



Sur une classe de tests qui contient le test vu X2

Denis Bosq

► To cite this version:

Denis Bosq. Sur une classe de tests qui contient le test vu X2. Annales de l'ISUP, 1980, XXV (1-2), pp.1-16. [⟨hal-04081255⟩](#)

HAL Id: hal-04081255

<https://hal.science/hal-04081255v1>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

SUR UNE CLASSE DE TESTS QUI

CONTIENT LE TEST DU χ^2 .

par Denis BOSQ

I - INTRODUCTION. -

Le test du χ^2 de K. PEARSON est très employé par les praticiens qui veulent ajuster des observations à une loi donnée. L'alternative d'un tel test reste vague dans l'esprit de l'utilisateur. Pourtant la statistique utilisée correspond à un choix bien précis des hypothèses H_0 et H_1 ; aussi, en faisant varier ces hypothèses, on peut construire toute une classe de tests du même type que le test du χ^2 . Certains de ces tests ont déjà été envisagés par J. NEYMAN dans [7] et par E. NADARAJA dans [5] ⁽¹⁾.

Nous allons établir quelques résultats généraux relatifs à ces tests. Le résultat principal est une inégalité qui permet de préciser le comportement asymptotique des statistiques utilisées. Nous donnerons aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un test de la classe soit convergent et nous étudierons sa puissance asymptotique. Nous terminerons par une discussion sur le choix d'un test dans la classe considérée.

II - DONNEES ET PRINCIPE DU TEST. -

1 - Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) ⁽²⁾ et à valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{B}) . On cherche à tester l'hypothèse H_0 : "La loi de X_1 est μ ".

(1) Des tests analogues ont également été étudiés par BICKEL et ROSENBLATT Ann. Stat. 1973, vol. 1 n° 6 p. 1071-1095.

(2) Nous supposons que l'on peut définir sur (Ω, \mathcal{A}, P) une suite infinie de variables aléatoires gaussiennes réduites et indépendantes.

Pour cela on se donne une suite $(K_n, n \geq 1)$ de fonctions numériques B^2 -mesurables, symétriques et bornées. On sait (cf. [6] p. 130) que K_n admet la décomposition :

$$K_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_{jn} e_{jn} \otimes e_{jn}$$

où $(\lambda_{jn}, j \geq 0)$ est une suite de nombres réels telle que $\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_{jn}^2 < +\infty$ et $(e_{jn}, j \geq 0)$ une suite orthonormale de $L^2(\mu)$.

Les hypothèses suivantes sont valables pour toute la suite de ce travail :

- 1) $\lambda_{0n} = 1$, $e_{0n} \equiv 1$, $1 \geq |\lambda_{jn}| \geq |\lambda_{j+1n}| \geq 0$; $j \geq 0$, $n \geq 1$.
- 2) $\sup_{n \geq 1} M_n < +\infty$ où $M_n = \sup_{x \in E} |e_{jn}(x)|$, $n \geq 1$.

Enfin, pour simplifier les énoncés, on supposera toujours que

$$\inf_{n \geq 1} |\lambda_{3n}| > 0 .$$

2 - Le principe d'un test basé sur (K_n) est le suivant : on effectue un lissage de la loi empirique $P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(X_i)}$ en posant :

$$Y_n = \int K_n(x, \cdot) dP_n(x)$$

On considère ensuite la statistique à valeurs dans $L^2(\mu)$ définie par

$$S_n = \sqrt{n} (Y_n - 1)$$

S_n est asymptotiquement normale sous H_0 , lorsque (K_n) vérifie certaines conditions. Ceci permet de construire un test de la forme $\|S_n\|^2 > w_n$ ($\|\cdot\|$ désigne la semi-norme usuelle de $L^2(\mu)$).

III - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA LOI DE $\|S_n\|^2$.-

L'inégalité suivante est fondamentale pour l'étude asymptotique de $\|S_n\|^2$.

Théorème 1. - Si la loi de X_i est μ , on a

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} |P(|S_n|^2 \leq a) - P(|U_n|^2 \leq a)| \leq (6 + 2 A_n + M_n^2) \Lambda_{r,n}^{2/3} + 3 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}} ;$$

$$n \geq 1, r \geq 3$$

où $A_n = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_{3n}|^3 \sqrt{2}} \right)$, c_0 est une constante universelle,

$\Lambda_{r,n} = \sum_{j=r+1}^{\infty} \lambda_{jn}^2$ et $U_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn} \xi_j e_{jn}$, $(\xi_j, j \geq 1)$ désignant un échantillon de la loi normale réduite.

Démonstration : Elle se fait en cinq parties.

1°) Posons $Z_{r,n} = \sum_{j=1}^r \lambda_{jn}^2 \xi_j^2$, $r \geq 3, n \geq 1$.

La fonction caractéristique de $Z_{r,n}$ étant intégrable, sa densité est donnée par la formule

$$f_{r,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^r (1 - 2i \lambda_{jn}^2 t)^{-1/2} e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

on en déduit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f_{r,n}(x) \leq \frac{1}{2\pi} \left[2 + \int_{|t|>1} \prod_{j=1}^3 (1 + 4 \lambda_{jn}^4 t^2)^{-1/4} dt \right] \leq A_n \quad (1)$$

2°) Posons $\Delta_a = \{Z_{r,n} \leq a, ||U_n||^2 > a\}$, $a \in \mathbb{R}^+$ alors, pour $0 < \gamma < a$

$$\Delta_a \subset \{||U_n||^2 - Z_{r,n} > \gamma\} \cup \{a - \gamma \leq Z_{r,n} \leq a\}$$

d'où

$$\begin{aligned} P(\Delta_a) &\leq \frac{E\left(\left[\sum_{j=r+1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2\right]^2\right)}{\gamma^2} + \gamma \sup_{x \in \mathbb{R}} f_{r,n}(x) \\ &\leq \frac{3 \Lambda_{r,n}^2}{\gamma^2} + A_n \gamma \end{aligned}$$

Pour $a > \Lambda_{r,n}^{2/3}$ et $\gamma = \Lambda_{r,n}^{2/3}$ on trouve

$$P(\Delta_a) \leq (3 + A_n) \Lambda_{r,n}^{2/3}$$

Pour $a < \Lambda_{r,n}^{2/3}$ on a directement

$$P(\Delta_a) \leq P(Z_{r,n} \leq a) \leq A_n \Lambda_{r,n}^{2/3}$$

on déduit de ce qui précède l'inégalité

$$|P(Z_{r,n} \leq a) - P(|U|^2 \leq a)| \leq P(\Delta_a) \leq (3 + A_n) \Lambda_{r,n}^{2/3}, \quad (2)$$

$a \in \mathbb{R}^+$, $r \geq 3$, $n \geq 1$.

3°) Posons maintenant $R_{r,n} = n \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 \hat{a}_{jn}^2$ où $\hat{a}_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{jn}(X_i)$, $j \geq 1$
un calcul long mais sans difficulté (1) montre que

$$\begin{aligned} E R_{r,n}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4 \int e_{jn}^4 d\mu + 3 \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4 \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j,j' > r \\ j \neq j'}} \lambda_{jn}^2 \lambda_{j'n}^2 \int e_{jn}^2 e_{j'n}^2 d\mu + \frac{n-1}{n} \sum_{\substack{j,j' > r \\ j \neq j'}} \lambda_{jn}^2 \lambda_{j'n}^2 \end{aligned}$$

On en tire immédiatement

$$E R_{r,n}^2 \leq (M_n^2 + 3) \Lambda_{r,n}^2 \quad (3)$$

4°) Considérons maintenant les variables aléatoires

$$Z'_{r,n} = n \sum_{j=1}^r \lambda_{jn}^2 \hat{a}_{jn}^2, \quad r \geq 3, \quad n \geq 1$$

Pour majorer $|P(|S_n|^2 \leq a) - P(Z'_{r,n} \leq a)|$ nous allons
procéder comme au 2°).

On pose $\Delta'_a = \{Z'_{r,n} \leq a, |S_n|^2 > a\}$

Alors, pour $0 < \gamma < a$

(1) Pour les détails nous renvoyons à [2] p. 18-19.

$$\Delta'_a \subset \{R_{r,n} > \gamma\} \cup \{a - \gamma \leq Z'_{r,n} \leq a\} \quad (4)$$

Mais d'après une inégalité de type Berry-Esseen due à SAZONOV (cf. [9] et [10] p. 208), ⁽¹⁾, on a :

$$|P(Z_{r,n} \leq a) - P(Z'_{r,n} \leq a)| \leq c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}}$$

où c_0 est une constante universelle.

On en déduit aisément

$$|P(Z_{r,n} \in]a - \gamma, a]) - P(Z'_{r,n} \in]a - \gamma, a])| \leq 2 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

d'où en tenant compte de (4)

$$P(\Delta'_a) \leq P(R_{r,n} > \gamma) + P(Z_{r,n} \in]a - \gamma, a]) + 2 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}}$$

et d'après (1) et (3)

$$P(\Delta'_a) \leq \frac{M_n^2 + 3}{\gamma^2} \Lambda_{r,n}^2 + A_n \gamma + 2 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}}$$

d'où, pour $a > \Lambda_{r,n}^{2/3}$ et $\gamma = \Lambda_{r,n}^{2/3}$

$$P(\Delta'_a) \leq (M_n^2 + 3) \Lambda_{r,n}^{2/3} + A_n \Lambda_{r,n}^{2/3} + 2 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}}.$$

Pour $a \leq \Lambda_{r,n}^{2/3}$ on a directement

$$\begin{aligned} P(\Delta'_a) &\leq P(Z'_{r,n} \leq \Lambda_{r,n}^{2/3}) \\ &\leq P(Z_{r,n} \leq a) + c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}} \\ &\leq A_n \Lambda_{r,n}^{2/3} + c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

en rassemblant les résultats obtenus on trouve

$$|P(Z'_{r,n} \leq a) - P(|S_n|^2 \leq a)| \leq (A_n + M_n^2 + 3) \Lambda_{r,n}^{2/3} + 2 c_0 M_n \frac{r^4}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

5°) Le résultat final se déduit directement de l'inégalité triangulaire et des inégalités (2), (5) et (6). ■

(1) On trouvera un énoncé du résultat de SAZONOV à la fin du présent travail.

Le théorème 1 va nous permettre d'obtenir des lois limites pour $||S_n||^2$ lorsque la loi de X_i est μ :

Corollaire 1.- Si

a) $\forall j \geq 1, \lambda_{jn} \rightarrow \lambda_j$ quand $n \rightarrow \infty$;

b) il existe $(\alpha_j, j \geq 1)$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < +\infty$ et $|\lambda_{jn}| \leq \alpha_j, j \geq 1, n \geq 1$;

Alors $||S_n||^2$ converge en loi vers $||U||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2$.

Démonstration : Soit $(r_n, n \geq 1)$ telle que $r_n \rightarrow +\infty$ et $\frac{r_n^4}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, on a $\lambda_{r_n, n} \leq \sum_{j=r_n+1}^{\infty} \alpha_j^2 \rightarrow 0$ et, par conséquent,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^+} |P(||S_n||^2 \leq a) - P(||U_n||^2 \leq a)| \rightarrow 0 \text{ (théorème 1).}$$

Il suffit donc de montrer que $||U_n||^2$ tend en loi vers $||U||^2$.

Soit alors $\omega \in \Omega$ tel que $\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j^2 \xi_j^2(\omega) < +\infty$, on a aussi $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2(\omega) < +\infty$, $n \geq 1$ et le théorème de la convergence dominée implique

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2(\omega) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2(\omega) < +\infty$$

Comme $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \xi_j^2$ converge presque sûrement on en déduit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2$$

d'où finalement

$$||U_n||^2 \xrightarrow{L} ||U||^2 \quad (1)$$

Corollaire 2.- S'il existe $(r_n, n \geq 1)$ telle que $\frac{r_n^4}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$,

$$\sum_{j=r_n+1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 \rightarrow 0 \text{ et si } \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4 \rightarrow 0$$

alors $T_n = \frac{||S_n||^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2}{2(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}}$ converge en loi vers une variable gaussienne réduite N .

(1) Ici et dans la suite, \xrightarrow{L} signifie "converge en loi vers".

Démonstration : Le théorème 1 montre qu'il suffit d'établir le résultat pour la variable

$$V_n = \frac{\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2 - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{2 \left(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4 \right)^{1/2}}$$

or cette variable peut s'écrire $V_n = c_n A_n + B_n$ où

$$c_n = \left(\frac{\sum_1^{r_n} \lambda_{jn}^4}{\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4} \right)^{1/2} \longrightarrow 1$$

$$\text{et } B_n = \frac{\sum_1^{r_n+1} \lambda_{jn}^2 (\xi_j^2 - 1)}{2 \left(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4 \right)^{1/2}} \xrightarrow{L} 0 \quad \text{puisque } V B_n \rightarrow 0.$$

$$\text{Il reste donc à montrer que } A_n = \frac{\sum_1^{r_n} \lambda_{jn}^2 (\xi_j^2 - 1)}{2 \left(\sum_1^{r_n} \lambda_{jn}^4 \right)^{1/2}} \xrightarrow{L} N. \quad \text{Pour}$$

cela on peut appliquer l'inégalité de BERRY-ESSEEN (cf. ROSENBLATT [8] p. 26), il vient :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} |P(A_n \leq a) - P(N \leq a)| \leq \frac{33}{4} \frac{1}{E|\xi_1^2 - 1|^3} \frac{1}{\left(\sum_1^{r_n} \lambda_{jn}^4 \right)^{1/2}} \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Exemples : Voici deux cas où le corollaire 2 s'applique :

1) $\lambda_{jn} = 1$ pour $j \leq r_n$, $\lambda_{jn} = 0$ pour $j > r_n$; $n \geq 1$;

$$r_n = n^\beta, \quad 0 < \beta < \frac{1}{8}.$$

2) $\lambda_{jn} = \frac{n^\beta}{j + n^\beta}$; $r_n = n^{3\beta}$; $j \geq 1$, $n \geq 1$, $0 < \beta < \frac{1}{24}$.

IV - CONSTRUCTION D'UN TEST.-

Sous des conditions très générales, et si X_1 a une loi ν non égale à μ et convenablement choisie, $||S_n||^2$ a un comportement asymptotique différent de ceux qui ont été mis en évidence au paragraphe précédent. Ceci sera précisé dans le paragraphe V.

Nous nous contenterons ici de définir le test et son alternative. Comme indiqué précédemment le test aura pour région critique $||S_n||^2 > w_n$ ce qui s'écrit encore $n \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_{jn}^2 \hat{a}_{jn}^2 > w_n$.

Nous définirons l'alternative de la façon suivante :

$$H_1 = \{ \nu : \exists (j_n(\nu), n \geq 1) : \liminf \left| \lambda_{j_n(\nu)n} \int e_{j_n(\nu)n} d\nu \right| > 0 \}$$

En général $H_0 + H_1$ n'est pas l'ensemble des probabilités sur (E, \mathcal{B}) ; il est facile de construire un contre-exemple à l'aide d'une probabilité étrangère à μ . Cependant, pour une suite (K_n) bien choisie, H_1 est suffisamment vaste pour contenir toutes les lois "raisonnables" possibles pour les X_1 .

V - CONVERGENCE DU TEST.-

Soit $p_n(\cdot)$ la fonction puissance du test. Nous allons étudier ses propriétés sous diverses hypothèses.

1) Etude de la puissance du test.Théorème 2.-

$$1^\circ) \quad \frac{w_n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \nu \in H_1, p_n(\nu) \rightarrow 1.$$

$$2^\circ) \quad \text{Si } \forall \eta > 0, \exists \nu \in H_1 : \limsup \sum_1^\infty \lambda_{jn}^2 \left(\int e_{jn} d\nu \right)^2 \leq \eta \quad (7)$$

$$\text{et s'il existe } (r_n) \text{ telle que } \Lambda_{r_n, n} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{r_n}{n} \rightarrow 0 \quad (8)$$

$$\text{on a } \frac{w_n}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \nu \in H_1, p_n(\nu) \rightarrow 1.$$

Démonstration :

1°) On suppose que $\frac{w_n}{n} \rightarrow 0$ et que X_1 suit une loi $v \in H_1$.

Posons $a_{jn}(v) = \int e_{jn} dv$; $j \geq 1, n \geq 1$ et $\liminf |\lambda_{jn}(v)_n a_{jn}(v)_n| = \delta$.

Soit maintenant $m > 1$, il existe un entier $N = N(m, v)$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{w_n}{n} \leq \frac{\delta^2}{m^2}$$

par suite

$$P(\lambda_{jn}^2(v)_n \hat{a}_{jn}^2(v)_n \leq \frac{w_n}{n}) \leq P(|\lambda_{jn}(v)_n \hat{a}_{jn}(v)_n| \leq \frac{\delta}{m}), n \geq N$$

Mais il est facile de vérifier que $D_n = \lambda_{jn}^2(v)_n (\hat{a}_{jn}^2(v)_n - a_{jn}^2(v)_n)$

tend vers 0 en probabilité.

Et comme

$$|\lambda_{jn}(v)_n a_{jn}(v)_n| \leq \frac{\delta}{m} \Rightarrow D_n \leq \frac{\delta^2}{m^2} - \lambda_{jn}^2(v)_n a_{jn}^2(v)_n$$

on aura pour n assez grand

$$P(|\lambda_{jn}(v)_n a_{jn}(v)_n| \leq \frac{\delta}{m}) \leq P(D_n \leq \delta^2 (\frac{1}{2} - 1))$$

et finalement

$$1 - p_n(v) = P(|S_n| \leq \frac{w_n}{n}) \leq P(D_n \leq \delta^2 (\frac{1}{2} - 1)) \rightarrow 0.$$

2°) Si la puissance du test tend vers 1 et si $\frac{w_n}{n} \not\rightarrow 0$ on peut trouver un nombre $\eta > 0$ et une partie infinie de N soit N_1 tels que $\frac{w_n}{n} > 2\eta$ pour $n \in N_1$.

Soit alors $v \in H_1$ et vérifiant la condition (7). Comme

$$|\sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_{jn}^2(\hat{a}_{jn}^2 - a_{jn}^2(v))| \leq 2 M_n^2 \wedge_{r,n}$$

et comme

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{r_n} \lambda_{jn}^2 (\hat{a}_{jn}^2 - a_{jn}^2(v))\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{8 M_n^4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{r_n^3}{n} ; n \geq 1, \varepsilon > 0$$

la condition (8) permet d'affirmer que $E_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 (\hat{a}_{jn}^2 - a_{jn}^2(v))$ converge en probabilité vers 0.

$$\text{Or, } ||S_n||^2 > 2\eta \Rightarrow E_n > 2\eta - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 a_{jn}^2(v) \text{ donc, pour}$$

n assez grand dans N_1

$$||S_n||^2 > \frac{w_n}{n} \Rightarrow ||S_n||^2 > 2\eta \Rightarrow E_n > \eta$$

on en déduit

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N_1}} P\left(||S_n||^2 > \frac{w_n}{n}\right) = 0 \quad \text{ce qui est une contradiction. } \blacksquare$$

2) Etude du niveau du test.

Théorème 3.- S'il existe (r_n) telle que $\Lambda_{r_n, n} \rightarrow 0$, $\frac{r_n^4}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ (9)

alors

$$1^\circ) \frac{w_n - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4\right)^{1/2}} \rightarrow +\infty \Rightarrow p_n(\mu) \rightarrow 0.$$

$$2^\circ) \text{ si, de plus, } \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4 \rightarrow +\infty \text{ (10) ou } \limsup \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2 < \infty \text{ (10 bis)}$$

on a

$$\frac{w_n - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4\right)^{1/2}} \rightarrow +\infty \iff p_n(\mu) \rightarrow 0$$

Démonstration :

1°) La condition $\frac{w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}} \rightarrow +\infty$ implique $w_n > \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2$

pour n assez grand. On a alors

$$\begin{aligned} P(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2 > w_n) &\leq P(|\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2 (\xi_j^2 - 1)| > w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2) \\ &\leq E(\xi_1^2 - 1)^2 \frac{\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4}{(w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2)^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La condition (9) et le théorème 1 permettent alors de conclure.

2°) Si la condition (10) est vérifiée et si $p_n(\nu) \rightarrow 0$

on a :

$$P \frac{||S_n||^2 - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{2(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}} > \frac{w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{2(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}} \rightarrow 0$$

donc $\frac{w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}} \rightarrow +\infty$ (corollaire 2).

Si la condition (10 bis) est vérifiée, comme $P(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2 \xi_j^2 > w_n) \rightarrow 0$ (théorème 1) on en déduit $w_n \rightarrow +\infty$ (car $\inf_n |\lambda_{3n}| > 0$) d'où

$$\frac{w_n - \sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^2}{(\sum_1^{\infty} \lambda_{jn}^4)^{1/2}} \rightarrow +\infty.$$

3) Conditions pour la convergence du test.

Corollaire 3.- Sous la condition (9)

1°) Les conditions $\frac{w_n}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{w_n - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^2}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn}^4\right)^{1/2}} \rightarrow +\infty$ (11) sont

suffisantes pour que le test soit convergent.

2°) Si (7) et (10) (resp. (10 bis)) sont vérifiées les conditions (11) sont également nécessaires.

Démonstration : immédiate (cf. les théorèmes 2 et 3). ■

4) Etude de la puissance lorsque les hypothèses sont adjacentes

Dans certains cas particuliers NADARAJA ([5]) et BARTON ([1]) ont obtenu une loi limite lorsque les hypothèses sont adjacentes. Dans le cas général, la situation est très compliquée et les lois limites éventuelles risquent d'être inutilisables. Le résultat suivant donne cependant une minoration assez précise de la puissance du test :

Théorème 4.- Soit (v_n) une suite d'éléments de H_1 ; on suppose qu'il existe un nombre $m > 1$ et une suite d'entiers (j_n) tels que $\lambda_{j_n}^2 a_{j_n}(v_n) \geq m^2 \frac{w_n}{n}$ au moins pour n assez grand et $\liminf \left[e_{j_n}^2 dv_n - a_{j_n}^2(v_n) \right] > 0$.

Dans ces conditions, on a, pour n assez grand,

$$1 - p_n(v_n) \leq 2 \exp(-K w_n)$$

où K est une constante.

Démonstration : $||S_n||^2 \leq w_n \Rightarrow \lambda_{j_n}^2 \hat{a}_{j_n}^2(v_n) \leq \frac{w_n}{n}$ donc,

pour n assez grand,

$$||S_n||^2 \leq w_n \Rightarrow |\hat{a}_{j_n} - a_{j_n}(v_n)| \geq |a_{j_n}(v)| \frac{m-1}{m}$$

En appliquant l'inégalité de BERNSTEIN-KOLMOGOROV ([4])

on obtient aisément

$$P(|S_n|^2 \leq w_n) \leq 2 \exp\left(-\frac{n}{3} \frac{a_{j_n}^2(v_n)}{\sigma_n^2} \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right)$$

$$\text{dès que } 0 < |a_{j_n}(v_n)| \frac{m-1}{m} < \frac{3}{2} \frac{\sigma_n^2}{2 \sup M_n}$$

$$\text{où l'on a posé } \sigma_n^2 = \int e_{j_n}^2 dv_n - a_{j_n}^2(v_n).$$

Le résultat s'en déduit. ■

Exemple : Si $e_{j_n} = e_j$; $j \geq 1$, $n \geq 1$ et si v_n admet une densité de la forme $1 + \delta_n e_j$ les hypothèses du théorème sont vérifiées dès que $\delta_n \geq m \sqrt{\frac{w_n}{n}}$ et $1 + \delta_n^2 \left(\int e_j^3 - 1 \right) \geq \sigma$ où σ est un nombre positif donné.

VI - REMARQUES SUR LE CHOIX D'UN TEST DANS LA CLASSE CONSIDEREE. -

1 - Parmi les tests appartenant à la classe que nous venons d'étudier on peut citer :

a) Les tests basés sur $K_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \otimes e_j$, $n \geq 1$ où $\lambda_j \neq 0$ pour tout j et où (e_j) est une base orthonormale de $L^2(\mu)$. Alors $H_1 = \{v : \exists j \geq 1 : \int e_j dv \neq 0\}$ et la loi limite est la loi de $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2$.

Pour $\lambda_j = \frac{1}{\pi j}$, $j \geq 1$ on obtient la loi de VON MISES.

b) Les tests basés sur $K_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jn} e_j \otimes e_j$, $n \geq 1$ où $\lambda_{jn} \rightarrow 1$, $j \geq 1$. Le test obtenu aura une meilleure puissance asymptotique que le précédent pour les $v \in H_1$ tels que $\int e_j dv$ soit non nul seulement pour les grandes valeurs de j .

c) Les tests basés sur $K_n = \sum_{j=1}^{r_n} e'_{jn} \otimes e'_{jn} : ||S_n||^2$ se comporte asymptotiquement comme un χ^2 à r_n degrés de liberté. Lorsque $e'_{jn} = \frac{1}{\sqrt{\mu(A_{jn})}} 1_{A_{jn}}$, $j = 1, \dots, r_n$ où (A_{jn}) est une partition de E on retrouve le test du χ^2 usuel.

2 - Le choix d'un test peut se faire en fonction de l'alternative envisagée. Par exemple si l'alternative est constitué par des lois qui possèdent, par rapport à μ , une densité de la forme $\sum_{i=0}^r a_i f_i$ où les f_i sont dans $L^2(\mu)$, on pourra choisir le test basé sur le noyau reproduisant de l'espace vectoriel engendré par les f_i . En dimension infinie on peut considérer les λ_{jn} comme des indicateurs de "l'importance" que l'on accorde à la "direction" e_{jn} . Cette idée pourrait s'interpréter d'un point de vue Bayésien.

A P P E N D I C E.

Théorème de SAZONOV :

Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^k , indépendantes et de même loi ν , centrées et admettant un moment d'ordre 2. Soit C la classe des convexes mesurables de \mathbb{R}^k . Enfin soit $t = \{t_1, \dots, t_k\}$ une partie finie de \mathbb{R}^k telle que les produits scalaires (U_1, t_ℓ) ; $\ell = 1, \dots, k$ soient des v.a.r. non corrélées. Alors

$$\sup_{B \in C} |P_n(B) - P(B)| \leq c_0 k^3 \left[\sum_{\ell=1}^k \rho_\ell^{(t)} \right] n^{-1/2}, \quad n \geq 1$$

où P_n désigne la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i$, N la loi normale possédant les mêmes moments d'ordre 1 et 2 que ν et où l'on a posé

$$\rho_\ell^{(t)} = \frac{E|(U_1, t_\ell)|^3}{(E|(U_1, t_\ell)|^2)^{3/2}}$$

c_0 est une constante universelle.

B I B L I O G R A P H I E.

- [1] BARTON D.E. - Neyman's χ^2_k test of goodness of fit when the null hypothesis is composite.
Skand. Aktuarietidskr. 39, 216-245 (1956).
- [2] BOSQ D. - Tests d'ajustement Hilbertiens.
Publ. int. UER Maths Lille 1, 39 p. n° 125 (1978).
- [3] BOSQ D. - Tests hilbertiens et test du χ^2 .
C.R.A.S., A, t. 286, p. 946-48 (1978).
- [4] MORAN P.A.P. - An introduction to probability theory.
Oxford - 1968.
- [5] NADARAJA E.A. - A quadratic measure of the deviation of a density estimator.
Theory of proba. and applications 21, p. 843-50 (1976).
- [6] NEVEU J. - Processus gaussiens.
Montréal (1968).
- [7] NEYMAN J. - "Smooth test" for goodness of fit.
Skand. Aktuar. 20, 149 (1937).
- [8] ROSENBLATT M. - Markov processes. Structure and asymptotic Behavior.
Springer Verlag (1971).
- [9] SAZONOV V.V. - On the multidimensionnal central limit theorem.
Sankhya A, 30, 191-204 (1968).
- [10] SAZONOV V.V. - On ω^2 criterion.
Sankhya A, 30, 205-210 (1968).

Reçu en Décembre 1979

179 Bd. de Stalingrad
94200 IVRY