HAL open science

Comparaison de solutions à base d'ondelettes spatiales pour le problème inverse M/EEG

Samy Mokhtari, Jean-Michel Badier, Christian Bénar, Bruno Torrésani

To cite this version:

Samy Mokhtari, Jean-Michel Badier, Christian Bénar, Bruno Torrésani. Comparaison de solutions à base d'ondelettes spatiales pour le problème inverse M/EEG. 2023. hal-04077697v1

HAL Id: hal-04077697

https://hal.science/hal-04077697v1

Preprint submitted on 21 Apr 2023 (v1), last revised 30 Jun 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comparaison de solutions à base d'ondelettes spatiales pour le problème inverse M/EEG

Samy MOKHTARI[1] Jean-Michel BADIER[2] Christian BÉNAR[2] Bruno TORRÉSANI[1]

[1]Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France

[2]Aix Marseille Univ, INSERM, INS, Inst Neurosci Syst, Marseille, France

Résumé – Cet article décrit de nouvelles approches au problème inverse M/EEG intégrant une pénalisation favorisant la parcimonie dans un domaine d'ondelettes spatiales. Il compare des versions variationnelles (minimisation d'une attache aux données quadratique, avec régularisation favorisant la parcimonie) et Bayésiennes (*sparse Bayesian learning*) avec des approches plus classiques. Des résultats numériques (données simulées et réelles) montrent la capacité de ces approches à bien estimer des activités cérébrales localisées dans des régions étendues, tant en termes d'erreur de localisation que d'erreur sur l'amplitude des sources.

Abstract – This paper describes new approaches to the inverse M/EEG problem incorporating a penalty favoring sparsity properties in a spatial wavelet domain. It discusses and compares variational (minimization of a quadratic data attachment, with regularization favoring parsimony) and Bayesian (*sparse Bayesian learning*) versions with more classical approaches. Numerical results (simulated and real data) show the ability of these approaches to estimate brain activities localized in extended regions, both in terms of spatial localization and sources amplitude.

1 Introduction, état de l'art

La localisation des sources cérébrales à partir de mesures EEG (électro-encéphalographie) ou MEG (magnéto-encéphalographie) joue un rôle de plus en plus important en neurosciences cognitives et pour le diagnostic et le traitement de troubles neurologiques. Disposer de méthodes précises de localisation de sources devient essentiel. On entend par localisation de sources la détermination de régions actives sur le cortex. La majorité des approches privilégie la localisation des zones actives à la reconstruction fidèle de l'amplitude des densités de courant. Il y a donc un enjeu à améliorer la précision des algorithmes tant en termes de localisation que d'amplitude des sources reconstruites.

Nous nous focalisons ici sur les formulations variationnelles et Bayésiennes du problème inverse. On note $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{J\times L}$ les données mesurées (J capteurs ou canaux spatiaux obtenus après blanchiment/réduction de dimension, et L échantillons temporels). On suppose disposer également d'une description géométrique de la surface corticale sous forme d'une triangulation, qui fournit un graphe à N sommets (de positions connues) et E arêtes. Les sources sont modélisées par une matrice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N\times L}$, l'équation d'observation est de la forme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}\mathbf{S} + \mathbf{B} \tag{1}$$

où $\mathbf{G}$ est la matrice de gain, qui résume la propagation du champ électromagnétique du cortex vers les capteurs, et $\mathbf{B}$ la ligne de base, inconnue, modélisée comme un vecteur aléatoire Gaussien iid (résultat d'un blanchiment spatial préalable).

Il existe une importante littérature sur la localisation de sources M/EEG, avec des approches basées sur des formulations et hypothèses différentes. On peut notamment citer les méthodes de *dipole fitting* [13, 10], diverses techniques de formation de voies [19, 17], et les approches variationnelles et/ou Bayésiennes sur lesquelles nous nous focaliserons ici, avec des formulations basées sur la minimisation d'une fonction objectif incluant un terme d'attache aux données quadratique, et une pénalisation $f_\gamma(\mathbf{S})$ dépendant d'hyper-paramètres génériquement notés γ.

Les régularisations quadratiques conduisent aux solutions explicites appelées MNE [9] et wMNE [5]. Ces solutions sont souvent trop étendues spatialement, et tendent à sous-estimer les sources profondes. Pour mieux contrôler l'extension spatiale des solutions, des choix de régularisation favorisant la parcimonie ont été proposés. Parmi eux, on peut mentionner MCE [11], basé sur une régularisation ℓ^1, MxNE [14] basé sur des normes mixtes favorisant parcimonie en espace et persistence en temps, VB-SCCD [4] basé sur une norme de variation totale sur graphe, SVB-SCCD [1] variante ajoutant un terme de parcimonie en espace, ainsi que des variations autour de ces idées. Les pénalisations étant non lisses, les problèmes correspondants sont résolus par des algorithmes adaptés.

Les hyperparamètres γ sont choisis par des heuristiques, ou des méthodes plus élaborées. Les méthodes d'apprentissage Bayésien parcimonieux [20] considèrent plutôt γ comme inconnue du problème, les sources étant traitées comme variables latentes sur lesquelles est effectuée une marginalisation. Ceci conduit à un problème d'optimisation non-convexe, généralement résolu par des algorithmes de type MM (voir [7] pour une synthèse). Nous décrivons ici une approche implémentant la parcimonie non plus dans le domaine spatial (i.e. sur le cortex), mais dans un domaine transformé, en l'occurrence dans une représentation d'ondelettes spatiales. L'objectif est d'explorer des méthodes favorisant des solutions régulières par morceaux, comme dans le cas de traitement d'images classique. Nous montrons, en combinant les modèles variationnels et Bayésiens avec des représentations (redondantes) en ondelettes sur graphe [6] qu'une telle combinaison permet effectivement de reconstruire des solutions localisées dans des régions sur la surface du cortex, avec une précision supérieure aux méthodes existantes, dans le cas de données simulées et réelles de type potentiel auditif évoqué.

2 Utilisation d'ondelettes spatiales

2.1 Ondelettes sur surface ou graphe

Différentes approches existent pour construire des systèmes d'ondelettes sur des domaines non-standard, tels que variétés (surface dans le cas présent) ou graphes par exemple. On peut notamment citer les bases d'ondelettes construites par des techniques de relèvement (*lifting* [18]) à partir de discrétisations emboîtées, ou associées à des opérateurs de diffusion [3].

On se focalise ici sur la construction de [6] qui exploite la diagonalisation du Laplacien de graphe associé à la surface discrétisée (généralement disponible avec des données MEG). Sans entrer dans les détails, le prolongemement sur $\mathbb{R}^+$ du spectre $\{0, \dots \lambda_{\mathsf{max}}\}$ du Laplacien du graphe est considéré comme domaine fréquentiel, sur lequel agit un opérateur de dilatation. Une trame de $\mathbb{R}^N$ (famille génératrice, généralement surcomplète [2]) constituée d'ondelettes $\psi_{s,n}$ (centrées sur le vertex n du graphe, dilatée d'un facteur $s \in \{s_1, \dots s_{N_s}\}$) et de fonctions d'échelle $\phi_n \in \mathbb{R}^N$ (centrées sur n, et captant les échelles inférieures à s_1) peut être ainsi obtenue par la procédure de [6]. Cette trame dépend du choix des échelles $\{s_1, \dots, s_{N_s}\}$, et de deux noyaux définis sur l'axe fréquentiel, qui définissent respectivement la fonction d'échelle et les ondelettes. On note $N_w = N(N_s + 1)$ le nombre total de vecteurs de cette trame, et $\mathbf{W}$ la matrice associée. Les bornes A et B de la trame [2], qui contrôlent l'existence et la stabilité de l'inversion, sont les bornes inf et sup du spectre de $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$.

2.2 Approches à la synthèse

Avec ces notations, on écrit $\mathbf{S} = \mathbf{W}^T\mathbf{A}$, avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_w \times L}$. Dans une approche à la synthèse l'équation (1) s'écrit

$$\mathbf{Z} = \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{A} + \mathbf{B} \,, \tag{2}$$

avec $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{W}^T$ une matrice de gain modifiée. Les formulations variationnelles prennent alors la forme générique

$$\mathbf{A}_* = \underset{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_w \times L}}{\arg\min} \left[\frac{1}{2} \left\| \mathbf{Z} - \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{A} \right\|_F^2 + f_\gamma(\mathbf{A}) \right] \,, \tag{3}$$

où $\| \cdot \|_F$ est la norme de Frobenius. Une fois $\mathbf{A}_*$ obtenu, l'estimée correspondante des sources s'obtient pas $\mathbf{S}_* = \mathbf{W}^T\mathbf{A}_*$. On se focalisera ici sur le cas $f_\lambda(\mathbf{A}) = \lambda\|\mathbf{A}\|_F^2$, et surtout

$$f_\lambda(\mathbf{A}) = \lambda\|\mathbf{A}\|_1 \,, \quad f_{\lambda,\mu}(\mathbf{A}) = \lambda\|\mathbf{A}_\psi\|_1 + \mu\|\mathbf{A}_\phi\|_2^2 \,, \tag{4}$$

où on écrit $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_\psi : \mathbf{A}_\phi]$ en différenciant les coefficients d'ondelettes $\mathbf{A}_\psi$ et d'échelle $\mathbf{A}_\phi$. Ici $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$. Nous nommons ces approches sgw-MCE I et II.

La première formulation pénalise également coefficients d'échelle et d'ondelettes, la seconde les distingue. Dans les deux cas, nous utiliserons le même algorithme FISTA pour résoudre le problème d'optimisation. La norme ℓ^1 peut aussi être remplacée par une norme mixte $\ell^{2,1}$, sans modification de l'algorithme si ce n'est un changement d'opérateur proximal.

La formulation Bayésienne (*Sparse Bayesian Learning*, SBL) est elle aussi une transposition quasi directe de l'approche classique, et conduit à un problème non convexe

$$\underline{\gamma_A}^* = \underset{\underline{\gamma_A} \in (\mathbb{R}_+)^{N_w}}{\arg\min} \left[\mathsf{Tr}\big(\mathbf{C_Z}\mathbf{\Sigma_Z}(\underline{\gamma_A})^{-1}\big) + \ln\det(\mathbf{\Sigma_Z}(\underline{\gamma_A})) \right] \tag{5}$$

où $\mathbf{\Gamma}_A$ désigne la matrice de covariance *a priori* des coefficients d'ondelettes (supposée diagonale $\mathbf{\Gamma}_A = \mathsf{diag}(\underline{\gamma_A})$), $\mathbf{\Sigma_Z}(\underline{\gamma_A}) = \mathsf{I_J} + \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{\Gamma}_A\widetilde{\mathbf{G}}^T$ est la matrice de covariance *a posteriori* des observations, et $\mathbf{C_Z} = \frac{1}{L}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$ est la matrice de covariance empirique. Une fois $\underline{\gamma_A}^*$ obtenu, les sources sont évaluées via

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{\Gamma}_A^*\widetilde{\mathbf{G}}^T \left[\mathbf{\Sigma}_Z(\underline{\gamma_A}^*)\right]^{-1}\mathbf{Z} \,, \qquad \mathbf{S}_* = \mathbf{W}^T\mathbf{A}_* \,. \tag{6}$$

Cette approche est nommée sgw-SBL.

On associe à tout $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times L}$ une *carte d'amplitude* $\mathcal{A}_\mathbf{S} \in \mathbb{R}^N$, calculée à partir d'un segment temporel d'intérêt $[l_1, l_2]$

$$\mathcal{A}_\mathbf{S}[k] \propto \left(\frac{1}{l_1 - l_0 + 1} \sum_{l=l_0}^{l_1} \mathbf{S}_{k,l}^2 \right)^{1/2} \,. \tag{7}$$

Remarque : Nous différencions ici les approches "à la synthèse" des approches à l'analyse. Une approche "à l'analyse" similaire à (3) consisterait par exemple à minimiser une fonctionnelle de la forme $\frac{1}{2}\|\mathbf{Z} - \mathbf{G}\mathbf{S}\|^2 + \lambda\|\mathbf{W}\mathbf{S}\|_1$, ce qui contraint à de nombreuses évaluations du produit $\mathbf{WS}$ et une augmentation du coût de calcul. Ce problème n'est pas abordé ici.

3 Application sur des données MEG

3.1 Données

Nous discutons ici des résultats sur données réelles et simulées. Nous disposons de jeux de données MEG obtenus par le centre MEG de l'INS Marseille. Outre les données $\mathbf{Z}$ (moyennées sur plusieurs essais), sont disponibles la discrétisation de la surface corticale (sommets et arêtes), une matrice de gain $\mathbf{G}$ (orientation contrainte supposée normale à la surface discrétisée) et la matrice de covariance $\mathbf{\Sigma_B}$ de la ligne de base $\mathbf{B}$, utilisée pour un blanchiment et une réduction de dimension préalables. Nous présentons également des résultats sur données simulées, suivant un protocole décrit en section 3.3.1.

3.2 Ondelettes

Partant du graphe associé à la triangulation de la surface du cortex (poids binaires) nous utilisons la construction d'ondelettes telle que décrite dans [6] (section 8.1), avec $N_s = 3$ échelles d'ondelettes suivant une progression logarithmique sur l'axe fréquentiel, la fréquence de coupure de la fonction d'échelle étant fixée à $\lambda_{\max}/16$. Ceci produit une trame de $\mathbb{R}^N$; l'évaluation numérique des bornes de la trame [2] donne les valeurs $A \approx 0.71$ et $B \approx 1.41$, soit un très bon conditionnement.

3.3 Protocole de simulation et évaluation

3.3.1 Simulation

Le protocole est le suivant : partant d'une activité $\mathbf{S}_{\mathsf{sim}}$, l'information est propagée ($\mathbf{G}\mathbf{S}_{\mathsf{sim}}$) jusqu'aux capteurs, avec l'ajout d'une ligne de base simulée $\mathbf{B} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma_B})$, dont l'amplitude est ajustée de façon à générer un PSNR fixé, dans le domaine des capteurs. Nous considérons le cas où $\mathbf{S}_{\mathsf{sim}}$ est reconstruite (via un solveur bien choisi) à partir de données réelles de potentiel auditif évoqué, avec 10 simulations avec lignes de bases différentes. Nous générons aussi des données purement simulées, avec des séries de 100 patchs générés aléatoirement à la surface du cortex, avec 2 étendues spatiales différentes.

3.3.2 Evaluation

L'évaluation objective des méthodes de reconstruction des sources MEG est un problème difficile. Pour les données réelles, l'absence de vérité de terrain impose de s'appuyer sur les connaissances d'experts. Il n'existe pas non plus de véritable consensus pour l'évaluation des résultats sur des données simulées. De nombreuses mesures ont été introduites dans la littérature (voir par exemple [12, 8, 16]), la plupart d'entre elles ayant tendance à favoriser des approches ou des situations spécifiques. Nous nous intéressons ici à des méthodes quantitatives (non limitées à l'estimation du support de l'activité cérébrale), et privilégions des mesures adaptées :

• Dispersion spatiale au pic : en notant $(i_{\mathsf{max}}, t_{\mathsf{max}})$ les indices où l'amplitude de $\mathbf{Z}$ est maximale, et $d_{i,k}$ la distance Euclidienne entre les vertex i et k, on note

$$\mathsf{SD} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{N} d_{i_{max},k}^2 |\mathbf{S}_{k,t_{max}}|^2}{\sum_{k=1}^{N} |\mathbf{S}_{k,t_{max}}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{8}$$

• Entropie de l'amplitude normalisée $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\|\mathcal{A}\|_1$: elle fournit une autre mesure de dispersion spatiale, davantage adaptée aux solutions parcimonieuses pour lesquelles SD peut s'avérer trompeuse.

$$\mathsf{H}(\mathcal{A}) = -\sum_{k=1}^{N} \widetilde{\mathcal{A}}[k] \log_2 \left(\widetilde{\mathcal{A}}[k] \right) . \tag{9}$$

• Distance de Wasserstein d'ordre 1 [15] entre cartes d'amplitude (7) normalisées $\mathsf{WD} = \mathsf{W}_1(\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}_*}, \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}_{\mathsf{sim}}})$.

• Rapport d'amplitude $\mathsf{RA} = \|\mathcal{A}_{\mathbf{S}_*}\|/\|\mathcal{A}_{\mathbf{S}_{\mathsf{sim}}}\|$.

3.4 Résultats

La Figure 1 présente des résultats obtenus sur des données réelles de potentiels évoqués auditifs (cartes d'amplitudes au sens de (7), sans seuillage). La localisation attendue se trouve principalement dans le cortex auditif[1] de l'hémisphère droit, ce que reproduisent bien les images inférieures, obtenue avec sgw-SBL (algorithme EM) en bas à gauche et SVB-SCCD en bas à droite. Ces deux solveurs concentrent toute l'activité dans la région auditive. Le solveur SVB-SCCD fournit une solution constante par morceaux sur un patch, tandis que le solveur sgw-SBL EM autorise davantage de variation d'amplitude sur l'étendue du patch, et parvient également à reconstruire de l'activité plus en profondeur dans le sillon auditif. La convergence de l'algorithme EM est atteinte en moins de 50 itérations. L'image en haut à gauche (MNE) fournit comme attendu une activité diffuse, qui déborde largement du cortex auditif droit. MNE ne parvient pas non plus à reconstruire l'activité en profondeur dans le sillon auditif. Quant au solveur MCE (image en haut à droite), il démontre ses capacités de parcimonie bien connues, qui rendent son utilisation directe dans le domaine des sources davantage adaptée aux sources focales.

Nous considérons dans la suite, comme *patch* simulé de référence, la solution reconstruite, à partir des données capteurs, par le solveur sgw-SBL EM. Cela nous permet d'évaluer numériquement les métriques introduites précédemment. La Table 1 ci-après synthétise les résultats (valeurs moyennes) obtenus à partir d'un *patch* sgw-SBL EM ($\mathsf{SD}_{\mathsf{ref}} = 1.17$ cm, $\mathsf{H}_{\mathsf{ref}} = 9.51$), avec différents solveurs. On notera $\mathsf{SD}_{\mathsf{n}} = \mathsf{SD}/\mathsf{SD}_{\mathsf{ref}}$.

[1] Voir par exemple https://en.wikipedia.org/wiki/Auditory_cortex

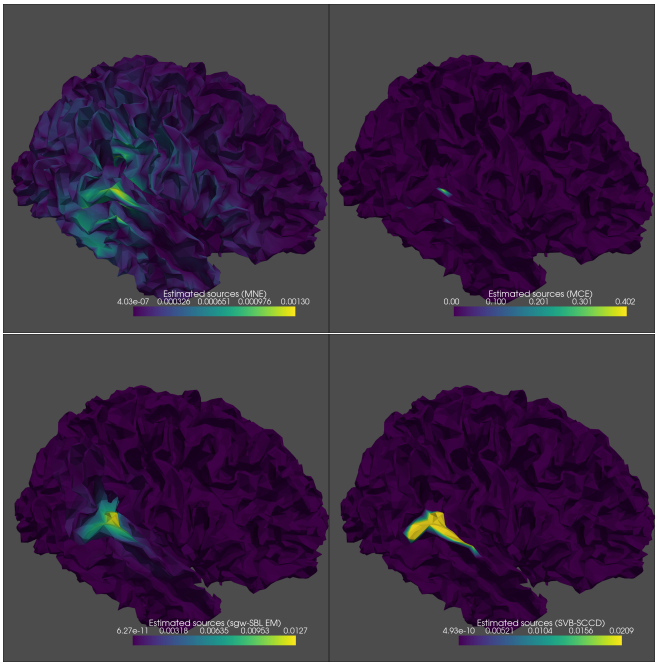

FIGURE 1 : Données de potentiels évoqués auditifs : cartes d'amplitude (7) pour les solutions MNE (en haut à gauche), MCE (en haut à droite), sgw-SBL EM (en bas à gauche) et SVB-SCCD (en bas à droite).

TABLE 1 : Evaluation de la performance des solveurs MNE (#1), MCE (#2), SVB-SCCD (#3), sgw-SBL EM (#4), sgw-SBL Champagne (#5), sgw-MCE II (#6), et sgw-MCE I (#7)

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
SD_n	3.18	1.52	1.37	**0.95**	**0.95**	2.05	1,47
H	13.19	4.68	7.03	**8.99**	**8.99**	11.51	**9.05**
WD	0.14	0.51	0.11	**9.6e-3**	**9.8e-3**	0.11	**1.9e-2**
RA	0.21	3.69	1.73	**1.07**	**1.07**	0.72	**1.05**

Ces résultats confirment la dispersion spatiale trop importante et la sous-estimation de l'amplitude des solutions MNE. A l'inverse, MCE produit un support trop restreint (entropie la plus faible) et sur-estime l'amplitude. L'implémentation d'une condition de parcimonie dans le domaine des ondelettes spatiales fournit ici les meilleurs résultats, avec les solveurs sgw-SBL (EM et Champagne) et sgw-MCE I.

La Table 2 donne les résultats obtenus pour des métriques similaires (sauf entropie) sur des séries de 100 patchs (2 tailles de support considérées) simulés et générés aléatoirement à la surface du cortex. Ces résultats confirment les tendances vues dans la Table 1, notamment les biais systématiques de MNE et MCE pour des activités étendues, ainsi que les performances de la parcimonie dans le domaine ondelettes dans ce dernier cas. Ils confirment aussi la performance des solveurs de type sgw-SBL (ici Champagne) vis à vis de la métrique de Wasserstein, en particulier pour des activités spatialement étendues .

4 Discussion et conclusion

Nous avons introduit dans cet article une nouvelle famille d'approches du problème inverse MEG implémentant un a priori

TABLE 2 : Valeurs moyennes et écart-types des métriques SD_n, WD et RA (de haut en bas) : petit v./ grand support

	MNE	sgw-SBL	MCE	SVB-SCCD
mean	6.27 / 2.40	**2.67** / 0.72	2.79 / **1.12**	2.82 / 1.20
std	2.22 / 0.43	**1.23** / **0.29**	2.22 / 0.73	1.98 / 0.82
mean	6.96 / 1.34	6.47 / **0.88**	**5.54** / 1.87	6.65 / 1.11
std	5.19 / 0.96	5.08 / **0.74**	**4.92** / 1.65	5.25 / 0.95
mean	0.04 / 0.13	0.14 / 0.54	**1.12** / 3.25	0.40 / **1.09**
std	0.01 / 0.02	0.02 / 0.08	0.45 / 0.97	0.19 / 0.43

de parcimonie dans un domaine d'ondelettes spatiales, suivant un point de vue variationnel et un point de vue Bayésien. En utilisant des familles redondantes d'ondelettes sur graphe, nos résultats numériques sur données simulées montrent que ces approches permettent de reconstruire avec une bonne précision des sources corticales étendues, l'approche Bayésienne s'avérant particulièrement performante. Des tests numériques plus complets feront l'objet d'une publication à venir. Il sera également intéressant de comparer avec des approches similaires utilisant des bases orthonormées d'ondelettes sur graphe ou surface, au lieu de trames redondantes.

Les résultats obtenus sur données réelles sont également encourageants, mais difficiles à évaluer quantitativement en l'absence de vérité terrain. L'utilisation prochaine de données intracérébrales en parallèle de données MEG devrait permettre de faciliter une telle évaluation.

Remerciements. Ce travail a bénéficié du soutien de l'état Français au travers du projet BMWs (ANR-20-CE45-0018), et de l'Institut Convergence ILCB (ANR-16-CONV-0002). Nous remercions également M. Kowalski, G. Mebarki et C. Mélot pour de nombreuses discussions.

Références

[1] H. BECKER, L. ALBERA, P. COMON, R. GRIBONVAL et I. MERLET : Fast, variation-based methods for the analysis of extended brain sources. *In 22nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 41–45, 2014.

[2] O. CHRISTENSEN : *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. ANHA series. Birkhäuser, 2003.

[3] R. R. COIFMAN et M. MAGGIONI : Diffusion wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 21(1):53–94, 2006.

[4] L. DING : Reconstructing cortical current density by exploring sparseness in the transform domain. *Phys. Med. Biol.*, 54(9):2683–2697, apr 2009.

[5] M. FUCHS, M. WAGNER, T. KÖHLER et H.-A. WISCHMANN : Linear and nonlinear current density reconstructions. *J Clin Neurophysiol*, 16(3):267–295, 1999.

[6] D.K. HAMMOND, P. VANDERGHEYNST et R. GRIBONVAL : Wavelets on graphs via spectral graph theory. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 30(2):129 – 150, 2011.

[7] A. HASHEMI, C. CAI, G. KUTYNIOK, K.-R. MÜLLER, S.S. NAGARAJAN et S. HAUFE : Unification of sparse bayesian learning algorithms for electromagnetic brain imaging with the majorization minimization framework. *NeuroImage*, 239:118309, 2021.

[8] O. HAUK, M. STENROOS et M.S. TREDER : Towards an objective evaluation of EEG/MEG source estimation methods – the linear approach. *NeuroImage*, 255:119177, 2022.

[9] M. S. HÄMÄLÄINEN et R. J. ILMONIEMI : Interpreting magnetic fields of the brain : minimum norm estimates. *Med Biol Eng Comput*, 32(1):35–42, 1994.

[10] K. JERBI, S. BAILLET, J.C. MOSHER, G. NOLTE, L. GARNERO et R.M. LEAHY : Localization of realistic cortical activity in MEG using current multipoles. *NeuroImage*, 22(2):779 – 793, 2004.

[11] K. MATSUURA et Y. OKABE : Selective minimum-norm solution of the biomagnetic inverse problem. *IEEE. Trans. Biomed. Eng.*, 42(6):608–615, June 1995.

[12] A. MOLINS, S.M. STUFFLEBEAM, E.N. BROWN et M.S. HÄMÄLÄINEN : Quantification of the benefit from integrating MEG and EEG data in minimum ℓ^2-norm estimation. *NeuroImage*, 42(3):1069 – 1077, 2008.

[13] J.C. MOSHER, P.S. LEWIS et R.M. LEAHY : Multiple dipole modeling and localization from spatio-temporal MEG data. *IEEE. Trans. Biomed. Eng.*, 39(6):541–557, June 1992.

[14] W. OU, M.S. HÄMÄLÄINEN et P. GOLLAND : A distributed spatio-temporal EEG/MEG inverse solver. *NeuroImage*, 44(3):932 – 946, 2009.

[15] G. PEYRÉ et M. CUTURI : Computational optimal transport : With applications to data science. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 11(5-6):355–607, 2019.

[16] J. G. SAMUELSSON, N. PELED, F. MAMASHLI, J. AHVENINEN et M. S. HÄMÄLÄINEN : Spatial fidelity of MEG/EEG source estimates : A general evaluation approach. *NeuroImage*, 224:117430, 2021.

[17] K. SEKIHARA et S.S. NAGARAJAN : *Adaptive Spatial Filters for Electromagnetic Brain Imaging*. Series in Biomedical Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[18] W. SWELDENS : The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2):511–546, 1998.

[19] B.D. VAN VEEN, W. VAN DRONGELEN, M. YUCHTMAN et A. SUZUKI : Localization of brain electrical activity via linearly constrained minimum variance spatial filtering. *IEEE. Trans. Biomed. Eng.*, 44(9):867–880, 1997.

[20] D.P. WIPF, J.P. OWEN, H.T. ATTIAS, K. SEKIHARA et S.S. NAGARAJAN : Robust Bayesian estimation of the location, orientation, and time course of multiple correlated neural sources using MEG. *NeuroImage*, 49(1):641–655, 2010.