



HAL
open science

Sur l'estimation des densités d'un processus stationnaire a temps continu

M. Delecroix

► **To cite this version:**

M. Delecroix. Sur l'estimation des densités d'un processus stationnaire a temps continu. Annales de l'ISUP, 1980, XXV (1-2), pp.17-39. <hal-04081355>

HAL Id: hal-04081355

<https://hal.science/hal-04081355v1>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

SUR L'ESTIMATION DES DENSITES D'UN PROCESSUS
STATIONNAIRE A TEMPS CONTINU

par

M. Delecroix

Université des Sciences et Techniques de Lille

U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées

59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex

Summary :

Density estimation for a continuous parameter and stationary process. Considering such a process X_t , we obtain pointwise consistency (a.s. and L^2) when estimating the density of X_t , the one of (X_t, X_{t+h}) , and the conditional density of X_{t+h}/X_t , under additional mixing conditions. The class of estimates includes all the classical examples used in density estimation.

Introduction.

Depuis vingt ans environ, de nombreux travaux ont été consacrés à l'estimation non paramétrique d'une densité de probabilité, à partir d'une suite d'observations indépendantes. Sans vouloir prétendre à l'exhaustivité, on citera ici les articles récents de Bleuez et Bosq (1), Bertrand-Retali (2), P. Deheuvels (3), J. Geffroy (4), en renvoyant d'autre part à la synthèse bibliographique établie sur le sujet par Fryer (5).

Certains des résultats obtenus ont été généralisés dans le cas où les variables observées ne sont plus indépendantes par Bosq (6), Földes (7), Rosenblatt (8), Roussas (9), puis par Banon (10) et Nguyen (11).

Dans tous ces travaux, les variables observées forment un processus stationnaire au sens strict. Cette hypothèse est conservée dans ce qui suit, puisqu'elle assure l'existence d'une répétition d'observations sur de mêmes densités à estimer. La convergence des estimateurs utilisés est d'autre part



assurée soit par une hypothèse de " ψ -mélangeance" sur le processus observé ((6) et (7)), soit par une hypothèse markovienne assortie de conditions supplémentaires, comme la condition de Doeblin ((9) par exemple). En fait, les deux types d'hypothèse impliquent la non corrélation asymptotique du processus (" L^2 -mixing").

Dans ce travail, on n'imposera de conditions qu'au coefficient introduit par Rosenblatt (12), qui mesure la "mélangeance" du processus observé, mais se trouve être le plus faible de tous ceux qu'on utilise usuellement. En ce sens, on généralise tous les travaux sus-cités, les résultats obtenus concernant une très large classe de processus.

De même, la classe d'estimateurs utilisée regroupe les estimateurs définis à la fois par la méthode du "noyau", et celle des "fonctions orthogonales", et même pour certains résultats, les estimateurs splines.

Enfin, on supposera que le processus observé est à temps continu, problème moins étudié jusqu'ici. Les résultats obtenus se transcrivent aisément dans le cas où l'on dispose d'une suite de variables aléatoires observées.

Le travail qui suit consiste en l'obtention de conditions suffisantes de convergence ponctuelle en moyenne quadratique et presque sûre pour les estimateurs des densités marginales et de transition du processus observé.

I. Notations - Définitions des estimateurs.

Comme annoncé ci-dessus, on considère une fois pour toutes un processus X_t , $t \in [0, \infty[$, chaque X_t étant une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , tel que :

1) (stationnarité) $\forall h \geq 0, \forall t_1, \dots, t_k$, k réels positifs distincts, la loi du k -uplet $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ est la même que celle de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$

2) (mesurabilité) L'application $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est mesurable sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}) \otimes (\Omega, \mathcal{G})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

3) Il existe une mesure σ -finie, μ , sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que pour tout n de \mathbb{N}^* , la probabilité image de P par le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ soit dominée par $\mu^{\otimes n}$.

On appelle f et g_h ($h > 0$) deux versions strictement positives de $\frac{dP_{X_t}}{d\mu}$ et $\frac{dP(X_t, X_{t+h})}{d(\mu \otimes \mu)}$, respectivement, et g_h^a une version de la densité conditionnelle de X_{t+h} conditionnée par $X_t = a$, définie par :

$$g_h^a(x) = \frac{g_h(a, x)}{f(a)}.$$

Le problème est d'estimer ces trois densités à partir d'un échantillon de (X_t) observé sur $[0, T]$...

En appelant M_0^T et M_{T+h}^∞ les tribus respectivement engendrées par $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{X_t, t \geq T+h\}$ ($h \geq 0$), on pose :

$$(1) \quad \alpha(h) = \sup |P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)|,$$

le sup étant pris sur tous les événements A de M_0^T et B de M_{T+h}^∞ .

La classique "strong mixing condition" de Rosenblatt (12) s'écrit :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \alpha(h) = 0.$$

Nous aurons à imposer des conditions à la fonction α pour obtenir la convergence des estimateurs de f , g_h , g_h^a .

Introduisons trois familles $K_{(s, T)}^i$ $i = 0, 1, 2$, indicées dans $\Lambda = \{(s, T) | 0 \leq s \leq T\}$, de fonctions définies sur \mathbb{R}^2 , à valeurs réelles, bi-mesurables, et définissons les estimateurs \hat{f}_T , $(\hat{g}_h)_T$, $(\hat{g}_h^a)_T$ de f , g_h , g_h^a ,

aux points t et (t, t') ($t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$), par :

$$(2) : \quad (\hat{f}_T)(t) = (T^{-1}) \cdot \int_0^T K_{(s,T)}^0(X_s, t) ds$$

$$(3) : \quad (\hat{g}_h)_T(t, t') = (T^{-1}) \cdot \int_0^{T-h} K_{(s,T)}^1(X_s, t) K_{(s,T)}^2(X_{s+h}, t') ds$$

$$(4) : \quad (\hat{g}_h^a)_T(t) = [(\hat{g}_h)_T(a, t)] \cdot [(\hat{f}_T)(a)]^{-1} \cdot I_{\{(\hat{f}_T)(a) \neq 0\}}$$

Nous allons montrer que les estimateurs usuels de la densité s'écrivent sous la forme précédente, en fournissant des familles K^i qui vérifient les conditions fondamentales suivantes :

$H_1)$ $(\hat{f}_T)(t)$ et $(\hat{g}_h)_T(t, t')$ sont des estimateurs asymptotiquement sans biais de $f(t)$ et $g_h(t, t')$,

$H_2)$ Il existe six fonctions réelles à valeurs positives A_i , $i = 0, 1, 2$ et h_i , $i = 0, 1, 2$, telles que $\forall x, x \in \mathbb{R}$, $\forall t, t \in \mathbb{R}$, $\forall (s, T), (s, T) \in A$

$$|K_{(s,T)}^i(x, t)| \leq A_i(t) \cdot h_i(s, T),$$

les h_i étant des fonctions croissantes en s à T fixé, et en T , à s fixé.

$H_2)$ est une condition technique qui servira dans toutes nos démonstrations, $H_1)$ est la condition clé du problème : on consultera (13) pour constater qu'elle s'interprète très précisément en langage d'opérateurs intégraux, et le problème de déterminer toutes les familles K^i vérifiant $H_1)$ (pour un certain type de processus X_t donné a priori), et fournissant donc de "bons" estimateurs de la forme (2) (3) (4), reste ouvert.

Nous allons simplement reprendre les deux méthodes usuelles d'estimation de la densité, citer les familles K^i correspondantes et les classes de processus pour lesquels elles vérifient $H_1)$ et $H_2)$.

11. Familles K^i usuelles.

1) Méthode du noyau.

Nous reprendrons, en les adaptant au temps continu, les quatre estimateurs cités en (3), qui semblent les plus généraux qu'on ait actuellement définis par cette méthode ((5),(7),(8) sont séquentiels, (7) a été utilisé en (11)).

On se donne une fonction K mesurable en x et y , positive, bornée, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)dy = 1$, une fonction δ définie sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R}^{**} , décroissante, et telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$, enfin une application H de \mathbb{R}^{**} dans \mathbb{R}^+ , décroissante. On suppose de plus que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \delta(t)dt = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \delta(t) \cdot H[\delta(t)] \cdot dt = +\infty$$

(avec les hypothèses d'intégrabilité correspondantes). On pose alors :

$$(5) \quad K_{(s,T)}^0(x,t) = T \cdot \left(\int_0^T \delta(s)ds \right)^{-1} \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\delta(s)}\right]$$

$$\text{et} \quad K_{(s,T)}^1(x,t) = K_{(s,T)}^2(x,t) = \sqrt{T} \cdot \left(\int_0^T \delta(s)ds \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\sqrt{\delta(s)}}\right]$$

$$(6) \quad K_{(s,T)}^0(x,t) = K_{(s,T)}^1(x,t) = K_{(s,T)}^2(x,t) = [\delta(T)]^{-1} \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\delta(T)}\right]$$

$$(7) \quad K_{(s,T)}^0(x,t) = T \cdot \left(\int_0^T \delta(t) \cdot H[\delta(t)]dt \right)^{-1} \cdot H[\delta(s)] \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\delta(s)}\right]$$

$$\text{et} \quad K_{(s,T)}^1(x,t) = K_{(s,T)}^2(x,t) = \sqrt{T} \cdot \left(\int_0^T \delta(t) \cdot H[\delta(t)]dt \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (H[\delta(s)])^{\frac{1}{2}} \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\sqrt{\delta(s)}}\right]$$

$$(8) \quad K_{(s,T)}^0(s,t) = K_{(s,T)}^1(s,t) = K_{(s,T)}^2(s,t) = [\delta(s)]^{-1} \cdot K\left[t, \frac{x-t}{\delta(s)}\right]$$

Un calcul de routine montre alors que H_1 est vérifiée lorsque \hat{f}_T et $(\hat{g}_h)_T$ sont définies à l'aide des familles K^i citées en (4) (5) (6) (7) pour une

très large classe de processus X_t , ceux pour lesquels f et g_h sont bornées par exemple.

De même H_2) découle directement du fait que K est bornée. Ainsi en (4) $A_0(t) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} [K(x,y)]$ et $h_0(s,T) = T. \left(\int_0^T \delta(s) ds \right)^{-1} \dots$

2) Méthodes des fonctions orthogonales.

On appelle $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de $L^2(\mu)$ (supposé séparable afin de simplifier). Les $(e_i, e_j)_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ en forment une de $L^2(\mu \otimes \mu)$.

On se donne alors trois fonctions r_i , $i = 0, 1, 2$, définies sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , croissantes vers l'infini, et on pose :

$$(9) \quad K_{(s,T)}^i(x,t) = \frac{[r_i(s)]}{\sum_{j=0}^i e_j(x) e_j(t)} \quad i = 0, 1, 2$$

ou

$$(10) \quad K_{(s,T)}^i(x,t) = \frac{[r_i(T)]}{\sum_{j=0}^i e_j(x) e_j(t)} \quad i = 0, 1, 2$$

[] représente la partie entière. (9) fournit un estimateur séquentiel.

Supposons alors que f et g_h soient de carrés intégrables. Ils s'écrivent dans $L^2(\mu)$ et $L^2(\mu \otimes \mu)$: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i$, et $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} e_i e_j$. Sous des conditions usuelles qui portent sur les a_i et a_{ij} , notamment, on obtient la convergence de $\sum_{i=0}^n a_i e_i(t)$ vers $f(t)$ et celle de $\sum_{i,j=0}^{n,n'} a_{ij} e_i e_j(t,t')$ vers $g_h(t,t')$ ($n \rightarrow \infty$, $n' \rightarrow \infty$), (pour presque tous les t et (t,t') par exemple). Pour de tels t et (t,t') , H_1) est alors vérifié (calcul direct).

Les fonctions majorantes utilisées en H_2) peuvent de même se calculer cas par cas, pour toutes les bases orthonormales courantes de $L^2(\mathbb{R})$ (voir (1)), et de façon triviale si les e_i sont bornées uniformément.

Remarques sur les méthodes splines.

Choisissons une famille de subdivisions $(x_i^s)_{0 \leq i \leq N(s)}$ de $[0,1]$, telles que, $\forall s, s \in \mathbb{R}^+$:

- $0 = x_0^s < \dots < x_{N(s)}^s = 1$
- $\max_{1 \leq j \leq N(s)} (x_j^s - x_{j-1}^s) / \min_{1 \leq j \leq N(s)} (x_j^s - x_{j-1}^s) \leq C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}^{+*}$
- $\lim_{s \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq N(s)} (x_j^s - x_{j-1}^s) = 0$

Soit alors $x \in [0,1]$, appelons $S_{\psi_x}^s$ la spline cubique interpolant l'application ψ_x , où

$$\psi_x \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1_{[0,t]}(x) \end{cases}$$

sur les noeuds $(x_i^s)_{1 \leq i \leq N(s)}$, et vérifiant $(S_{\psi_x}^s)''(0) = (S_{\psi_x}^s)''(1) = 0$.

En posant $K_{(s,T)}^0(x,t) = \frac{d}{dt}[S_{\psi_x}^s(t)]$, on obtient une famille de fonctions qui vérifient $H_1)$ et $H_2)$ en ce qui concerne \hat{f}_T , pour certains processus X_t .

En effet, les résultats établis par Berlinet en (14) montrent que si la fonction de répartition F commune des X_t est élément de $H^2([0,1])$, $(\hat{f}_T)(t)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $f(t)$, et qu'on a,

d'autre part $\sup_{\substack{x \in [0,1] \\ t \in [0,1]}} |K_{(s,T)}^0(x,t)| \leq D \cdot \left(\min_{1 \leq j \leq N(s)} (x_j^s - x_{j-1}^s) \right)^{-1}$.

De plus l'estimateur ainsi construit est séquentiel. (Tout ceci suppose bien sûr que f soit à support dans $[0,1]$ mais peut être transcrit pour un intervalle $[a,b]$ quelconque).

III. Convergences en moyenne quadratique.

Pour établir celles-ci, nous utiliserons les 2 résultats suivants

Proposition 1. - (On reprend les notations de I - (1)). Deux variables aléatoires réelles f et g mesurables respectivement par rapport à M_0^T et M_{T+h}^∞ vérifient : $|\text{cov}(f,g)| \leq 4 \cdot \alpha(h) \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$ (cov représente la covariance).

Démonstration : voir (15)

Proposition 2. - Soit I_t , $t \in [0, T]$, un processus réel défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) tel que chaque I_t soit élément de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors :

$$\text{Var} \left[\int_0^T I_t dt \right] = \int_0^T \int_0^T \text{Cov}(I_t, I_{t'}) dt dt'$$

Démonstration : classique

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 1. - Sous les hypothèses H_1) et H_2 , la condition

$$(11) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \left(\int_0^T \alpha(u) du \right) \cdot \left(\int_0^T h_0^2(s, T) \cdot ds \right) \cdot T^{-2} \right\} = 0$$

est suffisante pour que $\hat{f}_T(t)$ converge en moyenne quadratique vers $f(t)$, lorsque $T \rightarrow \infty$, et de même la condition

$$(12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \left(\int_0^T \alpha(u) du \right) \cdot \left(\int_0^T h_1^2(u, T) \cdot h_2^2(u, T) du \right) \cdot T^{-2} \right\} = 0$$

est suffisante pour que $(\hat{g}_h)_T(t, t')$ converge en moyenne quadratique vers $g_h(t, t')$.

Démonstration :

a) Commençons par la convergence de f_T . H_1) étant vérifiée, il suffit de prouver que $\text{Var}[\hat{f}_T(t)] \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Une application directe des propositions (1) et (2) donne :

$$\text{Var}[(\hat{f}_T)(t)] \leq 4 \cdot T^{-2} \int_0^T \int_0^T \alpha(|s-s'|) \|K_{(s,T)}^0(X_s, t)\|_\infty \|K_{(s',T)}^0(X_{s'}, t)\|_\infty ds ds'$$

soit, grâce à H_2) :

$$\text{Var}[(\hat{f}_t)(t)] \leq 4 \cdot T^{-2} \cdot A_0^2(t) \cdot \int_0^T \int_0^T \alpha(|s-s'|) h_0(s, T) h_0(s', T) ds ds'$$

L'intégrale double s'écrit successivement :

$$2 \int_0^T h_0(s, T) \left\{ \int_0^s [h_0(s', T)] \cdot \alpha(s-s') ds' \right\} ds$$

par symétrie, puis

$$2 \int_0^T h_0(s, T) \left\{ \int_0^s h_0(s-u, T) \alpha(u) du \right\} ds$$

et

$$2 \int_0^T \alpha(u) \left\{ \int_u^T h_0(s-u, T) h_0(s, T) ds \right\} du.$$

Comme h_0 est positive et croissante (H_2), l'intégrale se majore finalement par

$$2 \left(\int_0^T \alpha(u) du \right) \left(\int_0^T h_0^2(s, T) ds \right)$$

et ceci achève la démonstration, en donnant :

$$(13) \quad \text{Var}[(\hat{f}_T)_T(t)] \leq 8 \cdot T^{-2} \cdot A_0^2(t) \cdot \left(\int_0^T \alpha(u) du \right) \left(\int_0^T h_0^2(s, T) ds \right)$$

b) Pour $(\hat{g}_h)_T$, la technique est identique. Désignons par V la variance, posons $I_s = K_{(s, T)}^1(X_s, t) \cdot K_{(s, T)}^2(X_{s+h}, t')$, $f(s) = h_1(s, T)h_2(s+h, T)$, et enfin $\beta = 4[A_1(t)A_2(t')]^2$.

Les propositions 2 et 3, le lemme de Scharwz, donnent une majoration de $T^2 \cdot V[(\hat{g}_h)_T(t, t')]$ par :

$$\begin{aligned} & \int_0^h ds \left\{ \int_0^{s+h} [V(I_s) \cdot V(I_{s'})]^{\frac{1}{2}} ds' + \int_{s+h}^{T-h} \alpha(s'-s-h) \|I_s\|_{\infty} \|I_{s'}\|_{\infty} ds' \right\} \\ & + \int_h^{T-2h} ds \left\{ \int_0^{s-h} \alpha(s-s'-h) \|I_s\|_{\infty} \|I_{s'}\|_{\infty} ds' + \int_{s-h}^{s+h} [V(I_s)V(I_{s'})]^{\frac{1}{2}} ds' + \right. \\ & \quad \left. + \int_{s+h}^{T-h} \alpha(s'-s-h) \|I_s\|_{\infty} \|I_{s'}\|_{\infty} ds' \right\} \\ & + \int_{T-2h}^{T-h} ds \left\{ \int_0^{s-h} \alpha(s-s'-h) \|I_s\|_{\infty} \|I_{s'}\|_{\infty} ds' + \int_{s-h}^{T-h} |V(I_s)V(I_{s'})|^{\frac{1}{2}} ds' \right\}. \end{aligned}$$

Grâce à H_2) cette majoration devient :

$$\begin{aligned}
 & \beta \cdot \int_0^h ds \left\{ \int_0^{s+h} f(s)f(s') ds' + \int_{s+h}^{T-h} \alpha(s'-s-h) f(s)f(s') ds' \right\} + \\
 & + \beta \int_h^{T-2h} ds \left\{ \int_0^{s-h} \alpha(s-s'-h) f(s)f(s') ds' + \int_{s-h}^{s+h} f(s)f(s') ds' + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \int_{s+h}^{T-h} \alpha(s'-s-h) f(s)f(s') ds' \right\} + \\
 & + \beta \int_{T-2h}^{T-h} ds \left\{ \int_0^{s-h} \alpha(s-s'-h) f(s)f(s') ds' + \int_{s-h}^{T-h} f(s)f(s') ds' \right\}
 \end{aligned}$$

Maintenant la croissance des h_i donne directement, de par la définition de $f(s)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^h ds \cdot f(s) \cdot \left\{ \int_0^{s+h} f(s') ds' \right\} & \leq \left(\int_h^{2h} h_1(u,T)h_2(u,T) du \right) \left(\int_{T-2h}^T h_1(u,T)h_2(u,T) du \right) \\
 \int_h^{T-2h} f(s) ds \left\{ \int_{s-h}^{s+h} f(s') ds' \right\} & \leq \left(\int_{2h}^{T-h} h_1(u,T)h_2(u,T) du \right) \left(\int_{T-2h}^T h_1(u,T)h_2(u,T) du \right) \\
 \int_{T-2h}^{T-h} ds f(s) \left\{ \int_{s-h}^{T-h} f(s') ds' \right\} & \leq \left(\int_{T-h}^T h_1(u,T)h_2(u,T) du \right) \left(\int_{T-2h}^T h_1(u,T)h_2(u,T) du \right)
 \end{aligned}$$

A fortiori la somme des 3 intégrales précédentes se majore par $\int_0^T h_1^2(u,T)h_2^2(u,T) du$.

Reste à majorer la somme des 4 intégrales doubles qui par symétrie se réduit à :

$$2 \int_h^{T-h} f(s) ds \cdot \int_0^{s-h} \alpha(s-s'-h) f(s') ds'$$

Un calcul identique à celui qu'on a mené pour \hat{f}_T ramène cette intégrale à

$$2 \int_0^{T-2h} \alpha(u) du \cdot \int_{u+h}^{T-h} f(s-h-u) f(s) ds$$

qui se majore à son tour par (croissance des h_1)

$$2 \left(\int_0^T \alpha(u) du \right) \cdot \left(\int_0^T h_1^2(s, T) h_2^2(s, T) ds \right).$$

En regroupant ce qui précède, il vient :

$$(14) \quad T^2 \cdot V[(\hat{g}_h)_T(t, t')] \leq \beta [1+2] \int_0^T \alpha(u) du \left[\int_0^T h_1^2(s, T) h_2^2(s, T) ds \right].$$

Cela achève la démonstration, puisque sous H_1) $(\hat{g}_h)_T$ est asymptotiquement sans biais...

Pour obtenir la convergence en moyenne quadratique de $(\hat{g}_h^a)_T$ nous avons malheureusement dû augmenter les conditions imposées aux familles K_i choisies, en supposant ici que $K_{(s, T)}^0$ est une famille de fonctions strictement positives et que $K^1 = K^0$. Dans la pratique, on obtient comme exemple immédiat d'utilisation les familles définies en (6) et (7). En fait, la condition imposée a pour but d'obtenir :

Proposition 3. - Sous H_2), si $K_{(s, T)}^0$ est une famille de fonctions positives, et si $K^1 = K^0$, il vient :

$$(15) \quad |(\hat{g}_h^a)_T(t)| = O[h_2(T, T)]$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que dans tous les cas :

$$\begin{aligned}
 |(\hat{g}_h^a)_T(t)| &= \left| \int_0^{T-h} K_{(s,T)}^1(X_s, a) K_{(s,T)}^2(X_{s+h}, t) ds \right| \cdot \left\{ \int_0^T K_{(s,T)}^0(X_s, t) ds \right\}^{-1} \\
 &\leq \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \sup_{x \in R} |K_{(s,T)}^2(x, t)| \right\} \cdot \left\{ \int_0^{T-h} |K_{(s,T)}^1(X_s, a)| ds \right\} \cdot \left\{ \int_0^T K_{(s,T)}^0(X_s, t) ds \right\}^{-1} \\
 &= 0 [h^2(T, T)], \text{ sous les hypothèses de la proposition.}
 \end{aligned}$$

Remarques.-

1) La démonstration qui précède montre que l'on peut affaiblir la condition $K^1 = K^0$, dès lors que l'on puisse obtenir une majoration comme (15). Il est clair que $0 \leq K_{(s,T)}^1 \leq K_{(s,T)}^0 \quad \forall (s, T) \in A$, suffit, par exemple, mais en pratique, il sera plus avantageux d'essayer de majorer directement par une constante ou une fonction faiblement croissante le rapport

$$\left\{ \int_0^{T-h} |K_{(s,T)}^1(X_s, a)| ds \right\} \cdot \left\{ \int_0^T K_{(s,T)}^0(X_s, a) ds \right\}^{-1}$$

ou globalement $|(\hat{g}_h^a)_T(t)|$, pour chaque choix de familles K^0, K^1, K^2 . Dès lors que cette majoration soit possible, le théorème qui suit sera valide en utilisant un résultat du type (15).

2) Sur les exemples qui relèvent de la proposition 3, et de façon générale de la méthode du noyau, le fait d'obtenir $K_{(s,T)}^0 > 0$ ne pose aucun problème. Cette hypothèse impliquant : $I_{\{(\hat{f}_T)(a) \neq 0\}} = 1, \forall T \in \mathbb{R}^+$, simplifie les calculs qui suivent. On peut se contenter (cf. remarque 1) de conditions particulières sur $I_{\{(\hat{f}_T)(a) \neq 0\}}$, et ici encore il est plus intéressant de revoir le problème pour chaque choix de K^0 : nous nous sommes contentés d'une hypothèse simple, afin d'alléger la démonstration. [La question a déjà été soulevée en (6) : "définition d'un estimateur strict", pour les fonctions orthogonales].

Théorème 2.- Sous les hypothèses H_1) et H_2), si $K_{(s,T)}^0$ est une fonction strictement positive pour tout (s, T) , si on choisit dans (3) $K^1 = K^0$, et si

$$(15) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \{T^{-2} \cdot \left(\int_0^T \alpha(u) du\right) \cdot \left(\int_0^T h_0^2(s, T) ds\right) \cdot (h_2^2(T, T))\} = 0$$

alors $(\hat{g}_h^a)_T(t)$ converge vers $(g_h^a)(t)$ en moyenne quadratique, lorsque $T \rightarrow \infty$.

Démonstration :

Il s'agit de calculer $A = E\{[(\hat{g}_h^a)_T(t) - (g_h^a)(t)]^2\}$.

Pour T assez grand les quantités $\bar{f}_T(a) = E[(\hat{f}_T)(a)]$ et $(\bar{g}_h)(a, t) = E[(\hat{g}_h)_T(a, t)]$ sont strictement positives puisque de limites $f(a)$ et $g_h(a, t)$ qui sont strictement positives. En utilisant la définition (4) on peut alors écrire l'identité :

$$A = E\{[(\hat{g}_h)_T(a, t) \cdot (\bar{f}_T(a))^{-1} - (\bar{f}_T(a))^{-1} \cdot [(\hat{g}_h^a)_T(t)] \cdot [\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)] - (g_h^a)(t)]^2\}$$

soit $A = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$, en développant, avec

$$B_1 = [(\bar{g}_h)(a, t) \cdot (\bar{f}_T(a))^{-1} - (g_h^a)(t)]^2$$

$$B_2 = [\bar{f}_T(a)]^{-2} \cdot \text{Var}[(\hat{g}_h)_T(a, t)]$$

$$B_3 = [\bar{f}_T(a)]^{-2} \cdot E\{[(\hat{g}_h^a)_T(t)]^2 \cdot [\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)]^2\}$$

$$B_4 = -2 \cdot [\bar{f}_T(a)]^{-2} E\{[(\hat{g}_h^a)_T(t)] \cdot [(\hat{g}_h)_T(a, t)] \cdot [\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)]\}$$

$$B_5 = 2[(g_h^a)(t)] \cdot [\bar{f}_T(a)]^{-1} \cdot E\{[(\hat{g}_h^a)_T(t)] \cdot [\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)]\}$$

La proposition 3 permet d'écrire :

$$|B_3| = O\{[h_2(T, T)]^2 \cdot \text{Var}(\hat{f}_T(a))\}$$

$$|B_5| = O\{[h_2(T, T)] \cdot [\text{Var}(\hat{f}_T(a))]^{\frac{1}{2}}\}$$

$$|B_4| = O\{[h_2(T, T)] \cdot (E\{[(\hat{g}_h)_T(a, t)]^2\} \cdot \text{Var}(\hat{f}_T(a)))^{\frac{1}{2}}\}$$

Supposons alors que $(\hat{g}_h)_T(a,t)$ et $\hat{f}_T(a)$ convergent en moyenne quadratique vers $(g_h)(a,t)$ et $f(a)$ (conditions du th. 1) et que, de même, $[h_2(T,T)]^2 \cdot \text{Var}(\hat{f}_T(a))$ tende vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$. Alors :

$$|B_2+B_3+B_4+B_5| = O\{(h_2(T,T)) \cdot [\text{Var}(\hat{f}_T(a))]^{\frac{1}{2}}\} = o(1)$$

Or les formules (13) et (14) montrent que la condition (15) est suffisante à toutes ces convergences, puisque (H_2) h_2 est croissante en s et T . Dès lors, sous cette condition on a exactement :

$$(16) \quad A = \{[\hat{g}_h^-(a,t)] \cdot [\hat{f}_T^-(a)]^{-1} - (g_h^a)(t)\}^2 + O\{h_2(T,T) \cdot T^{-1} \cdot (\int_0^T \alpha(u) du)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T h_0^2(s,T) ds)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Le premier des deux termes dépend du biais de $(\hat{g}_h)_T$ et (\hat{f}_T) et tend vers 0 (H_1) . Ceci achève la démonstration.

IV. Convergence presque sûre.

Nous aurons ici à travailler sur des processus qui présentent une condition de mélangeance précise comme le montre le :

Théorème 3.- Supposons $H1$ et $H2$ vérifiées, et de plus :

$\alpha(T) = O[e^{-T}]$, pour T assez grand. Alors, sous la condition :

$$(17) : \quad \forall \epsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\epsilon \cdot \sqrt{n} \cdot [h_0(n,n)]^{-1}\} < +\infty$$

$(\hat{f}_T)(t)$ converge p.s. vers $f(t)$ lorsque $T \rightarrow \infty$. De même sous la condition :

$$(18) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\epsilon \cdot \sqrt{n} \cdot [h_1(n,n) \cdot h_2(n,n)]^{-1}\} < +\infty,$$

$(\hat{g}_h)_T(t, t')$ converge p.s. vers $g_h(t, t')$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Corollaire. - Sous H1 et H2, si $\alpha(T) = O[e^{-T}]$ pour T assez grand et si (17) et (18) sont vérifiées, $(\hat{g}_h^a)_T(t)$ converge p.s. vers $(g_h^a)(t)$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Démonstration. : (inspirée de (16))

a) $(\hat{f}_T)(a)$ étant un estimateur asymptotiquement sans biais de $f(a)$, sous H1, il suffit de vérifier que $[(\hat{f}_T)(a) - \bar{f}_T(a)]$ tend p.s. vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$. On se donne à cette fin un réel ε , $\varepsilon > 0$, et on cherche à majorer :

$$C = P[(\hat{f}_T)(a) - \bar{f}_T(a) > \varepsilon] = P\left[\int_0^T X_s ds > \varepsilon\right], \text{ où on a posé :}$$

$$X_s = K_{(s, T)}^0(X_s, a) - E[K_{(s, T)}^0(X_s, a)].$$

La majoration classique : $P[I > \varepsilon] \leq e^{-t\varepsilon} E[e^{tI}]$, $t > 0$, permet d'écrire :

$$(19) \quad C \leq e^{-t\varepsilon} D, \text{ et on va majorer } D = E\left[\exp\left(t \int_0^T X_s ds\right)\right].$$

b) On introduit un réel $k = k(T)$, à notre disposition, et ℓ l'entier tel que $2\ell k \leq T < 2(\ell+1)k$. On pose alors

$$I_j = [2(j-1)k, (2j-1)k], \quad I'_j = [(2j-1)k, 2jk] \quad j = 1, \dots, \ell+1$$

$$I_j = \int_{I_j} X_s ds \quad Z_j = \int_{I'_j} X_s ds \quad j = 1, \dots, \ell$$

$$I_{\ell+1} = 0, \quad \int_{2\ell k}^T X_s ds, \quad \int_{I_{\ell+1}} X_s ds \text{ selon que } 2\ell k = T, 2\ell k < T \leq (2\ell+1)k,$$

ou $(2\ell+1)k > T$.

$$Z_{\ell+1} = 0, \text{ ou } \int_{(2\ell+1)k}^T X_s ds, \text{ selon que } (2\ell+1)k \leq T \text{ ou } (2\ell+1)k > T.$$

De cette sorte,

$$\int_0^T X_s ds = \sum_{i=1}^{\ell+1} I_i + \sum_{i=1}^{\ell+1} Z_i$$

c) La définition des X_s jointe à H2 donne :

$$|I_i| \leq 2A_0(a) \int_{I_i} h_0(s,T) ds \text{ et } |Z_i| \leq 2A_0(a) \int_{I_i'} h_0(s,T) ds, \quad i = 1, \dots, \ell$$

et h_0 étant positive croissante, tous les $|I_i|$ et $|Z_i|$, $i = 1, \dots, \ell$, se majoreront par : $2A_0(a) \int_{(2\ell+1)k}^{2(\ell+1)k} h_0(s,T) ds$, soit, a fortiori, par :

$$2A_0(a) \sqrt{k} \left[\int_{(2\ell+1)k}^{2(\ell+1)k} h_0^2(s,T) ds \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En appelant $(t^{-1}/2)$ cette dernière quantité, on peut écrire :

$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad 0 \leq 2t \|I_i\|_{\infty} \leq 1 \text{ et } 0 \leq 2t \|Z_i\|_{\infty} \leq 1$$

L'inégalité classique : $(0 \leq 2t \|I\|_{\infty} \leq 1) \Rightarrow \{E[\exp(2tI)]\} \leq \exp\{3t^2 E[I^2]\}$

donne finalement :

$$(20) \quad \text{si } t = [4 A_0(a)]^{-1} \cdot \{k \cdot \int_{(2\ell+1)k}^{2(\ell+1)k} h_0^2(s,T) ds\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{i=1}^{\ell} E[e^{2tI_i}] \leq \exp\{3t^2 \cdot \sum_{i=1}^{\ell} E(I_i^2)\}$$

et

$$\prod_{i=1}^{\ell} E[e^{2tZ_i}] \leq \exp\{3t^2 \cdot \sum_{i=1}^{\ell} E(Z_i^2)\}$$

$$d) \quad E[I_i^2] = E\left[\left(\int_{I_i} X_s ds\right)^2\right] = \text{Var}\left\{\int_{I_i} K_{(s,T)}^0(X_s, a) ds\right\}.$$

Un calcul identique à celui du théorème 1 (formule (13)), donne :

$$E(I_i^2) \leq 8 A_0^2(a) \cdot \left(\int_{I_i} \alpha(u) du\right) \cdot \left(\int_{I_i} h_0^2(s, T) ds\right)$$

et de même $E(Z_i^2) \leq 8 A_0^2(a) \cdot \left(\int_{I_i'} \alpha(u) du\right) \cdot \left(\int_{I_i'} h_0^2(s, T) ds\right)$, pour $i = 1, \dots, \ell$
 En substituant dans (20), on obtient une majoration commune de $\prod_{i=1}^{\ell} E[e^{2tI_i}]$ et $\prod_{i=1}^{\ell} E[e^{2tZ_i}]$ par :

$$(21) \quad \exp\left\{\frac{3}{2}\right\} \cdot \left(\int_0^T \alpha(u) du\right) \cdot k^{-1},$$

$$\begin{aligned} \text{puisque } \sum_{i=1}^{\ell} E(I_i^2) &\leq 8 A_0^2(a) \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_{I_i} \alpha(u) du\right) \cdot \left(\int_{I_i} h_0^2(s, T) ds\right) \right\} \\ &\leq 8 [A_0(a)]^2 \left(\int_0^T \alpha(u) du\right) \cdot \int_{I_{\ell}} h_0^2(s, T) ds \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_{I_{\ell}} h_0^2(s, T) \leq \int_{(2\ell+1)k}^{2(\ell+1)k} h_0^2(s, T) ds \dots \text{ (et de même pour les } Z_i \text{).}$$

e) On majore ensuite, par récurrence :

$$E = E_{\ell} = \left| E\left\{\exp\left[2t \cdot \left(\sum_{i=1}^{\ell} I_i\right)\right]\right\} - \prod_{i=1}^{\ell} E\left(\exp[2tI_i]\right) \right|$$

Il suffit de remarquer que $E_{\ell} = |A+B|$ avec :

$$A = E\left[\exp\left\{2t \cdot \sum_{i=1}^{\ell-1} I_i\right\} \cdot \exp\{2t \cdot I_{\ell}\}\right] - E\left[\exp\left\{2t \sum_{i=1}^{\ell-1} I_i\right\}\right] \cdot E\left[\exp 2tI_{\ell}\right]$$

$$B = E\left[\exp\left\{2t \cdot \sum_{i=1}^{\ell-1} I_i\right\}\right] \cdot E\left[\exp 2tI_{\ell}\right] - E\left[\exp\{2tI_{\ell}\}\right] \cdot \prod_{i=1}^{\ell-1} E\left[\exp\{2tI_i\}\right]$$

d'où, en majorant A grâce à la proposition (1) :

$$|E_{\ell}| \leq 4\alpha(k) \|\exp\{2tI_{\ell}\}\|_{\infty} \cdot \|\exp\{2t \sum_{i=1}^{\ell-1} I_i\}\|_{\infty} + \|E[\exp 2tI_{\ell}]\|_{\infty} \cdot |E_{\ell-1}|$$

On utilise la majoration de $|I_{\ell}|$ vue en b) pour écrire :

$$\|\exp\{2tI_i\}\|_{\infty} \leq \exp\{2t|I_i|\} \leq \exp\{4t \cdot A_0(a) \cdot \int_{I_i} h_0(s,T) ds\}, \quad i = 1, \dots, \ell$$

et en remarquant ici encore que $\int_{I_i} h_0(s,T) ds \leq \int_{I_{\ell}} h_0(s,T) ds$, il vient :

$$|E_{\ell}| \leq 4\alpha(k) \cdot \exp\{4t A_0(a) \cdot \ell \cdot \int_{I_{\ell}} h_0(s,T) ds\} + |E_{\ell-1}| \cdot E\{\exp 2t I_{\ell}\}$$

on itère le procédé avec :

$$|E_{\ell-1}| \leq 4\alpha(k) \exp\{4t A_0(a) \cdot \sum_{i=1}^{\ell-1} \int_{I_j} h_0(s,T) ds\} + E\{\exp[2tI_{\ell-1}]\} \cdot |E_{\ell-2}|$$

d'où

$$|E_{\ell}| \leq 2 \cdot [4\alpha(k)] \cdot \exp\{4t A_0(a) \cdot \ell \cdot \int_{I_{\ell}} h_0(s,T) ds\} + |E_{\ell-2}| \cdot E\{\exp(2tI_{\ell-1})\} \cdot E\{\exp(2tI_{\ell})\}$$

etc... jusque

$$|E| \leq 4(\ell-1) \cdot \alpha(k) \cdot \exp\{4t A_0(a) \cdot \ell \cdot \int_{I_{\ell}} h_0(s,T) ds\} \cdot$$

(On obtient bien sûr le même résultat pour les Z_i avec I'_i au lieu de I_i).

Enfin en reprenant la définition de t en c) on voit que la majoration peut s'écrire :

$$(22) \quad |E| \leq 4(\ell-1) \alpha(k) \exp(\ell)$$

f) En combinant (22) et (21), on obtient finalement une majoration commune de $|E\{\exp 2t(\sum_i^{\ell} Z_i)\}|$ et $|E\{\exp 2t(\sum_i^{\ell} I_i)\}|$ par

$$(23) \quad 4(\ell-1) \alpha(k) \cdot \exp(\ell) + \exp\{3/2(\int_0^T \alpha(u)du)k^{-1}\}.$$

Or

$$\begin{aligned} D &= E\left[\exp\left\{t \cdot \int_0^T X_s ds\right\}\right] = E\left\{\exp\left[t \cdot \int_{I_{\ell+1}} \cup I'_{\ell+1} X_s ds + t \cdot \left(\sum_i^{\ell} I_i\right) + t \cdot \left(\sum_i^{\ell} Z_i\right)\right]\right\} \\ &\leq \exp t \left| \int_{I_{\ell+1}} \cup I'_{\ell+1} X_s ds \right| \cdot \left\{E\left[\exp\left\{2t \sum_i^{\ell} I_i\right\}\right] \cdot E\left[\exp 2t \cdot \sum_i^{\ell} Z_i\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(inégalité de Schwarz) donc

$$D \leq e^2 \left[4(\ell-1)\alpha(k)\exp(\ell) + \exp\left\{3/2\left(\int_0^T \alpha(u)du\right) \cdot k^{-1}\right\}\right],$$

grâce à (23), la définition de t et la majoration usuelle de $|X_s| \dots$

Comme

$$\begin{aligned} \exp\{-\epsilon Tt\} &= \exp\{-\epsilon' T \left[k \int_{(2\ell+1)k}^{2(\ell+1)k} h_0^2(s,T) \right]^{-\frac{1}{2}}\} \quad \text{où } \epsilon' = \epsilon(4 A_0(a))^{-1} \\ &\leq \exp\{-\epsilon'(T/k) \cdot [h_0(T,T)]^{-1}\} \quad (\text{croissance de } h_0) \end{aligned}$$

(19) donne :

$$(24) \quad C \leq e^2 \cdot \exp\{-\epsilon'(T/k) [h_0(T,T)]^{-1}\} \cdot [4(\ell-1)\exp(\ell)\alpha(k) + \exp\{3/2 \cdot (\int_0^T \alpha(u)du) \cdot k^{-1}\}].$$

g) Prenons $k = k(T) = \sqrt{T}$, supposons $\alpha(T) = O[\exp(-T)]$, alors, d'après (24)

$$C = P[\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a) > \epsilon] = O\{\exp[-\epsilon' \cdot \sqrt{T} \cdot [h_0(T, T)]^{-1}]\}$$

Comme $P[\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a) < -\epsilon] = P\left[\int_0^T (-X_s) ds > \epsilon\right]$ relève de la même majoration que C on a enfin :

$$(25) \quad \forall \epsilon > 0 \quad P[|\hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)| > \epsilon] = O\{\exp[-\epsilon' \sqrt{T} [h_0(T, T)]^{-1}]\}.$$

Reste à montrer que ceci démontre le théorème grâce à la condition (18)

or si $\alpha_T = \hat{f}_T(a) - \bar{f}_T(a)$, en notant simplement que :

$$|\alpha_T| \leq |\alpha_T - \alpha_{[T]}| + \alpha_{[T]}$$

et $|\alpha_T - \alpha_{[T]}| = \left|\frac{1}{T} \int_{[T]}^T X_s ds\right| = O\left(\frac{h_0(T, T)}{T}\right) = o(1)$ sous les hypothèses du théorème 3 (majorations usuelles), il est clair que $\alpha_{[T]} \xrightarrow{p.s} 0$ est condition suffisante de convergence p.s de α_T vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$.

Or la convergence de $\alpha_{[T]}$ est assurée par (18), grâce à (25)

(lemme de Borel-Cantelli pour une suite de variables).

i) Il est clair qu'à de minimales variantes près, la même démonstration s'applique à $(\hat{g}_h)_T$, et le corollaire est trivial.

Remarque. - Les conditions choisies au g) ci-dessus peuvent être modulées, par exemple en prenant $k = T^{1/4}$, et en transformant $\alpha(u) = O[e^{-u}]$ en $\alpha[u^{1/4}] = O[\exp(-u^{3/4})]$, et de même (18) en $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\epsilon \cdot T^{3/4} \cdot (h_0(T, T))^{-1}\}$. De façon générale on perdra en conditions sur α ce qu'on gagnera sur h_0 . Nous avons adopté la solution "moyenne".

Bibliographie.-

- (1) J. BLEUEZ et D. BOSQ : *Etude d'une classe d'estimateurs non paramétriques de la densité.*
Annales de l'Institut Henri Poincaré - Vol. XIV, n°4,
1978, p. 479-484.
- (2) M. BERTRAND-RETALI : *Convergence uniforme d'un estimateur de la densité par la méthode du noyau.*
Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées,
Tome XXIII, n°3, 1978.
- (3) P. DEHEUVELS : *Conditions nécessaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité.*
C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris - Série A, t.278,
(29/4/74) p.1217-1220.
- (4) J. GEFFROY : *Sur l'estimateur de la densité dans un espace métrique.*
C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris - Série A, t.278,
1974, p.1449.
- (5) M.J. FRYER : *A review of some non-parametric methods of density estimation.*
J. Inst. Maths. Applic. 20, p. 335-354, (1977).
- (6) D. BOSQ : *Sur l'estimation de la densité d'un processus stationnaire et mélangeant.*
C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris - Série A, t.277, p.53
- (7) A. FÖLDES : *Density estimation for dependent sample.*
Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 9, (1974)
443-452.
- (8) M. ROSENBLATT : *Density estimates and Markov sequence.*
In Non Parametric techniques in statistical Inference
(M. Puri, ed.) 199-210.
- (9) G.G. ROUSSAS : *Non parametric estimation of the transition distribution function of a Markov process.*
A.M.S. 1969, Vol.40, n°4, p. 1886-1900.
- (10) G. BANON : *Estimation non paramétrique de densités de probabilité pour les processus de Markov.*
Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse (1977).
- (11) T.H. NGUYEN et G. BANON : *Strong consistent recursive estimation of the coefficient of the Ito equation.*
To appear in Annals of Stat.
- (12) M. ROSENBLATT : *A central limit theorem and a mixing condition.*
Proc. of nat. Acad. of Sciences USA. 42, p. 43-47 (1956).
- (13) D. BOSQ : *Sur l'estimation sans biais d'un paramètre fonctionnel.*
Publication Internes de l'UER de Math. Pures et Appliquées
n°104 (mars 1977) Université de Lille I.

- (14) A. BERLINET : *Sur les méthodes splines en estimation de la densité*
C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris - t. 288 série A -
p. 847-850 (7/5/1979).
- (15) V.A. VOLKONSKII et YU.A. ROZANOV : *Some limit theorems for random functions I*
Theory of probability and its applications 1959 -
Vol. IV, (p. 178-197).
- (16) D. BOSQ : *Inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires
et mélangeants*
C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 281,
p. 1095-1098 (22/12/75).

Reçu en Septembre 1979