cela signifie que les distributions qui constituent le dual de  $L^2(\Omega)$  sont exactement les fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

### 16.1.2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Remarquons tout d'abord qu'une fonction  $u$  de carré intégrable dans  $\Omega$  définit une distribution. En effet, si  $u \in L^2(\Omega)$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on a :

$$\int_{\Omega} |u| \, dx \leq \|u\|_{L^2} \mu(K)^{1/2}.$$

Ceci s'obtient en choisissant comme fonction  $v$  la fonction caractéristique du compact  $K$ .

Autrement dit, toute fonction de carré intégrable est localement intégrable, et définit donc une distribution de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , il s'agit même d'une distribution tempérée. En effet, on a le

**Lemme 16.6**

- (i) L'injection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est continue.
- (ii) L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii) L'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $j > n/2$ . Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|^j)^2 \varphi(x)^2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^j)^2} dx,$$

qui s'écrit également (voir la définition des semi-normes qui définissent la topologie de  $\mathcal{S}$  au chapitre précédent) :

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C(p_{0,0}(\varphi) + p_{j,0}(\varphi)),$$

avec

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^j)^2} dx.$$

Cela prouve la continuité de l'injection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Le deuxième item résulte immédiatement du théorème 16.4.

▷ Enfin, pour montrer qu'une fonction de carré intégrable définit une distribution tempérée, on remarque que si  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi dx = (u, \bar{\varphi})_{L^2},$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} ;$$

la continuité de l'injection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  permet de conclure.

□

D'après le lemme précédent, il est possible de définir la transformée de Fourier  $\hat{u}$  (au sens des distributions) d'une fonction  $u$  de carré intégrable. A priori,  $\hat{u}$  est une distribution tempérée. En fait, nous allons montrer que c'est également une fonction de carré intégrable et que sa norme est égale à celle de  $u$  :

**Théorème 16.7** *La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  et son inverse  $\overline{\mathcal{F}}$  sont des isométries de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et l'on a, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$*

(i) **Identité de Parseval :**

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)} dx = (u, v)_{L^2} = (\hat{u}, \hat{v})_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad (16.2)$$

(ii) **Identité de Plancherel :**

$$\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2} \quad (16.3)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . D'après le lemme précédent, il existe une suite  $\varphi_m$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . D'après le théorème 13.12, on a pour tous  $m$  et  $p$

$$\|\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_p\|_{L^2} = \|\varphi_m - \varphi_p\|_{L^2}.$$

Ceci montre que la suite  $\hat{\varphi}_m$  est de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Elle converge donc vers une fonction  $\hat{\varphi}$  de carré intégrable. Or pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} \psi dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_m \psi dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m \hat{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u \hat{\psi} dx = \langle \hat{u}, \psi \rangle,$$

où  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier de  $u$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Ceci prouve que  $\hat{\varphi} = \hat{u}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Pour montrer l'identité de Parseval, il suffit de prendre une suite  $\psi_m$  tendant vers  $v$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors, d'après (13.14)

$$(u, \psi_m)_{L^2} = (\hat{u}, \hat{\psi}_m)_{L^2}.$$

Le résultat s'obtient en passant à la limite sur  $m$ .

Enfin, l'identité de Plancherel est une conséquence directe de l'identité de Parseval en prenant  $u = v$ .

□

En pratique, lorsque l'on cherche à calculer la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il n'est pas nécessaire de construire une suite d'approximations dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En effet, on a le

**Lemme 16.8** *Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\hat{u}$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de la suite  $\hat{u}_A$  quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , où :*

$$\hat{u}_A(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{+A} dx_1 \dots \int_{-A}^{+A} dx_n u(x) e^{-ix \cdot \xi}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la suite  $u_A = \chi_{[-A, +A]} u$  tend vers  $u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , d'où  $\hat{u}_A$  tend vers  $\hat{u}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

□

**Remarque 16.9**

(i) Bien entendu, le choix d'un intervalle  $[-A, +A]$  symétrique par rapport à 0 est arbitraire.

(ii) On trouve souvent écrit pour une fonction  $u$  de carré intégrable

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Il est alors important de se rappeler que cette intégrale n'a de sens que comme limite dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de la suite d'intégrales

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{+A} dx_1 \dots \int_{-A}^{+A} dx_n u(x) e^{-ix \cdot \xi},$$

quand  $A \rightarrow \infty$ .

**16.2 Définitions des espaces de Sobolev****16.2.1 Les espaces  $H^m(\Omega)$** 

**Définition 16.10** Si  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $m$  un entier naturel, on appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  et on note  $H^m(\Omega)$  l'espace vectoriel suivant :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}, \quad (16.4)$$

où

$$|\alpha| = \sum_{j=1, n} \alpha_j \text{ et } \partial^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

Bien entendu, dans cette définition, la dérivée  $\partial^\alpha u$  est à prendre au sens de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Des propriétés de  $L^2(\Omega)$ , on déduit immédiatement la

**Proposition 16.11**  $H^m(\Omega)$  est un espace vectoriel, l'application

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha \bar{v} dx$$

est un produit scalaire sur  $H^m(\Omega)$  que l'on notera  $(u, v)_{H^m}$ .

La norme associée est notée  $\|u\|_{H^m}$ .

Montrons maintenant qu'il s'agit d'espaces complets :

**Lemme 16.12** L'espace  $H^m(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^m}$  est complet.

DÉMONSTRATION. Soit  $u_j$  une suite de Cauchy dans  $H^m(\Omega)$ . Alors  $\partial^\alpha u_j$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq m$ . Comme  $L^2(\Omega)$  est complet, la suite  $u_j$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers une fonction  $u$ . De même, il existe pour chaque  $\alpha \neq 0$  une fonction  $g_\alpha \in L^2(\Omega)$  telle que

$$\partial^\alpha u_j \rightarrow g_\alpha \in L^2(\Omega).$$

Pour montrer que  $u_j \rightarrow u$  dans  $H^m(\Omega)$ , il suffit de vérifier que  $\partial^\alpha u = g_\alpha$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ; or pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a :

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle = \lim \langle u_j, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle = \lim \langle \partial^\alpha u_j, \varphi \rangle = \langle g_\alpha, \varphi \rangle.$$

□

### 16.2.2 Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$

Supposons maintenant que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Cela va nous permettre d'exploiter les propriétés isométriques de la transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 16.13** Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . De plus, toutes les dérivées de  $u$  au sens des distributions sont dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et l'on sait que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \hat{u},$$

où  $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$ . Le résultat s'en déduit immédiatement.

□

Ceci nous fournit dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$  une nouvelle définition des espaces de Sobolev  $H^m(\mathbb{R}^n)$  qui s'étend à un exposant réel quelconque :

**Définition 16.14** On appelle espace de Sobolev d'ordre  $s$  (où  $s$  est un réel quelconque) et on note  $H^s(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel suivant :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

On munit  $H^s(\mathbb{R}^n)$  du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad (16.5)$$

et on note  $\|\cdot\|_s$  la norme associée. A priori, dans le cas d'un exposant  $m$  entier, nous avons défini deux produits scalaires différents, et donc deux normes différentes, sur l'espace  $H^m(\mathbb{R}^n)$ . En fait, il est facile de vérifier la

**Proposition 16.15** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe deux constantes réelles positives  $C_1$  et  $C_2$  telle que l'on ait, pour tout  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$*

$$C_1 \|u\|_m \leq \|u\|_{H^m} \leq C_2 \|u\|_m.$$

Autrement dit, les deux normes sont équivalentes. Montrons maintenant la complétude de l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  :

**Théorème 16.16** *Pour tout réel  $s$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  muni du produit scalaire défini par (16.5) est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit  $u_j$  une suite de Cauchy dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors la suite

$$g_j = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_j$$

est de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Notons  $g$  sa limite et posons

$$u = \overline{\mathcal{F}} \left( (1 + |\xi|^2)^{-s/2} g \right).$$

Alors il est clair que  $u_j$  tend vers  $u$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . □

Il est facile de voir que les  $H^s(\mathbb{R}^n)$  forment une suite décroissante d'espaces au sens suivant :

**Proposition 16.17** *On a  $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$  dès que  $s' \leq s$  et l'injection est continue.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

Démontrons maintenant le résultat de densité suivant :

**Théorème 16.18**  *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème 16.4, il existe  $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} - \hat{\varphi}\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Ceci s'écrit aussi

$$\|u - \psi\|_s \leq \varepsilon,$$

où  $\psi$  désigne la fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  définie par

$$\psi = \overline{\mathcal{F}} \left( (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{\varphi} \right).$$



On sait par ailleurs que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Soit donc  $\psi_j$  une suite de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $\psi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la transformation de Fourier étant continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la suite  $\hat{\psi}_j$  tend vers  $\hat{\psi}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Il est facile d'en déduire que  $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\psi}_j$  tend vers  $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\psi}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Autrement dit, pour  $j$  assez grand :

$$\|\psi_j - \psi\|_s \leq \varepsilon,$$

d'où finalement

$$\|u - \psi_j\|_s \leq 2\varepsilon.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le

**Théorème 16.19** *Pour tout réel  $s$ , l'espace  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  s'identifie canoniquement au dual de  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . En particulier, toute distribution  $u$  dans  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$  définie par*

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \langle u, v \rangle = \langle (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \rangle.$$

Réciproquement, pour toute forme linéaire continue  $\ell$  sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , il existe une unique distribution  $u$  dans  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \ell(v) = \langle u, v \rangle.$$

On écrira

$$H^s(\mathbb{R}^n)' = H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Cela signifie que les distributions qui constituent le dual de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  sont exactement les distributions de  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$|\langle u, \varphi \rangle| = |\langle \hat{u}, \hat{\varphi} \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \hat{\varphi} d\xi \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s/2} \hat{u} (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{\varphi} d\xi \right| \leq \|u\|_{-s} \|\varphi\|_s.$$

Joint au résultat de densité précédent, ceci montre que la distribution  $u$  se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Réciproquement, soit  $\ell$  une forme linéaire continue sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , elle s'identifie de manière unique à une distribution tempérée  $T$  et l'on a, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$|\ell(\varphi)| \leq \|\ell\| \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}\|_{L^2},$$

et

$$\ell(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \hat{\varphi} \rangle.$$

On en déduit que, pour tout  $\hat{\psi}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \langle \hat{T}, (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{\psi} \rangle \right| \leq \|\ell\| \|\hat{\psi}\|_{L^2}.$$

Ceci prouve que la distribution tempérée  $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{T}$  se prolonge en une forme linéaire continue sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . D'après le théorème 16.5 et la remarque qui suit, cela prouve que  $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{T}$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , ou de manière équivalente, que la distribution  $T$  appartient à  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ .

□

## 16.3 Régularité et traces

### 16.3.1 Inégalités de Sobolev

Un des intérêts des espaces de Sobolev est qu'ils permettent de *mesurer* la régularité des fonctions. Introduisons tout d'abord une nouvelle définition :

**Définition 16.20** On note  $C_b^m(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions de  $C^m(\mathbb{R}^n)$  qui sont bornées sur  $\mathbb{R}^n$  ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ . On le munit de la topologie de la convergence uniforme pour les dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $m$ .

Alors on a le

**Théorème 16.21** Si  $s > n/2 + m$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , alors toute fonction de l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est de classe  $C^m$  et tend vers 0 à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ . De plus, l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  s'injecte continuellement dans l'espace  $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ .

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas  $m = 0$  et supposons  $s > n/2$ . Sous cette condition il est facile de voir que la fonction  $g_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ; l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|\hat{u}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\|_{L^2} \|(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\|\hat{u}\|_{L^1} \leq \|g_s\|_{L^2} \|u\|_s.$$

D'après le théorème de Riemann-Lebesgue, ceci prouve que  $u$  est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. De plus on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}\|_{L^1} \leq C_s \|u\|_s,$$

avec  $C_s = \|g_s\|_{L^2}$ , ce qui prouve la continuité de l'injection.

Supposons maintenant  $s > n/2 + m$  avec  $m > 0$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq m$ ,  $\partial_\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $s - |\alpha| \geq s - m > n/2$ , on peut appliquer ce qui précède à la fonction  $\partial_\alpha u$  et conclure.

□

On retiendra en particulier de ce théorème les résultats suivants :

- ▷ En dimension 1, l'espace  $H^1(\mathbb{R})$  est constitué de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.
- ▷ En dimensions 2 ou 3, l'espace  $H^2(\mathbb{R}^n)$  est constitué de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. En revanche, on trouve dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$  des fonctions qui ne sont pas continues. On pourra pour s'en convaincre considérer l'exemple suivant :

$$u(x, y) = \varphi(x, y)\theta(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  qui ne s'annule pas en 0 et

$$\theta(r) = \begin{cases} (\log r)^{1/2} & \text{si } n = 2, \\ r^{-1/4} & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est constituée par le

**Corollaire 16.22** *L'espace  $\bigcap_{s>0} H^s(\mathbb{R}^n)$  est inclus dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$*

Autrement dit, plus  $s$  est grand, plus les fonctions de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  sont régulières. Inversement,  $\bigcup_{s<0} H^s(\mathbb{R}^n)$  contient des distributions d'ordre arbitrairement grand. Par exemple, il est facile de voir que la dérivée  $m$ -ième de la masse de Dirac appartient à  $H^s(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $s < -n/2 - m$ .

### 16.3.2 Opérateurs de trace

Pour une fonction  $u$  de carré intégrable dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , cela n'a pas, a priori, de sens de parler des valeurs prises par la fonction  $u$  sur une surface  $\Gamma$  (comme par exemple le bord de l'ouvert  $\Omega$ ). En effet, la fonction  $u$  n'est définie que presque partout et  $\Gamma$  est de mesure nulle. En revanche, cela est possible si  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  avec  $s > n/2$ , car on a montré dans ce cas (cf. théorème 16.21) que la fonction  $u$  est continue (il faudrait dire plus exactement qu'elle admet un *représentant* continu.) Ainsi par exemple, en dimension 1, on peut définir l'application suivante :

$$\gamma : \begin{cases} H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \rightarrow \gamma(u) = u(0), \end{cases}$$

et, toujours d'après le théorème 16.21, il s'agit d'une forme linéaire continue sur  $H^1(\mathbb{R})$ . Cette application est appelée l'application *trace*. Notre objectif est de montrer qu'il est possible plus généralement de donner un sens à la *trace*  $\gamma$  des fonctions de  $H^1(\mathbb{R}^n)$  sur l'hyperplan  $x_n = 0$  (bien que  $H^1(\mathbb{R}^n)$  contienne des fonctions qui ne sont pas continues dès que  $n > 1$ ).

Dans la suite, on notera  $x = (x', x_n)$  le point courant de  $\mathbb{R}^n$  avec  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Lemme 16.23** *Si  $s > 1/2$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \|\varphi(x', 0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on note  $\hat{\varphi}$  sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x', x_n) e^{i(x' \cdot \xi' + x_n \xi_n)} dx' dx_n.$$

La formule de réciprocity permet d'affirmer que

$$\varphi(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) e^{ix' \cdot \xi'} d\xi' d\xi_n,$$

qui s'écrit aussi

$$\varphi(x', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right) d\xi'.$$

Autrement dit, la transformée de Fourier dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  de la fonction  $\varphi(x', 0)$  est la fonction  $g(\xi')$  donnée par :

$$g(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) dx_n.$$

Démontrer le lemme revient à montrer l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $\varphi$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |g(\xi')|^2 d\xi' \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \quad (16.6)$$

Pour cela, on montre tout d'abord à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|g(\xi')|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^{-s} d\xi_n \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^s |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n,$$

or, pour  $s > 1/2$ , la première intégrale converge et on vérifie aisément que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^{-s} dx_n = (1 + |\xi'|^2)^{1/2-s} c_s,$$

où

$$c_s = \int_{\mathbb{R}} (1 + t^2)^{-s} dt.$$

On a donc finalement

$$(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |g(\xi')|^2 \leq c_s \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^s |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n,$$

qui donne (16.6) en intégrant par rapport à  $\xi'$ . □

On déduit de ce lemme le

**Théorème 16.24** *Si  $s > 1/2$ , l'application  $\gamma$  qui à  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  associe  $\gamma\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$  telle que*

$$\gamma\varphi(x') = \varphi(x', 0),$$

*se prolonge en une application continue et surjective de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ .*

DÉMONSTRATION. L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  étant dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , le lemme précédent montre que l'application  $\gamma$  admet un prolongement unique de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Nous admettrons la surjectivité de ce prolongement. □

On retiendra en particulier que l'application trace  $\gamma$  envoie  $H^1(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Ainsi par exemple, en dimension 2, la trace d'une fonction de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  est dans  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Il ne s'agit donc pas, en général, d'une fonction continue. On pourra à nouveau le vérifier sur l'exemple suivant :

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \left( \log(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)^{1/2},$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  qui ne s'annule pas en 0.

Nous allons maintenant démontrer un résultat analogue pour l'espace  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  défini par (16.4). Pour cela, nous admettrons tout d'abord le résultat technique (mais essentiel) suivant :

**Théorème 16.25** *L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  (espace des restrictions à  $\mathbb{R}_+^n$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ) est dense dans  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ .*

Il va nous permettre d'établir le

**Théorème 16.26** *L'application  $\gamma_+$  qui à  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  associe  $\gamma_+\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$  telle que*

$$\gamma_+\varphi(x') = \varphi(x', 0),$$

*se prolonge en une application continue et surjective de  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ .*

DÉMONSTRATION. Notons  $S$  l'opérateur de prolongement par symétrie défini, pour  $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , par

$$Su(x', -x_n) = u(x', x_n) \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx,$$

et de même, pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial(Su)}{\partial x_i} \right|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Par conséquent  $S$  se prolonge de façon unique en une isométrie de  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . On conclut en remarquant que  $\gamma_+ = \gamma \circ S$  et en utilisant le théorème 16.24. □

## 16.4 L'espace $H^1(\Omega)$

Pour terminer ce chapitre, nous allons décrire, sans les démontrer, un certain nombre de propriétés de l'espace  $H^1(\Omega)$  lorsque  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Nous entendons par *quelconque* un ouvert qui n'est (a priori) ni égal à  $\mathbb{R}^n$  tout entier, ni au demi-plan  $\mathbb{R}_+^n$ . Nous verrons que les propriétés qui seront énoncées généralisent, pour la

plupart, les propriétés des espaces  $H^1(\mathbb{R}^n)$  et  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  démontrées dans les paragraphes précédents. Leurs démonstrations pour un ouvert quelconque, souvent assez techniques, font appel à des notions de géométrie différentielle qui dépassent le cadre de ce cours.

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que  $\Omega$  est soit un intervalle de  $\mathbb{R}$  si  $n = 1$ , soit un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne si  $n > 1$ . Cela signifie que *localement*, on peut trouver un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^n$  et une fonction lipschitzienne  $f$  tels que l'équation de la frontière s'écrive

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

et que l'ouvert soit contenu dans le domaine

$$x_n < f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Ceci est vrai, bien entendu, si la frontière est de classe  $\mathcal{C}^1$ . C'est également vérifié en dimension 2 par les polygones et en dimension 3 par les polyèdres convexes, par exemple. En revanche, ce n'est pas vérifié dans le cas des ouverts *fissurés* ou *cuspidés*.

L'espace  $H^1(\Omega)$  a été défini au paragraphe 16.2.1. Nous savons déjà qu'il est muni du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u\bar{v} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v}) dx,$$

où

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^t,$$

et qu'il s'agit d'un espace complet pour la topologie associée. Bien entendu, c'est un sous-espace fermé de  $L^2(\Omega)$ .

Certaines propriétés de  $H^1(\Omega)$  se déduisent de celles de  $H^1(\mathbb{R}^n)$  grâce au

**Théorème 16.27** *Il existe un opérateur linéaire continu  $P$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$  telle que, pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  :*

$$Pu = u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

De ce théorème et du théorème 16.18, on déduit immédiatement le résultat de densité suivant :

**Théorème 16.28**  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  (qui est l'espace des restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ) est dense dans  $H^1(\Omega)$ .

On peut également déduire du théorème 16.27 et du théorème 16.21 le résultat suivant en dimension 1 :

**Théorème 16.29** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un point de  $\bar{I}$ . Alors :*

- (i) *Les fonctions de  $H^1(I)$  sont continues sur  $\bar{I}$ .*

(ii) Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $I$  telle que

$$\sup_{x \in I} |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I).$$

(iii) L'application trace  $\gamma$  qui à  $u$  associe  $u(a)$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(I)$ .

En dimension  $n > 1$ , les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont en général pas continues. Néanmoins, tout comme on l'a fait pour  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ , il est possible lorsque  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$  de définir une application trace sur le bord. Il nous faut pour cela introduire des espaces de fonctions définies sur le bord. Tout d'abord, nous noterons  $L^2(\partial\Omega)$  l'espace des fonctions  $u$  définies presque partout sur  $\partial\Omega$  et telles que

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma < +\infty,$$

où  $d\sigma$  est la mesure surfacique sur  $\partial\Omega$  induite par la métrique de  $\mathbb{R}^n$ . On peut montrer que  $L^2(\partial\Omega)$  est un espace vectoriel, que l'application

$$(u, v) \rightarrow (u, v)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u\bar{v} d\sigma$$

définit un produit scalaire sur  $L^2(\partial\Omega)$  et que  $L^2(\partial\Omega)$  est complet pour la topologie associée.

On a alors le

**Théorème 16.30** L'application  $\gamma$  qui à  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  associe sa trace  $\gamma u$  sur  $\partial\Omega$  se prolonge en une application continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . En particulier, il existe une constante  $C_\gamma$  qui ne dépend que de  $\Omega$  telle que

$$\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\gamma \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ , on a montré que  $\gamma$  est continue et surjective de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Mais comme  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^2(\partial\Omega)$ , cela prouve a fortiori que  $\gamma$  est continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Cela montre aussi dans ce cas que l'application  $\gamma$ , définie de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , n'est pas surjective. En effet, son image est  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  qui est une sous-espace fermé strict de  $L^2(\partial\Omega)$ . En fait, ceci reste vrai pour un ouvert  $\Omega$  quelconque :

**Théorème 16.31**

(i) L'image de l'application trace  $\gamma$  est un sous-espace strict de  $L^2(\partial\Omega)$  que nous noterons  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

(ii) L'application

$$u \rightarrow \inf_{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = u} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

définit une norme sur  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

(iii)  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  est complet pour la topologie associée.

(iv) L'injection de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  est continue.

Grâce au théorème 16.30, on peut étendre aux fonctions de  $H^1(\Omega)$  la formule de Green établie dans le chapitre 9 :

**Proposition 16.32 (Formule de Green)**

Si  $\Omega$  est un ouvert régulier et si  $\nu$  désigne la normale unitaire à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ , alors pour  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma v \nu_i d\sigma.$$

On sera souvent amené à travailler avec des fonctions de  $H^1(\Omega)$  dont la trace sur  $\partial\Omega$  est nulle :

**Théorème 16.33** Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\gamma u = 0$ .
- (ii) La fonction  $\tilde{u}$  égale à  $u$  dans  $\Omega$  et à 0 hors de  $\Omega$  appartient à  $H^1(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii) Il existe une suite de fonctions  $\varphi_j$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui converge vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions satisfaisant les conditions précédentes est noté  $H_0^1(\Omega)$ .

On déduit immédiatement du théorème précédent et du théorème 16.30 le

**Corollaire 16.34**  $H_0^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Pour conclure ce paragraphe, nous allons énoncer un résultat qui jouera un rôle essentiel lorsque nous étudierons les propriétés spectrales des problèmes elliptiques :

**Théorème 16.35 (Théorème de Rellich)** Si  $\Omega$  est borné, l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte. Autrement dit, si  $u_j$  est une suite de fonctions de  $H^1(\Omega)$ , bornée dans  $H^1(\Omega)$ , alors il existe une suite extraite  $u_{j'}$  et une fonction  $u$  de  $L^2(\Omega)$  telle que  $u_{j'}$  converge vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$ .





# Chapitre 17

## Etude variationnelle des problèmes elliptiques

### 17.1 Quelques exemples de problèmes aux limites elliptiques

#### 17.1.1 Le problème de Dirichlet

Considérons le problème d'électrostatique suivant. Dans une cavité  $\Omega$  sont réparties des charges électriques selon une densité  $\rho(x)$  connue et l'on cherche à calculer le champ électrique  $E$  satisfaisant

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = \rho \text{ et } \operatorname{rot} E = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où  $\varepsilon$  est une constante qui désigne la permittivité diélectrique du milieu. De plus, si la paroi de la cavité est métallique, assimilable à un conducteur parfait, la composante tangentielle du champ électrique doit s'annuler sur cette paroi.

Pour résoudre ce problème, on remarque que  $E$  dérive d'un potentiel électrostatique, soit  $\varphi$  :

$$E = \operatorname{grad} \varphi$$

qui doit vérifier l'équation suivante :

$$-\Delta \varphi = f,$$

où  $f = -\rho/\varepsilon$  (le signe "–" sera commode dans la suite). De plus le potentiel  $\varphi$  doit prendre une valeur constante sur chaque composante connexe de la frontière  $\partial\Omega$  : en effet, sa dérivée tangentielle n'est autre que la trace tangentielle de  $E$ . Considérons pour simplifier le cas d'une cavité simplement connexe. L'ajout d'une constante au potentiel électrostatique ne modifiant pas le champ électrique, on peut imposer à  $\varphi$  de s'annuler identiquement sur le bord de  $\Omega$ . On est alors conduit à résoudre le problème

suisant :

$$(P_D) \quad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } \varphi \text{ telle que} \\ -\Delta\varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème est appelé *problème de Dirichlet*. L'équation aux dérivées partielles satisfaite par  $\varphi$  est appelée *équation de Poisson*. La condition imposée à  $\varphi$  sur le bord du domaine est appelée une *condition aux limites de type Dirichlet homogène*. Si l'on considère une cavité non simplement connexe, on peut imposer à  $\varphi$  de prendre des valeurs constantes distinctes sur chacune des composantes connexes de  $\partial\Omega$ . Cela revient à imposer une différence de potentiel. La condition aux limites obtenue dans ce cas est dite de type Dirichlet *non homogène*.

### 17.1.2 Le problème de Neumann

Considérons maintenant le problème des vibrations acoustiques d'un fluide compressible dans une cavité  $\Omega$ . En régime harmonique, la pression est de la forme

$$\mathcal{P}(x, t) = \Re \varphi(x) e^{-i\omega t}$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $x \in \Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et elle satisfait à l'équation suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{P} + \alpha \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \Re(f(x) e^{-i\omega t})$$

où  $c$  désigne la célérité du son,  $\alpha$  le coefficient de dissipation (supposé strictement positif) et  $f$  la densité volumique de sources acoustiques (à valeurs complexes). Si la cavité est rigide et vibre à la pulsation  $\omega$ , on doit imposer une condition de glissement des particules sur la paroi qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n} = \Re(g(x) e^{-i\omega t}) \text{ sur } \partial\Omega.$$

Il en résulte que la fonction  $\varphi$  est solution du problème suivant :

$$(P_N) \quad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } \varphi \text{ telle que} \\ -\Delta\varphi - \nu\varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec

$$\nu = -\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\alpha.$$

Ce problème est dit *de Neumann*. L'équation aux dérivées partielles satisfaite par  $\varphi$  est appelée *équation de Helmholtz*. La condition imposée à  $\varphi$  sur le bord du domaine est appelée une *condition aux limites de type Neumann (non homogène si  $g \neq 0$  et homogène sinon)*.

### 17.1.3 Autres exemples

Nous avons présenté ci-dessus deux exemples fondamentaux de problèmes aux limites elliptiques. En réalité, il existe une grande variété de problèmes issus de la physique, conduisant à des équations aux dérivées partielles elliptiques différentes ou à des conditions aux limites différentes.

Ainsi par exemple, dans un milieu non homogène, les coefficients de l'équation aux dérivées partielles ne sont pas constants, mais dépendent des coordonnées d'espace. L'équation de Poisson prend alors la forme suivante :

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \varphi) = \rho f,$$

où  $\mu$  et  $\rho$  désignent deux fonctions de la variable  $x$ . Ce sont des données du problème.

Bien entendu, les conditions aux limites ne sont pas toujours du même type sur tout le bord de la cavité. Ainsi, on peut avoir une condition de Dirichlet sur une partie du bord et une condition de Neumann sur l'autre partie. On dit alors que l'on a affaire à un problème mixte Dirichlet-Neumann.

De plus, les conditions aux limites ne sont pas toutes du type Dirichlet ou Neumann. Par exemple, on peut écrire sur le bord du domaine une condition qui relie la valeur de l'inconnue à sa dérivée normale. C'est le cas de la condition de *Fourier* (également appelée condition de *Robin*) qui s'écrit sous la forme

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi = g \text{ sur } \partial\Omega,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients donnés. C'est une condition intermédiaire entre la condition de Dirichlet et celle de Neumann : pour  $\alpha = 0$  on retrouve la condition de Dirichlet, et pour  $\beta = 0$  celle de Neumann.

Notons enfin que dans les exemples que nous avons considérés, l'inconnue du problème était toujours une fonction scalaire, à valeurs réelles (pour le potentiel électrostatique) ou complexes (pour la pression acoustique en régime harmonique). Il existe des problèmes pour lesquels l'inconnue est un champ de vecteurs. C'est le cas par exemple des équations d'équilibre d'un corps élastique, dont la solution est le champ de déplacement. C'est aussi le cas des équations de Maxwell dont la solution est le champ électromagnétique.

## 17.2 Formulations variationnelles

Notre objectif est maintenant de montrer que les problèmes que nous avons introduits dans le paragraphe précédent sont *bien posés*. On dit qu'un problème est bien posé lorsqu'il admet une solution, que cette solution est unique et qu'elle dépend continûment des données du problème. Autrement dit, pour montrer qu'un problème est bien posé, il faut établir un résultat d'*existence*, un résultat d'*unicité* et un résultat de *stabilité*.

Jusqu'à présent, nous sommes restés peu précis dans l'énoncé des problèmes  $(P_D)$  et  $(P_N)$ . En effet, nous n'avons pas dit quelle régularité devait avoir la solution  $\varphi$ . La théorie que nous allons présenter ici conduit naturellement, comme on va le voir, à travailler dans le cadre des espaces de Sobolev. Admettons pour l'instant que l'on cherche la solution des problèmes  $(P_D)$  et  $(P_N)$  dans l'espace  $H^2(\Omega)$  et supposons les données  $f$  et  $g$  respectivement dans  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\partial\Omega)$ .

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'on peut écrire une formulation *faible* équivalente aux problèmes  $(P_D)$  et  $(P_N)$ . Le terme *faible* signifie que le degré de dérivation de la solution a été abaissé. Plus précisément, la première formulation dite *forte* fait intervenir l'opérateur Laplacien qui est d'ordre 2, alors que la formulation faible ne comprendra que des dérivées d'ordre 1.

La démarche à suivre pour obtenir cette formulation faible n'est pas la même, suivant que l'on considère le problème de Dirichlet ou celui de Neumann. Nous les traiterons donc séparément. De plus pour les exemples physiques particuliers que nous avons considérés, la solution est à valeurs réelles pour le problème de Dirichlet et à valeurs complexes pour le problème de Neumann. Ces deux exemples nous permettront donc d'illustrer la méthode variationnelle dans un espace de Hilbert réel ou complexe.

### 17.2.1 Le problème de Dirichlet

Admettons pour l'instant l'existence d'une solution  $\varphi \in H^2(\Omega)$  au problème  $(P_D)$ . Pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , la formule de Green permet alors d'établir l'identité suivante

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} f\psi \, dx.$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , ceci reste vrai pour toute fonction  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . La solution  $\varphi$  de  $(P_D)$  étant nulle sur le bord de  $\Omega$ , elle appartient elle aussi à l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . Elle est donc solution du problème *variationnel* suivant :

$$(PV_D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} f\psi \, dx \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Comme on l'avait annoncé, cette formulation ne fait plus intervenir que des dérivées d'ordre 1. La condition aux limites de Dirichlet est imposée *fortement* à la solution (par opposition à la condition de Neumann, comme on le verra plus loin). Elle intervient dans la définition de l'espace fonctionnel. On dit que c'est une condition *essentielle*.

On remarque que la fonction test vit dans le même espace que la solution : ici, l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . Ceci garantit le fait qu'il y ait *autant* d'équations (à une fonction test correspond une équation) que d'inconnues. Par analogie avec la dimension finie, on peut penser qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour que le problème soit bien posé.

Notons que si l'on avait choisi les fonctions test dans un espace plus grand, comme  $H^1(\Omega)$  par exemple, la formule de Green aurait fait apparaître un terme de bord de la

forme

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \psi \, d\sigma,$$

que la condition aux limites ne permet pas de modifier. Or ce terme n'a pas de sens pour une fonction  $\varphi$  arbitraire dans  $H_0^1(\Omega)$ , car ses dérivées sont a priori dans  $L^2(\Omega)$  et n'admettent donc pas en général de trace sur le bord.

Vérifions maintenant que toute solution  $\varphi$  du problème *faible* (ou *variationnel*)  $(PV_D)$  est solution du problème *fort*  $(P_D)$ . En effet,  $\varphi$  s'annule sur le bord et en appliquant la formule de Green, on voit que

$$-\int_{\Omega} \varphi \Delta\psi \, dx = \int_{\Omega} f\psi \, dx,$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Autrement dit, la fonction  $\varphi$  vérifie l'équation  $-\Delta\varphi = f$  au sens des distributions. Elle est donc solution du problème fort  $(P_D)$ .

En ce sens, on peut dire que les deux problèmes sont équivalents. Or la théorie qui va suivre va nous permettre très simplement d'établir le caractère bien posé du problème  $(PV_D)$ .

On peut d'ailleurs déjà remarquer que l'unicité est assurée. En effet, si  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont deux solutions du problème  $(PV_D)$ . Alors  $\varphi_0 = \varphi - \tilde{\varphi}$  est solution du problème homogène (i.e. correspondant à un second membre  $f$  nul) et vérifie :

$$\begin{cases} \varphi_0 \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\psi \, dx = 0 \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

En prenant  $\psi = \varphi_0$ , on trouve que le gradient de  $\varphi_0$  est identiquement nul. Ceci prouve que  $\varphi_0$  est une fonction constante, mais comme elle s'annule sur le bord, elle est nécessairement identiquement nulle ; cela prouve l'unicité. L'existence et la stabilité résulteront du théorème de Lax-Milgram, que l'on démontrera plus loin.

### 17.2.2 Le problème de Neumann

Admettons maintenant l'existence d'une solution  $\varphi \in H^2(\Omega)$  (à valeurs complexes) au problème  $(P_N)$ . Cette fois, contrairement au cas du problème de Dirichlet, la solution est à rechercher dans l'espace  $H^1(\Omega)$  (et non  $H_0^1(\Omega)$ ). On va donc prendre les fonctions test dans le même espace.

Si  $\psi$  est une fonction test appartenant à  $H^1(\Omega)$ , la formule de Green conduit à l'identité suivante :

$$\int_{\Omega} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \nu\varphi\bar{\psi}\} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \bar{\psi} \, d\sigma = \int_{\Omega} f\bar{\psi} \, dx.$$

On peut alors transformer le terme de bord en utilisant la condition aux limites. On trouve ainsi que  $\varphi$  est solution du problème variationnel suivant :

$$(PV_N) \quad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \nu\varphi\bar{\psi}\} \, dx = \int_{\partial\Omega} g\bar{\psi} \, d\sigma + \int_{\Omega} f\bar{\psi} \, dx \text{ pour tout } \psi \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Contrairement à la condition de Dirichlet, la condition de Neumann n'intervient pas dans l'espace fonctionnel (on ne peut d'ailleurs pas parler de la dérivée normale d'une fonction quelconque de  $H^1(\Omega)$ ) mais elle intervient dans l'équation variationnelle : on dit que c'est une condition *naturelle*.

Comme nous l'avons fait pour le problème de Dirichlet, nous allons montrer que le problème faible ( $PV_N$ ) est en un certain sens équivalent au problème fort ( $P_N$ ).

Soit donc  $\varphi$  solution de ( $PV_N$ ). On doit distinguer deux étapes dans la démarche :

(i) On choisit tout d'abord la fonction test  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ . On trouve alors que

$$\int_{\Omega} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \nu\varphi\bar{\psi}\} dx = \int_{\Omega} f\bar{\psi} dx,$$

car le terme de bord est nul dans ce cas. Ceci permet de montrer que l'équation de Helmholtz

$$-\Delta\varphi + \nu\varphi = f \tag{17.1}$$

est bien satisfaite au sens des distributions.

(ii) Il nous faut maintenant vérifier que  $\varphi$  satisfait à la condition aux limites. Pour pouvoir donner un sens à celle-ci (à l'aide du théorème de trace), nous allons supposer que  $\varphi \in H^2(\Omega)$  (nous reviendrons ensuite sur cette hypothèse). A l'aide de la formule de Green, on trouve alors que, pour tout  $\psi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \{-\Delta\varphi + \nu\varphi\}\bar{\psi} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bar{\psi} d\sigma = \int_{\partial\Omega} g\bar{\psi} d\sigma + \int_{\Omega} f\bar{\psi} dx.$$

D'après (17.1), cela donne

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} - g \right\} \bar{\psi} d\sigma = 0,$$

pour tout  $\psi \in H^1(\Omega)$ . Mais l'image de l'application trace est l'espace  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  qui est dense dans  $L^2(\partial\Omega)$ , donc ceci implique

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Nous avons démontré que si  $\varphi$  est solution du problème variationnel ( $PV_N$ ) et appartient à  $H^2(\Omega)$ , c'est une solution du problème fort ( $P_N$ ). Il y a donc une étape essentielle pour établir l'équivalence entre les problèmes fort et faible, qui consiste à démontrer la *régularité* de la solution du problème faible. La preuve de ce résultat (qui requiert une certaine régularité du domaine  $\Omega$ , et le cas échéant des coefficients de l'opérateur) est très technique et dépasse le cadre de ce cours. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [?].

### 17.2.3 Formulations variationnelles et énergie

Pour comprendre le terme *variationnel*, considérons par exemple le problème de Dirichlet ( $PV_D$ ) et introduisons la fonctionnelle suivante :

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Il s'agit en fait de l'énergie électrostatique contenue dans  $\Omega$ . Nous allons établir le

**Lemme 17.1**  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  est solution de  $(PV_D)$  si et seulement si  $\varphi$  minimise la fonctionnelle  $J$  sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  une solution de  $(PV_D)$ , alors pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  on a

$$\begin{aligned} J(\varphi + \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\varphi + \psi)|^2 dx - \int_{\Omega} f(\varphi + \psi) dx \\ &= J(\varphi) + \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dx - \int_{\Omega} f\psi dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est solution de  $(PV_D)$ , le terme entre accolades est nul, d'où

$$J(\varphi + \psi) \geq J(\varphi),$$

pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ .

▷ Réciproquement, si  $\varphi$  minimise la fonctionnelle  $J$ , alors  $J(\varphi + t\psi) - J(\varphi) \geq 0$  pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ . L'identité précédente montre alors que

$$t \left\{ \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dx - \int_{\Omega} f\psi dx \right\} + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx = 0,$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En divisant par  $t$  puis en faisant tendre  $t$  vers 0, on vérifie que  $\varphi$  est bien solution de  $(PV_D)$ . □

En fait, imposer à  $\varphi$  d'être solution du problème variationnel revient à imposer à la fonctionnelle  $J$  d'être *stationnaire* au voisinage de  $\varphi$ . En effet, pour tout  $\psi$  et pour  $t$  proche de 0, on a au premier ordre

$$J(\varphi + t\psi) - J(\varphi) \simeq t \left\{ \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dx - \int_{\Omega} f\psi dx \right\}.$$

Autrement dit, la formulation *variationnelle* est obtenue en calculant les petites *variations* de l'énergie  $J$ .

## 17.3 Le théorème de Lax-Milgram

Nous avons vu dans le paragraphe précédent deux exemples de problèmes variationnels issus de la physique. Plus généralement, nous appellerons *formulation variationnelle* tout problème du type suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \text{ pour tout } v \in V \end{cases} \quad (17.2)$$

où



(i)  $V$  est un espace de Hilbert (réel ou complexe) dont le produit scalaire est noté  $(u, v)_V$  et la norme associée  $\|u\|_V$ .

(ii)  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) continue sur  $V \times V$ , ce qui signifie qu'il existe une constante  $C_a$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V,$$

pour tout couple  $(u, v) \in V \times V$ .

(iii)  $\ell(v)$  est une forme linéaire (ou antilinéaire) continue sur  $V$ , ce qui signifie qu'il existe une constante  $C_\ell$  telle que

$$|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V,$$

pour tout  $v \in V$ .

Le théorème de Lax-Milgram, que nous allons maintenant énoncer et démontrer, permet d'établir le caractère bien posé d'un problème de ce type lorsque la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire)  $a(u, v)$  vérifie une propriété supplémentaire : il s'agit de la coercivité que nous définissons ci-dessous.

**Définition 17.2** *La forme bilinéaire (ou sesquilinéaire)  $a(u, v)$  est dite coercive sur  $V$  s'il existe une constante strictement positive  $\alpha$  telle que*

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

**Remarque 17.3** *Si  $V$  est un espace de Hilbert réel ou si  $a(u, v)$  est une forme hermitienne, il suffit pour établir la coercivité de montrer l'existence d'une constante strictement positive  $\alpha$  telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

*La coercivité est souvent définie de cette manière dans la littérature.*

#### **Théorème 17.4 (Théorème de Lax-Milgram)**

*Si la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire)  $a(u, v)$  est coercive sur  $V$ , alors le problème (17.2) admet une solution unique  $u \in V$  et il existe une constante  $C$  indépendante de la forme  $\ell$  telle que :*

$$\|u\|_V \leq C \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \quad (17.3)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord que l'estimation de stabilité (17.3) est immédiate. En effet, si  $u$  est la solution du problème, on a en vertu de la coercivité de la forme  $a(u, v)$  et de la continuité de la forme  $\ell(v)$  :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq |a(u, u)| = |\ell(u)| \leq \|\ell\|_{V'} \|u\|_V.$$

On obtient donc (17.3) avec  $C = 1/\alpha$ .

▷ La démonstration du caractère bien posé est plus délicate. Elle s'appuie essentiellement sur le théorème de Riesz vu au chapitre précédent. En effet, on remarque que d'après ce théorème :

(i) Comme  $\ell$  est une forme linéaire continue sur  $V$ , il existe  $f \in V$  tel que

$$\ell(v) = (f, v)_V \text{ pour tout } v \in V.$$

(ii) Comme pour tout  $u \in V$ , l'application  $v \rightarrow a(u, v)$  est une forme linéaire (ou antilinéaire) continue sur  $V$ , il existe un unique  $w_u \in V$  tel que

$$a(u, v) = (w_u, v)_V \text{ pour tout } v \in V.$$

L'application  $A$  qui à  $u$  associe  $w_u$  est une application linéaire continue de  $V$  dans  $V$ . En effet

$$\|Au\|_V^2 = (w_u, w_u)_V = a(u, w_u) \leq C_a \|u\|_V \|w_u\|_V,$$

d'où :

$$\|Au\|_V \leq C_a \|u\|_V \text{ pour tout } u \in V.$$

Le problème (17.2) s'écrit maintenant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (Au, v)_V = (f, v)_V \text{ pour tout } v \in V, \end{cases}$$

soit encore

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } Au = f.$$

Autrement dit, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que l'opérateur  $A$  est bijectif. Comme  $V$  est a priori un espace de dimension infinie, nous allons montrer successivement l'injectivité et la surjectivité de  $A$ .

▷  **$A$  est injectif :**

En effet, la coercivité de la forme  $a(u, v)$  permet de montrer que, pour tout  $u \in V$  :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = (Au, u)_V \leq \|Au\|_V \|u\|_V,$$

d'où

$$\|Au\|_V \geq \alpha \|u\|_V \text{ pour tout } u \in V. \quad (17.4)$$

▷  **$A$  est surjectif :**

Pour montrer la surjectivité de  $A$ , considérons l'image de  $A$ , notée  $R(A)$ . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé de  $V$  : en effet si  $Au_n$  est une suite de Cauchy dans  $V$ , alors d'après (17.4),  $u_n$  est également de Cauchy dans  $V$ . Par conséquent,  $u_n$  converge vers un élément  $u$  de  $V$  et, par continuité de  $A$ ,  $Au_n$  converge vers  $Au$ . Autrement dit, la limite de la suite  $Au_n$  appartient bien à  $R(A)$ .

De plus,  $R(A)$  est dense dans  $V$ . En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un élément  $w \in V$  non nul qui soit orthogonal à  $R(A)$ , on aurait alors  $(Aw, w)_V = 0$ , ce qui implique, d'après (17.4), la nullité de  $w$  et aboutit à une contradiction. Il en résulte que  $R(A) = V$ , soit la surjectivité de l'opérateur  $A$ .

□

## 17.4 Application aux problèmes aux limites elliptiques

Nous sommes maintenant en mesure, grâce au théorème de Lax-Milgram, de montrer que les différents problèmes introduits aux paragraphes 17.1 et 17.2 sont bien posés.

Dans tout ce qui suit,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 1$ ) de frontière lipschitzienne.

### 17.4.1 Le problème de Dirichlet

Considérons tout d'abord le problème de Dirichlet homogène ( $PV_D$ ), dont l'inconnue  $\varphi$  est une fonction à valeurs réelles et la donnée  $f$  appartient à  $L^2(\Omega)$ . Il s'agit bien d'une formulation variationnelle de type (17.2) où

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad \text{et} \quad \ell(\psi) = \int_{\Omega} f \psi \, dx.$$

Avant tout, il nous faut vérifier que

(i)  $V$  est un espace de Hilbert : nous savons en effet que  $H_0^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  (voir le corollaire 16.34). C'est donc un espace de Hilbert pour la norme induite

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|\psi|^2 + |\nabla \psi|^2) \, dx \right)^{1/2}.$$

(ii)  $a(\varphi, \psi)$  est une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$  : en effet, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout couple  $(\varphi, \psi) \in V \times V$ .

(iii)  $\ell(\psi)$  est une forme linéaire continue sur  $V$  : en effet, en appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie que

$$|\ell(\psi)| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq C_{\ell} \|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout  $\psi \in V$ , où l'on a posé

$$C_{\ell} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram et affirmer que le problème ( $PV_D$ ) est bien posé, il suffit maintenant d'établir la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ . Cela

n'a rien d'évident : en effet, il s'agit de prouver l'existence d'une constante strictement positive  $\alpha$  telle que

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \geq \alpha \int_{\Omega} (|\psi|^2 + |\nabla \psi|^2) dx,$$

pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ .

Remarquons tout d'abord que ce résultat est faux pour un domaine  $\Omega$  quelconque. Ainsi par exemple, supposons  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et soit  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors la suite de fonctions

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n^{N/2}} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

contredit l'inégalité ci-dessus ; en effet

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi_n|^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\psi_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\psi|^2 dx.$$

En revanche, la coercivité de  $a$  est vérifiée dès que  $\Omega$  est borné dans au moins une direction de l'espace. Cela résulte alors de l'inégalité de Poincaré qui fait l'objet du lemme suivant :

**Lemme 17.5 (Inégalité de Poincaré)**

*Supposons qu'il existe  $R$  tel que*

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N ; -R < x_1 < R\}.$$

*Alors il existe une constante  $C$  telle que*

$$\int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (17.5)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors, à condition de prolonger  $\psi$  par 0 à l'extérieur de  $\Omega$ , on peut considérer que  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  et l'on a

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) dt,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre alors que

$$|\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2 \leq 2R \int_{-\infty}^R \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right|^2 dt.$$

En intégrant cette inégalité sur  $\Omega$ , on obtient finalement

$$\int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq 4R^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 dx.$$

A plus forte raison, on a donc établi l'inégalité (17.5) avec  $C = 4R^2$  pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On peut alors conclure en remarquant que, par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , l'inégalité reste vraie pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ .

□

En conclusion, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

**Théorème 17.6** *Supposons qu'il existe  $R$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha \neq 0$ , tels que*

$$\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N; -R < \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i < R \right\},$$

*alors, pour toute fonction  $f \in L^2(\Omega)$ , il existe une et une seule fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $-\Delta\varphi = f$  dans  $\Omega$  (au sens des distributions). De plus, il existe une constante  $C$  ne dépendant que du domaine  $\Omega$  telle que*

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, le domaine  $\Omega$  est borné dans la direction  $\alpha$ . L'inégalité de Poincaré est donc vérifiée, et la forme bilinéaire

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx$$

est donc coercive sur  $H_0^1(\Omega)$  ; en effet, pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(\psi, \psi) = \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 \, dx \geq \frac{1}{8R^2} \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 \, dx.$$

Les autres propriétés ayant déjà été vérifiées, on peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle ( $PV_D$ ), ce qui prouve l'existence d'une unique solution  $\varphi$  au problème. En prenant  $\psi = \varphi$ , on vérifie aisément la dernière estimation. □

**Remarque 17.7** *En fait, on peut montrer que, si  $\Omega$  est un domaine borné, l'inégalité de Poincaré reste vraie pour tout sous-espace  $V$  de  $H^1(\Omega)$  défini comme suit :*

$$V = \{\psi \in H^1(\Omega) ; \psi = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

où  $\Gamma$  désigne une partie de  $\partial\Omega$  de mesure non nulle. Plus précisément, on démontre (par l'absurde, en utilisant la compacité de l'injection de  $H^1$  dans  $L^2$ ) l'inégalité suivante, dite de Poincaré-Friedrich : il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 \, dx + \left( \int_{\Gamma} \psi(x) \, dx \right)^2 \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Cela permet de montrer que le problème suivant est bien posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } \varphi \text{ telle que} \\ -\Delta\varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{array} \right.$$

### 17.4.2 Le problème de Neumann

Considérons maintenant le problème de Neumann ( $PV_N$ ), dont l'inconnue  $\varphi$  est une fonction à valeurs complexes et dont les données  $f$  et  $g$  appartiennent respectivement à  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Gamma)$ . Il s'agit là encore d'une formulation variationnelle de type (17.2) où

$$V = H^1(\Omega), : a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \nu\varphi\bar{\psi}\} dx : \text{ et } : \ell(\psi) = \int_{\partial\Omega} g\bar{\psi} d\sigma + \int_{\Omega} f\bar{\psi} dx.$$

A nouveau, il nous faut vérifier que

(i)  $V$  est un espace de Hilbert : c'est immédiat.

(ii)  $a(\varphi, \psi)$  est une forme sesquilinéaire continue sur  $V \times V$  : en effet, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right)^{1/2} + |\nu| \left( \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \right)^{1/2},$$

d'où

$$|a(\varphi, \psi)| \leq (1 + |\nu|) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout couple  $(\varphi, \psi) \in V \times V$ .

(iii)  $\ell(\psi)$  est une forme linéaire continue sur  $V$  : en effet, en appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie que

$$|\ell(\psi)| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\partial\Omega} |g|^2 d\sigma \right)^{1/2} \left( \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

On rappelle alors le résultat de continuité de l'application trace (voir le théorème 16.30) qui garantit l'existence d'une constante  $C_\gamma$  telle que

$$\left( \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C_\gamma \|\psi\|_{H^1(\Omega)}.$$

On a donc finalement

$$|\ell(\psi)| \leq C_\ell \|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout  $\psi \in V$ , où l'on a posé  $C_\ell = \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_\gamma \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$ .

Pour conclure, en appliquant le théorème de Lax-Milgram nous allons maintenant établir la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ .

**Lemme 17.8** *Si  $\nu \notin \mathbb{R}^-$ , alors la forme bilinéaire*

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \nu\varphi\bar{\psi}\} dx$$

*est coercive sur  $H^1(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire le nombre complexe  $\nu$  sous la forme

$$\nu = \rho e^{i\theta} \text{ avec } -\pi < \theta < \pi.$$

On note  $\sqrt{\nu}$  la racine complexe de  $\nu$  suivante :

$$\sqrt{\nu} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2},$$

pour tout  $\psi \in H^1(\Omega)$ , on a alors

$$|a(\psi, \psi)| = \sqrt{\rho} \left| \frac{1}{\sqrt{\nu}} a(\psi, \psi) \right| \geq \sqrt{\rho} \Re \left( \frac{1}{\sqrt{\nu}} a(\psi, \psi) \right).$$

Or

$$\Re \left( \frac{1}{\sqrt{\nu}} a(\psi, \psi) \right) = \int_{\Omega} \Re \left( \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega} \Re(\sqrt{\nu}) |\psi|^2 dx,$$

et il est facile de voir que  $\Re(1/\sqrt{\nu})$  et  $\Re(\sqrt{\nu})$  sont deux nombres réels strictement positifs. On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$|a(\psi, \psi)| \geq \min(1, \rho) \cos(\theta/2) \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

pour tout  $\psi \in H^1(\Omega)$ .

□

On peut conclure en énonçant le

**Théorème 17.9** *Si  $\nu \notin \mathbb{R}^-$ , le problème variationnel  $(PV_N)$  admet, pour toutes fonctions  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ , une et une seule solution  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , et il existe une constante  $C$  (indépendante des données  $f$  et  $g$ ) telle que*

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

*Si de plus, la solution  $\varphi \in H^2(\Omega)$ , alors elle est solution du problème fort  $(P_N)$ .*

**Remarque 17.10** *Dans le cas où  $\nu$  est égal à 0, on peut montrer que le problème  $(PV_N)$  admet une solution, unique à une constante additive près, si et seulement si les données  $f$  et  $g$  satisfont à la relation de compatibilité suivante :*

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0.$$

*Plus généralement, lorsque  $\nu$  est un réel négatif, c'est l'alternative de Fredholm que nous étudierons au chapitre suivant qui permet de répondre à la question de l'existence et de l'unicité de la solution de  $(PV_N)$ .*

### 17.4.3 Le principe du maximum faible

Soit donc  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un ouvert borné de frontière  $\Gamma$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , et  $\varphi$  solution du problème de Dirichlet homogène, soit

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= f \text{ dans } \Omega \\ \varphi|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (17.6)$$

Dans le cas où  $f \neq 0$  on fait souvent référence à cette équation sous le vocable *d'équation de Poisson*. Nous en connaissons une formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \int_{\Omega} (\nabla\varphi | \nabla\psi) = \int_{\Omega} f\psi ;$$

nous allons utiliser la fonction d'essai particulière  $\psi = \varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$  pour découvrir quelle relation peut être établie entre le signe de la donnée  $f$  et celui de la solution  $\varphi$ . Mais auparavant il est nécessaire de montrer que  $\varphi^+ \in H_0^1(\Omega)$ , et de déterminer  $\nabla\varphi^+$ . A cet effet on utilisera une famille  $\beta_k$  d'approximations régulière de l'application  $\beta(x) = x^+$ , et on effectuera un passage à la limite relativement à  $k$ . Commençons par un lemme préliminaire qui précise l'effet d'une telle approximation, notée pour la circonstance  $\theta$ .

**Lemme 17.11** *Si  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\theta(0) = 0$ , alors  $\theta \circ \varphi \in H_0^1(\Omega) \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\partial_i(\theta \circ \varphi) = \theta'(\varphi)\partial_i\varphi$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . On aura tout d'abord  $\text{Supp } \theta \circ \varphi_n \subset \text{Supp } \varphi_n$ , et par conséquent  $\theta \circ \varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ .

▷ On aura alors

$$\|\theta \circ \varphi_n - \theta \circ \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui prouve la convergence de  $\theta \circ \varphi_n$  vers  $\theta \circ \varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ .

▷ En ce qui concerne les dérivées, nous aurons

$$\begin{aligned} \partial_i(\theta \circ \varphi_n) - \theta'(\varphi)\partial_i\varphi &= \theta'(\varphi_n)\partial_i\varphi_n - \theta'(\varphi)\partial_i\varphi \\ &= (\theta'(\varphi_n) - \theta'(\varphi))\partial_i\varphi + \theta'(\varphi_n)(\partial_i\varphi_n - \partial_i\varphi). \end{aligned}$$

Comme la suite  $(\theta'(\varphi_n) - \theta'(\varphi))\partial_i\varphi$  converge vers 0 presque partout et qu'elle est majorée en module par  $2\|\theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\partial_i\varphi|$ , fonction de carré intégrable, il en résulte d'après le théorème de convergence dominée qu'elle converge vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ . Il en est de même de  $\theta'(\varphi_n)(\partial_i\varphi_n - \partial_i\varphi)$  puisque

$$\|\theta'(\varphi_n)(\partial_i\varphi_n - \partial_i\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\partial_i(\varphi_n - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

▷ Nous avons donc montré que  $\theta \circ \varphi_n$  et  $\partial_i(\theta \circ \varphi_n)$  convergent dans  $L^2(\Omega)$ , il en résulte que ce sont des suites de Cauchy, et par conséquent que  $\theta \circ \varphi_n$  est de Cauchy dans  $H_0^1(\Omega)$ . C'est dire que  $\theta \circ \varphi_n \rightarrow \theta \circ \varphi$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et que  $\partial_i(\theta \circ \varphi) = \theta'(\varphi)\partial_i\varphi$ .

□



Notons maintenant  $\sigma(x)$  une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  qui vérifie

$$\text{Supp } \sigma \subset [1/2, +\infty[, \sigma'(x) = 1 \text{ pour } x \geq 1, \text{ et } \|\sigma'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Nous poserons  $\beta_k(x) = \sigma(kx)/k$  et nous aurons

$$\beta_k(x) - x^+ = \int_0^x (\sigma'(kt) - 1) dt = \int_0^{1/k} (\sigma'(kt) - 1) dt,$$

et par conséquent

$$\|\beta_k - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{k}.$$

La famille des  $\beta_k$  approche donc uniformément  $\beta$ .

**Lemme 17.12** *Si  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $\varphi^+ \in H_0^1(\Omega)$  et  $\partial_i(\varphi^+) = \mathbb{I}_A \partial_i \varphi$ , où  $\mathbb{I}_A$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $A = \{x \mid 0 < \varphi(x)\}$ .*

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, on a tout d'abord  $\beta_k \circ \varphi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\partial_i(\beta_k \circ \varphi) = \beta_k'(\varphi) \partial_i \varphi$ . Nous avons vu que  $\beta_k \circ \varphi \rightarrow \varphi^+$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , et par conséquent dans  $L^2(\Omega)$ , puisque  $\Omega$  est borné. Mais par ailleurs

$$\partial_i(\beta_k \circ \varphi) - \mathbb{I}_A \partial_i \varphi = (\beta_k'(\varphi) - \mathbb{I}_A) \partial_i \varphi,$$

qui tend vers 0 presque partout puisque  $\beta_k'(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $\beta_k'(x) = 1$  dès que  $k$  est supérieur à  $1/x$ . Comme  $\|\partial_i(\beta_k \circ \varphi) - \mathbb{I}_A \partial_i \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_i \varphi\|_{L^2(\Omega)}$ , il résulte du théorème de Lebesgue que  $\partial_i(\beta_k \circ \varphi) \rightarrow \mathbb{I}_A \partial_i \varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ . Finalement, selon le même raisonnement qu'au lemme précédent on en déduit que  $\beta_k \varphi$  converge vers  $\varphi^+$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et que  $\partial_i(\varphi^+) = \mathbb{I}_A \partial_i \varphi$ .

□

**Théorème 17.13 (Principe du maximum faible)** *Si  $f \leq 0$  presque partout, alors la solution  $\varphi$  du problème 17.6 vérifie  $\varphi \leq 0$  presque partout.*

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$(\nabla \varphi \mid \nabla \varphi^+) = (\nabla \varphi \mid \mathbb{I}_A \nabla \varphi) = (\mathbb{I}_A \nabla \varphi \mid \mathbb{I}_A \nabla \varphi) = \|\nabla \varphi^+\|^2,$$

et par conséquent

$$\int_{\Omega} \|\nabla \varphi^+\|^2 = \int_{\Omega} f \varphi^+ \leq 0,$$

ce qui implique  $\nabla \varphi^+ = 0$ , soit en fait  $\varphi^+ = 0$ , puisque  $\varphi^+ \in H_0^1(\Omega)$ .

□

L'équation de Poisson constitue également un modèle pour le déplacement vertical d'une membrane soumise à une densité  $f$  d'efforts; le résultat que nous venons de démontrer nous confirme ce que nous pressentions intuitivement : si le signe de ces efforts est constant, il en est de même du déplacement, qui se produit dans le sens dans lequel s'exercent les efforts.

**Remarque 17.14** *Un résultat similaire peut être obtenu pour le problème de Neumann, la seule différence réside dans le fait que  $(\|\nabla\varphi^+\| = 0) \implies (\varphi^+ = Cte)$  et qu'alors, soit  $\varphi^+ = 0$ , auquel cas  $\varphi \leq 0$  comme précédemment, soit  $\varphi = \varphi^+ = Cte$ , ce qui ne peut se produire que si  $f = 0$ .*



# Chapitre 18

## Théorie spectrale des opérateurs compacts

### 18.1 Opérateurs adjoints - Opérateurs compacts

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe et  $T$  un opérateur borné de  $H$  dans  $H$ . On note  $(u, v)$  le produit scalaire sur  $H$ ,  $\|u\|$  la norme associée et  $\|T\|$  la norme de  $T$  définie par

$$\|T\| = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}.$$

On introduit les définitions suivantes :

**Définition 18.1** On appelle noyau de  $T$  et on note  $N(T)$  le sous-espace vectoriel fermé de  $H$  suivant :

$$N(T) = \{u \in H \mid Tu = 0\}.$$

On appelle image de  $T$  et on note  $R(T)$  le sous-espace vectoriel de  $H$  suivant :

$$R(T) = \{Tu \mid u \in H\}.$$

On dit que  $T$  est de rang fini si  $\dim(R(T)) < +\infty$ .

Si  $N(T)$  est toujours un sous-espace fermé de  $H$ ,  $R(T)$  en revanche ne l'est pas en général.

Pour tout  $v \in H$ , l'application qui à  $u \in H$  associe le scalaire  $(Tu, v)$  est une forme linéaire continue. En effet, on a

$$|(Tu, v)| \leq \|T\| \|u\| \|v\|. \quad (18.1)$$

En utilisant le théorème de Riesz, on peut donc définir un opérateur  $T^*$  tel que

$$(Tu, v) = (u, T^*v) \quad \forall u, v \in H.$$

**Définition 18.2** On appelle opérateur adjoint de  $T$  l'opérateur  $T^*$  défini par l'identité (18.1). Si  $T^* = T$ , on dit que l'opérateur  $T$  est autoadjoint.

On a les propriétés suivantes :

**Lemme 18.3**

- (i)  $T^*$  est un opérateur borné et  $\|T\| = \|T^*\|$ .
- (ii)  $T^{**} = T$ .
- (iii) Si  $T$  est inversible,  $T^*$  l'est également et  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ .
- (iv) Pour tout nombre complexe  $\lambda$ ,  $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord que pour tout  $v \in H$ , on a

$$\|T^*v\|^2 = (T^*v, T^*v) = (TT^*v, v) \leq \|T\| \|T^*v\| \|v\|,$$

donc  $T^*$  est borné et  $\|T^*\| \leq \|T\|$ . On peut alors définir l'opérateur  $T^{**}$  adjoint de  $T^*$ , et on vérifie immédiatement qu'il est nécessairement égal à  $T$ . De plus, comme  $\|T^{**}\| = \|T\| \leq \|T^*\|$ , on a finalement  $\|T^*\| = \|T\|$ .

▷ Supposons maintenant que  $T$  soit inversible, alors pour tous  $u, v \in H$ , on a

$$(u, v) = (TT^{-1}u, v) = (u, (T^{-1})^*(T^*)v) ;$$

il en résulte que

$$\forall v \in H \quad v = (T^{-1})^*(T^*)v.$$

Cela prouve que  $T^*$  est inversible et que son inverse n'est autre que l'adjoint de  $T^{-1}$ .

La dernière propriété du lemme est évidente. □

Enfin, on peut comme dans le cas d'une matrice, examiner les relations qui lient les noyaux et images d'un opérateur et de son adjoint :

**Lemme 18.4** On a les deux égalités suivantes :

(i)

$$N(T) = R(T^*)^\perp$$

(ii)

$$N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$$

DÉMONSTRATION. La première égalité s'obtient facilement. En effet :

$$\begin{aligned} u \in N(T) &\iff Tu = 0 \iff (Tu, v) = 0 \quad \forall v \in H \\ &\iff (u, T^*v) = 0 \quad \forall v \in H \iff u \in R(T^*)^\perp \end{aligned}$$

De la première égalité, on déduit alors que

$$N(T)^\perp = \left( R(T^*)^\perp \right)^\perp,$$

et il suffit pour conclure de démontrer le lemme suivant : □

**Lemme 18.5** Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $H$ , alors

$$(E^\perp)^\perp = \overline{E}.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que  $E \subset (E^\perp)^\perp$  d'où (comme de dernier espace est nécessairement fermé)

$$\overline{E} \subset (E^\perp)^\perp ;$$

il faut donc démontrer l'inclusion inverse. Soit donc  $u \in (E^\perp)^\perp$  et  $Pu$  sa projection orthogonale sur  $\overline{E}$ . Montrons que  $Pu = u$ . On a

$$\|u - Pu\|^2 = (u, u - Pu) = 0,$$

d'où le résultat. □

Parmi les opérateurs bornés, une classe d'opérateurs jouit de propriétés particulièrement intéressantes : il s'agit des opérateurs compacts.

**Définition 18.6** Un opérateur borné  $T$  est dit compact si l'une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) L'adhérence de l'image par  $T$  de la boule unité de  $H$  est un ensemble compact.
- (ii) De toute suite  $(u_n)$  bornée dans  $H$ , on peut extraire une sous-suite  $(u_{n'})$  telle que  $Tu_{n'}$  converge dans  $H$ .

### Exemples :

- (i) Si l'espace  $H$  est de dimension finie, tous les opérateurs linéaires sont compacts.
- (ii) Tout opérateur de rang fini est compact.
- (iii) Soit  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème de Lax-Milgram montre que l'on peut définir un opérateur linéaire continu  $T$  sur  $L^2(\Omega)$  qui à  $f$  associe l'unique solution  $u$  du problème de Dirichlet :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

L'opérateur  $T$  est compact : en effet, on sait qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, si  $(f_n)$  est une suite bornée dans  $L^2(\Omega)$ , alors  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ . D'après le théorème 16.35, on peut donc extraire de la suite  $(u_n)$  une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$ .

Remarquons que cet opérateur  $T$  est autoadjoint, en effet, pour  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a (en notant  $u = Tf$  et  $v = Tg$ )

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} ug \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}.$$

## 18.2 Alternative de Fredholm

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat fondamental que constitue l'alternative de Fredholm. Nous verrons qu'il permettra de démontrer le caractère bien posé de certains problèmes variationnels, dans des situations où le Théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas.

**Théorème 18.7** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur compact de  $H$  dans lui-même. Alors on a les trois propriétés suivantes :*

- (i)  $\dim N(I - T) < +\infty$ .
- (ii)  $R(I - T)$  est fermé et donc  $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ .
- (iii)  $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$ .

De ce théorème, on déduit immédiatement les corollaires suivants :

**Corollaire 18.8** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur compact de  $H$  dans lui-même. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $I - T$  est un isomorphisme,
- (ii)  $I - T$  est surjectif,
- (iii)  $I - T$  est injectif.

**Corollaire 18.9** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur compact de  $H$  dans lui-même. Alors on a l'alternative suivante :*

- (i) *Soit  $I - T$  est injectif et c'est alors un isomorphisme : dans ce cas, l'équation  $u - Tu = f$  admet une unique solution  $u \in H$  pour tout  $f \in H$ .*
- (ii) *Soit  $I - T$  n'est pas injectif : dans ce cas, l'équation  $u - Tu = f$  admet des solutions si et seulement si  $(f, w_j) = 0$  pour  $j = 1, \dots, L$ , où  $L = \dim N(I - T^*)$  et  $(w_j)_j = 1, \dots, L$  constitue une base de  $N(I - T^*)$ . De plus les solutions constituent un espace affine de dimension  $L$ .*

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

▷ Montrons tout d'abord que  $\dim N(I - T) < +\infty$ . Si ce n'était pas le cas, il existerait une famille orthonormale  $(u_n)$  telle que  $Tu_n = u_n$ . La suite  $(u_n)$  étant normée, on peut en extraire une sous-suite  $(u_{n'})$  telle que  $Tu_{n'}$  converge vers  $u$  dans  $H$ . Comme  $Tu_n = u_n$ , il en résulte que  $(u_{n'})$  converge également vers  $u$  dans  $H$ .

De  $\|u_{n'}\| = 1$ , on déduit alors que  $\|u\| = 1$ , et de  $(u_{n'}, u_{m'}) = 0$ , on déduit  $(u, u_{n'}) = 0$ , puis  $\|u\| = 0$ . Il y a donc une contradiction.

▷ Montrons maintenant que  $R(I - T)$  est fermé. Supposons donc que  $v_n = u_n - Tu_n$  converge, soit vers  $v$ , nous devons montrer que  $v \in R(I - T)$ . Si  $P$  est la projection orthogonale sur  $N(I - T)$ , et  $w_n = Pu_n$ , on aura  $v_n = u_n - w_n - T(u_n - w_n)$ .

▷ Montrons que la suite  $\sigma_n = u_n - w_n$  est bornée. Si tel n'est pas le cas, il existe une sous-suite  $u_{n'}$  telle que  $\|u_{n'} - w_{n'}\| \rightarrow \infty$ . Considérons la suite  $s_{n'} = \sigma_{n'} / \|\sigma_{n'}\|$ , d'une part elle vérifie

$$s_{n'} - Ts_{n'} = (\sigma_{n'} - T\sigma_{n'}) / \|\sigma_{n'}\| = v_{n'} / \|u_{n'} - w_{n'}\|,$$

d'où  $s_{n'} - Ts_{n'} \rightarrow 0$ , puisque  $v_{n'}$  converge. D'autre part elle est bornée, et on peut donc en extraire une sous-suite  $s_{n''}$  telle que  $Ts_{n''}$  converge. Il en résulte que  $s_{n''} = s_{n''} - Ts_{n''} + Ts_{n''}$  converge, soit vers  $s = Ts$  ; c'est dire que  $s \in N(I - T)$ . Mais  $s_{n'} = u_n - Pu_n \in N(I - T)^\perp$ , et par conséquent également  $s$  ; il en résulte que  $s = 0$ , ce qui constitue une contradiction avec l'égalité  $\|s\| = \|s_{n'}\| = 1$ .

▷ Par compacité de  $T$ , on pourra alors extraire de  $\sigma_n$  une sous-suite  $\sigma_{n'}$  telle que  $T\sigma_{n'}$  converge, soit vers  $\rho$  ; on aura  $\sigma_{n'} = v_{n'} + T\sigma_{n'} \rightarrow v + \rho$ , et par conséquent  $\rho = Tv + T\rho$ , d'où

$$v = v + \rho - \rho = v + \rho - T(v + \rho) \in R(I - T).$$

C'est dire que  $R(I - T)$  est fermé, l'égalité  $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$  découle alors du lemme 18.4.

▷ Nous savons que

$$H = R(I - T) \overset{\perp}{\oplus} N(I - T^*) = R(I - T^*) \overset{\perp}{\oplus} N(I - T).$$

Notons  $P$  la projection orthogonale sur  $N(I - T)$ , supposons que

$$d = \dim N(I - T) < \dim N(I - T^*) = d^*$$

et notons  $\Lambda$  une application linéaire injective et non surjective  $N(I - T) \rightarrow N(I - T^*)$ . Etudions alors l'application  $S = T + \Lambda \circ P$ . Nous aurons tout d'abord  $N(I - S) = \{0\}$ . En effet, si  $u = Su$ , alors

$$(I - T)u = \Lambda Pu \in R(I - T) \cap N(I - T^*) = \{0\} ;$$

on aura donc d'une part  $u \in N(I - T)$ , d'où  $Pu = u$ , et d'autre part, comme  $\Lambda$  est injective, on aura  $0 = \Lambda Pu = \Lambda u$ .

▷ D'après l'item précédent, il en résulte que  $R(I - S) = H$ . Choisissons alors  $f \neq 0 \in N(I - T^*) \setminus R(\Lambda)$ , et supposons que  $u$  vérifie  $(I - S)u = f$ , nous aurons

$$u - Tu = f - \Lambda Pu \in R(I - T) \cap N(I - T^*) = \{0\},$$

et par conséquent  $\Lambda Pu = f$ , ce qui constitue une contradiction. Il en résulte que  $d \geq d^*$ , et comme on peut démontrer de même que  $d^* \geq d$ , on en déduit que  $d = d^*$ .

**Exemple :**

□



Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $\omega > 0$ . Supposons que l'on cherche à résoudre, pour une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  donnée, le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (18.2)$$

Résoudre ce problème équivaut à résoudre l'équation

$$u = T(\omega^2 u - f),$$

où  $T$  est l'opérateur (introduit dans le paragraphe précédent) compact de  $L^2(\Omega)$  qui à  $f$  associe l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de l'équation  $-\Delta u = f$ .

Autrement dit, on cherche à inverser l'opérateur  $I - \omega^2 T$ . D'après ce que l'on vient de voir, on a l'alternative suivante :

(i) Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \omega^2 u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (18.3)$$

admet des solutions non nulles dans  $H_0^1(\Omega)$ , formant un espace  $V$  de dimension finie. Dans ce cas, le problème considéré est mal posé. Il n'existe des solutions que si  $(f, v)_{L^2(\Omega)} = 0$  pour tout  $v \in V$ .

(ii) Soit le problème (18.3) n'admet pas de solution non nulle ; dans ce cas, le problème considéré est bien posé pour tout second membre  $f \in L^2(\Omega)$ .

### 18.3 Diagonalisation des opérateurs autoadjoints

Dans ce paragraphe, on suppose que  $T$  désigne un opérateur autoadjoint compact de  $H$ .

**Définition 18.10** On appelle spectre de l'opérateur  $T$  et note  $\sigma(T)$  l'ensemble des nombres complexes  $\lambda$  tels que  $T - \lambda I$  n'est pas un isomorphisme de  $H$ .

On admet tout d'abord le résultat suivant (valable même si  $T$  n'est pas autoadjoint) :

**Lemme 18.11** Si  $\dim H = +\infty$ , alors

$$0 \in \sigma(T).$$

Ce résultat se démontre aisément à partir du théorème de Banach en remarquant que, si  $T$  était inversible,  $T^{-1}$  serait un opérateur continu de  $H$  et  $I = T^{-1}T$  serait donc compact, ce qui entraînerait (par un théorème dû à Riesz) que  $\dim H < +\infty$ .

Attention ! En dimension infinie, le spectre d'un opérateur ne contient pas que des valeurs propres. Il contient également toutes les valeurs  $\lambda$  telles que  $T - \lambda I$  est injectif mais non surjectif. En particulier, 0 appartient toujours au spectre de  $T$  mais n'est pas nécessairement une valeur propre de  $T$ . C'est le cas de l'opérateur  $T$  de  $L^2(\Omega)$  qui à  $f$  associe l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de l'équation  $-\Delta u = f$ .

On vérifie aisément les deux propriétés suivantes :

**Lemme 18.12** Soit  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors

(i)  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $|\lambda| \leq \|T\|$ .

(ii) Si  $\lambda \neq 0$ , c'est une valeur propre de  $T$  dont le sous-espace propre est de dimension finie.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , alors pour tout  $u \in H$ , on a

$$|((T - \lambda I)u, u)| \geq |\Im(\lambda)| \|u\|^2,$$

et par conséquent  $T - \lambda I$  est injectif. D'après l'alternative de Fredholm,  $T - \lambda I$  est donc également surjectif et  $\lambda \notin \sigma(T)$ .

▷ Si  $|\lambda| > \|T\|$ , alors

$$T - \lambda I = -\lambda(I - B) \text{ avec } B = \frac{1}{\lambda}T$$

est inversible car  $\|B\| < 1$ .

▷ La fin du lemme est une conséquence directe du théorème 18.7.

□

**Théorème 18.13** Le spectre de l'opérateur  $T$  est soit réduit à 0, soit un ensemble fini contenant 0, soit constitué de 0 et d'une suite de valeurs propres (réelles et de dimension finie) tendant vers 0.

DÉMONSTRATION.

▷ Si ce n'était pas le cas, le spectre de  $T$  admettrait un point d'accumulation  $\alpha \neq 0$ . Soit donc  $\lambda_n$  une suite de  $\sigma(T)$  tendant vers  $\alpha$ , avec  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , pour  $m \neq n$ , et  $\lambda_n \neq 0$ . Pour chaque  $n$  on peut trouver  $u_n \in H$  non nul, tel que  $Tu_n = \lambda_n u_n$ .

▷ La suite  $u_n$  ainsi définie est orthonormale, en effet

$$(Tu_n, u_m) = \lambda_n(u_n, u_m) = (u_n, Tu_m) = \lambda_m(u_n, u_m),$$

donc  $(u_n, u_m) = 0$  si  $n \neq m$ . Par ailleurs, comme la suite  $u_n$  est bornée et que l'opérateur  $T$  est compact, il existe une suite extraite  $(u_{n'})$  telle que  $Tu_{n'}$  converge vers  $v$  dans  $H$ . En passant à la limite dans l'égalité  $Tu_n = \lambda_n u_n$ , on trouve alors que  $u_{n'}$  converge vers  $(1/\alpha)v$  dans  $H$ . Mais ceci est impossible car une suite orthonormale ne peut converger, comme on l'a déjà montré dans la preuve du théorème 18.7.

□

Nous allons maintenant montrer un résultat de complétude des vecteurs propres de  $T$ . Nous aurons pour cela recours aux formules suivantes qui permettent de caractériser les valeurs propres de plus grande valeur absolue :

**Lemme 18.14** *Posons*

$$\lambda_M = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \quad \text{et} \quad \lambda_m = \inf_{u \in H, u \neq 0} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2}.$$

Alors  $\lambda_M$  et  $\lambda_m$  appartiennent au spectre de  $T$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\lambda_M = 0$ , c'est un point du spectre. Supposons donc  $\lambda_M \neq 0$ .

▷ Pour  $u, v \in H$ , on définit la forme bilinéaire symétrique  $a$  suivante :

$$a(u, v) = (\lambda_M u - Tu, v)$$

qui vérifie

$$|a(u, v)| \leq 2\|T\|\|u\|\|v\|.$$

Par définition de  $\lambda_M$ , la forme bilinéaire  $a$  est positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc vérifiée et l'on a, pour tout  $u \in H$  :

$$\|\lambda_M u - Tu\|^2 = a(u, \lambda_M u - Tu) \leq a(u, u)^{1/2} a(\lambda_M u - Tu, \lambda_M u - Tu)^{1/2}$$

dont on déduit facilement l'estimation suivante :

$$\|\lambda_M u - Tu\| \leq \sqrt{2}\|T\|^{1/2} (\lambda_M u - Tu, u)^{1/2}.$$

▷ Par définition de  $\lambda_M$ , il existe une suite  $(u_n)$  de norme 1 telle que

$$(Tu_n, u_n) \rightarrow \lambda^+.$$

L'opérateur  $T$  étant compact, on peut extraire de la suite  $(u_n)$  une sous-suite  $(u_{n'})$  telle que  $Tu_{n'}$  converge vers  $w$  dans  $H$ . D'après l'estimation précédente, on a aussi

$$\|\lambda_M u_{n'} - Tu_{n'}\| \rightarrow 0,$$

donc la suite  $(u_{n'})$  converge vers  $u = \frac{1}{\lambda_M} w$ . Il en résulte finalement que  $\|u\| = 1$  et  $Tu = \lambda_M u$  : autrement dit,  $\lambda_M$  est une valeur propre de  $T$ .

▷ On raisonne de façon analogue pour  $\lambda_m$ .

□

On en déduit immédiatement le

**Corollaire 18.15** *Si  $\sigma(T) = \{0\}$  alors  $T = 0$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, on a alors  $(Tu, u) = 0$  pour tout  $u \in H$ . Or, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $H$  on a

$$2\Re(Tu, v) = (T(u+v), (u+v)) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0,$$

d'où en particulier  $\|Tu\|^2 = 0$  pour tout  $u$ .

□

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 18.16** *Le spectre de  $T$  est constitué de 0 et de deux suites (finies ou infinies) de valeurs propres non nulles respectivement positives et négatives notées  $\lambda_n^+$  et  $\lambda_n^-$ , que l'on suppose ordonnées de sorte que*

$$-\|T\| \leq \lambda_1^- \leq \dots \lambda_n^- \leq \dots < 0 < \dots \leq \lambda_n^+ \leq \dots \leq \lambda_1^+ \leq \|T\|,$$

*et comptées un nombre de fois égal à leur multiplicité.*

*Si les deux suites  $(u_n^\pm)$  de  $H$  vérifient*

$$Tu_n^\pm = \lambda_n^\pm \text{ et } (u_n^\pm, u_m^\pm) = \delta_{mn},$$

*alors, tout  $u \in H$  s'écrit*

$$u = v + \sum_{n \geq 1} (u, u_n^+) u_n^+ + \sum_{n \geq 1} (u, u_n^-) u_n^-$$

*où  $v$  est un élément de  $N(T)$  et les séries convergent dans  $H$ . De plus, l'identité suivante est vérifiée :*

$$Tu = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^+ (u, u_n^+) u_n^+ + \sum_{n \geq 1} \lambda_n^- (u, u_n^-) u_n^-.$$

Autrement dit, les vecteurs propres de  $T$  associées aux valeurs propres non nulles forment une *base Hilbertienne* de  $N(T)^\perp$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in H$ , remarquons tout d'abord que les séries  $\sum_{n \geq 1} (u, u_n^+) u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 1} (u, u_n^-) u_n^-$  convergent nécessairement dans  $H$ . On peut donc poser

$$v = u - \sum_{n \geq 1} (u, u_n^+) u_n^+ - \sum_{n \geq 1} (u, u_n^-) u_n^- ;$$

on doit montrer que  $v \in N(T)$ . A priori, on sait seulement que  $v \in E$  où

$$E = \{w \in H; (w, u_n^\pm) = 0, \forall n \geq 1\}.$$

On note tout d'abord que  $E$  est un sous-espace fermé de  $H$  ; c'est donc un espace de Hilbert pour la norme de  $H$ . De plus  $E$  est stable par  $T$  ; en effet, si  $w \in E$ , alors

$$(Tw, u_n^\pm) = (w, Tu_n^\pm) = \lambda_n^\pm (w, u_n^\pm) = 0.$$

On peut donc définir la restriction  $\tilde{T}$  de  $T$  à  $E$ . Il est clair que  $\tilde{T}$  est un opérateur autoadjoint compact. De plus,  $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$  ; en effet, si  $\tilde{T}$  admettait une valeur propre non nulle  $\alpha$ , il existerait un élément  $w$  non nul de  $H$  tel que  $Tw = \alpha w$ , or ceci est impossible car  $w$  est orthogonal à "tous" les vecteurs propres de  $T$ .

Donc  $\tilde{T} = 0$ , ce qui signifie que  $E \subset N(T)$ .

□

**Exemple :** Si  $H = L^2(]0, 1[)$ , on note  $T$  l'opérateur autoadjoint compact qui à  $f \in H$  associe l'unique solution  $u \in H_0^1(]0, 1[)$  de l'équation

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f.$$

L'opérateur  $T$  est positif, en effet  $\forall f \in H$ ,

$$(Tf, f)_{L^2} = \int_0^1 \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx.$$

D'après cette identité, il est également injectif. Par conséquent toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Un calcul simple montre plus précisément que le spectre de  $T$  est constitué de 0 et de la suite  $(\frac{1}{n^2\pi^2}, n \geq 1)$ . Les vecteurs propres associés sont les fonctions

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

D'après le théorème précédent, ces fonctions constituent une base Hilbertienne de  $H$  ; autrement dit, pour toute fonction  $f \in L^2(]0, 1[)$ , la série

$$\sum_{n \geq 1} (f, u_n)_{L^2} u_n$$

converge vers  $f$  dans  $L^2(]0, 1[)$ .