



**HAL**  
open science

# Formulations variationnelles pour la diffraction des ondes électromagnétiques

Christophe Hazard, Marc Lenoir

► **To cite this version:**

Christophe Hazard, Marc Lenoir. Formulations variationnelles pour la diffraction des ondes électromagnétiques. Doctorat. ENSTA ParisTech, France. 2000. hal-04076596

**HAL Id: hal-04076596**

**<https://hal.science/hal-04076596v1>**

Submitted on 20 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulations variationnelles pour la diffraction des ondes électromagnétiques

Christophe Hazard \*

Marc Lenoir \*

## 1 Les équations

Dans ce chapitre, nous présentons les équations de Maxwell qui modélisent la propagation des ondes électromagnétiques (on pourra par après exemple consulter Jones [9] pour plus de détails). Après avoir écrit les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques dans les milieux parfaits, et calculé quelques solutions particulières, nous définirons la notion de flux d'énergie et nous exhiberons alors une condition de rayonnement adaptée aux équations traitées.

### 1.1 Les équations classiques

#### 1.1.1 Les équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques dans les milieux continus sont décrits à l'aide de quatre fonctions dépendant du temps  $t$  et des coordonnées d'espace (nous noterons  $x$  un point de l'espace et  $(x_1, x_2, x_3)$  ses coordonnées relativement à un repère orthonormé  $(O, e_1, e_2, e_3)$ ). Ces quatre fonctions sont à valeurs vectorielles dans  $\mathbb{R}^3$  (leurs composantes seront repérées par les indices 1,2 et 3). Ce sont:

- ◇ *Le champ électrique*  $\mathcal{E}$ ,
- ◇ *L'induction électrique*  $\mathcal{D}$ ,
- ◇ *Le champ magnétique*  $\mathcal{H}$ ,
- ◇ *L'induction magnétique*  $\mathcal{B}$ .

La présence de charges électriques et de courants électriques (autrement dit de déplacement de ces charges) est décrite par deux fonctions:

- ◇ *La densité de charge*  $\mathcal{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- ◇ *La densité de courant*  $\mathcal{J}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

Ces différentes fonctions sont reliées entre elles par les *équations de Maxwell*:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \mathcal{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \mathcal{R}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0. \quad (4)$$

Une conséquence immédiate de ces équations est la relation dite de *conservation de la charge*,

---

<sup>1</sup>ENSTA LMA/CRESPO 32 boulevard Victor 75015 Paris

appelée aussi relation de continuité, qui relie la charge électrique  $\mathcal{R}$  au courant  $\mathcal{J}$  :

$$\operatorname{div} \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

et qui s'obtient simplement en prenant la divergence de (2) et la dérivée partielle en temps de (3).

On peut remarquer dès maintenant une certaine redondance dans le système d'équations (1)-(4). Si on applique en effet l'opérateur divergence à (1), on a  $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathcal{B}) = 0$ , ce qui montre qu'il suffit que l'équation (4) soit vérifiée à un seul instant (par exemple  $t = 0$ ) pour qu'elle le soit en fait à tout temps  $t$ . La même remarque s'applique à l'équation (3), à condition que  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$  satisfassent la relation de conservation de la charge (5).

Ainsi, si  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$  sont connus (c'est par exemple le cas de l'étude du champ créé par une charge ponctuelle dans le vide) et satisfont la relation (5), le système (1)-(4) comporte six équations indépendantes ; les équations scalaires (3) et (4) jouant le rôle de conditions initiales. Les inconnues scalaires étant au nombre de douze (les composantes de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{B}$ ), on sera amené à rajouter à ces équations des relations qui permettent de décrire la nature du milieu dans lequel les phénomènes électromagnétiques se produisent. C'est l'objet des *lois de comportement*, appelées aussi *relations constitutives*.

Notons enfin que si  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$  ne sont pas connus a priori, il y a trois inconnues supplémentaires et non quatre, puisque la relation (5) doit toujours être vérifiée ; il nous faudra donc rajouter trois équations qui précisent comment s'effectue le déplacement des charges électriques dans le milieu considéré.

### 1.1.2 Les lois de comportement

Nous nous limiterons dans tout ce qui suit au cas des *milieux parfaits* pour lesquels les lois de comportement sont linéaires. Ces lois permettent de modéliser, à une échelle macroscopique, les phénomènes électromagnétiques microscopiques qui se produisent dans le milieu considéré (polarisation, magnétisation). Un milieu *parfait, isotrope et homogène* est un milieu dans lequel les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad (6)$$

où  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont deux constantes positives, appelées respectivement *permittivité électrique* et *perméabilité magnétique*.

Si on reporte ces lois de comportement dans les équations de Maxwell on peut, par exemple, éliminer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{B}$  au profit de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ ; il vient

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mu \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \varepsilon \mathcal{E}}{\partial t} = \mathcal{J}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}, \quad (9)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathcal{H}) = 0. \quad (10)$$

Le milieu considéré est dit de plus *conducteur* (ohmique) si la *loi d'Ohm* est satisfaite :

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}, \quad (11)$$

où  $\sigma$  est une constante positive appelée *constante de conductivité*. Cette relation, reportée dans (8) permet alors d'éliminer  $\mathcal{J}$ .

Un milieu est dit *isolant* lorsque  $\sigma = 0$  dans la relation (11), et par conséquent  $\mathcal{J} = 0$  : c'est un milieu qui ne permet pas le déplacement des charges électriques. Un *conducteur parfait* est la limite formelle d'une famille de matériaux conducteurs dans lesquels la conductivité tend vers l'infini,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  y sont alors nuls.

Un cas particulier important des milieux parfaits isolants est *le vide*: la permittivité et la perméabilité du vide sont respectivement notées  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . On pose  $\varepsilon_0\mu_0 = c_0^{-2}$ ;  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide, comme nous le constaterons au paragraphe suivant en étudiant la relation entre les équations de Maxwell et l'équation des ondes.

Nous nous sommes contenté de présenter ici le cas des milieux parfaits *isotropes*. Notons simplement que les lois de comportements (6) et (11) peuvent se généraliser aux milieux *anisotropes* en définissant un tenseur de permittivité ( $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 3$ ), un tenseur de perméabilité ( $\mu_{ij}$ ,  $i, j = 1, 3$ ) et un tenseur de conductivité ( $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 3$ ); les lois de comportement prennent alors la forme suivante :

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{B}_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} \mathcal{H}_j, \quad \mathcal{J}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathcal{E}_j, \quad i = 1, 3.$$

### 1.1.3 Relation avec l'équation des ondes

Supposons que  $\mathcal{J} = 0$  et  $\mathcal{R} = 0$ ; en prenant le rotationnel de (7) et en dérivant (8) par rapport au temps il vient, si  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont constants:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathcal{E}) + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0.$$

On a par ailleurs:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathcal{E}) = -\Delta \mathcal{E} + \text{grad}(\text{div } \mathcal{E}).$$

On en déduit donc, d'après (9), que  $\mathcal{E}$  satisfait *l'équation des ondes*:

$$-\Delta \mathcal{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

On montre de la même façon, en prenant cette fois le rotationnel de (8), que  $\mathcal{H}$  satisfait aussi l'équation des ondes ; il en résulte que le champ électromagnétique se propage à la vitesse  $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ . Remarquons que la réciproque n'est pas vraie: une solution  $\mathcal{E}$  de (12) ne satisfait pas nécessairement  $\text{div } \mathcal{E} = 0$ ; ce n'est donc pas dans ce cas une solution des équations de Maxwell.

### 1.1.4 Le régime périodique établi

On recherche des solutions particulières des équations de Maxwell (7)-(10) sujettes à une dépendance harmonique du temps, ce qui revient à choisir une pulsation  $\omega > 0$  et à poser:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \Re \mathbf{e}(E(x)e^{-i\omega t}), \\ \mathcal{H}(x, t) &= \Re \mathbf{e}(H(x)e^{-i\omega t}), \\ \mathcal{J}(x, t) &= \Re \mathbf{e}(J(x)e^{-i\omega t}), \\ \mathcal{R}(x, t) &= \Re \mathbf{e}(\rho(x)e^{-i\omega t}), \end{aligned}$$

où  $E$ ,  $H$ ,  $J$  et  $\rho$  sont des fonctions à valeurs complexes qui ne dépendent plus que des coordonnées d'espace. On obtient alors :

$$\operatorname{rot} E - i\omega\mu H = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{rot} H + i\omega\varepsilon E = J, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon E = \rho, \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \mu H = 0, \quad (16)$$

où  $J$  et  $\rho$  sont encore liés par la relation de conservation de la charge (5) qui prend la forme:

$$\operatorname{div} J - i\omega\rho = 0. \quad (17)$$

Notons bien que les équations de (15) et (16) résultent respectivement de (14) et (13) dès que  $J$  et  $\rho$  satisfont (17).

On peut éliminer dans (13)-(16) l'un des champs au profit de l'autre :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} E\right) - \omega^2\varepsilon E = i\omega J, \\ \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot} H\right) - \omega^2\mu H = \operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}J. \end{cases}$$

Dans le cas d'un milieu conducteur où  $J$  et  $E$  sont liés par la loi d'Ohm (11), qui prend ici la forme

$$J = \sigma E, \quad (18)$$

ces équations s'écrivent:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} E\right) - \omega^2\varepsilon_\sigma E = 0, \\ \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon_\sigma}\operatorname{rot} H\right) - \omega^2\mu H = 0, \end{cases} \quad (19)$$

où on a posé:

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}. \quad (20)$$

Notons que de (19), résulte en particulier que :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_\sigma E) = 0 \text{ et } \operatorname{div}(\mu H) = 0;$$

c'est la forme que prennent les équations (15) et (16) dans le cas d'un conducteur ohmique.

Remarquons enfin que dans le vide, où  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont constants, respectivement égaux à  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$ , et  $\sigma = 0$  ; les équations (19) prennent la forme simplifiée suivante:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) - k_s^2 E = 0, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} H) - k_s^2 H = 0, \end{cases} \quad (21)$$

où on a noté:

$$k_s^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0. \quad (22)$$

## 1.2 Les conditions de transmission

Dans le cas des équations de Maxwell, les conditions aux limites prennent naturellement la forme de conditions de transmission le long de frontières séparant deux milieux de caractéristiques différentes. Rappelons les équations (13)-(16), que nous admettrons être vérifiées au sens des distributions dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E - i\omega\mu H & = 0, \\ \operatorname{rot} H + i\omega\varepsilon E & = J, \\ \operatorname{div} \varepsilon E & = \rho, \\ \operatorname{div} \mu H & = 0. \end{cases}$$

Nous supposons que  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont discontinus le long d'une frontière  $\Gamma$ , qu'ils sont réguliers ainsi que  $E$  et  $H$  de part et d'autre de  $\Gamma$ , et appartiennent localement à  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$  (cette dernière condition revient simplement à dire que l'énergie électromagnétique est finie dans tout domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ ). Si  $\Gamma$  sépare  $\mathbb{R}^3$  en  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , on note  $n^+$  et  $n^-$  leurs normales extérieures respectives le long de  $\Gamma$ , ainsi que

$$U^+ = U|_{\Omega^+}, \quad U^- = U|_{\Omega^-}, \quad \text{et } [U] = (U^+ - U^-)|_{\Gamma}. \quad (23)$$

### 1.2.1 Traces tangentielles

**Le champ magnétique** Pour  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ , on a d'une part, par définition de la dérivation au sens des distributions,

$$\langle \operatorname{rot} H, \Phi \rangle = \langle H, \operatorname{rot} \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} H \cdot \operatorname{rot} \Phi,$$

et d'autre part, en vertu de la formule de Green

$$\int_{\Omega^\pm} H^\pm \cdot \operatorname{rot} \Phi = \int_{\Omega^\pm} \operatorname{rot} H^\pm \cdot \Phi + \int_{\Gamma} H^\pm \cdot (n^\pm \wedge \Phi) d\gamma,$$

par conséquent, en vertu de (14),

$$\begin{aligned} \langle J, \Phi \rangle &= \langle \operatorname{rot} H, \Phi \rangle + i\omega \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon E \cdot \Phi \\ &= \int_{\Omega^+} (\operatorname{rot} H^+ + i\omega\varepsilon^+ E^+, \Phi) + \int_{\Omega^-} (\operatorname{rot} H^- + i\omega\varepsilon^- E^-, \Phi) \\ &\quad + \int_{\Gamma} [H] \cdot (n^+ \wedge \Phi) d\gamma, \end{aligned}$$

soit

$$J = \{\operatorname{rot} H\} + i\omega\varepsilon E + ([H] \wedge n^+) \delta_\Gamma, \quad (24)$$

où  $\{\operatorname{rot} H\}$  désigne la fonction séparément égale à  $\operatorname{rot} H$  sur  $\Omega^+$  et sur  $\Omega^-$ , et où on note  $F\delta_\Gamma$  la distribution (dont le support est concentré sur  $\Gamma$ ) définie par  $\langle F\delta_\Gamma, \Phi \rangle = \int_{\Gamma} F \cdot \Phi d\gamma$ . Dans le cas où le milieu est un conducteur ohmique et où  $\sigma$  est borné, alors d'après (18),  $J$  est une fonction de carré intégrable, et par conséquent

$$\operatorname{rot} H \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3, \quad \text{soit } [H] \wedge n = 0. \quad (25)$$

**Le champ électrique** Le même raisonnement que celui conduisant à la formule (24) aboutit à

$$0 = \{\text{rot } E\} - i\omega\mu H + ([E] \wedge n^+) \delta_\Gamma,$$

et par conséquent

$$[E] \wedge n = 0. \quad (26)$$

### 1.2.2 Traces normales

**Le champ électrique** De même, pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  on a

$$\langle \text{div } \varepsilon E, \varphi \rangle = - \langle \varepsilon E, \text{grad } \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon E \cdot \text{grad } \varphi,$$

ainsi que

$$\int_{\Omega^\pm} \varepsilon^\pm E^\pm \cdot \text{grad } \varphi = - \int_{\Omega^\pm} \varphi \text{div } \varepsilon^\pm E^\pm + \int_\Gamma \varphi (\varepsilon^\pm E^\pm, n^\pm) d\gamma,$$

soit,

$$\begin{aligned} \langle \rho, \varphi \rangle &= \langle \text{div } \varepsilon E, \varphi \rangle \\ &= \int_{\Omega^+} \varphi \text{div } \varepsilon^+ E^+ + \int_{\Omega^-} \varphi \text{div } \varepsilon^- E^- - \int_\Gamma \varphi ([\varepsilon E], n^+) d\gamma, \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho = \{\text{div } \varepsilon E\} - ([\varepsilon E], n^+) \delta_\Gamma. \quad (27)$$

Dans le cas d'un conducteur ohmique dont la conductivité reste bornée, on a  $\text{div } \varepsilon_\sigma E = 0$ ; la formule qui précède prend donc la forme

$$[\varepsilon_\sigma E] \cdot n = 0. \quad (28)$$

**Le champ magnétique** De même, on obtient

$$[\mu H] \cdot n = 0. \quad (29)$$

### 1.2.3 Les conditions aux limites de conducteur parfait

Dans le cas où la conductivité de l'un des deux milieux est très élevée, le champ électromagnétique dans ce milieu tend vers zéro, tandis que le courant associé tend vers une distribution supportée par l'interface entre les deux milieux. L'examen des formules qui précèdent montre que seules les formules (26) et (29) ne font intervenir ni densité de courant inconnue ni valeur infinie de la conductivité ; elles sont donc à l'origine des deux conditions aux limites de conducteur parfait suivantes:

$$E \wedge n|_\Gamma = 0, \text{ soit encore } \text{rot } H \wedge n|_\Gamma = 0, \quad (30)$$

et

$$H \cdot n|_\Gamma = 0, \text{ soit } \text{rot } E \cdot n|_\Gamma = 0. \quad (31)$$

En fait, la condition normale (31) apparaît comme une conséquence de la condition tangentielle (30). En effet, si le conducteur parfait occupe par exemple le domaine  $\Omega^-$ , la formule de Green nous montre que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\int_{\Gamma} (\text{rot } E \cdot n) \varphi \, d\gamma = \int_{\Omega^+} \text{rot } E \cdot \text{grad } \varphi + \int_{\Omega^+} \text{div}(\text{rot } E) \varphi,$$

où la seconde intégrale sur  $\Omega^+$  est évidemment nulle. On a par conséquent

$$\int_{\Gamma} (\text{rot } E \cdot n) \varphi \, d\gamma = \int_{\Omega^+} E \cdot \text{rot}(\text{grad } \varphi) - \int_{\Gamma} (E \wedge n) \cdot \text{grad } \varphi \, d\gamma,$$

d'où le résultat: si  $E \wedge n$  s'annule sur  $\Gamma$ , il en va de même pour  $\text{rot } E \cdot n$  (mais la réciproque n'est bien sûr pas vraie). On peut montrer de façon similaire que si  $(\text{rot } H \wedge n)|_{\Gamma} = 0$ , alors  $(H \cdot n)|_{\Gamma} = 0$  (il faut alors utiliser le fait que  $H$  satisfait les équations de Maxwell dans  $\Omega^+$ ).

### 1.3 Les équations régularisées

#### 1.3.1 Analogie avec les équations de l'élasticité

Quand le milieu est homogène, il existe un lien remarquable entre les équations de Maxwell et le système de l'élasticité. Notons

$$\mathcal{U}(x; t) = \Re \mathfrak{e} (U(x) e^{-i\omega t})$$

le déplacement, supposé harmonique en temps, dans un milieu dont la densité est notée  $\rho$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Les équations de l'élasticité linéaire sont les suivantes:

$$-\sigma_{ij,j}(U) - \omega^2 \rho U_i = 0, \quad \text{où } \sigma_{ij}(U) = \lambda(\text{div } U) \delta_{ij} + \mu(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (32)$$

(avec la convention de sommation sur les indices répétés, et la notation de dérivation  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ ). Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants, elles peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$\mu \text{rot}(\text{rot } U) - (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div } U) - \omega^2 \rho U = 0. \quad (33)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j}(U) &= -\lambda(\text{grad div } U)_i - \mu(U_{i,jj} + U_{j,ij}) \\ &= -\lambda(\text{grad div } U)_i - \mu(\Delta U + \text{grad div } U)_i \\ &= -(\lambda + \mu)(\text{grad div } U)_i - \mu \Delta U_i \end{aligned}$$

et

$$\mu \text{rot}(\text{rot } U) = -\mu \Delta U + \mu \text{grad div } U.$$

Pour  $\lambda = -2\mu$ , il ne s'agit de rien d'autre que des équations de Maxwell, mais en fait toute solution des équations de Maxwell est à divergence nulle et par conséquent vérifie (33), même si  $\lambda + 2\mu \neq 0$ . L'intérêt de cette remarque réside dans le fait que (33) est fortement elliptique si et seulement si  $\lambda + 2\mu \neq 0$ , ce qui rend son étude plus simple et ses solutions plus régulières.

**DÉFINITION 1.1** *On dit que l'opérateur  $A$  est fortement elliptique si son symbole principal, c'est-à-dire la transformée de Fourier de l'ensemble de ses termes de plus haut degré, est inversible en tout point différent de 0.*

**LEMME 1.1** *L'opérateur  $A_t = \text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U)$  est fortement elliptique si et seulement si  $t^{-1} \neq 0$ . En fait, si  $\hat{\cdot}$  note la transformée de Fourier, on montre que*



$$(i) \text{ si } t^{-1} \neq 0, \det(\hat{A}_t(\xi)) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0.$$

$$(ii) \text{ si } t^{-1} = 0, \det(\hat{A}_0(\xi)) = 0 \forall \xi.$$

*Démonstration.* On a  $\text{rot}(\text{rot } U) = \text{grad}(\text{div } U) - \Delta U$ , et par conséquent  $A_t = (1-t^{-1}) \text{grad}(\text{div } U) - \Delta U$ . Posant  $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  et  $\alpha = t^{-1} - 1$ , on montre alors aisément que

$$\hat{A}_t = \begin{pmatrix} \rho^2 + \alpha\xi_1^2 & \alpha\xi_1\xi_2 & \alpha\xi_1\xi_3 \\ \alpha\xi_2\xi_1 & \rho^2 + \alpha\xi_2^2 & \alpha\xi_2\xi_3 \\ \alpha\xi_3\xi_1 & \alpha\xi_3\xi_2 & \rho^2 + \alpha\xi_3^2 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_t) &= (\rho^2 + \alpha\xi_1^2) \{ (\rho^2 + \alpha\xi_2^2)(\rho^2 + \alpha\xi_3^2) - \alpha^2\xi_2^2\xi_3^2 \} \\ &\quad - \alpha\xi_2\xi_1 \{ \alpha\xi_1\xi_2(\rho^2 + \alpha\xi_3^2) - \alpha^2\xi_1\xi_2\xi_3^2 \} \\ &\quad + \alpha\xi_3\xi_1 \{ \alpha^2\xi_1\xi_2^2\xi_3 - \alpha\xi_1\xi_3(\rho^2 + \alpha\xi_2^2) \} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_t) &= \rho^2(\rho^2 + \alpha\xi_1^2) \{ \rho^2 + \alpha(\xi_2^2 + \xi_3^2) \} - \rho^2\alpha^2\xi_1^2(\xi_2^2 + \xi_3^2) \\ &= \rho^4(\rho^2 + \rho^2\alpha) \\ &= t^{-1}\rho^6 \end{aligned}$$

□

Bien entendu, cette analogie ne s'étend pas aux conditions aux limites, qui pour les équations de l'élasticité sont du type  $U|_{\Gamma} = 0$  (condition essentielle) ou  $\sigma_{ij}(U)n_j = 0$  (condition naturelle) ; il ne saurait donc être question de réduire l'étude des équations de Maxwell à celle du système de l'élasticité. Nous montrerons cependant que (33) est équivalent aux équations de Maxwell, sous réserve d'un choix judicieux des conditions aux limites, et qu'il en découle une méthode aisée de discrétisation des équations de Maxwell.

### 1.3.2 Le cas des coefficients variables

Dans le cas de coefficients variables nous serons amenés à prendre pour forme régularisée des équations de Maxwell

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U) - \omega^2 \xi U = 0, \quad (34)$$

où  $\zeta$ ,  $\xi$  et  $\tau$  sont des fonctions à valeurs complexes. Chacune des équations (19) constitue un cas particulier de (34). En effet, en choisissant :

$$\zeta = \mu, \quad \xi = \varepsilon_\sigma \text{ et } \tau^{-1} = 0,$$

(34) n'est autre que l'équation (19) relative à  $E$ . Notons que pour toute valeur  $\tau$  (réelle ou complexe),  $E$  sera toujours solution de (34) puisque  $\text{div}(\varepsilon_\sigma E) = 0$ . De la même façon, si on prend :

$$\zeta = \varepsilon_\sigma, \quad \xi = \mu \text{ et } \tau^{-1} = 0,$$

on retrouve l'équation en  $H$  de (19).

Si  $\zeta$ ,  $\xi$  et  $\tau$  sont constants, respectivement égaux à  $\zeta_0$ ,  $\xi_0$  et  $\tau_0$ , l'équation (34) prend la forme simplifiée :

$$\text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U) - k_s^2 U = 0, \quad (35)$$

avec :

$$k_s^2 = \omega^2 \xi_0 \zeta_0 \text{ et } t^{-1} = \tau_0^{-1} \zeta_0 |\xi_0|^2.$$

Remarquons pour terminer que dans le cas particulier où  $t = 1$ , cette équation n'est autre que l'équation de Helmholtz vectorielle:

$$-\Delta U - k_s^2 U = 0. \quad (36)$$

Comme nous l'avons fait lors de l'étude de l'équation de Helmholtz, nous allons commencer par calculer quelques solutions particulières des équations de Maxwell (classiques et régularisées). Nous nous plaçons ici dans le cas où  $\zeta$ ,  $\xi$  et  $\tau$  sont constants, ce qui conduit à la forme simplifiée (35). Nous nous limiterons au cas le plus instructif: celui où  $k_s \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ .

#### 1.4 Les ondes planes

Cherchons tout d'abord des solutions de l'équation (35) sous forme d'ondes planes, c'est-à-dire invariantes dans deux directions. Sans restreindre la généralité, on peut choisir ces directions parallèles au plan  $(O, x_2, x_3)$ , le cas général s'en déduisant par une simple rotation du système d'axes. On a donc dans ce cas :

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 2, 3.$$

L'équation (35) s'écrit alors :

$$\begin{cases} -t^{-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - k_s^2 U_1 & = 0, \\ -\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} - k_s^2 U_2 & = 0, \\ -\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} - k_s^2 U_3 & = 0. \end{cases}$$

##### 1.4.1 Le cas régularisé

La résolution de ce système ne présente pas de difficulté. La forme générale des solutions est la suivante :

$$U = \begin{pmatrix} a_1 e^{ik_p x_1} \\ a_2 e^{ik_s x_1} \\ a_3 e^{ik_s x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 e^{-ik_p x_1} \\ b_2 e^{-ik_s x_1} \\ b_3 e^{-ik_s x_1} \end{pmatrix},$$

où

$$k_p = \sqrt{t k_s^2}; \quad (37)$$

les  $a_i$  et  $b_i$ , pour  $i = 1, 3$ , étant des constantes complexes. Dans cette expression, le premier terme (dépendant des  $a_i$ ) correspond à une onde qui se propage suivant la direction des  $x_1$  croissants, et le second (dépendant des  $b_i$ ), des  $x_1$  décroissants. Plus généralement, une onde plane qui se propage suivant la direction  $\nu \in \mathbb{R}^3$ , où  $\nu$  est un vecteur unitaire, est donnée par:

$$U = A e^{ik_s(x \cdot \nu)} + \alpha \nu e^{ik_p(x \cdot \nu)}, \quad (38)$$

où  $A$  est un vecteur de  $\mathbb{C}^3$  tel que  $A \cdot \nu = 0$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Il apparaît ainsi que  $U$  est la superposition de deux ondes planes qui se propagent à des vitesses différentes (sauf si  $t = 1$ ), l'une étant normale à la direction de propagation et l'autre, parallèle à cette direction.

### 1.4.2 Le cas classique

On obtient comme précédemment une solution générale du type (38) avec cette fois  $\alpha = 0$ . Notons que dans ce cas, l'équation (34) n'est autre que la forme (21) des équations de Maxwell, avec  $k_s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ . Si par exemple  $U = E$ , l'expression de  $H$  se déduira de celle de  $E$  par la relation (13). On aura donc:

$$E = A e^{ik_s(x \cdot \nu)} \quad \text{et} \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\nu \wedge E), \quad (39)$$

où  $A$  est un vecteur de  $\mathbb{C}^3$  vérifiant  $A \cdot \nu = 0$ . On retrouve ainsi l'orthogonalité bien connue entre la direction de propagation, le champ électrique et le champ magnétique.

A ce stade, nous pouvons poursuivre l'analogie avec l'élasticité évoquée plus haut (et justifier le choix des notations  $k_s$  et  $k_p$ ). Une onde telle que (39) est une solution particulière à divergence nulle des équations de l'élasticité: elle est appelée dans ce contexte "onde de cisaillement" ou "onde S" ; sa vitesse de propagation est caractérisée par son nombre d'onde  $k_s$ . Dans le cas des équations régularisées apparaît une autre catégorie de solutions particulières qui dérivent d'un potentiel scalaire (ici:  $\text{grad } e^{ik_p x \cdot \nu}$ ) elles s'apparentent aux "ondes de pression" ou "ondes P" de l'élasticité, et leur nombre d'onde  $k_p$  est en général différent de celui des ondes S.

## 1.5 Ondes sortantes et entrantes

Contrairement au cas de l'acoustique, il n'existe pas de solution des équations de Maxwell qui ne dépende que de la distance  $r$  à un point. Nous allons voir cependant qu'à l'aide des solutions radiales de l'équation de Helmholtz, on peut construire une famille de solutions de (35) ; on en étudiera le comportement à l'infini, de façon à mettre en évidence des conditions permettant de sélectionner les ondes "sortantes" (respectivement, "entrantes").

### 1.5.1 Construction de solutions particulières

Commençons par construire de façon systématique une famille de solutions des équations de Maxwell ; soit donc  $U$  solution de

$$\text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U) - k_s^2 U = d, \quad (40)$$

$d$  étant un champ de vecteurs donné. On cherchera  $U$  sous la forme suivante dite décomposition de Hodge, et on peut montrer qu'il ne s'agit pas là d'une hypothèse restrictive:

$$U = \text{grad } \varphi + \text{rot } \Phi, \quad \text{où } \text{div } \Phi = 0. \quad (41)$$

On aura alors

$$\text{div } U = \Delta \varphi \quad \text{et} \quad \text{rot } U = \text{rot}(\text{rot } \Phi) = -\Delta \Phi, \quad (42)$$

puisque  $\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad } \text{div} - \Delta$  et  $\text{div } \Phi = 0$ . Si on applique à (40) les opérateurs  $\text{div}$  et  $\text{rot}$ , on obtient respectivement

$$\Delta (t^{-1} \Delta + k_s^2) \varphi = -\text{div } d, \quad (43)$$

$$\Delta (\Delta + k_s^2) \Phi = \text{rot } d. \quad (44)$$

En fait on résoudra

$$\Delta (t^{-1}\Delta + k_s^2) \psi = d, \text{ et on posera } \varphi = -\operatorname{div} \psi, \text{ et} \quad (45)$$

$$\Delta (\Delta + k_s^2) \Psi = d, \text{ avec } \Phi = \operatorname{rot} \Psi. \quad (46)$$

Remarquons alors que, par décomposition en ‘éléments simples’, on a

$$(\Delta(\Delta + \lambda))^{-1} = \frac{1}{\lambda} (\Delta^{-1} - (\Delta + \lambda)^{-1}),$$

il en résulte que si on note  $\omega$ ,  $\omega_s$ , et  $\omega_p$  des solutions respectives de

$$-\Delta \omega = d, \quad (-\Delta - k_s^2) \omega_s = d, \text{ et } (-\Delta - k_p^2) \omega_p = d, \quad (47)$$

$\psi = k_s^{-2}(\omega_p - \omega)$  et  $\Psi = k_s^{-2}(\omega_s - \omega)$  sont respectivement solution de (45) et (46). On aura donc  $\varphi = -k_s^{-2} \operatorname{div}(\omega_p - \omega)$  et  $\Phi = k_s^{-2} \operatorname{rot}(\omega_s - \omega)$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} k_s^2 U &= -\operatorname{grad} \operatorname{div}(\omega_p - \omega) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\omega_s - \omega) \\ &= -\operatorname{grad} \operatorname{div} \omega_p + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \omega_s + d \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div}(\omega_s - \omega_p) + k_s^2 \omega_s, \\ &= \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\omega_s - \omega_p) + k_p^2 \omega_p \end{aligned}$$

soit finalement

$$\begin{aligned} U &= \omega_s + k_s^{-2} \operatorname{grad} \operatorname{div}(\omega_s - \omega_p), \\ &= k_s^{-2} (-\operatorname{grad} \operatorname{div} \omega_p + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \omega_s - d), \\ &= t\omega_p + k_s^{-2} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\omega_s - \omega_p). \end{aligned} \quad (48)$$

Il est alors aisé de vérifier que (48) constitue bien une solution de (40).

**REMARQUE 1.1** Si l'on impose  $\omega_p = 0$ , alors  $U$  (donné par les deux premières expressions de (48)) est solution des équations classiques

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) - k_s^2 U = d.$$

### 1.5.2 Comportement à l'infini

Désormais nous considérerons le cas où les solutions  $\omega_p$  et  $\omega_s$  de (47) sont respectivement de la forme

$$\omega_q = V h_q, \text{ avec } q = p \text{ ou } s, \quad (49)$$

où  $V$  est un vecteur constant et  $h_p$  et  $h_s$  des solutions scalaires radiales de (47) ; ces solutions sont de la forme

$$h_q(r) = \lambda_q \frac{e^{ik_q r}}{r} + \mu_q \frac{e^{-ik_q r}}{r}. \quad (50)$$

Il apparaît ainsi deux catégories de solutions pour  $U$  (données par (48)) : les ondes sortantes ( $\mu_q = 0$ ) et les ondes entrantes ( $\lambda_q = 0$ ). Précisons le comportement asymptotique à l'infini de ces solutions. On a tout d'abord

$$\operatorname{grad} h_q = n h_q'$$

où  $n$  est le vecteur unitaire radial et  $h'_q$  note la dérivée radiale de  $h_q$ . Par suite

$$\operatorname{div} \omega_q = (V_q \cdot \operatorname{grad} h_q) = (V \cdot n) h'_q, \quad (51)$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega_q &= h'_q \operatorname{grad} (V \cdot n) + (V \cdot n) \operatorname{grad} h'_q \\ &= \frac{1}{r} h'_q (n \wedge (V \wedge n)) + n (V \cdot n) h''_q, \end{aligned} \quad (52)$$

puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (V_q \cdot n) &= (V_q \cdot \operatorname{grad}) n \\ &= \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) V_j \\ &= \frac{1}{r} (V - n (n \cdot V)). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} U &= n (V \cdot n) h_s + n \wedge (V \wedge n) h_s \\ &\quad + k_s^{-2} \left( \frac{1}{r} n \wedge (V \wedge n) (h'_s - h'_p) + n (V \cdot n) (h''_s - h''_p) \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$= n (V \cdot n) h_s + n \wedge (V \wedge n) h_s - k_s^{-2} n (V \cdot n) (k_s^2 h_s - k_p^2 h_p) + O(r^{-2})$$

en remarquant que  $h''_q = -k_q^2 h_q + O(r^{-2})$  (puisque  $h''_q + 2h'_q/r + k_q^2 h_q = 0$ ); soit

$$U = t n (V \cdot n) h_p + n \wedge (V \wedge n) h_s + O(r^{-2}), \quad (54)$$

ce qui constitue manifestement une décomposition asymptotique de  $U$  en composantes radiale et transverse.

La formule (48) nous prouve par ailleurs que

$$\operatorname{div} U = t \operatorname{div} \omega_p \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} U = \operatorname{rot} \omega_s; \quad (55)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U &= t (V \cdot n) h'_p, \\ \operatorname{rot} U \wedge n &= \operatorname{rot} (V h_s) \wedge n = (\operatorname{grad} h_s \wedge V) \wedge n = h'_s n \wedge (V \wedge n). \end{aligned}$$

La comparaison entre ces expressions et (54) nous montre clairement le lien entre  $\operatorname{div} U$  et le comportement asymptotique de  $(U \cdot n)$ , respectivement  $\operatorname{rot} U \wedge n$  et celui de  $n \wedge (U \wedge n)$ , les premiers ne dépendant que de  $V$  et  $h_p$ , les seconds de  $V$  et  $h_s$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U \pm ik_p (U \cdot n) &= t (V \cdot n) (h'_p \pm ik_p h_p) + O(r^{-2}), \quad \text{et} \\ \operatorname{rot} U \wedge n \pm ik_s n \wedge (U \wedge n) &= n \wedge (V \wedge n) (h'_s \pm ik_s h_s) + O(r^{-2}). \end{aligned} \quad (56)$$

Ainsi apparaît naturellement le lien entre le comportement à l'infini des composantes radiale et transverse de  $U$  et les conditions de rayonnement respectivement vérifiées par  $h_p$  et  $h_s$ . A ce stade, il est clair que les conditions de rayonnement associées aux équations de Maxwell et permettant de sélectionner les ondes sortantes sont au nombre de deux:

$$\operatorname{div} U - ik_p (U \cdot n) = O(r^{-2}), \quad \text{et} \quad (57)$$

$$\operatorname{rot} U \wedge n - ik_s n \wedge (U \wedge n) = O(r^{-2}). \quad (58)$$

La condition (57), dite condition radiale, sera vérifiée si et seulement si  $h_p$  satisfait la condition de rayonnement de Sommerfeld  $h'_p - ik_p h_p = O(r^{-2})$ , et la condition (58), dite condition transverse, pour  $h'_s - ik_s h_s = O(r^{-2})$ .

On pourrait montrer plus généralement que  $U$  (donné par (48)) vérifie les conditions de rayonnement radiale et transverse si  $\omega_s$  et  $\omega_p$  vérifient les conditions sortantes relatives à l'équation de Helmholtz.

**Le cas classique** La formule (54) se réduit alors à

$$U = n \wedge (V \wedge n) h_s + O(r^{-2}),$$

ce qui conduit à affirmer que (58) reste vérifiée par les ondes sortantes et que, de plus

$$(U \cdot n) = O(r^{-2}).$$

Cet ensemble de conditions peut s'exprimer sous la forme suivante, appelée "condition de Silver-Müller",

$$\operatorname{rot} U \wedge n - ik_s U = O(r^{-2}). \quad (59)$$

Dans la suite, nous conserverons cette terminologie pour les conditions (57) et (58).

## 1.6 La conservation de l'énergie

Les notions introduites dans ce paragraphe sont très similaires à celles utilisées en acoustique ; dans le cas où la conductivité électrique n'est pas nulle, il s'introduit cependant un terme supplémentaire de dissipation d'énergie, qui n'est autre que le classique *effet Joule*.

### 1.6.1 Le cas transitoire

**DÉFINITION 1.2 (Energie électromagnétique)** Si  $D$  note un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle *énergie électromagnétique dans le domaine  $D$*  la quantité suivante:

$$\mathcal{W}_D = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 + \mu \|\mathcal{H}\|^2. \quad (60)$$

**DÉFINITION 1.3 (Flux d'énergie)** On appelle *flux d'énergie entrant dans le domaine  $D$* , la quantité suivante, où  $n$  est la normale extérieure à  $D$  :

$$\mathcal{F}_{\partial D} = - \int_{\partial D} ((\mathcal{E} \wedge \mathcal{H}) \cdot n) d\gamma. \quad (61)$$

On pose alors

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H}, \quad (62)$$

$c$ 'est le vecteur de Poynting.

**DÉFINITION 1.4 (Effet Joule)** On appelle *énergie dissipée dans le domaine  $D$  par effet Joule* la quantité suivante:

$$\mathcal{C}_D = \int_D (\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}). \quad (63)$$

**THÉORÈME 1.1 (Conservation de l'énergie)** La dérivée temporelle de l'énergie électromagnétique dans un domaine donné est égale à la différence entre le flux d'énergie entrant par le bord et l'énergie dissipée dans le domaine par effet Joule, soit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}_D = \mathcal{F}_{\partial D} - \mathcal{C}_D. \quad (64)$$

*Démonstration.* Soit en effet  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  une solution des équations (7)-(10), nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W}_D &= \int_D \varepsilon \left( \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) + \mu \left( \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \\ &= \int_D (\mathcal{E} \cdot \text{rot } \mathcal{H}) - (\mathcal{H} \cdot \text{rot } \mathcal{E}) - \int_D \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} \\ &= - \int_{\partial D} ((\mathcal{E} \wedge \mathcal{H}) \cdot n) d\gamma - \int_D \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}, \end{aligned}$$

soit le résultat annoncé. □

### 1.6.2 Le régime harmonique

**DÉFINITION 1.5 (Flux moyen d'énergie)** On appelle flux moyen d'énergie entrant durant une période dans le domaine  $D$  la quantité:

$$F_{\partial D} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathcal{F}_{\partial D} dt. \quad (65)$$

**DÉFINITION 1.6 (Energie moyenne dissipée)** On donne le nom d'énergie moyenne dissipée durant une période dans le domaine  $D$  à la quantité suivante:

$$C_D = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} C_D dt. \quad (66)$$

**THÉORÈME 1.2 (Conservation de l'énergie moyenne)** Le flux moyen d'énergie entrant dans un domaine borné est égal à l'énergie moyenne qui y est dissipée, soit

$$F_{\partial D} - C_D = 0. \quad (67)$$

*Démonstration.* Il s'agit tout simplement d'intégrer la relation (64) sur une période. □

### 1.6.3 Calcul du flux d'énergie moyen

De même qu'en acoustique, on vérifie aisément que

$$F_{\partial D} = -\frac{1}{2} \Re \int_{\partial D} ((E \wedge \bar{H}) \cdot n) d\gamma.$$

Posons alors

$$S = \frac{1}{2} E \wedge \bar{H}; \quad (68)$$

on aura

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{2\omega\mu} E \wedge \text{rot } \bar{E} \\ &= \frac{i}{2\omega\varepsilon_\sigma} \text{rot } H \wedge \bar{H}, \end{aligned} \quad (69)$$

d'où découlent les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
F_{\partial D} &= -\Re \left( \int_{\partial D} (S \cdot n) \, d\gamma \right) \\
&= -\frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \frac{1}{\mu} ((E \wedge n) \cdot \operatorname{rot} \bar{E}) \, d\gamma \right) \\
&= -\frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \frac{1}{\varepsilon_\sigma} ((H \wedge n) \cdot \operatorname{rot} \bar{H}) \, d\gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\partial D} ((E \wedge \bar{H} + \bar{E} \wedge H) \cdot n) \, d\gamma.
\end{aligned} \tag{70}$$

Notons également que  $C_D$  a pour expression

$$C_D = \frac{1}{2} \Re \left( \int_D E \cdot \bar{J} \right), \tag{71}$$

soit, dans le cas où la loi d'Ohm s'applique

$$\begin{aligned}
C_D &= \frac{1}{2} \int_D \sigma \|E\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_D \frac{\sigma}{\omega^2 \varepsilon^2 + \sigma^2} \|\operatorname{rot} H\|^2.
\end{aligned} \tag{72}$$

**REMARQUE 1.2** *Le Théorème de conservation de l'énergie moyenne se déduit aisément des équations (13)-(16) relatives au régime périodique.*

On a en effet

$$\begin{aligned}
0 &= ((\operatorname{rot} E - i\omega\mu H) \cdot \bar{H}) - (E \cdot (\operatorname{rot} \bar{H} - i\omega\varepsilon\bar{E} - \bar{J})) \\
&= (\operatorname{rot} E \cdot \bar{H}) - (E \cdot \operatorname{rot} \bar{H}) - i\omega \left( \mu \|H\|^2 - \varepsilon \|E\|^2 \right) + (E \cdot \bar{J}),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$2 \int_{\partial D} (S \cdot n) \, d\gamma + \int_D E \cdot \bar{J} = i\omega \int_D \mu \|H\|^2 - \varepsilon \|E\|^2, \tag{73}$$

ce qui implique

$$F_{\partial D} - C_D = 0.$$

#### 1.6.4 Les équations régularisées

Un théorème analogue de conservation de l'énergie peut être démontré pour les équations régularisées (34): on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_D \zeta^{-1} \|\operatorname{rot} U\|^2 + \int_D \tau^{-1} |\operatorname{div} \xi U|^2 - \omega^2 \int_D \xi \|U\|^2 \\
&\quad + \int_{\partial D} \zeta^{-1} (\operatorname{rot} U \cdot (\bar{U} \wedge n)) \, d\gamma - \int_{\partial D} \tau^{-1} (n \cdot \overline{\xi U}) \operatorname{div} \xi U \, d\gamma,
\end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$F_{\partial D}(U) - C_D(U) = 0, \tag{74}$$

avec

$$F_{\partial D}(U) = F_{\partial D}^s(U) + F_{\partial D}^p(U), \tag{75}$$



$$F_{\partial D}^s(U) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \zeta^{-1} (\operatorname{rot} U \cdot (\bar{U} \wedge n)) \, d\gamma \right), \quad (76)$$

$$F_{\partial D}^p(U) = -\frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \tau^{-1} (n \cdot \overline{\xi U}) \operatorname{div} \xi U \, d\gamma \right), \quad (77)$$

et

$$C_D(U) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_D \omega^2 \xi \|U\|^2 - \zeta^{-1} \|\operatorname{rot} U\|^2 - \tau^{-1} |\operatorname{div} \xi U|^2 \right). \quad (78)$$

**REMARQUE 1.3** Quand  $\tau^{-1} = 0$ , les expressions de  $F_{\partial D}(U)$  et  $C_D(U)$  se réduisent respectivement à

$$F_{\partial D}(U) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \zeta^{-1} (\operatorname{rot} U \cdot (\bar{U} \wedge n)) \, d\gamma \right),$$

et

$$C_D(U) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_D \omega^2 \xi \|U\|^2 - \zeta^{-1} \|\operatorname{rot} U\|^2 \right),$$

soit encore si  $U = E$ ,  $\zeta = \mu$  et  $\xi = \varepsilon + i\sigma/\omega$  :

$$F_{\partial D}(E) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \mu^{-1} (\operatorname{rot} E \cdot (\bar{E} \wedge n)) \, d\gamma \right),$$

$$C_D(E) = \frac{1}{2} \int_D \sigma \|E\|^2.$$

De même, pour  $U = H$ ,  $\zeta = \varepsilon + i\sigma/\omega$  et  $\xi = \mu$ , on trouve

$$F_{\partial D}(H) = \frac{1}{2\omega} \Im \left( \int_{\partial D} \left( \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right)^{-1} (\operatorname{rot} H \cdot (\bar{H} \wedge n)) \, d\gamma \right),$$

$$C_D(H) = -\frac{1}{2\omega} \int_D \Im \left( \left( \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right)^{-1} \right) \|\operatorname{rot} H\|^2,$$

toutes formules compatibles avec (70) et (72).

## 1.7 Les diverses formes de la condition de rayonnement

Au voisinage de l'infini, nous admettons que les divers coefficients introduits :  $\xi$ ,  $\zeta$ , et  $\tau$  sont constants, respectivement égaux à  $\xi_0$ ,  $\zeta_0$  et  $\tau_0$ . Comme nous l'avons vu en (35), l'équation prend alors la forme suivante :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) - t^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} U - k_s^2 U = 0,$$

avec

$$k_s^2 = \omega^2 \xi_0 \zeta_0, \quad t^{-1} = \tau_0^{-1} \zeta_0 |\xi_0|^2, \quad \text{et} \quad k_p^2 = t k_s^2. \quad (79)$$

La nature du comportement à l'infini de  $U$  dépend crucialement du fait que  $k_s$  et  $k_p$  sont ou non réels ; nous justifierons cette affirmation par la suite lors de l'étude de la solution élémentaire des équations de Maxwell.

### 1.7.1 Hypothèses générales

De façon à limiter l'étude aux situations les plus physiquement réalistes, nous allons être amenés à préciser les hypothèses relatives aux coefficients. Nous réduirons donc le domaine de variation des paramètres  $\xi$  et  $\zeta$  en fonction de leur signification physique, et celui de  $\tau$  pour les besoins de la démonstration d'unicité, ce qui nous conduit aux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \Re(\zeta), \Re(\xi), \Re(\tau) &\geq \alpha > 0, \\ \Im(\zeta), \Im(\xi), \Im(\tau) &\geq 0, \\ \zeta, \xi, \tau &\text{ bornés,} \end{aligned} \quad (80)$$

où  $\alpha$  est une constante réelle. Si on note

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \text{ et } \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}, \quad (81)$$

on constate que  $k_s^2$  et  $k_p^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{C}^+$ ; plus précisément les équivalences suivantes sont valables :

$$\begin{cases} k_s^2 \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow (\xi_0 \in \mathbb{R}^+) \cap (\zeta_0 \in \mathbb{R}^+), \\ k_s^2 \in \mathbb{C}^+ &\Leftrightarrow (\Im \xi_0 \neq 0) \cup (\Im \zeta_0 \neq 0), \end{cases} \quad (82)$$

et

$$\begin{cases} k_p^2 \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow (\zeta_0 \in \mathbb{R}^+) \cap (\tau_0 \in \mathbb{R}^+), \\ k_p^2 \in \mathbb{C}^+ &\Leftrightarrow (\Im \zeta_0 \neq 0) \cup (\Im \tau_0 \neq 0). \end{cases} \quad (83)$$

**REMARQUE 1.4** Notons que si pour  $k_s$  et  $k_p$  on prend les déterminations principales respectives des racines de  $k_s^2$  et  $k_p^2$  alors l'appartenance à  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{C}^+$  se conserve de  $k_s^2$  à  $k_s$  et de  $k_p^2$  à  $k_p$ .

### 1.7.2 Forme intégrale des conditions de Silver-Müller

Les conditions de rayonnement que nous allons décrire constituent une généralisation au cas de coefficients éventuellement complexes des conditions de rayonnement exhibées en (57), (58) et (59). La forme intégrale sous lesquelles nous les présentons découle du comportement asymptotique des composantes radiale et transverse et rend plus aisée l'étude de leur relation avec le flux d'énergie.

**Le cas des équations classiques** La condition de rayonnement prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U \wedge n - ik_s U\|^2 d\gamma &= 0 && \text{pour } \Im k_s = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|U\|^2 \right] d\gamma &= 0 && \text{pour } \Im k_s > 0, \end{aligned} \quad (84)$$

où  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq R\}$ .

**Le cas des équations régularisées** Les conditions transverse et radiale prennent respectivement la forme

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U \wedge n - ik_s n \wedge (U \wedge n)\|^2 d\gamma &= 0 && \text{pour } \Im k_s = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U \wedge n)\|^2 \right] d\gamma &= 0 && \text{pour } \Im k_s > 0, \end{aligned} \quad (85)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left| t^{-1/2} \operatorname{div} U - ik_s (U \cdot n) \right|^2 d\gamma &= 0 \quad \text{pour } \Im k_p = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |t|^{-1} |\operatorname{div} U|^2 + |k_s|^2 |U \cdot n|^2 \right] d\gamma &= 0 \quad \text{pour } \Im k_p > 0. \end{aligned} \quad (86)$$

REMARQUE 1.5 Remarquons que, pour  $t^{-1} \neq 0$ , les équations (86) peuvent s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\operatorname{div} U - ik_p (U \cdot n)|^2 d\gamma &= 0 \quad \text{pour } \Im k_p = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |\operatorname{div} U_S|^2 + |k_p|^2 |U \cdot n|^2 \right] d\gamma &= 0 \quad \text{pour } \Im k_p > 0. \end{aligned} \quad (87)$$

et que pour  $t^{-1} = 0$ , elles se réduisent à

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |U \cdot n|^2 d\gamma = 0; \quad (88)$$

les équations (84) en découlent. Par conséquent, les équations (85) et (86) peuvent être considérées comme exprimant les conditions de rayonnement tant dans le cas du problème classique que du problème régularisé.

### 1.7.3 Flux d'énergie et condition de rayonnement

Soit  $S$  une surface fermée entourant la région où le milieu est inhomogène et  $\Omega_S$  l'ouvert de frontière  $S$ .

**THÉORÈME 1.3 (Positivité du flux d'énergie moyen)** *Si  $U$  est solution des équations (94), vérifie les hypothèses (80) et de plus vérifie les conditions de rayonnement (85) et (86), alors le flux d'énergie sortant à travers  $S$  du voisinage du corps:  $-F_{\partial\Omega_S}$  est positif ; plus précisément si  $\Omega_S \subset B_R$  et  $D_R = B_R \setminus \overline{\Omega_S}$  alors*

$$\begin{aligned} -F_{\partial\Omega_S}(U) &= \lim_{R \rightarrow \infty} C_{D_R}(U) \\ &+ \frac{1}{4\omega |k_s| |\zeta_0|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\operatorname{rot} U \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U \wedge n)\|^2 \right] d\gamma \\ &+ \frac{|\xi_0|^2}{4\omega |k_p| |\tau_0|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |\operatorname{div} U|^2 + |k_p|^2 |U \cdot n|^2 \right] d\gamma \end{aligned} \quad (89)$$

où  $C_{D_R}(U) \geq 0$ , ainsi que les deux autres termes.

REMARQUE 1.6 Si  $k_s$ , respectivement  $k_p$ , n'est pas réel, le second terme, respectivement le troisième, disparaît dans l'équation (89) ; ce dernier terme disparaît également quand  $t^{-1} = 0$ .

*Démonstration.*

▷ D'après (74) nous avons

$$\begin{aligned} -F_{\partial\Omega_S}(U) &= F_{\partial D_R}(U) - F_{\partial B_R}(U), \\ &= C_{D_R}(U) - F_{\partial B_R}(U), \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \{C_{D_R}(U) - F_{\partial B_R}(U)\}, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} C_{D_R}(U) - \lim_{R \rightarrow \infty} F_{\partial B_R}(U), \end{aligned} \quad (90)$$

car, d'après (78) et (80),  $C_{D_R}(U)$  est positif et croissant avec  $R$ .

▷ Un calcul élémentaire conduit aux formules

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot} U \wedge n - i\lambda n \wedge (U \wedge n)\|^2 = \\ \|\operatorname{rot} U \wedge n\|^2 + |\lambda|^2 \|n \wedge (U \wedge n)\|^2 \\ + 2 \Im(\bar{\lambda} (\operatorname{rot} U \cdot \bar{U} \wedge n)), \end{aligned} \quad (91)$$

et

$$\begin{aligned} |\operatorname{div} U - i\mu (U \cdot n)|^2 = |\operatorname{div} U|^2 + |\mu|^2 |U \cdot n|^2 \\ - 2 \Im(\bar{\mu} (n \cdot \bar{U}) \operatorname{div} U), \end{aligned} \quad (92)$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} F_{\partial B_R}^s(U) &= \frac{1}{2\omega |k_s| |\zeta_0|} \Im \left( \int_{\partial B_R} \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0} |k_s| (\operatorname{rot} U \cdot (\bar{U} \wedge n)) d\gamma \right) \\ &= \frac{1}{4\omega |k_s| |\zeta_0|} \int_{\partial B_R} \left\| \operatorname{rot} U \wedge n - i \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0} |k_s| n \wedge (U \wedge n) \right\|^2 d\gamma \\ &\quad - \frac{1}{4\omega |k_s| |\zeta_0|} \int_{\partial B_R} \|\operatorname{rot} U \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U \wedge n)\|^2 d\gamma \end{aligned} \quad (93)$$

et

$$\begin{aligned} F_{\partial B_R}^p(U) &= -\frac{|\xi_0|^2}{2\omega |k_p| |\tau_0|} \Im \left( \int_{\partial B_R} \frac{|\tau_0|}{\tau_0} |k_p| (n \cdot \bar{U}) \operatorname{div} U d\gamma \right) \\ &= \frac{|\xi_0|^2}{4\omega |k_p| |\tau_0|} \int_{\partial B_R} \left| \operatorname{div} U - i \frac{|\tau_0|}{\tau_0} |k_p| (U \cdot n) \right|^2 d\gamma \\ &\quad - \frac{|\xi_0|^2}{4\omega |k_p| |\tau_0|} \int_{\partial B_R} |\operatorname{div} U|^2 + |k_p|^2 |U \cdot n|^2 d\gamma; \end{aligned} \quad (94)$$

le théorème résulte alors de la formule (90) et des conditions de rayonnement (85) et (86).  $\square$

## 1.8 Les problèmes de diffraction

Nous ne formulerons en fait dans ce paragraphe que le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur. Nous distinguerons essentiellement deux cas : selon que la conductivité est ou non nulle à l'infini. Les différentes formulations auxquelles nous aboutissons se distinguent par la nature de l'inconnue :  $E$  ou  $H$ , et donc par les conditions aux limites, ainsi que par le choix du paramètre  $\tau$ , et donc des conditions de rayonnement. De même qu'en acoustique, on notera  $U_I$  l'onde incidente,  $U_T$  le champ total, et  $U_D$  le champ diffracté, avec  $U_T = U_I + U_D$ . Le conducteur  $\mathcal{O}$  sera supposé borné, son bord sera noté  $\Gamma$ , et le domaine extérieur  $\Omega$ .

### 1.8.1 Les conditions aux limites de conducteur parfait

Les conditions aux limites associées au conducteur parfait ont été explicitées en (30):

**Pour le champ électrique**

$$U_T \wedge n|_\Gamma = 0. \quad (95)$$

Dans le cas des équations classiques, seule cette condition doit être imposée. Par contre, pour les équations régularisées, les solutions ne sont plus nécessairement à divergence nulle, et nous devons imposer une condition supplémentaire (scalaire) au bord. Comme notre ambition consiste en fait à trouver des solutions à divergence nulle, il est raisonnable d'imposer en supplément la nullité de la divergence au bord, condition naturelle pour les équations régularisées.

**Pour le champ magnétique**

$$\operatorname{rot} U_T \wedge n|_\Gamma = 0. \quad (96)$$

Ici encore, pour les équations classiques, seule cette condition doit être imposée. Dans le cas des équations régularisées, la stratégie adoptée pour le champ électrique ne s'applique pas: on est amené à imposer la nullité de la trace normale  $U_T \cdot n$  sur  $\Gamma$  (condition qui, dans le cas des équations classiques, découlait de la condition (96)).

Les résultats ultérieurs relatifs à l'existence et l'unicité des solutions et à l'équivalence entre les problèmes classique et régularisé justifieront ce point de vue.

## 1.8.2 Le cas classique

## Champ électrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U_T) - \omega^2 \xi U_T = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ U_T \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left[ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U_D \wedge n - ik_s U_D\|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U_D \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 \right] d\gamma = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{si } k_s \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_s \in \mathbb{C}^+, \end{array} \quad (97)$$

## Champ magnétique Dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U_T) - \omega^2 \xi U_T = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{rot } U_T \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left[ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U_D \wedge n - ik_s U_D\|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U_D \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 \right] d\gamma = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{si } k_s \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_s \in \mathbb{C}^+, \end{array} \quad (98)$$

### 1.8.3 Les équations régularisées

#### Le champ électrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U_T) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U_T) - \omega^2 \xi U_T = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ U_T \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \tau^{-1} \text{div } \xi U_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left[ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U_D \wedge n - ik_s n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U_D \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 \right] d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\text{div } U_D - ik_p (U_D \cdot n)|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |\text{div } U_D|^2 + |k_p|^2 |U_D \cdot n|^2 \right] d\gamma = 0 \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} \text{si } k_s \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_s \in \mathbb{C}^+, \\ \text{si } t^{-1} \neq 0 \text{ et } k_p \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_p \in \mathbb{C}^+ \text{ ou } t^{-1} = 0. \end{array} \end{array} \right. \quad (99)$$

#### Le champ magnétique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U_T) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U_T) - \omega^2 \xi U_T = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ (U_T \cdot n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \text{rot } U_T \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left[ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\text{rot } U_D \wedge n - ik_s n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U_D \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U_D \wedge n)\|^2 \right] d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\text{div } U_D - ik_p (U_D \cdot n)|^2 d\gamma = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |\text{div } U_D|^2 + |k_p|^2 |U_D \cdot n|^2 \right] d\gamma = 0 \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} \text{si } k_s \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_s \in \mathbb{C}^+, \\ \text{si } t^{-1} \neq 0 \text{ et } k_p \in \mathbb{R}^+, \\ \text{si } k_p \in \mathbb{C}^+ \text{ ou } t^{-1} = 0. \end{array} \end{array} \right. \quad (100)$$

## 2 Formulations faibles

Les démonstrations d'existence relatives aux équations de Maxwell sont notablement plus difficiles que pour l'équation de Helmholtz ; en particulier il importe de choisir avec soin le cadre fonctionnel dans lequel elles prennent un sens précis. Nous avons ici décidé d'étudier les équations du second ordre, harmoniques en temps, à l'aide d'une méthode variationnelle. Nous définirons le cadre fonctionnel en plusieurs étapes, et dans ce chapitre nous nous contenterons de donner un sens faible aux équations et aux conditions aux limites de conducteur parfait précédemment introduites ; ultérieurement seront introduits les ingrédients nécessaires pour la prise en compte des conditions de rayonnement et pour la démonstration d'existence.

Nous noterons

$$H(\text{rot}; \Omega) = \{U \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{rot } U \in L^2(\Omega)^3\}$$

$$H^\xi(\text{div}; \Omega) = \{U \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div } \xi U \in L^2(\Omega)\}$$

ainsi que

$$H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega) = \{U \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)^3 \mid \text{rot } U \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)^3\}$$

$$H^\xi_{\text{loc}}(\text{div}; \Omega) = \{U \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)^3 \mid \text{div } \xi U \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)\}$$

Le champ total  $U_T$  sera désormais simplement noté  $U$ .

## 2.1 Les équations classiques

Considérons tout d'abord  $U$  solution des équations classiques dans  $\Omega$ :

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \omega^2 \xi U = 0 \quad (101)$$

Dans le cas où  $\zeta$  et  $\xi$  sont constants, l'équation (101) prend la forme simplifiée suivante:

$$\text{rot}(\text{rot } U) - k_s^2 U = 0, \quad (102)$$

avec  $k_s^2 = \omega^2 \xi \zeta$ .

### 2.1.1 Le champ électrique

Les conditions aux limites associées au champ électrique à la frontière d'un conducteur parfait expriment la nullité du champ tangent soit

$$U \wedge n = 0 \text{ sur } \Gamma; \quad (103)$$

il s'agit d'une condition essentielle, et par analogie avec le cas du Laplacien, nous chercherons la solution de (101)-(103) dans l'espace fonctionnel suivant:

$$\mathcal{F}^E = \{V \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega) \mid (V \wedge n)|_\Gamma = 0\} \quad (104)$$

#### PROPOSITION 2.1

(i) Une fonction  $U \in \mathcal{F}^E$ , solution de

$$\int_{\Omega} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot V = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^E \text{ à support compact}, \quad (105)$$

vérifie (101) au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^3$ .

(ii) En particulier, dans une région où  $\xi$  et  $\zeta$  sont constants,  $U$  est indéfiniment différentiable et satisfait l'équation simplifiée (102) au sens fort.

*Démonstration.*

▷ Par définition de la dérivation au sens des distributions, on aura  $T = \text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^3$  si et seulement si

$$\langle T, V \rangle = \int_{\Omega} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V, \quad \forall V \in \mathcal{D}(\Omega)^3.$$

La conclusion en résulte puisque  $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \mathcal{F}^E$ .



▷ Nous venons de démontrer que (102) est vérifiée au sens des distributions ; il en résulte que  $\operatorname{div} U = 0$ , et par conséquent

$$-\Delta U = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) - \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) = k_s^2 U.$$

Les théorèmes classiques relatifs à la régularité des solutions des équations elliptiques permettent alors de conclure. □

Le premier pas pour la prise en compte des conditions à l'infini associées à l'équation (101) réside dans le Corollaire suivant:

**COROLLAIRE 2.1**

(i) Si la fonction  $U \in \mathcal{F}^E$  satisfait (105), alors pour toute surface régulière  $\Sigma$  entourant le milieu inhomogène et délimitant un domaine borné  $\Omega' \subset \Omega$  et un domaine non borné  $\Omega'' = \Omega \setminus \overline{\Omega'}$ . On a

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (V \wedge n) d\gamma = 0, \quad (106)$$

$\forall V \in \mathcal{F}^E.$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega'$ .

(ii) Réciproquement, si  $U \in \mathcal{F}^E$  vérifie (103)  $\forall \Sigma$  entourant le milieu inhomogène, alors  $U$  vérifie (105).

*Démonstration.*

▷ Soit donc  $V \in \mathcal{F}^E$ , en multipliant  $V$  par une fonction de troncature régulière, on construit  $V' \in \mathcal{F}^E$  à support compact, identique à  $V$  dans  $\Omega'$ . On aura

$$\int_{\Omega} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V' - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot V' = 0,$$

soit en fait, en utilisant la formule de Green dans  $\Omega''$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V \\ &= -\zeta_0^{-1} \int_{\Omega''} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V' + \omega^2 \xi_0 \int_{\Omega''} U \cdot V' \\ &= -\zeta_0^{-1} \int_{\Omega''} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) \cdot V' - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (n'' \wedge V') d\gamma \\ & \qquad \qquad \qquad + \omega^2 \xi_0 \int_{\Omega''} U \cdot V' \\ &= \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (n \wedge V) d\gamma, \end{aligned}$$

où  $n''$  est la normale extérieure à  $\Omega''$  et  $n$  celle extérieure à  $\Omega'$ .

▷ Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre  $V$  à support compact et  $\Sigma$  à l'extérieur du support de  $V$ . □

REMARQUE 2.1 Dans la démonstration ci-dessus, en intégrant par parties dans le domaine  $\Omega'$ , on a évité l'emploi d'une formule de Green dans  $\Omega'$  qui n'aurait été justifiée que pour  $\zeta$  et  $\Gamma$  assez réguliers.

Nous noterons désormais  $(\mathcal{P}^E)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}^E$  tel que

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (V \wedge n) d\gamma = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^E, \forall \Sigma \quad (\mathcal{P}^E)$$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie la condition de rayonnement (84).

La Proposition 2.1 et le Corollaire 2.1 nous prouvent que  $(\mathcal{P}^E)$  constitue une formulation variationnelle des équations (97).

Posons

$$\mathcal{F}_{\infty}^E = \{V \in \mathcal{F}^E \mid \operatorname{div} \xi V = 0\} \quad (107)$$

Nous noterons  $(\mathcal{P}_{\infty}^E)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}_{\infty}^E$  tel que

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (V \wedge n) d\gamma = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}_{\infty}^E, \forall \Sigma \quad (\mathcal{P}_{\infty}^E)$$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie la condition de rayonnement (84).

Il s'agit encore là d'une formulation variationnelle des équations (97) comme nous le montrera la Proposition qui suit. C'est en fait cette dernière formulation qui dans la suite fondera l'étude mathématique des équations de Maxwell classiques. On verra en effet qu'on ne peut envisager d'inverser l'opérateur associé à la forme

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V$$

qu'au sein du sous-ensemble des  $U$  qui vérifient  $\operatorname{div} \xi U = 0$ .

PROPOSITION 2.2 Les Problèmes  $(\mathcal{P}^E)$  et  $(\mathcal{P}_{\infty}^E)$  sont équivalents.

*Démonstration.*

▷ Soit tout d'abord  $U$  solution de  $(\mathcal{P}^E)$ , alors (101) est satisfaite au sens des distributions, et par conséquent  $\operatorname{div} \xi U = 0$ , soit donc  $U \in \mathcal{F}_{\infty}^E$ ; comme  $\mathcal{F}_{\infty}^E \subset \mathcal{F}^E$ , il en résulte que  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\infty}^E)$ .

▷ Réciproquement, si  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\infty}^E)$ , prenons  $V \in \mathcal{F}^E$ ; en vertu du Lemme 2.1 ci-dessus, en y choisissant

$$\mathcal{O} = \Omega', \quad F_0 = \Gamma \cap \Sigma, \quad \text{et} \quad F_1 = \emptyset,$$

on pourra écrire

$$V = \operatorname{grad} \varphi + V',$$

où

$$V' \in \mathcal{F}_{\infty}^E \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathcal{K}^E, \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}^E = H_0^1(\Omega').$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (V \wedge n) d\gamma \\
&= -\omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \operatorname{grad} \varphi + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\operatorname{grad} \varphi \wedge n) d\gamma \\
&= \omega^2 \int_{\Omega'} \varphi \operatorname{div} \xi U - \omega^2 \int_{\Gamma \cup \Sigma} \varphi \xi U \cdot n d\gamma \\
&= 0
\end{aligned}$$

en vertu du Corollaire 2.1, du Lemme 2.1 et du fait que  $\operatorname{div} \xi U = 0$ .

□

**LEMME 2.1 (de décomposition)** *Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière Lipschitzienne se composant de deux parties disjointes  $F_0$  et  $F_1$ , l'une d'entre elles étant éventuellement vide. Soit  $\xi \in L^\infty(\mathcal{O})$  vérifiant  $\Re(\xi) \geq \alpha > 0$ . Alors toute fonction  $V \in L^2(\mathcal{O})^3$  se décompose selon*

$$V = \operatorname{grad} \varphi + V' \quad (108)$$

avec

$$\varphi \in H^1(\mathcal{O}), \quad \varphi|_{F_0} = 0, \quad \text{et } V' \in L^2(\mathcal{O})^3, \quad \operatorname{div} \xi V' = 0, \quad \text{et } (\xi V' \cdot n)|_{F_1} = 0.$$

On aura alors de plus

$$\operatorname{rot} V' = \operatorname{rot} V \quad \text{et} \quad (\operatorname{grad} \varphi \wedge n)|_{F_0} = 0. \quad (109)$$

*Démonstration.*

▷ Notons

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{ \psi \in H^1(\mathcal{O}) \mid \psi|_{F_0} = 0 \} & \text{si } F_0 \neq \emptyset \\
\mathcal{K} &= H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R} & \text{si } F_0 = \emptyset
\end{aligned}$$

▷ Choisissons  $V \in L^2(\mathcal{O})^3$ , alors d'après le théorème de Lax-Milgram,  $\exists! \varphi \in \mathcal{K}$ ,

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi} = \int_{\mathcal{O}} \xi V \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi}, \quad \forall \psi \in \mathcal{K}.$$

C'est dire que  $\varphi$  est l'unique solution du problème suivant:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}(\xi \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \xi V \quad \text{dans } \mathcal{O} \\
& \varphi|_{F_0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{F_1} = (V \cdot n)|_{F_1}.
\end{aligned}$$

▷ Posons alors  $V' = V - \operatorname{grad} \varphi$ , on aura

$$V' \in L^2(\mathcal{O})^3, \quad \operatorname{div} \xi V' = 0, \quad (\xi V' \cdot n)|_{F_1} = 0, \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} V' = \operatorname{rot} V.$$

Il nous reste donc à démontrer que  $(\operatorname{grad} \varphi \wedge n)|_{F_0} = 0$ . C'est une conséquence de ce que  $\forall W \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})^3$ , nul au voisinage de  $F_1$ ,

$$0 = \int_{\mathcal{O}} \varphi \operatorname{div}(\operatorname{rot} W) = - \int_{\mathcal{O}} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{rot} W = \int_{F_0} W \cdot (\operatorname{grad} \varphi \wedge n) d\gamma$$

□

### 2.1.2 Le champ magnétique

Les conditions aux limites associées au champ électrique à la frontière d'un conducteur parfait s'expriment sous la forme

$$\operatorname{rot} U \wedge n = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (110)$$

Il s'agit ici d'une condition naturelle, nous chercherons donc la solution de (101)-(110) dans l'espace fonctionnel suivant:

$$\mathcal{F}^H = H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}; \Omega). \quad (111)$$

L'étude se déroulera de façon similaire à celle du champ électrique.

#### PROPOSITION 2.3

(i) Une fonction  $U \in \mathcal{F}^H$ , solution de

$$\int_{\Omega} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot V = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^H, \text{ à support compact.} \quad (112)$$

suivrons une démarche tout à fait analogue au chapitre précédent: après vérifie (101) au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^3$  ainsi que  $(\xi U \cdot n)|_{\Gamma} = 0$ .

(ii) Dans une région où  $\xi$  et  $\zeta$  sont constants, une fonction  $U$  qui vérifie (112) est indéfiniment différentiable et satisfait au sens fort l'équation simplifiée (102).

*Démonstration.* La seule différence avec la démonstration de la Proposition 2.1 réside dans la condition aux limites. Si on prend plus particulièrement  $V = \operatorname{grad} \varphi$  avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , on aura, puisque  $\operatorname{div} \xi U = 0$ ,

$$0 = \int_{\Omega} \xi U \cdot \operatorname{grad} \varphi = \int_{\Gamma} \varphi \xi U \cdot n \, d\gamma,$$

la nullité de  $(\xi U \cdot n)|_{\Gamma}$  en résulte. □

**REMARQUE 2.2** Si  $\zeta$  et  $\Gamma$  sont assez régulières, on peut montrer qu'en un sens raisonnable, la condition aux limites (110) est vérifiée par la solution de (112). On utilisera à cet effet une formule de Green dans  $\Omega$ , soit pour  $V \in \mathcal{F}^H$  à support compact

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} V - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot V \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\zeta^{-1} \operatorname{rot} U) \cdot V + \int_{\Gamma} \zeta^{-1} (n \wedge (\operatorname{rot} U \wedge n) \cdot (n \wedge V)) \, d\gamma \\ &\quad - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot V \\ &= \int_{\Gamma} \zeta^{-1} (n \wedge (\operatorname{rot} U \wedge n) \cdot (n \wedge V)) \, d\gamma \end{aligned}$$

qui est en fait un produit de dualité entre  $H^{-1/2}(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $H^{-1/2}(\operatorname{rot}; \Omega)$ ; la nullité de  $(\operatorname{rot} U \wedge n)|_{\Gamma}$  en découle.

## COROLLAIRE 2.2

(i) Si la fonction  $U \in \mathcal{F}^H$  satisfait (112), alors pour toute surface régulière  $\Sigma$  entourant le milieu inhomogène et délimitant un domaine borné  $\Omega' \subset \Omega$  et un domaine non borné  $\Omega'' = \Omega \setminus \overline{\Omega'}$ . On a

$$(113)$$

(ii) Réciproquement, si  $U \in \mathcal{F}^H$  vérifie (113)  $\forall \Sigma$  entourant le milieu inhomogène, alors  $U$  vérifie (112).

*Démonstration.* Elle est identique à celle du corollaire 2.1. □

Nous noterons désormais  $(\mathcal{P}^H)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}^H$  tel que

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \text{rot } U \cdot (V \wedge n) d\gamma = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^H, \forall \Sigma \quad (\mathcal{P}^H)$$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie la condition de rayonnement (84).

Il s'agit d'une formulation variationnelle des équations (98). Comme pour le champ électrique, nous introduirons une nouvelle formulation associée à un espace réduit ; il fera intervenir ici la condition aux limites relative à la composante normale du champ exhibée à la Proposition 2.3. La prise en compte d'une condition essentielle est en effet indispensable pour inverser l'opérateur associé à

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V$$

Posons maintenant

$$\mathcal{F}_{\infty}^H = \left\{ V \in \mathcal{F}^H \mid \text{div } \xi V = 0, (\xi V \cdot n)|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad (114)$$

Nous noterons  $(\mathcal{P}_{\infty}^H)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}_{\infty}^H$  tel que

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot V + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \text{rot } U \cdot (V \wedge n) d\gamma = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}_{\infty}^H, \forall \Sigma \quad (\mathcal{P}_{\infty}^H)$$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie la condition de rayonnement (84).

**PROPOSITION 2.4** Les Problèmes  $(\mathcal{P}^H)$  et  $(\mathcal{P}_{\infty}^H)$  sont équivalents.

*Démonstration.*

▷ Soit tout d'abord  $U$  solution de  $(\mathcal{P}^H)$ , de la Proposition 2.3 résulte que  $\text{div } \xi E = 0$ , et  $(\xi U \cdot n)|_{\Gamma} = 0$ ; par conséquent  $U \in \mathcal{F}_{\infty}^H$ . Comme  $\mathcal{F}_{\infty}^H \subset \mathcal{F}^H$ , il en résulte que  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\infty}^H)$ .

▷ Réciproquement, si  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\infty}^H)$ , prenons  $V \in \mathcal{F}^H$ ; et choisissons

$$\mathcal{O} = \Omega', F_0 = \Sigma, \text{ et } F_1 = \Gamma,$$

on aura

$$V = \text{grad } \varphi + V',$$

où

$$V' \in \mathcal{F}_\infty^H \text{ et } \varphi \in \mathcal{K}^H, \text{ avec } \mathcal{K}^H = \{\psi \in H^1(\Omega') \mid \psi|_\Sigma = 0\}.$$

La conclusion en découle alors, de façon tout-à-fait analogue à la démonstration de la Proposition 2.2. □

## 2.2 Les équations régularisées

Si on considère maintenant les équations régularisées

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U) - \omega^2 \xi U = 0 \quad (115)$$

on constate qu'elles ne peuvent être en général interprétées au sens des distributions, car l'expression  $\text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U)$  est une distribution, qui ne peut être multipliée par  $\bar{\xi}$  que si ce coefficient est suffisamment régulier ; ce sera en particulier le cas si  $\zeta$  et  $\xi$  sont constants, l'équation (115) prend la forme simplifiée suivante:

$$\text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U) - k_s^2 U = 0, \quad (116)$$

### 2.2.1 Le champ électrique

Nous choisirons ici une formulation associée à l'espace naturel

$$\mathcal{F}_\tau^E = \{V \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div } \xi V \in L_{\text{loc}}^2(\Omega), (V \wedge n)|_\Gamma = 0\} \quad (117)$$

**DÉFINITION 2.1** Une fonction  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$  sera dite vérifier l'équation (115) et les conditions aux limites (103) si

$$\int_\Omega \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_\Omega \tau^{-1} \text{div } \xi U \text{div } \bar{\xi} \bar{V} - \omega^2 \int_\Omega \xi U \cdot \bar{V} = 0, \quad (118)$$

$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^E$ , à support compact.

**PROPOSITION 2.5** Dans une région où  $\xi$  et  $\zeta$  sont constants, une fonction  $U$  qui vérifie (118) est indéfiniment différentiable et satisfait au sens fort l'équation simplifiée (116).

*Démonstration.* Il est facile de voir, comme à la Proposition 2.1, que  $U$  vérifie (116) au sens des distributions ; on en déduit, par application de l'opérateur  $\text{rot}$  à (116), que  $\Delta(\text{div } U) + k_p^2 \text{div } U = 0$ . Par régularité elliptique il en résulte que  $\text{div } U$  est indéfiniment dérivable. Mais de plus  $\Delta U + k_s^2 U = (1 - t^{-1}) \text{grad}(\text{div } U)$ ; la régularité de  $U$  en découle. □

**REMARQUE 2.3** Si  $\xi$  est Lipschitzienne et  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$ , alors la formule

$$\langle \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U), \bar{V} \rangle = - \int_\Omega \tau^{-1} \text{div } \xi U \text{div } \bar{\xi} \bar{V} \quad \forall V \in \mathcal{D}(\Omega)^3$$

définit  $\bar{\xi} \text{grad}(\text{div } \xi U)$  en tant que distribution de  $\mathcal{D}'(\Omega)^3$ ; il en résulte que si  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$  vérifie (118), alors il est solution au sens des distributions de

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U) - \omega^2 \xi U = 0.$$

## COROLLAIRE 2.3

(i) Si la fonction  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$  satisfait (118), alors pour toute surface régulière  $\Sigma$  entourant le milieu inhomogène et délimitant un domaine borné  $\Omega' \subset \Omega$  et un domaine non borné  $\Omega'' = \Omega \setminus \overline{\Omega'}$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \overline{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \overline{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \overline{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\overline{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\overline{V} \cdot n) d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (119)$$

$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^E.$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega'$ .

(ii) Réciproquement, si  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$  vérifie (119)  $\forall \Sigma$  entourant le milieu inhomogène, alors  $U$  vérifie (118).

*Démonstration.*

▷ Soit donc  $V \in \mathcal{F}_\tau^E$ , en multipliant  $V$  par une fonction de troncature régulière, on construit  $V' \in \mathcal{F}_\tau^E$  à support compact, identique à  $V$  dans  $\Omega'$ . On aura

$$\int_{\Omega} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \overline{V'} + \int_{\Omega} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \cdot \operatorname{div} \overline{\xi V'} - \omega^2 \int_{\Omega} \xi U \cdot \overline{V'} = 0,$$

soit en fait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \overline{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \cdot \operatorname{div} \overline{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \overline{V} \\ = -\zeta_0^{-1} \int_{\Omega''} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \overline{V'} - \tau_0^{-1} |\xi_0|^2 \int_{\Omega''} \operatorname{div} U \cdot \operatorname{div} \overline{V'} + \omega^2 \xi_0 \int_{\Omega''} U \cdot \overline{V'} \\ = -\zeta_0^{-1} \int_{\Omega''} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) \cdot \overline{V'} + t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Omega''} \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) \cdot \overline{V'} + \omega^2 \xi_0 \int_{\Omega''} U \cdot \overline{V'} \\ \quad - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (n'' \wedge \overline{V'}) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\overline{V'} \cdot n'') d\gamma \\ = \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (n \wedge \overline{V}) d\gamma + t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\overline{V} \cdot n) d\gamma, \end{aligned}$$

où  $n''$  est la normale extérieure à  $\Omega''$  et  $n$  celle extérieure à  $\Omega'$ .

▷ Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre  $V$  à support compact et  $\Sigma$  à l'extérieur du support de  $V$ .

□

Nous noterons désormais  $(\mathcal{P}_\tau^E)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}_\tau^E$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \overline{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \overline{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \overline{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\overline{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\overline{V} \cdot n) d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_\tau^E)$$

$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^E, \forall \Sigma.$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie les conditions de rayonnement (85) et (86).

C'est la formulation variationnelle des équations (99), valable même si  $\xi$  est peu régulier, auquel cas elle constitue l'unique moyen de leur conférer une signification.

### 2.2.2 Le champ magnétique

Nous poserons ici

$$\mathcal{F}_\tau^H = \left\{ V \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div } \xi V \in L_{\text{loc}}^2(\Omega), (\xi V \cdot n)|_\Gamma = 0 \right\} \quad (120)$$

**DÉFINITION 2.2** Une fonction  $U \in \mathcal{F}_\tau^H$  sera dite vérifier l'équation (115) et les conditions aux limites (110) si

$$\int_\Omega \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_\Omega \tau^{-1} \text{div } \xi U \text{div } \bar{\xi V} - \omega^2 \int_\Omega \xi U \cdot \bar{V} = 0, \quad (121)$$

$$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^H, \text{ à support compact.}$$

**PROPOSITION 2.6** Dans une région où  $\xi$  et  $\zeta$  sont constants, une fonction  $U$  qui vérifie (121) est indéfiniment différentiable et satisfait au sens fort l'équation simplifiée (116).

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle de la Proposition 2.5. □

**REMARQUE 2.4** De même que pour le champ électrique, si  $\xi$  est Lipschitzienne et  $U \in \mathcal{F}_\tau^H$  vérifie (121), alors il est solution au sens des distributions de

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U) - \omega^2 \xi U = 0.$$

#### COROLLAIRE 2.4

(i) Si la fonction  $U \in \mathcal{F}_\tau^H$  satisfait (121), alors pour toute surface régulière  $\Sigma$  entourant le milieu inhomogène et délimitant un domaine borné  $\Omega' \subset \Omega$  et un domaine non borné  $\Omega'' = \Omega \setminus \bar{\Omega}'$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \text{div } \xi U \text{div } \bar{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_\Sigma \text{rot } U \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_\Sigma \text{div } U (\bar{V} \cdot n) d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^E.$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega'$ .

(ii) Réciproquement, si  $U \in \mathcal{F}_\tau^H$  vérifie (122)  $\forall \Sigma$  entourant le milieu inhomogène, alors  $U$  vérifie (121).

*Démonstration.* Elle est similaire à celle du Corollaire 2.2. □

Nous noterons désormais  $(\mathcal{P}_\tau^H)$  le problème suivant: Trouver  $U \in \mathcal{F}_\tau^H$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \text{div } \xi U \text{div } \bar{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_\Sigma \text{rot } U \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_\Sigma \text{div } U (\bar{V} \cdot n) d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_\tau^H)$$

$$\forall V \in \mathcal{F}_\tau^H, \forall \Sigma.$$

et  $U_D = U - U_I$  vérifie les conditions de rayonnement (85) et (86).

C'est là l'interprétation des équations (100).



### 3 Unicité

Dans ce chapitre nous supposons nulle l'onde incidente  $U_I$ , on aura alors  $U_D = U_T$ ;  $U_T$  vérifiera par conséquent la condition de rayonnement. Nous noterons  $U = U_T$  et nous démontrerons que sous certaines hypothèses restrictives  $U = 0$ , ce qui constitue bien un résultat d'unicité en vertu de la linéarité des équations de Maxwell.

#### 3.1 Quelques propriétés du problème homogène

Rappelons que  $B_R$  note la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ ; nous supposons  $R_0$  choisi de telle façon que  $\zeta, \xi$  et  $\tau$  soient constants dans l'extérieur  $\Omega''_{R_0}$  de  $B_{R_0}$ . Nous noterons  $\Omega'_R = \Omega \cap B_R$ .

**LEMME 3.1** *Si  $U$  est solution des équations de Maxwell homogènes, soit de l'un des problèmes variationnels  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  ou  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ . Alors  $\forall R > R_0$*

$$F_{\partial B_R}(U) = C_{\Omega'_R}(U) = 0, \quad (123)$$

où  $F_{\partial B_R}(U)$  est le flux d'énergie sortant à travers  $\partial B_R$ , donné par (75), et  $C_{\Omega'_R}(U)$  l'énergie dissipée dans le domaine  $\Omega'_R$  selon la formule (78).

*Démonstration.*

▷ Considérons par exemple les équations régularisées du champ électrique, et singulièrement la partie imaginaire des équations (119), avec  $V = \bar{U}$ ,  $\Omega' = \Omega'_R$  et  $\Sigma = \partial B_R$ ; on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\omega} \Im \left( - \int_{\Omega'_R} \zeta^{-1} \|\text{rot } U\|^2 - \int_{\Omega'_R} \tau^{-1} |\text{div } \xi U|^2 + \omega^2 \int_{\Omega'_R} \xi \|U\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \Im \left( \zeta_0^{-1} \int_{\partial B_R} \text{rot } U \cdot (\bar{U} \wedge n) \, d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\partial B_R} \text{div } U (\bar{U} \cdot n) \, d\gamma \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les formules (76), (77) et (78),

$$C_{\Omega'_R}(U) = F_{\partial B_R}(U).$$

▷ Mais on a vu au Théorème 1.3 que  $F_{\partial B_R} \leq 0$ ; comme  $C_{\Omega'_R}(U) \geq 0$ , il en résulte que  $C_{\Omega'_R}(U) = F_{\partial B_R}(U) = 0$ .

▷ Les autres cas se traitent de façon identique. □

**COROLLAIRE 3.1** *Soit  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , alors*

- (i) *Si  $\Im \xi > 0$ , presque partout dans  $\mathcal{O}$  alors  $U|_{\mathcal{O}} = 0$*
- (ii) *Si  $\Im \zeta > 0$ , presque partout dans  $\mathcal{O}$  alors  $\text{rot } U|_{\mathcal{O}} = 0$*
- (iii) *Dans le cas des équations régularisées, si  $\Im \tau > 0$ , presque partout dans  $\mathcal{O}$  alors  $\text{div } \xi U|_{\mathcal{O}} = 0$*

*Démonstration.* D'après le Lemme 3.1,

▷ On a

$$0 = C_{\mathcal{O}} \geq \omega^2 \int_{\mathcal{O}} \Im \xi \|U\|^2 \geq 0$$

et par conséquent

$$\int_{\mathcal{O}} \Im \xi \|U\|^2 = 0,$$

soit  $U = 0$  dans  $\mathcal{O}$ .

▷ De même on aura

$$0 \geq \int_{\mathcal{O}} \|\operatorname{rot} U\|^2 \Im(-\zeta^{-1}) = \int_{\mathcal{O}} \frac{\Im \zeta}{(\Re \zeta)^2 + (\Im \zeta)^2} \|\operatorname{rot} U\|^2 \geq 0$$

d'où il résulte que  $\operatorname{rot} U = 0$ .

▷ On montre de même que  $\operatorname{div} \xi U = 0$  dès que  $\Im \tau \neq 0$ .

□

### 3.2 Le voisinage de l'infini

Choisissons  $R_0$  tel que dans l'extérieur  $\Omega''_{R_0}$  de  $B_{R_0}$  les coefficients  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  soient constants et considérons la restriction de la solution  $U$  à  $\Omega''_{R_0}$ ; en vertu des Propositions 2.5 et 2.6, elle vérifie

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) - t^{-1} \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) - k_s^2 U = 0, \text{ avec } U \in \mathcal{F}_{\tau}^{E/H} \quad (124)$$

pour  $\tau$  (et par conséquent  $t$ ) éventuellement égal à l'infini.

**LEMME 3.2** *Si  $U$  est solution des équations de Maxwell homogènes, elle vérifie  $\operatorname{div} U = 0$  dans  $\Omega''_{R_0}$ , domaine où les coefficients sont constants.*

*Démonstration.*

▷ Si  $\Im \tau_0 > 0$ , alors d'après le Corollaire 3.1, (iii), on aura  $\operatorname{div} U = 0$ .

▷ Sinon  $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ ; posons  $\varphi = \operatorname{div} U$ , on aura d'après (124)

$$\Delta \varphi + k_p^2 \varphi = 0.$$

Par ailleurs, selon le Lemme 3.1,  $F_{\partial B_R}(U) = 0$ ; il en résulte d'après le Théorème 1.3 que

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |\operatorname{div} U|^2 + |k_p|^2 |U \cdot n|^2 \right] d\gamma$$

Par conséquent

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\varphi|^2 d\gamma;$$

par application du Théorème de Rellich il en résulte que  $\varphi = 0$  dans  $\Omega''_{R_0}$ .

▷ Bien entendu, si  $U$  est solution des équations classiques, elle vérifie également  $\operatorname{div} U = 0$  dans  $\Omega''_{R_0}$ .

□

**PROPOSITION 3.1** *Si  $U$  est solution des équations de Maxwell homogènes elle vérifie  $U = 0$  dans  $\Omega''_{R_0}$ .*

*Démonstration.*

▷ Si  $\Im \zeta_0 > 0$ , alors d'après le Corollaire 3.1 (ii), on a  $\text{rot } U = 0$ . Comme de plus  $\text{div } U = 0$ , selon le Lemme 3.2, il résulte de (123) que  $U = 0$ .

▷ Si  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^+$ , alors du Lemme 3.2 et de la formule (123), il résulte que

$$\text{rot}(\text{rot } U) - \text{grad}(\text{div } U) - k_s^2 U = 0$$

soit

$$\Delta U + k_s^2 U = 0. \tag{125}$$

▷ Le Lemme 3.1 nous montre que  $\lim_{R \rightarrow \infty} F_{\partial B_R} = 0$ , soit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ t^{-1} |\text{div } U|^2 + |k_s|^2 |U \cdot n|^2 \right] d\gamma \\ 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \|\text{rot } U \wedge n\|^2 + |k_s|^2 \|n \wedge (U \wedge n)\|^2 \right] d\gamma \end{aligned}$$

il en résulte que

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |U \cdot n|^2 + \|\text{rot } U \wedge n\|^2 \right] d\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|U\|^2 d\gamma$$

Le Théorème de Rellich permet alors de déduire de (125) que  $U = 0$ .

▷ Notons qu'en vertu de la Remarque 1.5, ce raisonnement reste valable pour les équations classiques, c'est-à-dire si  $t^{-1} = 0$ .

□

### 3.3 Les théorèmes de prolongement unique

C'est un outil technique permettant de prolonger à  $\Omega$  tout entier la nullité de  $U$  que, dans un premier temps, on ne démontrera qu'au voisinage de l'infini. Les théorèmes dont nous nous contenterons de donner ici une forme adaptée à notre propos sont difficiles ; ils étendent aux solutions des équations elliptique à coefficients raisonnablement réguliers les résultats classiques de prolongement unique valables pour les fonctions analytiques.

*On considère dans ce paragraphe un domaine  $\tilde{\Omega}$  connexe de frontière Lipschitzienne, dans lequel les coefficients  $\xi, \zeta$  et  $\tau$  sont Lipschitziens. Une solution des équations de Maxwell régularisées y satisfait alors*

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \bar{\xi} \text{grad}(\tau^{-1} \text{div } \xi U) - \omega^2 \xi U = 0, \tag{126}$$

selon les remarques 2.3 et 2.4.

LEMME 3.3 Une solution  $U$  des équations de Maxwell homogènes, nulle dans une boule arbitraire  $B \subset \tilde{\Omega}$ , vérifie  $\operatorname{div} \xi U = 0$  dans  $\tilde{\Omega}$  tout entier.

*Démonstration.* Dans le cas où  $\tau$  est infini ou complexe, on aura

$$\operatorname{div} \xi U = 0;$$

démontrons qu'il en est de même si  $\tau$  est réel positif. Posons

$$\varphi = \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U,$$

c'est une fonction de  $L^2(\tilde{\Omega})$ . Considérons la divergence de (126), on aura

$$\operatorname{div}(\bar{\xi} \operatorname{grad} \varphi) + \omega^2 \tau \varphi = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}.$$

Les théorèmes de régularité des équations elliptiques montrent alors que dans tout ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{O} \Subset \tilde{\Omega}$ ,  $\varphi|_{\mathcal{O}} \in H^2(\mathcal{O})$ . Les résultats classiques relatifs à l'unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques scalaires [11] montrent alors que si  $\varphi$  s'annule dans une boule  $B \subset \tilde{\Omega}$ , alors  $\varphi = 0$  dans  $\tilde{\Omega}$ . Il en résulte que  $\operatorname{div} \xi U = 0$ , c'est-à-dire que  $U$  est solution des équations de Maxwell classiques

$$\operatorname{rot}(\zeta^{-1} \operatorname{rot} U) - \omega^2 \xi U = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}. \quad (127)$$

□

PROPOSITION 3.2 Si les coefficients  $\zeta$  et  $\xi$  sont de plus réels et si  $U$ , solution des équations de Maxwell homogènes est nulle dans une boule arbitraire  $B \subset \tilde{\Omega}$ , alors elle est nulle dans  $\tilde{\Omega}$  tout entier.

*Démonstration.*

▷ Nous venons de voir au Lemme 3.3 que, quelle que soit la valeur de  $\tau$ ,  $U$  est solution des équations de Maxwell classiques (127) dans  $\tilde{\Omega}$ .

▷ Démontrons maintenant la nullité d'une solution  $U$  de (127). Nous poserons

$$H = U \text{ et } E = \frac{-1}{i\omega\zeta} \operatorname{rot} U$$

on aura

$$\operatorname{rot} E = i\omega\xi H \text{ et } \operatorname{rot} H = -i\omega\zeta E,$$

où  $E$  et  $H$  sont éléments de  $H(\operatorname{rot}; \tilde{\Omega})$ . En fait on a de plus

$$\operatorname{div} \zeta E = 0 \text{ et } \operatorname{div} \xi H = 0,$$

il en résulte, puisque  $\xi$  et  $\zeta$  sont Lipschitziens, que  $E$  et  $H$  appartiennent à  $H(\operatorname{div}; \tilde{\Omega})$ . Mais on sait que pour  $\mathcal{O} \Subset \tilde{\Omega}$ ,  $H^1(\mathcal{O}) = H(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{div}; \mathcal{O})$ , et par conséquent  $E$  et  $H$  appartiennent à  $H^1(\mathcal{O})$ ; par application du théorème de prolongement unique de [18] il en résulte que  $E = H = 0$  dans  $\tilde{\Omega}$ .

□

### 3.4 Le théorème d'unicité

On note

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= \{x \in \Omega'_{R_0} \mid \Im \xi(x) > 0\} \\ \mathcal{O}_2 &= \{x \in \Omega'_{R_0} \mid \Im \zeta(x) > 0\}\end{aligned}\quad (128)$$

Dans la suite, nous supposons que les coefficients  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  sont réguliers par morceaux, et sont donc susceptibles de présenter des discontinuités le long des frontières séparant ces divers sous-domaines ; l'étude des conditions de transmission de part et d'autre nous conduira à considérer séparément le cas des équations classiques et celui des équations régularisées.

#### 3.4.1 Le problème classique

**Hypothèses géométriques** Posons

$$\mathcal{O} = \Omega'_{R_0} \setminus (\overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2}) \quad (129)$$

et faisons l'hypothèse que

$$\overline{\mathcal{O}} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega_i} \quad (130)$$

où les  $\overset{\circ}{\Omega}_i$  sont disjoints, les coefficients  $\xi|_{\Omega_i}$  et  $\zeta|_{\Omega_i}$  sont Lipschitziens et se prolongent respectivement à  $\mathbb{R}^3$  selon des fonctions  $\xi_i$  et  $\zeta_i$ , également Lipschitziennes.

**LEMME 3.4** *Si  $U$  est solution des équations de Maxwell classiques ( $\mathcal{P}_\infty^{E/H}$ ) homogènes, si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  définis en (130) sont adjacents et  $U|_{\Omega_j} = 0$ , alors  $U|_{\Omega_i} = 0$ .*

*Démonstration.* Il est équivalent de supposer  $U$  solution de ( $\mathcal{P}^{E/H}$ ) ; soit donc  $V \in \mathcal{F}^{E/H}$ , à support compact dans  $\text{int}(\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j})$  on aura, en vertu de la formule (105)

$$\int_{\Omega_i} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\Omega_i} \xi U \cdot V = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^{E/H}.$$

Il en résulte que

$$\int_{\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}} \zeta_i^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } V - \omega^2 \int_{\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}} \xi_i U \cdot V = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}^{E/H}$$

et par conséquent,  $U$  vérifie

$$\text{rot}(\zeta_i^{-1} \text{rot } U) - \omega^2 \xi_i U = 0 \text{ dans } \overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j};$$

par application de la Proposition 3.2, il en résulte que  $U|_{\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}} = 0$ . □

**THÉORÈME 3.1** *Les équations de Maxwell classiques ( $\mathcal{P}_\infty^{E/H}$ ) homogènes n'ont que la solution nulle.*

*Démonstration.*

▷ En vertu du Corollaire 3.1, on a tout d'abord  $U|_{\mathcal{O}_1} = 0$  et  $\text{rot } U|_{\mathcal{O}_2} = 0$ ; comme

$$\text{rot}(\zeta^{-1} \text{rot } U) - \omega^2 \xi U = 0$$

on aura également  $U|_{\mathcal{O}_2} = 0$ .

▷ Par ailleurs on a montré à la Proposition 3.1 que  $U|_{\Omega''_{R_0}} = 0$ , et de proche en proche dans chaque  $\Omega_i$ , en vertu du Lemme 3.4.

□

### 3.4.2 Les équations régularisées

**Hypothèses géométriques** On suppose ici que

$$\overline{\Omega'_{R_0}} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega_i} \quad (131)$$

où

(i) les  $\overset{\circ}{\Omega}_i$  sont disjoints, les coefficients  $\xi|_{\Omega_i}$ ,  $\zeta|_{\Omega_i}$  et  $\tau|_{\Omega_i}$  sont Lipschitziens et se prolongent respectivement à  $\mathbb{R}^3$  selon des fonctions  $\xi_i$ ,  $\zeta_i$  et  $\tau_i$  Lipschitziennes.

(ii) La frontière commune  $\Gamma_{ij}$  à  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , supposés adjacents contient une portion régulière  $\gamma_{ij}$ .

Cette dernière hypothèse nous permettra de construire des fonctions de  $\mathcal{F}_\tau^{E/H}$  dont le support soit réduit à l'ensemble de deux sous-domaines adjacents et la valeur imposée sur l'un d'entre eux.

**LEMME 3.5** *Si  $U$  est solution des équations de Maxwell régularisées homogènes ( $\mathcal{P}_\tau^{E/H}$ ), si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  définis ci-dessus sont adjacents et si  $U|_{\Omega_j} = 0$ , alors  $U|_{\Omega_i} = 0$ .*

*Démonstration.*

▷ Remarquons tout d'abord que

$$(\xi_i U)|_{\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}} = (\xi U)|_{\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}}$$

et par conséquent  $\text{div } \xi_i U \in L^2(\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j})$ .

▷ Considérons alors le domaine  $\tilde{\Omega} \Subset \overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j}$  tel que  $\tilde{\Omega} \cap \Gamma_{ij} \subset \gamma_{ij}$ , et  $V \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ . On aura

$$\left( \xi_j^{-1} \xi_i V \cdot n \right)_{|\gamma_{ij}} \in H^{1/2}(\gamma_{ij}) \text{ et } (n \wedge (V \wedge n))_{|\gamma_{ij}} \in H^{1/2}(\gamma_{ij}),$$

et par conséquent, il existe  $V' \in H^1(\Omega_j)$  à support dans  $\tilde{\Omega}$  tel que

$$(V' \cdot n)_{|\gamma_{ij}} = \left( \xi_j^{-1} \xi_i V \cdot n \right)_{|\gamma_{ij}} \text{ et } (n \wedge (V' \wedge n))_{|\gamma_{ij}} = (n \wedge (V \wedge n))_{|\gamma_{ij}};$$

Il est alors clair que la fonction  $V''$  égale à  $V$  dans  $\Omega_i$  et à  $V'$  dans  $\Omega_j$  appartient à  $\mathcal{F}_\tau^{E/H}$ .

▷ Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Omega}} \zeta_i^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\tilde{\Omega}} \tau_i^{-1} \operatorname{div} \xi_i U \operatorname{div} \bar{\xi}_i \bar{V} - \omega^2 \int_{\tilde{\Omega}} \xi_i U \cdot \bar{V} \\
&= \int_{\Omega_i} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\Omega_i} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega_i} \xi U \cdot \bar{V} \\
&= \int_{\Omega_i} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V}' + \int_{\Omega_i} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V}' - \omega^2 \int_{\Omega_i} \xi U \cdot \bar{V}' \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V}'' + \int_{\tilde{\Omega}} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V}'' - \omega^2 \int_{\tilde{\Omega}} \xi U \cdot \bar{V}'' \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque  $U$  est solution des équations de Maxwell régularisées dans  $\tilde{\Omega}$ .

▷ Comme le coefficient  $\xi_i$  est Lipschitzien dans  $\tilde{\Omega}$ , il en résulte que  $U$  vérifie les équations de Maxwell régularisées

$$\operatorname{rot}(\zeta_i^{-1} \operatorname{rot} U) - \bar{\xi}_i \operatorname{grad}(\tau_i^{-1} \operatorname{div} \xi_i U) - \omega^2 \xi_i U = 0$$

au sens des distributions dans  $\tilde{\Omega}$ .

▷ En vertu du Lemme 3.3 il est alors clair que  $\operatorname{div} \xi_i U = 0$  dans  $\tilde{\Omega}$ , soit  $U$  vérifie les équations classiques

$$\operatorname{rot}(\zeta_i^{-1} \operatorname{rot} U) - \omega^2 \xi_i U = 0$$

▷ Le Corollaire 3.1 nous prouve alors que  $U = 0$  dans  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \cap \tilde{\Omega}$ ; mais en vertu de la Proposition 3.2, on aura également  $U = 0$  dans  $\tilde{\Omega} \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ .

□

**THÉORÈME 3.2** *La solution des équations de Maxwell régularisées ( $\mathcal{P}_\tau^{E/H}$ ) homogènes est nulle.*

*Démonstration.* Il suffit de raisonner de proche en proche à partir de  $\Omega''_{R_0}$  à l'aide du Lemme 3.5, comme lors de la démonstration du Théorème 3.1.

□

## 4 Formules de représentation intégrale

Que ce soit d'un point de vue théorique ou numérique, il est nécessaire de disposer d'une représentation précise de la solution au voisinage de l'infini ; l'un des outils pour y parvenir repose sur les formules de représentation intégrale que nous présentons dans ce chapitre. Contrairement à une façon de faire répandue parmi les physiciens, nous n'utiliserons pas ici la notation dyadique ; les calculs que nous réaliserons sont cependant tout-à-fait similaires.

### 4.1 La solution élémentaire

Une matrice  $3 \times 3$  :  $\mathbb{G}_t$  est appelée solution élémentaire des équations de Maxwell classiques ( $t = \infty$ ) ou régularisées ( $t \neq \infty$ ) si

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbb{G}_t) - t^{-1} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbb{G}_t) - k_s^2 \mathbb{G}_t = \delta \mathbb{I}, \quad (132)$$

où  $\delta$  est la mesure de Dirac en  $x = 0$  et  $\mathbb{I}$  est la matrice identité. En d'autres termes, on aura

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbb{G}_t^{(i)}) - t^{-1} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbb{G}_t^{(i)}) - k_s^2 \mathbb{G}_t^{(i)} = \delta e^{(i)}, \quad (133)$$

où  $\mathbb{A}^{(i)}$  est la  $(i)$ ème colonne de la matrice  $\mathbb{A}$  et  $e^{(i)}$  le  $(i)$ ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Une telle solution élémentaire est dite vérifier la condition d'ondes sortantes si chaque vecteur colonne vérifie les conditions de rayonnement (85) et (86), soit

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left\| \operatorname{rot} \mathbb{G}_t^{(i)} \wedge n - ik_s n \wedge (\mathbb{G}_t^{(i)} \wedge n) \right\|^2 d\gamma &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ \left\| \operatorname{rot} \mathbb{G}_t^{(i)} \wedge n \right\|^2 + |k_s|^2 \left\| n \wedge (\mathbb{G}_t^{(i)} \wedge n) \right\|^2 \right] d\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{si } \Im k_s = 0, \\ \text{si } \Im k_s > 0, \end{array} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left| t^{-1/2} \operatorname{div} \mathbb{G}_t^{(i)} - ik_s (\mathbb{G}_t^{(i)} \cdot n) \right|^2 d\gamma &= 0 \quad \text{si } \Im k_p = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left[ |t|^{-1} \left| \operatorname{div} \mathbb{G}_t^{(i)} \right|^2 + |k_s|^2 \left| (\mathbb{G}_t^{(i)} \cdot n) \right|^2 \right] d\gamma &= 0 \quad \text{si } \Im k_p > 0, \end{aligned} \quad (135)$$

avec  $k_p = k_s \sqrt{t}$  si  $t \neq \infty$ .

**PROPOSITION 4.1** *La solution de (132) vérifiant la condition d'ondes sortantes est unique.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la Proposition 3.1 à  $\mathbb{R}^3$  tout entier, soit en prenant  $R_0 = 0$ . □

**THÉORÈME 4.1** *La solution de (132) vérifiant la condition de rayonnement est donnée par*

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_\infty &= g_{k_s} \mathbb{I} + k_s^{-2} \operatorname{Hess} g_{k_s} \\ \mathbb{G}_t &= g_{k_s} \mathbb{I} + k_s^{-2} \operatorname{Hess}(g_{k_s} - g_{k_p}) \end{aligned} \quad (136)$$

où Hess est le Hessien et

$$g_k(x) = -\frac{e^{ik\|x\|}}{4\pi \|x\|}$$

*Démonstration.*

▷ Choisissons  $d = \delta \mathbb{I}$  dans l'équation (40), une solution  $\mathbb{A}_t$  de (40) donnée par la formule (48) vérifiera alors (133). On prendra comme à la formule (49)

$$\omega_k = g_k \mathbb{I}$$

soit par conséquent

$$(-\Delta - k^2)\omega_k = \delta \mathbb{I}$$

où  $\omega_k^{(i)}$  vérifie la condition de rayonnement associée à l'équation de Helmholtz. On aura donc

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= g_{k_s} \mathbb{I} + k_s^{-2} \operatorname{grad} \operatorname{div}(g_{k_s} \mathbb{I} - g_{k_p} \mathbb{I}) \\ &= k_s^{-2} \left( -\operatorname{grad} \operatorname{div}(g_{k_p} \mathbb{I}) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(g_{k_s} \mathbb{I}) - \delta \mathbb{I} \right) \\ &= t g_{k_p} \mathbb{I} + k_s^{-2} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(g_{k_s} \mathbb{I} - g_{k_p} \mathbb{I}) \end{aligned} \quad (137)$$

Il en résulte en vertu des formules (56) que  $\mathbb{A}_t^{(i)}$  vérifie les conditions de rayonnement associées aux équations de Maxwell, et par conséquent que  $\mathbb{G}_t = \mathbb{A}_t$ , en vertu du Lemme d'unicité 4.1.



▷ Le cas des équations classiques, qui correspond à  $t = \infty$ , se traite de façon similaire:

$$\mathbb{G}_\infty = g_{k_s} \mathbb{I} + k_s^{-2} \text{grad div}(g_{k_s} \mathbb{I}) = k_s^{-2} (\text{rot rot}(g_{k_s} \mathbb{I}) - \delta \mathbb{I}) \quad (138)$$

▷ La formule annoncée découle alors de l'identité

$$\text{grad div}(g \mathbb{I}) = \text{Hess}(g).$$

□

REMARQUE 4.1 *En vertu de (137) et (138), les formules suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbb{G}_\infty &= \text{rot } g_{k_s} \mathbb{I} & \text{div } \mathbb{G}_\infty &= -k_s^{-2} \text{div}(\delta \mathbb{I}) \\ \text{rot } \mathbb{G}_t &= \text{rot } g_{k_s} \mathbb{I} & \text{div } \mathbb{G}_t &= t \text{div}(g_{k_p} \mathbb{I}) \end{aligned} \quad (139)$$

LEMME 4.1 *La singularité de  $\mathbb{G}_\infty$  au voisinage de  $x = 0$  est d'ordre  $\|x\|^{-3}$ , tandis que celle de  $\mathbb{G}_t$ ,  $t \neq \infty$  est seulement d'ordre  $\|x\|^{-1}$ .*

*Démonstration.* En effet, en vertu de la formule (53), on a

$$\mathbb{G}_t = g_{k_s} \mathbb{I} + k_s^{-2} \left( \frac{1}{r} \left( n \wedge (\mathbb{I} \wedge n) (g'_{k_s} - g'_{k_p}) \right) + n (\mathbb{I} \cdot n) (g''_{k_s} - g''_{k_p}) \right)$$

avec

$$\begin{aligned} g'_{k_s} - g'_{k_p} &= \frac{1}{4\pi r} \left( ik_s e^{ik_s r} - ik_p e^{ik_p r} \right) - \frac{1}{4\pi r^2} \left( e^{ik_s r} - e^{ik_p r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \left( (ik_s r - 1) e^{ik_s r} - (ik_p r - 1) e^{ik_p r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \left( (ik_s r - 1)(1 + ik_s r + 0(r^2)) - (ik_p r - 1)(1 + ik_p r + 0(r^2)) \right) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g''_{k_s} - g''_{k_p} &= -\frac{2}{r} (g'_{k_s} - g'_{k_p}) + \frac{1}{4\pi r} \left( -k_s^2 e^{ik_s r} + k_p^2 e^{ik_p r} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

□

REMARQUE 4.2 *Cette propriété justifie le terme d'équations régularisées attribué aux équations relatives au cas où  $t \neq \infty$ ; elle explique que la solution élémentaire des équations classiques ne soit en pratique jamais utilisée.*

## 4.2 Les formules de représentation intégrale

Leur démonstration est, dans son essence, tout-à-fait semblable à celle des formules relatives à l'équation de Helmholtz ; nous invitons le lecteur à s'y reporter au cas où les détails techniques lui en masqueraient le principe.

## 4.2.1 Domaine borné

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière Lipschitzienne  $F$ . On note  $n$  la normale extérieure à  $\mathcal{O}$  le long de  $F$  et on pose

$$\mathcal{O}' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}.$$

Soit alors  $U \in H(\text{rot}; \mathcal{O}) \cap H(\text{div}; \mathcal{O})$  vérifiant au sens des distributions les équations de Maxwell classiques ( $t = \infty$ ) ou régularisées ( $t \neq \infty$ ):

$$\text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U) - k_s^2 U = 0 \text{ dans } \mathcal{O}. \quad (140)$$

Considérons alors la fonction  $\mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R}^3)$  définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U && \text{dans } \mathcal{O} \\ \mathcal{U} &= 0 && \text{dans } \mathcal{O}' \end{aligned} \quad (141)$$

PROPOSITION 4.2 *Dans  $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$ , la fonction  $\mathcal{U}$  satisfait la représentation intégrale suivante:*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) &= \int_F \mathbb{G}_t(x-y) [\text{rot } U(y) \wedge n_y + t^{-1} n_y \text{div } U(y)] d\gamma_y \\ &\quad - \int_F (\text{rot}_y \mathbb{G}_t(x-y)) [U(y) \wedge n_y] d\gamma_y \\ &\quad - t^{-1} \int_F (\text{div}_y \mathbb{G}_t(x-y))^T (U(y) \cdot n_y) d\gamma_y, \end{aligned} \quad (142)$$

où l'exposant  $T$  représente la transposition, et  $n$  note la normale extérieure à  $\mathcal{O}$ . Cette formule sera notée désormais sous forme condensée

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{I}_F^t[U](x). \quad (143)$$

ou encore

$$\mathcal{U}(x) = \dot{\mathcal{I}}_F[\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{div } U] + \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{rot}}[-U \wedge n] + t^{-1} \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{div}}[-(U \cdot n)] \quad (144)$$

Remarquons que d'après (139), on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{rot}}[U \wedge n] &= \int_F \text{grad}_y g_{k_s}(x-y) \wedge (U(y) \wedge n_y) d\gamma_y \\ \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{div}}[(U \cdot n)] &= \int_F \text{grad}_y g_{k_p}(x-y) (U(y) \cdot n_y) d\gamma_y \end{aligned} \quad (145)$$

REMARQUE 4.3 *Dans ces formules, les diverses intégrales doivent être comprises comme des produits de dualité entre  $H^{-1/2}(F)$  et  $H^{1/2}(F)$ . En effet, en vertu de l'hypothèse  $U \in H(\text{rot}; \mathcal{O}) \cap H(\text{div}; \mathcal{O})$  les quantités  $(U \wedge n)|_F$  and  $(U \cdot n)|_F$  sont définies comme éléments de  $H^{-1/2}(F)$ . Enfin, puisque*

$$\text{rot}(\text{rot } U) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U) \in L^2(\mathcal{O}),$$

d'après (140), l'expression

$$(\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{div } U)|_F$$

se trouve être également élément élément de  $H^{-1/2}(\Sigma)$ . Par souci de simplicité, nous gardons la notation intégrale.

*Démonstration.*

▷ Définissons tout d'abord la convolution d'un vecteur par une matrice par la formule

$$(\mathbb{A} * S)^{(i)} = \sum_{j=1}^3 \mathbb{A}^{(i,j)} * S^{(j)}, \quad (146)$$

De cette définition découle le fait que les opérateurs rot, grad et div s'expriment selon les formules

$$\begin{aligned} (\text{rot } \delta \mathbb{I}) * V &= \text{rot}(\delta \mathbb{I} * V) = \text{rot } V, \\ (\text{grad } \delta) * v &= \text{grad}(\delta * v) = \text{grad } v \text{ et} \\ (\text{grad } \delta)^T * V &= \text{div } V; \end{aligned}$$

notons également que

$$(A * B)^T = B^T * A^T$$

et

$$(\text{rot } \delta \mathbb{I})^T = -\text{rot } \delta \mathbb{I}.$$

▷ Montrons alors que

$$\mathcal{U} = \mathbb{G}_t * S, \quad (147)$$

où

$$S = \text{rot}(\text{rot } \mathcal{U}) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } \mathcal{U}) - k_s^2 \mathcal{U}. \quad (148)$$

La restriction de  $S$  à  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}'$  étant évidemment nulle par construction de  $\mathcal{U}$ , il en résulte que le support de  $S$  est réduit à  $F$ , et par conséquent compact. On aura

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_t^T * [\text{rot}(\text{rot } \mathcal{U}) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } \mathcal{U}) - k_s^2 \mathcal{U}] &= \mathbb{G}_t^T * [\text{rot } \delta \mathbb{I} * (\text{rot } \delta \mathbb{I} * \mathcal{U}) - t^{-1} \text{grad } \delta * ((\text{grad } \delta)^T * \mathcal{U}) - k_s^2 \delta \mathbb{I} * \mathcal{U}] \\ &= \mathbb{G}_t^T * \{ \text{rot } \delta \mathbb{I} * \text{rot } \delta \mathbb{I} - t^{-1} \text{grad } \delta * (\text{grad } \delta)^T - k_s^2 \delta \mathbb{I} \} * \mathcal{U} \\ &= \left\{ (\text{rot } \delta \mathbb{I} * \text{rot } \delta \mathbb{I} - t^{-1} \text{grad } \delta * (\text{grad } \delta)^T - k_s^2 \delta \mathbb{I})^T * \mathbb{G}_t \right\}^T * \mathcal{U} \\ &= \left\{ (\text{rot } \delta \mathbb{I} * \text{rot } \delta \mathbb{I} - t^{-1} \text{grad } \delta * (\text{grad } \delta)^T - k_s^2 \delta \mathbb{I}) * \mathbb{G}_t \right\}^T * \mathcal{U} \\ &= \{ \text{rot}(\text{rot } \mathbb{G}_t) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } \mathbb{G}_t) - k_s^2 \mathbb{G}_t \}^T * \mathcal{U}, \end{aligned}$$

où le second membre n'est finalement rien d'autre que  $(\delta \mathbb{I}) * \mathcal{U} = \mathcal{U}$  en vertu de (132) ; la propriété (147) en découle puisque  $\mathbb{G}_t = \mathbb{G}_t^T$ .

▷ Il s'agit maintenant de donner une forme plus maniable de la distribution  $S$ . Pour  $V \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ , on a

$$\langle S, V \rangle = \int_{\mathcal{O}} U \cdot (\text{rot}(\text{rot } V) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } V) - k_s^2 V).$$

Intégrant par parties dans  $\mathcal{O}$  on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle S, V \rangle &= \int_F (\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{div } U) \cdot V \, d\gamma \\ &\quad + \int_F (U \wedge n) \cdot \text{rot } V \, d\gamma - t^{-1} \int_F (U \cdot n) \text{div } V \, d\gamma, \end{aligned}$$

ce qui peut également s'écrire

$$S = \{ \text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U \} \delta_F + \text{rot} \{ (U \wedge n) \delta_F \} + t^{-1} \text{grad} \{ (U \cdot n) \delta_F \}, \quad (149)$$

où  $f \delta_F$  note la distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  donnée par

$$\langle f \delta_F, \varphi \rangle = \int_F f \varphi d\gamma, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

▷ Substituons alors l'expression (149) de  $S$  dans (147), on trouve finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathbb{G}_t * [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] \delta_F \\ &\quad + \mathbb{G}_t * [\text{rot } \delta \mathbb{I} * (U \wedge n) \delta_F + t^{-1} * \text{grad } \delta * (U \cdot n) \delta_F] \\ &= \mathbb{G}_t * [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] \delta_F \\ &\quad + \{ \mathbb{G}_t * \text{rot } \delta \mathbb{I} \} * (U \wedge n) \delta_F + t^{-1} [\mathbb{G}_t * \text{grad } \delta] * (U \cdot n) \delta_F \\ &= \mathbb{G}_t * [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] \delta_F \\ &\quad - \{ \text{rot } \delta \mathbb{I} * \mathbb{G}_t \}^T * (U \wedge n) \delta_F + t^{-1} [(\text{grad } \delta)^T * \mathbb{G}_t] * (U \cdot n) \delta_F \\ &= \mathbb{G}_t * [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] \delta_F \\ &\quad + (\text{rot } \mathbb{G}_t) * [(U \wedge n) \delta_F] + t^{-1} (\text{div } \mathbb{G}_t)^T * ((U \cdot n) \delta_F), \end{aligned}$$

puisque  $(\text{rot } \mathbb{G}_t)^T = -\text{rot } \mathbb{G}_t$ . Chaque terme du second membre est la convolution d'une fonction indéfiniment différentiable on dehors de 0 avec une mesure à support compact inclus dans  $F$ ; explicitons le sous forme d'une intégrale. Notons  $V$  une fonction indéfiniment dérivable à support compact dont le support ne rencontre pas  $F$ ; on aura, avec

$$\begin{aligned} H(U) &= \mathbb{G}_t [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] \\ &\quad + (\text{rot } \mathbb{G}_t)(U \wedge n) + t^{-1} (\text{div } \mathbb{G}_t)^T (U \cdot n) \\ \mathcal{U} &= \left\langle \delta_F(y), \int_{\mathbb{R}^3} (H(U)(\eta) \cdot V(y + \eta)) d\eta \right\rangle \\ &= \left\langle \delta_F(y), \int_{\mathbb{R}^3} (H(U)(x - y) \cdot V(x)) dx \right\rangle \\ &= \langle \delta_F(y) \otimes V(x), H(U)(x - y) \rangle \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{U} = \langle \langle \delta_F(y), (\mathbb{G}_t [\text{rot } U \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U] + (\text{rot } \mathbb{G}_t)(U \wedge n) + t^{-1} (\text{div } \mathbb{G}_t)^T (U \cdot n)) (x - y) \rangle, V(x) \rangle$$

expression dont la signification est claire, puisque les supports de  $V$  et  $\delta_F$  sont disjoints. La formule de représentation intégrale (142) en résulte, puisque

$$\text{rot}_y \mathbb{G}_t(x - y) = -(\text{rot } \mathbb{G}_t)(x - y) \text{ et } \text{div}_y \mathbb{G}_t(x - y) = -(\text{div } \mathbb{G}_t)(x - y).$$

□

### 4.2.2 Extérieur d'un domaine borné

Soient  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}'$  et  $F$  définis comme précédemment et  $n$  la normale sur  $F$  orientée vers l'extérieur de  $\mathcal{O}'$ . Soit  $U \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathcal{O}') \cap H_{\text{loc}}(\text{div}; \mathcal{O}')$  qui vérifie les équations de Maxwell (140) dans  $\mathcal{O}'$ . Nous définirons  $\mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ \mathcal{U} &= U \quad \text{dans } \mathcal{O}'. \end{aligned} \quad (150)$$

Les principaux ingrédients dans ce cas seront la représentation intégrale en domaine borné (Proposition 4.2), l'unicité du tenseur de Green (Proposition 4.1) et le lemme qui suit:

LEMME 4.2 Soient  $A$ ,  $B$  et  $c$  trois fonctions définies sur la frontière  $F$  de  $\mathcal{O}$ , où  $A$  et  $B$  sont à valeurs vectorielles, et  $c$  à valeurs scalaires. Alors les fonctions  $\mathcal{U}_i$  données par

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(x) &= \dot{\mathcal{I}}_F[A] = \int_F \mathbb{G}_t(x-y) A(y) d\gamma_y \\ \mathcal{U}_2(x) &= \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{rot}}[B] = \int_F (\text{rot}_y \mathbb{G}_t(x-y)) B(y) d\gamma_y \\ \mathcal{U}_3(x) &= \ddot{\mathcal{I}}_F^{\text{div}}[C] = \int_F (\text{div}_y \mathbb{G}_t(x-y))^T c(y) d\gamma_y,\end{aligned}\tag{151}$$

satisfont les équations de Maxwell 140 séparément dans  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ , ainsi que la condition de rayonnement.

*Démonstration.*

▷ Pour montrer que les équations de Maxwell sont satisfaites, il suffit de constater que, comme lors de la preuve de la Proposition 4.2, la fonction

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 - t^{-1}\mathcal{U}_3$$

peut se mettre sous la forme équivalente

$$\mathcal{U} = \mathbb{G}_t * (A\delta_F) + (\text{rot } \mathbb{G}_t) * (B\delta_F) + t^{-1}(\text{div } \mathbb{G}_t)^T * (c\delta_F),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\text{rot}(\text{rot } \mathcal{U}) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } \mathcal{U}) - k_s^2 \mathcal{U} \\ = (\delta \mathbb{I}) * (A\delta_F) + (\text{rot } \delta \mathbb{I}) * (B\delta_F) + t^{-1}(\text{div } \delta \mathbb{I})^T * (c\delta_F), \\ = A\delta_F + \text{rot}(B\delta_F) + t^{-1} \text{grad}(c\delta_F);\end{aligned}$$

cette distribution s'annule à l'extérieur de  $F$ .

▷ Considérons la quantité  $\mathcal{U}_1$ , on aura

$$\mathcal{U}_1(x) = \int_F \sum_{j=1}^3 g^{(j)}(x-y) a_j(y) d\gamma_y$$

où les  $g^{(j)}$  notent les colonnes de  $\mathbb{G}_t$ , et par conséquent

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathcal{U}_1(x) \wedge n_x - ik_s n_x \wedge (\mathcal{U}_1(x) \wedge n_x) \\ = \sum_{j=1}^3 \int_F \left\{ \text{rot } g^{(j)}(x-y) \wedge n_x - ik_s n_x \wedge (g^{(j)}(x-y) \wedge n_x) \right\} a_j(y) d\gamma_y\end{aligned}$$

où  $n_x = x/\|x\|$ . Notons maintenant  $z = x - y$ , nous aurons

$$\begin{aligned}n_z - n_x &= \frac{z}{\|z\|} \left( \frac{\|z\|}{\|x+z\|} - 1 \right) + \frac{x}{\|x+z\|} \\ &= O(z^{-1}),\end{aligned}$$

comme  $g^{(j)}$  et  $\text{rot } g^{(j)}$  sont aussi de l'ordre de  $z^{-1}$ , il en résulte que

$$\begin{aligned}\left\{ \text{rot } g^{(j)}(x-y) \wedge n_x - ik_s n_x \wedge (g^{(j)}(x-y) \wedge n_x) \right\} \\ - \left\{ \text{rot } g^{(j)}(z) \wedge n_z - ik_s n_z \wedge (g^{(j)}(z) \wedge n_z) \right\} = O(z^{-2}).\end{aligned}$$

Du fait que

$$\operatorname{rot} g^{(j)}(z) \wedge n_z - ik_s n_z \wedge (g^{(j)}(z) \wedge n_z) = O(z^{-2}),$$

et en vertu de (59), il résulte alors que

$$\operatorname{rot} \mathcal{U}_1(x) \wedge n_x - ik_s n_x \wedge (\mathcal{U}_1(x) \wedge n_x) = O(x^{-2})$$

et par conséquent

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \|\operatorname{rot} \mathcal{U}_1(x) \wedge n_x - ik_s n_x \wedge (\mathcal{U}_1(x) \wedge n_x)\|^2 d\gamma_x = 0.$$

▷ De même,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{U}_1(x) - ik_p (\mathcal{U}_1(x) \cdot n_x) \\ = \sum_{j=1}^3 \int_F \left\{ \operatorname{div} g^{(j)}(x-y) - ik_p (g^{(j)}(x-y) \cdot n_x) \right\} a_j(y) d\gamma_y \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{div} \mathcal{U}_1(x) - ik_p (\mathcal{U}_1(x) \cdot n_x) = O(x^{-2}),$$

et par conséquent

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\operatorname{div} \mathcal{U}_1(x) - ik_p (\mathcal{U}_1(x) \cdot n_x)|^2 d\gamma_x = 0.$$

▷ Enfin, grâce au Lemme 4.3 ci-dessous, les termes  $\mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{U}_3$  se traitent de la même façon. □

**LEMME 4.3** *La condition de rayonnement est vérifiée par  $\operatorname{rot} \mathbb{G}_t$  et  $(\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T$ .*

*Démonstration.*

▷ Démontrons tout d'abord que  $(\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T$  vérifie la condition de rayonnement ; il nous suffira de calculer

$$\operatorname{rot}(\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T \wedge n = t \operatorname{rot}(\operatorname{grad} g_{k_p}) \wedge n = 0$$

et

$$n \wedge ((\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T \wedge n) = tn \wedge (\operatorname{grad} g_{k_p} \wedge n) = tg'_{k_p} n \wedge (n \wedge n) = 0$$

▷ Puis

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T &= t \operatorname{div}(\operatorname{grad} g_{k_p}) \\ &= t \Delta g_{k_p} \\ &= t (-k_p^2 g_{k_p} + \delta \mathbb{I}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ik_p ((\operatorname{div} \mathbb{G}_t)^T \cdot n) &= itk_p (\operatorname{grad} g_{k_p} \cdot n) \\ &= itk_p g'_{k_p} \\ &= -tk_p^2 g_{k_p} + O(r^{-2}) \end{aligned}$$

▷ De même on aura

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbb{G}_t) \wedge n &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot} g_{k_s} \mathbb{I}) \wedge n \\ &= (-\Delta g_{k_s} \mathbb{I} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} g_{k_s} \mathbb{I})) \wedge n \\ &= (k_s^2 g_{k_s} \mathbb{I} - \delta \mathbb{I} - k_s^2 g_{k_s} n (\mathbb{I} \cdot n) + O(r^{-2})) \wedge n \end{aligned}$$

puisque

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} V_q h_q = -k_s^2 n (V_q \cdot n) h_q + O(r^{-2}),$$

selon le calcul déjà réalisé à la formule (54).

▷ D'autre part

$$\begin{aligned} ik_s n \wedge (\operatorname{rot} \mathbb{G}_t \wedge n) &= ik_s n \wedge (\operatorname{rot}(g_{k_s} \mathbb{I}) \wedge n) \\ &= ik_s n \wedge ((\operatorname{grad} g_{k_s} \wedge \mathbb{I}) \wedge n) \\ &= ik_s g'_{k_s} n \wedge ((n \wedge \mathbb{I}) \wedge n) \\ &= -ik_s g'_{k_s} (n \wedge (\mathbb{I} \wedge n)) \wedge n \\ &= -ik_s g'_{k_s} (\mathbb{I} - n (\mathbb{I} \cdot n)) \wedge n \\ &= k_s^2 g_{k_s} (\mathbb{I} - n (\mathbb{I} \cdot n)) \wedge n + O(r^{-2}) \end{aligned}$$

puisque  $\operatorname{rot} V_q h_q = \operatorname{grad} h_q \wedge V_q$ .

▷ Enfin

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbb{G}_t) = \operatorname{div} \operatorname{rot}(g_{k_s} \mathbb{I}) = 0$$

et

$$ik_p (\operatorname{rot} \mathbb{G}_t \cdot n) = ik_p (\operatorname{rot}(g_{k_s} \mathbb{I}) \cdot n) = ik_p g'_{k_s} (n \wedge \mathbb{I} \cdot n) = 0$$

□

**PROPOSITION 4.3** *Si  $U$  vérifie la condition de rayonnement et  $U$  est donné par*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= 0 && \text{dans } \mathcal{O} \\ \mathcal{U} &= U && \text{dans } \mathcal{O}'. \end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{U} = \mathcal{I}_F^t[U] \tag{152}$$

Notons bien qu'ici la normale a été choisie dirigée vers l'intérieur de  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $\Sigma$  le bord d'une boule ouverte  $B$  dont le rayon est choisi suffisamment grand pour que  $F \subset B$ .

▷ De la Proposition 4.2 appliquée au domaine borné  $\mathcal{O}' \cap B$  il résulte que

$$\mathcal{I}_F^t[U] - \mathcal{I}_\Sigma^t[U] = \begin{cases} U & \text{dans } \mathcal{O}' \cap B, \\ 0 & \text{dans } \mathcal{O} \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}). \end{cases} \tag{153}$$

Nous devons donc montrer que  $\mathcal{I}_\Sigma^t[U] = 0$  dans  $\mathcal{O}' \cap B$ .

▷ Remarquons alors qu'en vertu du Lemme 4.2, l'expression  $\mathcal{I}_\Sigma^t[U]$  définit une fonction satisfaisant les équations de Maxwell séparément dans  $B$  et dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ , ainsi que les conditions de rayonnement.

▷ Considérons alors la fonction  $V$  définie par

$$V = \mathcal{I}_\Sigma^t[U] \text{ dans } B, \text{ et } V = U - \mathcal{I}_F^t[U] \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}.$$

Dans  $\mathcal{O}' \cap B$ , nous aurons  $V = U - \mathcal{I}_F^t[U]$ ; en vertu de (153)  $V$  est régulière au voisinage de  $\Sigma$ . Par conséquent  $V$  satisfait les équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier ainsi que les conditions de rayonnement. L'unicité de  $\mathbb{G}_t$  (Proposition 4.1) nous assure alors que  $V \equiv 0$ .

□

## 5 Existence

### 5.1 La méthode de couplage

Nous décrivons dans ce paragraphe la méthode de couplage entre formulation variationnelle et représentation intégrale consistant à réduire les problèmes  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  à des problèmes posés en domaine borné. Nous serons ainsi à même de démontrer les résultats d'existence à l'aide du théorème de l'alternative de Fredholm.

Soit  $F$  une surface régulière fermée, entourant le bord du domaine parfaitement conducteur, et dont l'extérieur soit tout entier situé dans la zone où les coefficients  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  sont constants. Si  $U$  est solution des équations de Maxwell  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ , classiques ( $\tau \neq \infty$ ) ou régularisées ( $\tau = \infty$ ), alors d'après les Propositions 2.5 ou 2.6, nous savons qu'en dehors de  $F$ , l'onde diffractée  $U_D = U - U_I$  satisfait l'équation simplifiée

$$\text{rot}(\text{rot } U_D) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } U_D) - k_s^2 U_D = 0, \quad (154)$$

ainsi que les conditions de rayonnement (85) et (86).

Notons  $\Omega'_i$  le domaine compris entre  $\Gamma$  et  $F$ ; d'après la Proposition 4.3,  $U_D$  satisfait la formule de représentation suivante à l'extérieur de  $F$  :

$$\begin{aligned} U_D(x) = & \int_F \mathbb{G}_t(x-y) [\text{rot } U_D(y) \wedge n_y + t^{-1} n_y \text{div } U_D(y)] d\gamma_y \\ & - \int_F (\text{rot}_y \mathbb{G}_t(x-y)) [U_D(y) \wedge n_y] d\gamma_y \\ & - t^{-1} \int_F (\text{div}_y \mathbb{G}_t(x-y))^T (U_D(y) \cdot n_y) d\gamma_y, \end{aligned} \quad (155)$$

où  $\mathbb{G}_t$  n'est autre que le tenseur de Green (136) de (154) associé à la condition d'onde sortante. Dans la suite, cette formule sera écrite sous la forme

$$U_D = \mathcal{I}_F^t[U_D] \text{ en dehors de } F. \quad (156)$$

Remarquons que, comme l'onde incidente  $U_I$  est solution de

$$\text{rot}(\text{rot } U_I) - k_s^2 U_I = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

elle satisfait en particulier l'équation (154) en dehors de  $F$ . De la formule de représentation intégrale (142) appliquée dans le domaine borné limité par  $F$ , il résulte alors que

$$0 = \mathcal{I}_F^t[U_I] \text{ en dehors de } F. \quad (157)$$

Par conséquent, la représentation intégrale (156) peut encore s'écrire, en termes du potentiel total  $U$ , sous la forme suivante:

$$U = U_I + \mathcal{I}_F^t[U] \text{ en dehors de } F. \quad (158)$$



### 5.1.1 Représentation intégrale modifiée

La formule (158) fait intervenir l'intégrale de quantités telles

$$[\text{rot } V(y) \wedge n_y + t^{-1} n_y \text{ div } V(y)]|_F$$

qui, selon la Remarque 4.3, n'acquièrent de signification que sous la condition supplémentaire

$$\text{rot}(\text{rot } V) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } V) \in L^2(\Omega'_e).$$

Dans la suite nous aurons besoin que la formule de représentation intégrale soit définie pour tout  $V \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}$ ; nous devons donc en modifier l'écriture. Considérons à cet effet un inverse régulier  $\mathcal{R}$  de l'opérateur trace:  $\Omega'_e \rightarrow F$ , c'est-à-dire un opérateur linéaire qui transforme toute fonction régulière  $\varphi$  définie sur  $F$  en une fonction régulière  $\mathcal{R}\varphi$  définie sur  $\Omega'_e$  satisfaisant  $(\mathcal{R}\varphi)|_F = \varphi$ . Supposons de plus que  $\mathcal{R}$  s'annule sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire que  $(\mathcal{R}\varphi)|_\Sigma = 0 \forall \varphi$ . Intégrant par parties le terme embarrassant dans (155) on trouve, avec  $\mathbb{G}_t(x, y) = \mathbb{G}_t(x - y)$ ,

$$\begin{aligned} \int_F \mathbb{G}_t(x, \cdot) [\text{rot } U_D \wedge n + t^{-1} n \text{ div } U_D] d\gamma = \\ - \int_{\Omega'_e} \mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot) [\text{rot rot } U_D - t^{-1} \text{grad div } U_D] \\ + \int_{\Omega'_e} \text{rot}(\mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot)) \text{rot } U_D + t^{-1} \int_{\Omega'_e} (\text{div } \mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot))^T \text{div } U_D, \end{aligned}$$

pour  $x$  situé à l'extérieur de  $F$ .

Comme  $U_D$  vérifie l'équation (154) dans  $\Omega'_e$ , la représentation intégrale (155) peut être écrite de façon équivalente

$$U_D = \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U_D] \quad (159)$$

à l'extérieur de  $F$ , où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U_D](x) = -k_s^2 \int_{\Omega'_e} \mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot) U_D \\ + \int_{\Omega'_e} \text{rot}(\mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot)) \text{rot } U_D + t^{-1} \int_{\Omega'_e} (\text{div } \mathcal{R}\mathbb{G}_t(x, \cdot))^T \text{div } U_D \\ - \int_F (\text{rot } \mathbb{G}_t(x, \cdot)) [U_D \wedge n] d\gamma - t^{-1} \int_F (\text{div } \mathbb{G}_t(x, \cdot))^T (U_D \cdot n) d\gamma. \end{aligned} \quad (160)$$

et  $n$  est, rappelons-le, la normale extérieure à  $\Omega'_e$ .

De façon générale, pour tout  $U$  satisfaisant (154) dans  $\Omega'_e$ , on aura de même

$$\mathcal{I}_F^t[U] = \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U] \text{ à l'extérieur de } F. \quad (161)$$

### 5.1.2 Formulation naïve

Considérons maintenant une surface fermée  $\Sigma$  entourant  $F$  et ne la recoupant pas. Nous noterons  $\Omega'$  la partie bornée de  $\Omega$  limitée par  $\Sigma$ ,  $\Omega'_e$  la partie de  $\Omega'$  située à l'extérieur de  $F$ , et  $\Omega''$  l'extérieur de  $\Sigma$ .

Introduisons maintenant l'opérateur frontière sur  $\Sigma$  respectivement relatif aux composantes tangentielles du champ:

$$T_\lambda U = \{\text{rot } U \wedge n + \lambda n \wedge (U \wedge n)\}|_\Sigma, \quad (162)$$

ainsi que, dans le cas des équations régularisées, celui relatif à la composante normale

$$N_\nu U = \{\operatorname{div} U + \nu U \cdot n\}_{|\Sigma}, \quad (163)$$

où  $\lambda$  et  $\nu$  sont des paramètres complexes arbitraires. Si  $U$  est solution des équations de Maxwell, elle satisfait

$$T_\lambda U = T_\lambda (U_I + \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U]) \text{ et } N_\nu U = N_\nu (U_I + \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U]),$$

en vertu de la formule de représentation intégrale (159). Il en résulte que la restriction  $U'$  de  $U$  à  $\Omega'$  est solution du problème suivant, dit *problème réduit*, posé dans le domaine borné  $\Omega'$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\zeta^{-1} \operatorname{rot} U') - \bar{\xi} \operatorname{grad}(\tau^{-1} \operatorname{div} \xi U') - \omega^2 \xi U' &= 0 \text{ dans } \Omega', \\ T_\lambda(U' - \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U']) &= T_\lambda U_I \text{ et } t^{-1} N_\nu(U' - \mathcal{I}\mathcal{R}_F^t[U']) = t^{-1} N_\nu U_I \text{ sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (164)$$

assorti des conditions aux limites sur  $\Gamma$  relatives, selon le cas, au champ électrique ou au champ magnétique.

Notons qu'au sein de la condition aux limites sur  $\Sigma$ , appelée 'condition de couplage', la relation qui fait intervenir  $N_\nu$  n'est prise en compte que pour le problème régularisé, c'est-à-dire si  $t \neq \infty$ .

### 5.1.3 Formulation variationnelle du problème réduit

Il s'agit maintenant de donner de (164) une formulation précise ; les espaces de fonctions naturels associés à ces équations s'obtiennent en considérant les restrictions à  $\Omega'$  des fonctions de  $\mathcal{F}_\tau^{E/H}$  suffisamment régulières au voisinage de  $\Sigma$ , en raison des conditions de couplage imposées. Nous distinguerons de nouveau les problèmes classiques et régularisés.

**Le problème classique** Nous sommes donc amenés à définir les espaces de Hilbert suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^E &= \{V \in H(\operatorname{rot}; \Omega') \mid (V \wedge n)_{|\Gamma} = 0, (V \wedge n)_{|\Sigma} \in L^2(\Sigma)^2\}, \\ \mathcal{H}^H &= \{V \in H(\operatorname{rot}; \Omega') \mid (V \wedge n)_{|\Sigma} \in L^2(\Sigma)^2\}, \end{aligned} \quad (165)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty^E &= \{V \in H(\operatorname{rot}; \Omega') \mid \operatorname{div} \xi V = 0 \text{ dans } \Omega', \\ &\quad (V \wedge n)_{|\Gamma} = 0, (V \wedge n)_{|\Sigma} \in L^2(\Sigma)^2\}, \\ \mathcal{H}_\infty^H &= \{V \in H(\operatorname{rot}; \Omega') \mid \operatorname{div} \xi V = 0 \text{ dans } \Omega', \\ &\quad (\xi V \cdot n)_{|\Gamma} = 0, (V \wedge n)_{|\Sigma} \in L^2(\Sigma)^2\}, \end{aligned} \quad (166)$$

Le problème (164) est susceptible des deux formulations variationnelles suivantes, selon l'espace fonctionnel choisi:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } U' \in \mathcal{H}^{E/H} \text{ tel que} \\ a_\infty(U', V) = \ell_\infty(V), \quad \forall V \in \mathcal{H}^{E/H}, \end{aligned} \quad (\mathcal{P}'^{E/H})$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } U' \in \mathcal{H}_\infty^{E/H} \text{ tel que} \\ & a_\infty(U', V) = \ell_\infty(V), \quad \forall V \in \mathcal{H}_\infty^{E/H}, \end{aligned} \quad (\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$$

où  $a_\infty(\cdot, \cdot)$  est la forme sesquilinéaire définie sur  $\mathcal{H}^{E/H} \times \mathcal{H}^{E/H}$  par

$$\begin{aligned} a_\infty(U', V) = & \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U' \cdot \text{rot } \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U' \cdot \bar{V} \\ & + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \lambda (U' \wedge n) \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} T_\lambda \mathcal{I} \mathcal{R}_F^\infty[U'] \cdot \bar{V} d\gamma, \end{aligned} \quad (167)$$

et  $\ell_\infty(\cdot)$  la forme antilinéaire définie par

$$\ell_\infty(V) = \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} T_\lambda U_I \cdot \bar{V} d\gamma. \quad (168)$$

**PROPOSITION 5.1** *Les formulations variationnelles  $(\mathcal{P}'^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* Elle est similaire à celle des Propositions 2.2 et 2.4.

▷ Soit  $U'$  solution de  $(\mathcal{P}'^{E/H})$ . Prenons  $V \in \mathcal{H}^E$  (respectivement  $\mathcal{H}^H$ ), on aura  $V = \text{grad } \varphi + V'$  où  $V' \in \mathcal{H}_\infty^E$  (respectivement  $V' \in \mathcal{H}_\infty^H$ ),  $\varphi$  ayant été déterminé selon le Lemme 2.1 avec  $\mathcal{O} = \Omega'$ ,  $F_0 = \Gamma \cup \Sigma$  et  $F_1 = \emptyset$  (respectivement  $F_0 = \Sigma$  et  $F_1 = \Gamma$ ). On aura alors

$$\begin{aligned} & a_\infty(U', V) - \ell_\infty(V) \\ & = a_\infty(U', \text{grad } \varphi) - \ell_\infty(\text{grad } \varphi) \\ & = -\omega^2 \int_{\Omega'} \xi U' \cdot \text{grad } \bar{\varphi} \\ & \quad - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} T_\lambda \mathcal{I} \mathcal{R}_F^\infty[U'] \cdot \text{grad } \bar{\varphi} d\gamma - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} T_\lambda U_I \cdot \text{grad } \bar{\varphi} d\gamma. \\ & = 0 \end{aligned}$$

car

$$\int_{\Omega'} \xi U' \cdot \text{grad } \bar{\varphi} = - \int_{\Omega'} \text{div}(\xi U') \bar{\varphi} + \int_{\Gamma \cup \Sigma} (\xi U' \cdot n) \bar{\varphi} d\gamma = 0$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} T_\lambda W \cdot \text{grad } \bar{\varphi} d\gamma \\ & = - \int_{\Sigma} (\text{rot } W \cdot (\text{grad } \bar{\varphi} \wedge n)) d\gamma \\ & \quad + \int_{\Sigma} \lambda ((W \wedge n) \cdot (\text{grad } \bar{\varphi} \wedge n)) d\gamma \\ & = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $U'$  est solution de  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$ .

▷ La réciproque est immédiate.

□

**Le problème régularisé** Nous définissons maintenant les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau^E &= \{V \in H(\text{rot}; \Omega') \mid \text{div } \xi V \in L^2(\Omega'), (V \wedge n)|_\Gamma = 0, \\ &\quad (V \wedge n)|_\Sigma \in L^2(\Sigma)^2 \text{ et } (V \cdot n)|_\Sigma \in L^2(\Sigma)\}, \\ \mathcal{H}_\tau^H &= \{V \in H(\text{rot}; \Omega') \mid \text{div } \xi V \in L^2(\Omega'), (\xi V \cdot n)|_\Gamma = 0, \\ &\quad (V \wedge n)|_\Sigma \in L^2(\Sigma)^2 \text{ et } (V \cdot n)|_\Sigma \in L^2(\Sigma)\}. \end{aligned} \quad (169)$$

Le problème réduit associé à la formulation régularisée des équations de Maxwell prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } U' \in \mathcal{H}_\tau^{E/H} \text{ tel que} \\ &a_\tau(U', V) = \ell_\tau(V), \quad \forall V \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}, \end{aligned} \quad (\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$$

avec

$$\begin{aligned} a_\tau(U', V) &= \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U' \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \text{div } \xi U' \text{div } \bar{\xi V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U' \cdot \bar{V} \\ &\quad + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \{ \lambda (U' \wedge n) \cdot (\bar{V} \wedge n) + t^{-1} \nu (U' \cdot n) (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma \\ &\quad - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \{ (T_\lambda \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U'] \cdot \bar{V}) + t^{-1} N_\nu \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U'] (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma, \end{aligned} \quad (170)$$

et

$$\ell_\tau(V) = \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \{ (T_\lambda U_I \cdot \bar{V}) + t^{-1} N_\nu U_I (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma. \quad (171)$$

#### 5.1.4 Equivalence entre problème initial et problème réduit

**LEMME 5.1** *Si  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ , alors  $U' = U|_{\Omega'}$  est solution de  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$ , que ce soit pour le problème classique ( $\tau = \infty$ ) ou pour le problème régularisé ( $\tau \neq \infty$ ).*

*Démonstration.*

▷ Dans le cas du problème classique, soit  $U$  solution de  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$ , elle vérifie les équations

$$\int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} - \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} (\text{rot } U \wedge n) \cdot \bar{V} d\gamma = 0, \quad \forall V \in \mathcal{F}_\infty^{E/H}$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U \cdot \text{rot } \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ &\quad + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} (\lambda n \wedge (U \wedge n) - T_\lambda U) \cdot \bar{V} d\gamma \end{aligned}$$

en vertu de la définition (162) de  $T_\lambda$  :

$$\text{rot } U \wedge n = T_\lambda U - \lambda n \wedge (U \wedge n).$$

Comme  $U$  vérifie l'équation (102) à l'extérieur de  $F$  et  $U_D = U - U_I$  satisfait à la condition de rayonnement (84), cette dernière quantité vérifie la formule de représentation intégrale modifiée (159) ; il en résulte que  $U|_{\Omega'}$  est solution de  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

▷ En ce qui concerne le problème régularisé, si  $U$  solution de  $(\mathcal{P}'_{\tau}^{E/H})$ , elle vérifie les équations

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\bar{V} \cdot n) d\gamma = 0, \\ \forall V \in \mathcal{F}_{\tau}^E. \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} (\lambda n \wedge (U \wedge n) - T_{\lambda} U) \cdot \bar{V} d\gamma \\ - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} (N_{\nu} U - \nu U \cdot n) (\bar{V} \cdot n) d\gamma \end{aligned}$$

d'après les définitions (162) et (163) de  $T_{\lambda}$  et  $N_{\nu}$  :

$$\operatorname{rot} U \wedge n = T_{\lambda} U - \lambda n \wedge (U \wedge n) \text{ et } \operatorname{div} U = N_{\nu} U - \nu U \cdot n$$

Comme  $U$  vérifie l'équation (154) à l'extérieur de  $F$  et les conditions de rayonnement (85) et (86), elle vérifie la formule de représentation intégrale modifiée (159) ; il en résulte que  $U|_{\Omega'}$  est solution de  $(\mathcal{P}'_{\tau}^{E/H})$  pour tout  $(\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2$ .

□

**PROPOSITION 5.2** *Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  choisi de telle sorte que  $\Im(\lambda k_s^{-2}) < 0$  et, dans le cas des équations régularisées,  $\nu \in \mathbb{C}$  tel que  $\Im(\nu k_p^{-2}) < 0$ ; si  $U'$  est solution de  $(\mathcal{P}'_{\tau}^{E/H})$ , alors le champ  $U$  défini par*

$$U = U' \text{ dans } \Omega' \text{ et } U = U_I + \mathcal{I}_F^{\tau}[U'] \text{ dans } \Omega'', \quad (172)$$

*est solution selon de  $(\mathcal{P}'_{\tau}^{E/H})$ , que ce soit pour le problème classique ( $\tau = \infty$ ) ou le problème régularisé ( $\tau \neq \infty$ ).*

*Démonstration.*

▷ Soit donc  $U'$  une solution de  $(\mathcal{P}'_{\tau}^{E/H})$ . En choisissant des fonctions test  $V$  à support dans  $\Omega'_e$ , ce qui pour  $\tau = \infty$  nécessite de recourir à l'équivalence entre  $(\mathcal{P}'_{\infty}^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}^{E/H})$  démontrée à la Proposition 5.1, on montre que  $U'$  y vérifie (154) ainsi que les conditions aux limites

$$\operatorname{rot} U' \wedge n = -\lambda n \wedge (U' \wedge n) + T_{\lambda} (\mathcal{I}\mathcal{R}_F^{\tau}[U'] + U_I) \quad (173)$$

ainsi que, dans le cas des équations régularisées,

$$\operatorname{div} U' = -\nu U' \cdot n + N_{\nu} (\mathcal{I}_F^{\tau}[U'] + U_I) \quad (174)$$

La Proposition 4.3 nous montre alors que la formule de représentation intégrale suivante est vérifiée dans  $\Omega'_e$  :

$$U' = \mathcal{I}_F^{\tau}[U'] + W \text{ dans } \Omega'_e, \text{ où } W = \mathcal{I}_{\Sigma}^{\tau}[U'], \quad (175)$$

▷ Montrons alors que  $W = U_I$  dans  $\Omega'_e$ . L'expression  $\mathcal{I}_\Sigma^\tau[U']$ , qui est égale à  $\mathcal{I}\mathcal{R}_\Sigma^\tau[U']$  en vertu de (161), définit un champ dans le domaine tout entier  $\hat{\Omega}$  situé à l'intérieur de  $\Sigma$ . Ce champ vérifie évidemment (154) dans  $\hat{\Omega}$ , mais également d'après (173) et (174),

$$T_\lambda(U') = T_\lambda(\mathcal{I}\mathcal{R}_F^\tau[U'] + U_I) \text{ et } t^{-1}N_\nu(U') = t^{-1}N_\nu(\mathcal{I}\mathcal{R}_F^\tau[U'] + U_I)$$

Il est donc clair, d'après (175), que  $W$  est solution du problème

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } W) - t^{-1} \text{grad}(\text{div } W) - k_s^2 W &= 0 \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ T_\lambda W &= T_\lambda U_I \text{ et } t^{-1}N_\nu W = t^{-1}N_\nu U_I \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

▷ Ce problème n'a que  $U_I$  pour solution ; en effet pour  $U_I = 0$ ,  $W$  vérifie

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \|\text{rot } W\|^2 + t^{-1} \int_{\hat{\Omega}} |\text{div } W|^2 - k_s^2 \int_{\hat{\Omega}} \|W\|^2 \\ + \lambda \int_{\Sigma} \|W \wedge n\|^2 d\gamma + t^{-1}\nu \int_{\Sigma} |W \cdot n|^2 d\gamma = 0, \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \Im k_s^{-2} \int_{\hat{\Omega}} \|\text{rot } W\|^2 + \Im k_p^{-2} \int_{\hat{\Omega}} |\text{div } W|^2 \\ + \Im(\lambda k_s^{-2}) \int_{\Sigma} \|W \wedge n\|^2 d\gamma + \Im(\nu k_p^{-2}) \int_{\Sigma} |W \cdot n|^2 d\gamma = 0, \end{aligned}$$

▷ Dans le cas du problème classique, comme  $\Im k_s^{-2} \leq 0$  d'après nos hypothèses et que  $\lambda$  a été choisi tel que  $\Im(\lambda k_s^{-2}) < 0$ , on a  $W \wedge n = 0$  sur  $\Sigma$ , et par conséquent  $(\text{rot } W \wedge n)|_\Sigma = 0$ , puisque  $T_\lambda W = 0$ . Comme de plus  $W = \mathcal{I}_\Sigma^\tau[W]$ , il en résulte que  $W = 0$  dans  $\hat{\Omega}$ .

▷ En ce qui concerne le problème régularisé, on aura Comme  $\Im k_s^{-2} \leq 0$ ,  $\Im k_p^{-2} \leq 0$  ainsi que  $\Im(\lambda k_s^{-2}) < 0$  et  $\Im(\nu k_p^{-2}) < 0$ , soit par conséquent  $(W \wedge n)|_\Sigma = 0$  et  $(W \cdot n)|_\Sigma = 0$ , d'où il résulte que  $(\text{rot } W \wedge n)|_\Sigma = 0$  et  $(\text{div } W)|_\Sigma = 0$ , puisque  $T_\lambda W = 0$  et  $N_\nu W = 0$ . La formule  $W = \mathcal{I}_\Sigma^\tau[W]$ , nous prouve là encore que  $W = 0$  dans  $\hat{\Omega}$ .

▷ Nous avons donc montré que

$$U' = \mathcal{I}_F^\tau[U'] + U_I \tag{176}$$

il en résulte que  $U'$  se prolonge à  $\Omega''$  en une solution de (154) telle que  $U' - U_I$  vérifie la condition de rayonnement, soit en une solution de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ .

□

**THÉORÈME 5.1** *Sous les hypothèses de la Proposition 5.2, les problèmes  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  sont équivalents, tant pour l'existence que pour l'unicité:  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  admet au moins (respectivement au plus) une solution si et seulement si il en est de même pour le problème réduit correspondant  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$ . La relation entre ces solutions est fournie par la formule (172).*

*Démonstration.*

▷ L'équivalence relativement à l'existence ainsi que la formule (172) résultent du lemme 5.1 et de la Proposition 5.2 ; reste donc à étudier l'équivalence relativement à l'unicité.

▷ Supposons que  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  n'a pas plus d'une solution, alors il en est de même de  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  car dans le cas contraire, deux solutions différentes de  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  se prolongeraient par la formule (172) en deux solutions différentes de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ .

▷ Réciproquement si  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  n'a pas plus d'une solution, soit  $U$  solution de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ , alors  $U|_{\Omega'}$  est solution de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  et  $U|_{\Omega''} = \mathcal{I}_F^t[U|_{\Omega'}]$ ; l'unicité de  $U$  en résulte.

□

## 5.2 Les théorèmes de compacité

Les démonstrations d'existence de la solution des problèmes  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  ou  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  reposent sur l'alternative de Fredholm, c'est-à-dire sur le fait que dans les formes bilinéaires  $a_\infty$  ou  $a_\tau$  le terme négatif  $-\omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V}$  constitue une perturbation compacte. Un tel résultat est bien connu, c'est le Théorème de Rellich, pour la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega'} (\text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v}) - \omega^2 \int_{\Omega'} u \bar{v}$$

associée à l'équation de Helmholtz ; il n'en n'est pas de même pour les formes bilinéaires associées aux équations de Maxwell, classiques ou régularisées. En particulier, les définitions qui suivent:

$$\begin{aligned} H(\text{rot}; \mathcal{O}) &= \{U \in L^2(\mathcal{O})^3 \mid \text{rot } U \in L^2(\mathcal{O})^3\} \\ H(\text{div}; \mathcal{O}) &= \{U \in L^2(\mathcal{O})^3 \mid \text{div } U \in L^2(\mathcal{O})\} \\ H(\text{div } \xi; \mathcal{O}) &= \{U \in L^2(\mathcal{O})^3 \mid \text{div } \xi U \in L^2(\mathcal{O})\} \\ H^0(\text{div } \xi; \mathcal{O}) &= \{U \in L^2(\mathcal{O})^3 \mid \text{div } \xi U = 0\} \end{aligned}$$

des espaces naturellement associés aux équations de Maxwell ne font pas de l'injection naturelle

$$H(\text{div}; \mathcal{O}) \cap H(\text{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})$$

une injection compacte pour un domaine  $\mathcal{O}$  borné.

Nous serons amenés à faire intervenir de façon essentielle les conditions aux limites pour aboutir à la démonstration d'une telle propriété. Posons donc

$$\begin{aligned} H_\partial(\text{rot}; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{rot}; \mathcal{O}) \mid (U \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\partial\mathcal{O})^2\} \\ H_\partial(\text{div}; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{div}; \mathcal{O}) \mid (U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\partial\mathcal{O})\} \\ H_\partial(\text{div } \xi; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{div } \xi; \mathcal{O}) \mid (\xi U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\partial\mathcal{O})\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{\partial 0}(\text{rot}; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{rot}; \mathcal{O}) \mid (U \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0\} \\ H_{\partial 0}(\text{div}; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{div}; \mathcal{O}) \mid (U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0\} \\ H_{\partial 0}(\text{div } \xi; \mathcal{O}) &= \{U \in H(\text{div } \xi; \mathcal{O}) \mid (\xi U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0\} \\ H_{\partial 0}^0(\text{div } \xi; \mathcal{O}) &= \{U \in H^0(\text{div } \xi; \mathcal{O}) \mid (\xi U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0\} \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, de nature essentiellement technique, nous supposons que  $\mathcal{O}$  est domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière Lipschitzienne.

### 5.2.1 Le cas des coefficients constants

Il s'agit d'une situation relativement simple qui a été élucidée par Costabel [3] et dont la résolution forme une étape nécessaire de celle du cas général.

Nous admettrons le Lemme suivant, de démonstration délicate quand  $\partial\mathcal{O}$  n'est pas régulier.

**LEMME 5.2 (Dahlberg, Jerrison, Kenig)** *Soit  $u \in H^1(\mathcal{O})$ , qui vérifie  $\Delta u = 0$  dans  $\mathcal{O}$ , alors les deux conditions sont équivalentes:*

- (i)  $u|_{\partial\mathcal{O}} \in H^1(\partial\mathcal{O})$
- (ii)  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\partial\mathcal{O})$

si elles sont satisfaites alors  $u \in H^{3/2}(\mathcal{O})$  et il existe une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \|U\|_{H^{3/2}(\mathcal{O})}^2 &\leq C \left( \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u|_{\partial\mathcal{O}}\|_{H^1(\partial\mathcal{O})}^2 \right) \\ \|U\|_{H^{3/2}(\mathcal{O})}^2 &\leq C \left( \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\mathcal{O}} \right\|_{L^2(\partial\mathcal{O})}^2 \right) \end{aligned}$$

La proposition suivante en découle aisément:

**PROPOSITION 5.3 (Costabel)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert à bord Lipschitzien et*

$$U \in H(\text{div}; \mathcal{O}) \cap H(\text{rot}; \mathcal{O}),$$

alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $(U \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O})^2$
- (ii)  $(U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O});$

si elles sont satisfaites, alors  $U \in H^{1/2}(\mathcal{O})$  et il existe  $C$  tel que

$$\begin{aligned} \|U\|_{H^{1/2}(\mathcal{O})} &\leq C \|U\|_{H(\text{div}; \mathcal{O}) \cap H_\partial(\text{rot}; \mathcal{O})} \\ \|U\|_{H^{1/2}(\mathcal{O})} &\leq C \|U\|_{H_\partial(\text{div}; \mathcal{O}) \cap H(\text{rot}; \mathcal{O})} \end{aligned}$$

*Démonstration.*

▷ Soit donc  $U \in H(\text{div}; \mathcal{O}) \cap H(\text{rot}; \mathcal{O})$ , d'après [8] (Théorème 3.4, p. 45), on en déduit l'existence de  $\Phi \in H^1(\mathcal{O})^3$  tel que

$$\text{rot } \Phi = \text{rot } U, \text{ et } \text{div } \Phi = 0.$$

Posons  $\Psi = U - \Phi$ ; on aura  $\Psi \in L^2(\mathcal{O})^3$  avec  $\text{rot } \Psi = 0$ ,

▷ Supposons dans un premier temps que  $\mathcal{O}$  est simplement connexe, on pourra alors utiliser le Théorème de Stokes ([8], Théorème 2.9, p. 31) qui nous montre l'existence de  $q \in H^1(\mathcal{O})$  tel que  $\Psi = \text{grad } q$ . On aura

$$\frac{\partial q}{\partial n} = (U \cdot n) - (\Phi \cdot n)$$

et,  $\forall t$  tangent à  $\partial\mathcal{O}$ ,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = ((n(\text{grad } q \cdot n) + n \wedge (\text{grad } q \wedge n)) \cdot t) = ((\text{grad } q \wedge n) \cdot (t \wedge n))$$



Il en résulte que  $q$  vérifie

$$\Delta q = \operatorname{div} U \text{ dans } \mathcal{O},$$

avec, selon le cas,

$$q|_{\partial\mathcal{O}} \in H^1(\partial\mathcal{O}) \text{ ou } \frac{\partial q}{\partial n}|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\partial\mathcal{O}).$$

En vertu du Lemme qui précède, on aura dans les deux cas  $q \in H^{3/2}(\mathcal{O})$ , et par conséquent  $U \in H^{1/2}(\mathcal{O})^3$ .

▷ Dans le cas où  $\mathcal{O}$  n'est pas simplement connexe, on le recouvre d'un nombre fini  $n$  d'ouverts  $\Theta^{(i)}$  tels que  $\mathcal{O}^{(i)} = \mathcal{O} \cap \Theta^{(i)}$  soit simplement connexe, et on note  $\theta^{(i)}$  une partition de l'unité subordonnée formée de fonctions  $\theta^{(i)}$  indéfiniment dérivables, à support compact dans  $\mathcal{O}^{(i)}$ ; il est alors clair que  $U = \sum_{i=1}^n U^{(i)}$  avec  $U^{(i)} = U \theta^{(i)}$ . Si on suppose que  $U \in H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$  et vérifie l'hypothèse (i) ou (ii), alors en vertu de la régularité des  $\theta^{(i)}$ , il en est de même de  $U^{(i)}$ ; par conséquent  $U^{(i)} \in H^{1/2}(\mathcal{O})$ , d'où il résulte que  $U \in H^{1/2}(\mathcal{O})$ .

▷ L'estimation découle du Théorème du graphe fermé: notons  $I$ , l'identité de  $L^2(\mathcal{O})^3$ , et par exemple  $J$  sa restriction à  $H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$ , considérée comme une application de

$$H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$$

dans  $H^{1/2}(\mathcal{O})^3$ . Soit alors  $(U_n, JU_n)$  une suite qui converge dans

$$H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \times H^{1/2}(\mathcal{O})^3,$$

soit vers  $(U, Y)$ . Considérée comme une suite dans  $L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$ , la suite  $(U_n, JU_n) = (U_n, IU_n)$  converge vers  $(U, IU)$ ; il en résulte que  $Y = IU = JU$ , c'est-à-dire que le graphe de  $J$  est fermé. En conséquence, l'injection canonique  $H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow H^{1/2}(\mathcal{O})^3$  est continue; la seconde estimation se démontre de façon semblable. □

**COROLLAIRE 5.1** *Les injections canoniques*

$$H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})^3 \text{ et } H_{\partial}(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})^3$$

*sont compactes.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du Théorème de Rellich, qui assure la compacité de l'injection canonique:  $H^s(\mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})$  dès que  $s > 0$  et  $\mathcal{O}$  est borné. □

**DÉFINITION 5.1** *Pour  $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$ , on dira que  $\mathcal{O}$  vérifie la propriété de  $\varepsilon$ -régularité si  $\partial\mathcal{O}$  est suffisamment régulière pour que la solution  $\varphi$  du problème suivant:*

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{aligned}$$

*appartienne à  $H^{3/2+\varepsilon}(\mathcal{O})/\mathbb{R}$ ,  $\forall f \in L^2(\mathcal{O})$ , et  $\forall g \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$  telle que  $\int_{\partial\mathcal{O}} g \, d\gamma = 0$ .*

En vertu du Lemme 5.2, on aura le Corollaire suivant:

**COROLLAIRE 5.2** *Tout ouvert à bord Lipschitzien vérifie la condition de 0-régularité.*

**PROPOSITION 5.4** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert vérifiant la condition de  $\varepsilon$ -régularité et  $U \in H(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$ , alors  $U \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{O})$  dès que  $(U \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O})$ ; de plus et il existe  $C$  tel que*

$$\|U\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{O})} \leq C \|U\|_{H_{\partial}(\operatorname{div}; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})}.$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle de la Proposition 5.3

□

**REMARQUE 5.1** *Tous ces résultats restent évidemment valables quand les espaces  $H(\operatorname{div}; \mathcal{O})$  et  $H_{\partial}(\operatorname{div}; \mathcal{O})$  sont remplacés par  $H(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O})$  et par  $H_{\partial}(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O})$  respectivement, si du moins le coefficient  $\xi$  est une fonction régulière.*

### 5.2.2 Le cas des coefficients variables

Dans ce paragraphe nous traitons en fait le cas de coefficients peu réguliers: on supposera que  $\xi \in L^{\infty}(\mathcal{O})$ , il s'agit d'une situation étudiée par Weber [19].

#### Condition aux limites normale

**PROPOSITION 5.5 (Weber)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert borné à bord Lipschitzien, l'injection naturelle*

$$H_{\partial}(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})$$

*est compacte, dès que  $\xi \in L^{\infty}(\mathcal{O})$  et  $\xi \geq \alpha > 0$  presque partout dans  $\mathcal{O}$ .*

*Démonstration.*

▷ Supposons tout d'abord que  $\mathcal{O}$  est simplement connexe et considérons une suite  $U_k$  qui soit bornée dans  $H_{\partial}(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$ ; d'après le Lemme 2.1 où on a posé  $F_0 = \emptyset$  et  $F_1 = \partial\mathcal{O}$ , on peut donner de  $U_k$  la décomposition suivante:

$$U_k = \operatorname{grad} \varphi_k + W_k \tag{177}$$

où  $\varphi_k \in H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$  est défini par la formule variationnelle

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \operatorname{grad} \varphi_k \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi} = \int_{\mathcal{O}} \xi U_k \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi}, \quad \forall \psi \in H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}, \tag{178}$$

et  $W_k \in H_{\partial 0}^0(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$  vérifie  $\operatorname{rot} W_k = \operatorname{rot} U_k$ . Montrons successivement qu'il existe des sous-suites de  $\operatorname{grad} \varphi_k$  et de  $W_k$  qui convergent dans  $L^2(\mathcal{O})$ , ce qui démontre la Proposition.

▷ Posons

$$U_{\ell k} = U_{\ell} - U_k \text{ et } \varphi_{\ell k} = \varphi_{\ell} - \varphi_k.$$

D'après la définition de  $\varphi_k$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \xi \|\operatorname{grad} \varphi_{\ell k}\|^2 &= \int_{\mathcal{O}} \xi U_{\ell k} \cdot \operatorname{grad} \overline{\varphi_{\ell k}} \\ &= - \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}(\xi U_{\ell k}) \overline{\varphi_{\ell k}} + \int_{\partial\mathcal{O}} (\xi U_{\ell k} \cdot n) \overline{\varphi_{\ell k}} d\gamma. \end{aligned} \tag{179}$$

Comme  $U_k$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{O})$ ,  $\varphi_k$  l'est dans  $H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$ ; nous pouvons par conséquent en extraire une sous-suite (encore notée  $\varphi_k$ ) qui converge dans  $L^2(\mathcal{O})/\mathbb{R}$  et dont la trace sur  $\partial\mathcal{O}$  converge dans  $L^2(\partial\mathcal{O})/\mathbb{R}$ . Comme  $(\xi U_k \cdot n)|_{\partial\mathcal{O}}$  est bornée dans  $L^2(\partial\mathcal{O})$ , il en résulte que  $\text{grad } \varphi_k$  converge dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ Le domaine  $\mathcal{O}$  étant simplement connexe, le Théorème 3.6, p. 48 de [8] nous prouve l'existence et l'unicité de  $\Psi_k \in H_{\partial\mathcal{O}}(\text{rot}; \mathcal{O}) \cap H^0(\text{div } \xi; \mathcal{O})$  qui vérifie  $\text{rot } \Psi_k = \xi W_k$ . C'est dire que l'application  $L^2(\mathcal{O}) \rightarrow H(\text{rot}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial\mathcal{O}}^0(\text{div } \xi; \mathcal{O})$  qui à  $\xi W_k$  fait correspondre  $\Psi_k$  est une bijection ; or son inverse est trivialement continue, il en résulte d'après le Théorème des homomorphismes de Banach qu'elle est elle-même continue, soit qu'il existe  $C$  telle que

$$\|\Psi_k\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\text{rot } \Psi_k\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C \|\xi W_k\|_{L^2(\mathcal{O})}^2. \quad (180)$$

Notons maintenant que comme  $\xi W_k = \xi U_k - \xi \text{grad } \varphi_k$ , la suite  $\xi W_k$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{O})$ ; il en résulte que  $\Psi_k$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ La Proposition 5.3 nous montre alors que  $\Psi_k \in H^{1/2}(\mathcal{O})^3$  et

$$\|\Psi_k\|_{H^{1/2}(\mathcal{O})^3}^2 \leq C \left( \|\Psi_k\|_{L^2(\mathcal{O})^3}^2 + \|\xi W_k\|_{L^2(\mathcal{O})^3}^2 \right),$$

et par conséquent l'existence d'une sous-suite, encore notée  $\Psi_k$  qui converge dans  $L^2(\mathcal{O})^3$ . Posons maintenant

$$W_{\ell k} = W_\ell - W_k \text{ et } \Psi_{\ell k} = \Psi_\ell - \Psi_k,$$

on aura

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \|W_{\ell k}\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \text{rot } \Psi_{\ell k} \cdot \overline{W_{\ell k}} = \int_{\mathcal{O}} \Psi_{\ell k} \cdot \text{rot } \overline{W_{\ell k}} = \int_{\mathcal{O}} \Psi_{\ell k} \cdot \text{rot } \overline{U_{\ell k}},$$

soit par conséquent la convergence de  $W_k$  dans  $L^2(\mathcal{O})^3$ .

▷ Le cas d'un ouvert  $\mathcal{O}$  non simplement connexe se traite par partition de l'unité comme pour la démonstration de la Proposition 5.3. On aura  $U_k = \sum_{i=1}^n U_k^{(i)}$  avec  $U_k^{(i)} = U_k \theta^{(i)}$  et  $U_k^{(i)} \in H_{\partial}(\text{div } \xi; \mathcal{O}^{(i)}) \cap H(\text{rot}; \mathcal{O}^{(i)})$ . Les résultats qui précèdent nous prouvent dans un premier temps que de  $U_k^{(1)}$  on peut extraire une sous-suite, encore notée  $U_k^{(1)}$ , convergente dans  $L^2(\mathcal{O}^{(1)})$ ; réitérant à partir de la sous-suite correspondante de  $U_k^{(2)}$  on construit de proche en proche une sous-suite telle les  $U_k^{(i)}$  convergent dans  $L^2(\mathcal{O}^{(i)})$  pour  $i = 1, n$ . La convergence de  $U_k$  dans  $L^2(\mathcal{O})$  en résulte. □

**Condition aux limites tangentielle** Il s'agit là d'un cas un peu plus délicat pour lequel des hypothèses supplémentaires relatives à la régularité de  $\partial\mathcal{O}$  sont nécessaires, du moins quand la condition de bord n'est pas homogène.

**PROPOSITION 5.6 (Weber)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert borné à bord Lipschitzien, alors*

(i) *l'injection naturelle*

$$H(\text{div } \xi; \mathcal{O}) \cap H_{\partial\mathcal{O}}(\text{rot}; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})$$

*est compacte, dès que  $\xi \in L^2(\mathcal{O})$  et  $\xi \geq \alpha > 0$  presque partout dans  $\mathcal{O}$ .*

(ii) Si de plus  $\mathcal{O}$  vérifie la propriété de  $\varepsilon$ -régularité pour un  $\varepsilon > 0$ , alors l'injection naturelle

$$L^2(\mathcal{O}) \rightarrow H(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$$

est compacte, pour  $\xi \in L^2(\mathcal{O})$  et  $\xi \geq \alpha > 0$  presque partout dans  $\mathcal{O}$ .

*Démonstration.*

▷ Si  $\mathcal{O}$  est simplement connexe et  $U_k$  bornée dans

$$H(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O});$$

d'après le Lemme 2.1 où on a posé  $F_0 = \partial\mathcal{O}$  et  $F_1 = \emptyset$ , on peut donner de  $U_k$  la décomposition suivante:

$$U_k = \operatorname{grad} \varphi_k + W_k \quad (181)$$

où  $\varphi_k \in H_0^1(\mathcal{O})$  est défini par la formule variationnelle

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \operatorname{grad} \varphi_k \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi} = \int_{\mathcal{O}} \xi U_k \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi}, \quad \forall \psi \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad (182)$$

et  $W_k \in H^0(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O}) \cap H_{\partial}(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$  vérifiant

$$\operatorname{rot} W_k = \operatorname{rot} U_k \text{ et } (W_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} = (U_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}}.$$

On montrera là encore successivement l'existence de sous-suites de  $\operatorname{grad} \varphi_k$  et de  $W_k$  qui convergent dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ La convergence d'une sous-suite de  $\operatorname{grad} \varphi_k$  dans  $L^2(\mathcal{O})$ , se démontre exactement comme dans la Proposition 5.5. Notons que le terme de bord n'apparaît pas dans la formule (179) en raison de la nullité de  $\varphi_k|_{\partial\mathcal{O}}$ .

▷ En ce qui concerne  $W_k$ , nous appliquons le Théorème 3.5 p. 47 of [8] qui nous montre l'existence de  $\Phi_k$  dans  $H(\operatorname{rot}; \mathcal{O}) \cap H_{\partial 0}^0(\operatorname{div} \xi; \mathcal{O})$  telle que  $\operatorname{rot} \Phi_k = \xi W_k$ , la suite  $\Phi_k$  étant bornée dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ Supposons maintenant que  $(U_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0$  et par conséquent  $(W_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ . On aura

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \|W_{\ell k}\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{rot} \Phi_{\ell k} \cdot \overline{W_{\ell k}} = \int_{\mathcal{O}} \Phi_{\ell k} \cdot \operatorname{rot} \overline{W_{\ell k}}, \quad (183)$$

et comme la Proposition 5.3 nous assure l'existence d'une sous-suite de  $\Phi_k$  convergeant dans  $L^2(\mathcal{O})$ , il en résulte qu'une sous-suite de  $W_k$  converge dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ Dans le cas où  $(U_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}}$  ne s'annule pas, la formule (177) prend la forme suivante:

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \|W_{\ell k}\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \Phi_{\ell k} \cdot \operatorname{rot} \overline{W_{\ell k}} + \int_{\partial\mathcal{O}} \Phi_{\ell k} \cdot (\overline{W_{\ell k}} \wedge n) d\gamma, \quad (184)$$

nous serons alors amenés à faire intervenir l'hypothèse de  $\varepsilon$ -régularité ; de la Proposition 5.4 on déduit alors que

$$\|\Phi_k\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{O})^3} \leq C \|\xi W_k\|_{L^2(\mathcal{O})^3}.$$

Par conséquent, il existe une sous-suite de  $\Phi_k$  convergeant dans  $L^2(\mathcal{O})^3$  telle que  $(\Phi_k \wedge n)|_{\partial\mathcal{O}}$  converge dans  $L^2(\partial\mathcal{O})^2$ ; la convergence de  $W_k$  dans  $L^2(\mathcal{O})^3$  en découle.

▷ Le cas d'un domaine  $\mathcal{O}$  non simplement connexe se traite comme à la Proposition 5.5 par partition de l'unité.

□

### 5.2.3 Application au cas du problème réduit

Nous appliquerons par la suite ces résultats à la démonstration d'existence de la solution des Problèmes réduits  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$ . Nous considérerons donc le cas d'un domaine  $\Omega'$  dont la frontière, Lipschitzienne, est constituée de deux parties disjointes  $\Gamma$  et  $\Sigma$ , et tel que le coefficient  $\xi$  est constant au voisinage de  $\Sigma$ .

Nous allons voir que, dans ces conditions, si les conditions aux limites le long de  $\Gamma$  sont homogènes, l'hypothèse de  $\varepsilon$ -régularité n'est pas nécessaire ; elle le deviendra par contre si la condition aux limites le long de  $G$  est une condition d'impédance.

**COROLLAIRE 5.3** *Les injections naturelles:  $\mathcal{H}_\infty^{E/H} \rightarrow L^2(\Omega')$  et  $\mathcal{H}_\tau^{E/H} \rightarrow L^2(\Omega')$  sont compactes, la définition des espaces  $\mathcal{H}_\infty^{E/H}$  et  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  ayant été donnée aux formules (166) et (169).*

*Démonstration.*

▷ On utilise une partition de l'unité, comme lors de la démonstration de la Proposition 5.5 ; on prendra simplement soin de choisir les  $\mathcal{O}^{(i)}$  tels que ceux qui recourent  $\Sigma$  soient tout entier contenus dans la région où  $\xi$  est constant.

▷ Si  $U_k$  est une suite bornée dans  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ , on aura  $U_k = \sum_{i=1}^n U_k^{(i)}$  où les  $U_k^{(i)}$  sont bornés dans  $\mathcal{H}_\tau^{(i)}$ . La démonstration de l'existence d'une sous-suite bornée extraite de chacune des  $U_k^{(i)}$  se fait alors, soit en utilisant le Corollaire 5.1 pour les indices  $(i)$  à un ouvert  $\mathcal{O}^{(i)}$  situé au voisinage de  $\Sigma$ , soit en utilisant les Propositions 5.5 ou 5.6 (i).

▷ Le résultat relatif à  $\mathcal{H}_\infty^{E/H}$  se démontre de la même façon.

□

## 5.3 L'Alternative de Fredholm

### 5.3.1 Equation fonctionnelle

Montrons tout d'abord que les problèmes  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  peuvent s'exprimer sous forme d'une équation de Fredholm ; nous en déduirons qu'ils sont bien posés. Nous définirons les opérateurs  $\mathbb{J}_\tau$  et  $\mathbb{K}_\tau : \mathcal{H}_\tau^{E/H} \rightarrow \mathcal{H}_\tau^{E/H}$  selon les formules

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_\tau U', V)_\tau &= \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \text{rot } U' \cdot \text{rot } \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \text{div } \xi U' \text{div } \bar{\xi} \bar{V} \\ &+ \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \{ \lambda (U' \wedge n) \cdot (\bar{V} \wedge n) + t^{-1} \nu (U' \cdot n) (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma, \\ &+ \omega^2 \xi_0 \int_{\Omega'} U' \cdot \bar{V} \end{aligned} \quad (185)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_\tau U', V)_\tau &= -\omega^2 \int_{\Omega'} (\xi + \xi_0) (U' \cdot \bar{V}) \\ &- \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \{ (T_\lambda \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U'] \cdot \bar{V}) + t^{-1} N_\nu \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U'] (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma, \end{aligned} \quad (186)$$

ainsi que le vecteur  $L_\tau$  de  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  associé à la forme antilinéaire  $\ell_\tau$  par la relation

$$(L_\tau, V)_\tau = \ell_\tau(V), \quad \forall V \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}. \quad (187)$$

où  $\ell_\tau$  a été défini à la formule (171). Dans ces définitions,  $(\cdot, \cdot)_\tau$  représente le produit scalaire naturel sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  :

$$\begin{aligned} (U', V)_\tau &= \int_{\Omega'} U \cdot \bar{V} + \int_{\Omega'} (\operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V}) + |t|^{-1} \int_{\Omega'} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi V} \\ &\quad + \int_{\Sigma} (U' \wedge n) \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma + |t|^{-1} \int_{\Sigma} (U' \cdot n) (\bar{V} \cdot n) d\gamma. \end{aligned} \quad (188)$$

Le problème  $(\mathcal{P}'_\tau)^{E/H}$  peut alors s'exprimer sous la forme suivante:

$$(\mathbb{J}_\tau + \mathbb{K}_\tau)U' = L_\tau \text{ dans } \mathcal{H}_\tau^{E/H}. \quad (189)$$

Nous prouverons ci-dessous que les formules (185) et (186) font respectivement de  $\mathbb{J}_\tau$  et  $\mathbb{K}_\tau$  un automorphisme et un opérateur compact dans  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ .

### 5.3.2 Coercivité

**LEMME 5.3** *Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  vérifie  $\Im(\lambda k_s^{-2}) < 0$ , et dans le cas où  $\tau \neq \infty$  si  $\nu \in \mathbb{C}$  vérifie  $\Im(\nu k_p^{-2}) < 0$ , alors  $\mathbb{J}_\tau$  est un opérateur d'inverse borné sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ .*

*Démonstration.* Suivant le théorème de Lax-Milgram, on démontrera la coercivité de la forme sesquilinéaire associée à  $\mathbb{J}_\tau$ .

▷ On aura tout d'abord

$$\begin{aligned} &((\omega^2 \xi_0)^{-1} \mathbb{J}_\tau U', V)_\tau \\ &= \int_{\Omega'} (\omega^2 \xi_0 \zeta)^{-1} \operatorname{rot} U' \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\Omega'} (\omega^2 \xi_0 \tau)^{-1} \operatorname{div} \xi U' \operatorname{div} \bar{\xi V} \\ &\quad + \lambda k_s^{-2} \int_{\Sigma} (U' \wedge n) \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma + \nu k_p^{-2} \int_{\Sigma} (U' \cdot n) (\bar{V} \cdot n) d\gamma \\ &\quad + \int_{\Omega'} U' \cdot \bar{V} \end{aligned}$$

▷ En vertu de l'hypothèse, on aura  $-\pi < \operatorname{Arg}(\lambda k_s^{-2}) \leq 0$ , et pour  $\tau \neq \infty$   $-\pi < \operatorname{Arg}(\nu k_p^{-2}) \leq 0$ . Par ailleurs  $\xi$ ,  $\zeta$ , et  $\tau$  dans le cas des équations régularisées, sont de partie imaginaire positive ou nulle, de module borné et de partie réelle inférieurement bornée par un nombre strictement positif sur  $\Omega'$ . Il existe donc  $\theta$  vérifiant

$$-\pi < \theta \leq \operatorname{Arg}((\omega^2 \xi_0 \zeta)^{-1}), \operatorname{Arg}(\lambda k_s^{-2}) \leq 0 \text{ sur } \Omega'.$$

On aura donc

$$\frac{\theta}{2} \leq \operatorname{Arg}\left((\omega^2 \xi_0 \zeta)^{-1} e^{-i\theta/2}\right), \operatorname{Arg}\left(\lambda k_s^{-2} e^{-i\theta/2}\right) \leq \frac{\theta}{2} \text{ sur } \Omega',$$

par conséquent, il existe  $C > 0$  tel que

$$\Re\left((\omega^2 \xi_0 \zeta)^{-1} e^{-i\theta/2}\right) \geq C \text{ et } \Re\left(\lambda k_s^{-2} e^{-i\theta/2}\right) \geq C,$$

ainsi que, pour  $\tau \neq \infty$ ,

$$\Re\left((\omega^2 \xi_0 \tau)^{-1} e^{-i\theta/2}\right) \geq C \text{ et } \Re\left(\nu k_p^{-2} e^{-i\theta/2}\right) \geq C.$$

▷ Il en résulte que

$$\begin{aligned}
& \Re \left( (\omega^2 \xi_0)^{-1} e^{-i\theta/2} \mathbb{J}_\tau V, V \right)_\tau \\
& \geq C' \left\{ \int_{\Omega'} \|\operatorname{rot} V\|^2 + |t|^{-1} \int_{\Omega'} |\operatorname{div} \xi V|^2 + \int_{\Sigma} \|V \wedge n\|^2 d\gamma \right. \\
& \quad \left. + |t|^{-1} \int_{\Sigma} |V \cdot n|^2 d\gamma + \int_{\Sigma} \|V \wedge n\|^2 d\gamma + |t|^{-1} \int_{\Sigma} |V \cdot n|^2 d\gamma \right\} \\
& \quad + \cos \theta/2 \int_{\Omega'} \|V\|^2 \\
& \geq \min(C', \cos \theta/2) \|V\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}}^2,
\end{aligned}$$

$\forall V \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}$ , soit la coercivité de  $(\omega^2 \xi_0)^{-1} e^{-i\theta/2} \mathbb{J}_\tau$  sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ .

□

### 5.3.3 Compacité

LEMME 5.4 *L'opérateur  $\mathbb{K}_\tau$  est compact sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ .*

*Démonstration.* Commençons par décomposer  $\mathbb{K}_\tau$  selon les deux types d'intégrales qui le composent :

$$\mathbb{K}_\tau = -\omega^2 \mathbb{K}^{\Omega'} - \zeta_0^{-1} \mathbb{K}_\tau^\Sigma$$

avec

$$\begin{aligned}
\left( \mathbb{K}^{\Omega'} U, V \right)_\tau &= \int_{\Omega'} (\xi + \xi_0) (U \cdot \bar{V}), \\
\left( \mathbb{K}_\tau^\Sigma U, V \right)_\tau &= \int_{\Sigma} \{ (T_\lambda \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U] \cdot \bar{V}) + t^{-1} N_\nu \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U] (\bar{V} \cdot n) \} d\gamma.
\end{aligned}$$

▷ D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left| \left( \mathbb{K}^{\Omega'} U, V \right)_\tau \right| \leq C \|U\|_{L^2(\Omega')} \|V\|_{L^2(\Omega')},$$

puisque  $\xi \in L^\infty(\Omega)$ . Par conséquent

$$\left\| \mathbb{K}^{\Omega'} U \right\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}} = \sup_{V \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}, V \neq 0} \frac{\left| \left( \mathbb{K}^{\Omega'} U, V \right)_\tau \right|}{\|V\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}}} \leq C \|U\|_{L^2(\Omega')},$$

pour tout  $U \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}$ . C'est dire que  $\mathbb{K}^{\Omega'}$  est un opérateur continu  $L^2(\Omega') \rightarrow \mathcal{H}_\tau^{E/H}$ ; c'est donc un opérateur compact sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  en vertu de la compacité de l'injection  $\mathcal{H}_\tau^{E/H} \rightarrow L^2(\Omega')$  (voir le Corollaire 5.3).

▷ Démontrons maintenant la compacité de  $\mathbb{K}_\tau^\Sigma$ . En vertu de la définition (160) de  $\mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U]$ , il est facile de voir que cette fonction est indéfiniment dérivable dans un voisinage de  $\Sigma$ , et si  $D$  représente un opérateur de dérivation le long de  $\Sigma$ , d'ordre quelconque, on aura

$$\begin{aligned}
& \left\| D \mathcal{I} \mathcal{R}_F^t[U](x) \right\| \\
& \leq C_D \left( \|\operatorname{rot} U\|_{L^2(\Omega'_e)} + |t|^{-1} \|\operatorname{div} U\|_{L^2(\Omega'_e)} \right. \\
& \quad \left. + \|U\|_{L^2(\Omega'_e)} + \|U \wedge n\|_{H^{-1/2}(F)} + |t|^{-1} |(U \cdot n)|_{H^{-1/2}(F)} \right),
\end{aligned}$$

en tout point  $x \in \Sigma$ . On aura donc

$$\|D\mathcal{IR}_F^t[U](x)\| \leq C_D \|U\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}}, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Ceci implique en particulier que  $\forall s \geq 0$ ,

$$\|T_\lambda \mathcal{IR}_F^t[U]\|_{H^s(\Sigma)} \leq C_s \|U\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}},$$

ainsi que, dans le cas du problème régularisé, l'inégalité analogue relative à  $N_\nu \mathcal{IR}_F^t[U]$ . Comme

$$\begin{aligned} & (\mathbb{K}_\tau^\Sigma U, V)_\tau \\ &= \int_\Sigma \left\{ (T_\lambda \mathcal{IR}_F^t[U] \cdot (n \wedge (\bar{V} \wedge n))) + t^{-1} N_\nu \mathcal{IR}_F^t[U] (\bar{V} \cdot n) \right\} d\gamma \end{aligned}$$

il en résulte que

$$|(\mathbb{K}_\tau^\Sigma U, V)_\tau| \leq C_s \|U\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}} \|n \wedge (V \wedge n) + t^{-1} n (V \cdot n)\|_{H^{-s}(\Sigma)^3}.$$

Par conséquent, l'adjoint  $(\mathbb{K}_\tau^\Sigma)^*$  de l'opérateur  $\mathbb{K}_\tau^\Sigma$  vérifie

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{K}_\tau^\Sigma)^* V\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}} &= \sup_{U \in \mathcal{H}_\tau^{E/H}, U \neq 0} \frac{|(\mathbb{K}_\tau^\Sigma U, V)_\tau|}{\|U\|_{\mathcal{H}_\tau^{E/H}}} \\ &\leq C_s \|n \wedge (V \wedge n) + t^{-1} n (V \cdot n)\|_{H^{-s}(\Sigma)^3}, \end{aligned}$$

$\forall s \geq 0$  : c'est un opérateur continu  $H^{-s}(\Sigma)^3 \rightarrow \mathcal{H}_\tau^{E/H}$ . Par ailleurs, l'opérateur trace

$$V \mapsto (n \wedge (V \wedge n) + t^{-1} n (V \cdot n))|_\Sigma$$

est trivialement continu  $\mathcal{H}_\tau^{E/H} \rightarrow L^2(\Sigma)^3$ ; la compacité de  $(\mathbb{K}_\tau^\Sigma)^*$  et par conséquent celle de  $\mathbb{K}_\tau^\Sigma$  sur  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  résulte alors de la compacité de l'injection  $L^2(\Sigma)^3 \rightarrow H^{-s}(\Sigma)^3$ .

□

### 5.3.4 Existence

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat essentiel de ce chapitre:

**THÉORÈME 5.2** *Si les coefficients  $\xi$  et  $\zeta$  et la constante  $\lambda$  satisfont les conditions (80) et les hypothèses du Lemme 5.3, ainsi que  $\tau$  et  $\nu$  dans le cas du problème régularisé, alors les problèmes  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  admettent une solution et une seule respectivement dans  $\mathcal{F}_\infty^{E/H}$  et  $\mathcal{F}_\tau^{E/H}$ .*

*Démonstration.*

▷ Nous montrerons en fait que  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  sont respectivement bien posés dans  $\mathcal{H}_\infty^{E/H}$  et  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$ ; le Théorème d'équivalence 5.1 nous assurera qu'il en est de même pour  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  dans  $\mathcal{F}_\infty^{E/H}$  et  $\mathcal{F}_\tau^{E/H}$ .

▷ D'une part nous avons démontré que  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$ , pour  $\tau$  égal à l'infini ou non, se met sous la forme de l'équation (189) où  $\mathbb{J}_\tau$  et  $\mathbb{K}_\tau$  sont respectivement un automorphisme et un opérateur compact, en vertu des Lemmes 5.3 et 5.4.



▷ D'autre part nous avons démontré au Théorème 3.2 que le problème  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  n'admet pas plus d'une solution ; il en est de même pour  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  et donc pour (189) en vertu du Théorème d'équivalence 5.1.

▷ Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème de l'alternative de Fredholm pour conclure que  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  est bien posé. □

**REMARQUE 5.2** *Ce que nous avons montré en fait, c'est que les problèmes réduits  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  sont associés par la formule (189) à des automorphismes de la forme coercif+compact. C'est cette dernière propriété qui est en fait essentielle car elle est à la source de la convergence des méthodes d'éléments finis appliquées à  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  ou  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$ .*

#### 5.4 Equivalence entre problèmes classiques et régularisés

Nous pouvons maintenant expliciter la relation entre  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ :

**THÉORÈME 5.3** *Les problèmes  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  ont la même solution.*

*Démonstration.*

▷ Soit donc  $U$  solution de  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  ; alors en vertu des Propositions 2.2 et 2.4,  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}^{E/H})$ . Pour  $V \in \mathcal{F}_\tau^{E/H}$ , on aura donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} + \int_{\Omega'} \tau^{-1} \operatorname{div} \xi U \operatorname{div} \bar{\xi} \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ & \quad + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma - t^{-1} \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{div} U (\bar{V} \cdot n) d\gamma \\ & = \int_{\Omega'} \zeta^{-1} \operatorname{rot} U \cdot \operatorname{rot} \bar{V} - \omega^2 \int_{\Omega'} \xi U \cdot \bar{V} \\ & \quad + \zeta_0^{-1} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} U \cdot (\bar{V} \wedge n) d\gamma \\ & = 0 \end{aligned}$$

puisque  $\mathcal{F}_\tau^{E/H} \subset \mathcal{F}^{E/H}$ . Il en résulte que  $U$  est solution de  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$ .

▷ La réciproque découle du fait que  $(\mathcal{P}_\infty^{E/H})$  et  $(\mathcal{P}_\tau^{E/H})$  ont chacun une solution et une seule. □

**REMARQUE 5.3** *D'un point de vue pratique, on pourra donc résoudre indifféremment  $(\mathcal{P}'_\infty^{E/H})$  ou  $(\mathcal{P}'_\tau^{E/H})$  ; on obtiendra la même solution. La différence réside dans l'espace dont on doit réaliser une approximation, c'est facile dans le cas du problème régularisé puisqu'il s'agit de  $\mathcal{H}_\tau^{E/H}$  mais difficile pour le problème classique à cause de la contrainte  $\operatorname{div} \xi V = 0$ .*

## Références

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1972.
- [2] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] M. COSTABEL, *A remark on the regularity of solutions of Maxwell equations on Lipschitz domains*, Math. Meth. Appl. Sci., 12, pp. 365-368, 1990.
- [4] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Volumes I and II, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [5] R. DAUTRAY ET J.-L. LIONS, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, 3 tomes, Masson, Paris, 1984.
- [6] P. GERMAIN, *Mécanique*, 2 tomes, Ecole Polytechnique, Ellipse, Paris, 1986.
- [7] D. GILBARG AND N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [8] V. GIRAULT AND P.A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [9] D.S. JONES, *Acoustic and Electromagnetic Waves*, Clarenton Press, Oxford, 1986.
- [10] O.D. KELLOGG, *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [11] C.E. KENIG, *Carleman estimates, uniform Sobolev inequalities and unique continuation theorems*, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Vol. 2, Berkeley, C.A., pp. 948-960, 1986.
- [12] J.L. LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, 2 volumes, Dunod, Paris, 1968.
- [13] J. NEČAS, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [14] F.W.J. OLVER, *Asymptotics and Special functions*, Academic Press, New York, 1974.
- [15] M.H. PROTTER, *Unique continuation for elliptic equations*, Trans. Am. Math. Soc., 95, pp. 81-91, 1960.
- [16] F. RELICH, *Über das asymptotische verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen gebieten*, Jber. Deutschen Math. Verein., 53, pp. 57-65, 1943.
- [17] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.  
1968.
- [18] V. VOGELSANG, *On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type*, Math. Ann., 2, pp. 12-25, 1991.
- [19] C. WEBER, *A local compactness theorem for Maxwell equations*, Math. Meth. Appl. Sci., 2, pp. 12-25, 1980.