



**HAL**  
open science

## Eléments de théorie spectrale

Marc Lenoir

► **To cite this version:**

| Marc Lenoir. Eléments de théorie spectrale. Master. ENSTA ParisTech, France. 2006. hal-04074701

**HAL Id: hal-04074701**

**<https://hal.science/hal-04074701>**

Submitted on 19 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Eléments de théorie spectrale**

## **Master Modélisation et simulation**

Chapitres 1-20

Marc Lenoir

14 septembre 2006



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Quelques théorèmes essentiels de l'analyse fonctionnelle</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>L'axiome du choix</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Le théorème d'Ascoli</b>	<b>17</b>
2.1	Convergence uniforme et convergence simple . . . . .	17
2.1.1	Convergence simple . . . . .	17
2.1.2	Convergence uniforme . . . . .	17
2.2	Equicontinuité et compacité . . . . .	18
2.3	Le théorème de Tychonoff . . . . .	19
2.3.1	Filtres . . . . .	19
2.3.2	Filtres et continuité . . . . .	20
2.3.3	Compacité . . . . .	21
2.3.4	Ultrafiltres . . . . .	22
<b>3</b>	<b>La propriété de Baire</b>	<b>25</b>
3.1	Espaces de Baire . . . . .	25
3.2	Théorèmes de la borne uniforme . . . . .	27
3.3	Théorème des homomorphismes . . . . .	28
3.4	Théorème du graphe fermé . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Le théorème de Stone-Weierstraß</b>	<b>31</b>
4.1	Le théorème de Machado . . . . .	32
4.2	Le théorème de Stone . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Les théorèmes de Hahn-Banach</b>	<b>37</b>
5.1	Formes analytiques . . . . .	37
5.1.1	Conséquences topologiques . . . . .	39
5.2	Formes géométriques . . . . .	40
5.2.1	Conséquences topologiques . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Le théorème de Runge</b>	<b>49</b>

<b>II</b>	<b>Opérateurs linéaires et équations aux dérivées partielles</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>Formulations faibles</b>	<b>55</b>
7.1	Le théorème de Lax-Milgram . . . . .	55
7.2	Espaces de Sobolev . . . . .	57
7.2.1	Régularité . . . . .	59
7.2.2	Théorèmes de densité et de trace . . . . .	60
7.2.3	Espace des traces . . . . .	60
7.2.4	Compacité . . . . .	61
7.2.5	Dualité . . . . .	64
7.3	La formule de Green . . . . .	65
7.3.1	Opérateurs du premier ordre . . . . .	65
7.3.2	Opérateurs du second ordre . . . . .	65
7.4	Le problème de Dirichlet . . . . .	66
7.4.1	Formulation variationnelle . . . . .	66
7.4.2	Existence et unicité . . . . .	66
7.4.3	Retour au problème fort . . . . .	67
7.4.4	Le problème non-homogène . . . . .	67
7.4.5	L'inégalité de Poincaré-Friedrichs . . . . .	68
7.5	Le problème de Neumann . . . . .	69
7.5.1	Dualité et dérivées normales . . . . .	69
7.5.2	Formule de Green . . . . .	72
7.5.3	Formulation variationnelle . . . . .	72
7.5.4	Retour au problème fort . . . . .	72
7.5.5	Le problème de Neumann pur . . . . .	73
<b>III</b>	<b>Opérateurs bornés dans les espaces de Banach</b>	<b>75</b>
<b>8</b>	<b>Algèbres de Banach</b>	<b>79</b>
8.1	Spectre . . . . .	82
8.1.1	Résolvante . . . . .	82
8.1.2	Rayon spectral . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Le calcul fonctionnel holomorphe</b>	<b>89</b>
9.1	Intégrale de Cauchy . . . . .	89
9.2	Réduction spectrale . . . . .	94
9.3	Singularités isolées . . . . .	95
9.3.1	Nilpotents . . . . .	95
9.3.2	Développement en série de Laurent . . . . .	95

---

<b>10</b>	<b>Application aux opérateurs bornés</b>	<b>103</b>
10.1	Noyau, Image . . . . .	103
10.2	Réduction spectrale . . . . .	104
10.3	Singularités isolées . . . . .	107
10.4	La dimension finie . . . . .	108
10.4.1	La forme canonique d'un opérateur . . . . .	110
<b>11</b>	<b>Représentation matricielle</b>	<b>115</b>
11.1	La forme réduite de Jordan . . . . .	115
11.2	Déterminants . . . . .	117
11.2.1	Permutations . . . . .	117
11.2.2	Applications alternées . . . . .	118
11.2.3	Signature . . . . .	119
11.2.4	Endomorphismes . . . . .	120
11.2.5	Mineurs . . . . .	122
<b>12</b>	<b>Applications de la dualité</b>	<b>125</b>
12.1	Transposé . . . . .	125
12.2	Spectre . . . . .	128
<b>A</b>	<b>Projections et sous-espaces invariants</b>	<b>129</b>
A.1	Supplémentaires algébriques . . . . .	129
A.2	Supplémentaires topologiques . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Orthogonalité dans les espaces de Banach</b>	<b>131</b>
<b>IV</b>	<b>Opérateurs bornés dans les espaces de Hilbert</b>	<b>135</b>
<b>13</b>	<b>Les algèbres de Banach involutives</b>	<b>137</b>
13.1	Définitions, propriétés élémentaires . . . . .	137
13.2	Le calcul holomorphe . . . . .	139
13.3	Les $C^*$ -algèbres . . . . .	140
<b>14</b>	<b>Applications de l'orthogonalité</b>	<b>143</b>
14.1	Adjoint, orthogonalité . . . . .	143
14.2	Opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires . . . . .	147
14.3	La transformation de Cayley . . . . .	151
<b>V</b>	<b>Opérateurs compacts</b>	<b>153</b>
<b>15</b>	<b>Opérateurs compacts dans les espaces de Banach</b>	<b>155</b>
15.1	Opérateurs de rang fini . . . . .	155
15.2	Spectre des opérateurs compacts . . . . .	159

15.3	Le théorème de Schauder . . . . .	167
15.4	Opérateurs de Fredholm ou à indice . . . . .	167
15.4.1	Spectre essentiel . . . . .	169
15.4.2	Indice . . . . .	169
<b>16</b>	<b>Le cas des espaces de Hilbert</b>	<b>173</b>
16.1	Opérateurs compacts normaux . . . . .	173
16.1.1	Décomposition spectrale . . . . .	173
16.1.2	Calcul fonctionnel . . . . .	176
16.2	Opérateurs compacts auto-adjoints . . . . .	176
16.2.1	L'alternative de Fredholm . . . . .	176
16.2.2	Le quotient de Rayleigh . . . . .	177
<b>17</b>	<b>Problèmes variationnels spectraux</b>	<b>179</b>
17.1	Formulation générale . . . . .	179
17.1.1	Cadre fonctionnel . . . . .	180
17.1.2	Problèmes aux valeurs propres . . . . .	180
17.1.3	Alternative de Fredholm . . . . .	181
17.2	Formes hermitiennes . . . . .	182
17.2.1	Quotients de Rayleigh . . . . .	182
17.2.2	Bases hilbertiennes . . . . .	183
17.2.3	Alternative de Fredholm . . . . .	185
17.3	Le problème de Dirichlet . . . . .	187
17.4	Le problème de Neumann . . . . .	187
<b>18</b>	<b>Oscillations d'un liquide dans un réservoir</b>	<b>189</b>
18.1	Formulation variationnelle . . . . .	189
18.2	Problèmes aux valeurs propres . . . . .	191
18.3	L'alternative de Fredholm . . . . .	194
<b>VI</b>	<b>La transformée de Gelfand</b>	<b>197</b>
<b>19</b>	<b>Le spectre de Gelfand</b>	<b>199</b>
19.1	Caractères . . . . .	199
19.2	Idéaux et quotients . . . . .	201
19.3	Permanence spectrale . . . . .	204
19.4	Algèbres de Banach commutatives . . . . .	206
19.4.1	La transformation de Gelfand . . . . .	207
19.4.2	Les fonctions continues sur un compact . . . . .	210
19.4.3	L'algèbre de Wiener . . . . .	212
19.4.4	La transformation de Fourier . . . . .	213
19.5	Les $C^*$ -algèbres . . . . .	214
19.5.1	Sous-algèbres . . . . .	215

---

19.5.2	$C^*$ -algèbres commutatives . . . . .	215
<b>20</b>	<b>Le théorème spectral</b>	<b>219</b>
20.1	Le calcul fonctionnel continu . . . . .	219
20.1.1	Opérateurs auto-adjoints positifs . . . . .	220
20.1.2	Décomposition polaire . . . . .	221
20.2	Le calcul fonctionnel borélien . . . . .	223
20.2.1	Les fonctions boréliennes . . . . .	224
20.2.2	Bicommutant et algèbres de Von Neumann . . . . .	224
20.2.3	Le calcul fonctionnel . . . . .	227
20.3	La mesure spectrale . . . . .	231
20.3.1	Projections orthogonales . . . . .	231
20.3.2	Mesures spectrales . . . . .	233
20.3.3	La formule de Stone . . . . .	237
20.4	Diagonalisation . . . . .	238
20.4.1	Les opérateurs de multiplication . . . . .	240
20.4.2	Opérateurs simples . . . . .	241
20.4.3	Opérateurs normaux . . . . .	242
20.4.4	Les opérateurs normaux compacts . . . . .	244
<b>C</b>	<b>Le radical</b>	<b>247</b>





## Première partie

# Quelques théorèmes essentiels de l'analyse fonctionnelle



# Chapitre 1

## L'axiome du choix

Une grande partie de l'analyse fonctionnelle repose sur l'axiome du choix, il nous a donc paru nécessaire de l'énoncer avec précision.

Notons  $\mathcal{S}(X)$  l'ensemble des parties de l'ensemble  $X$  :

**Proposition 1.1 (Axiome du choix)** *Si  $X$  est un ensemble non vide et  $\mathcal{S}(X)$  note l'ensemble de ses parties, il existe une fonction  $c$ , dite fonction de choix :  $\mathcal{S}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ , telle que*

$$c(Y) \in Y, \forall Y \in \mathcal{S}(X) \setminus \{\emptyset\}. \quad (1.1)$$

En langage concret, il s'agit simplement de l'affirmation qu'à tous les sous-ensembles de  $X$ , on peut faire simultanément correspondre (choisir) un élément de ce sous-ensemble. Ceci pourrait être considéré comme une évidence, il n'en est rien, et sous son aspect inoffensif, cet axiome formulé par Zermelo recèle de considérables potentialités.

L'utilisation pratique de cet axiome fait intervenir la notion d'ordre

### Définition 1.2

(i) *Un ensemble  $X$  est totalement ordonné par  $\leq$  si*

$$\forall x, y \in X, \text{ on a soit } x \leq y, \text{ soit } y \leq x. \quad (1.2)$$

*si  $x \leq y$  et  $x \neq y$ , on notera  $x < y$ .*

(ii) *Un ensemble  $X$  est bien ordonné si tout sous-ensemble non vide  $Y$  de  $X$  possède un élément minimal, soit*

$$\forall Y \in \mathcal{S}(X) \setminus \{\emptyset\}, \exists z \in Y \text{ tel que } z \leq y, \forall y \in Y. \quad (1.3)$$

(iii) *Un ensemble  $X$  est inductivement ordonné si tout sous-ensemble  $Y$  totalement ordonné de  $X$  est majoré dans  $X$ .*

Notons qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné, il suffit pour le montrer de considérer l'ensemble  $Y = \{x, y\}$ .

**Proposition 1.3 (Principe de bon ordre : Cantor)** *Tout ensemble peut être muni d'un ordre de telle sorte qu'il soit bien ordonné*

♡ **Proposition 1.4 (Lemme de Zorn)** *Tout ensemble  $X$  inductivement ordonné possède un élément maximal, soit  $\exists z \in X$ , tel que si  $x \in X$  vérifie  $z \leq x$ , alors  $x = z$ .*

Si  $A$  est un sous ensemble de  $X$ , on note respectivement

$$\underline{X} = \{x \mid y > x, \forall y \in A\} \text{ et } \overline{X} = \{x \mid y < x, \forall y \in A\} \quad (1.4)$$

Soit  $C$  un sous ensemble bien ordonné de  $X$ , on notera  $\min C$  le plus petit élément de  $C$ . Il est clair que, pour tout sous ensemble  $A$  de  $X$ ,  $x \in \underline{A \cap \{x\}}$ .

**Définition 1.5** *Soit  $X$  un ensemble muni de la fonction de choix  $c$ , on dit que  $C \subset X$  est une chaîne si*

$$c(\overline{C \cap \{x\}}) = x \quad (1.5)$$

Notons que pour toute chaîne  $C$ ,  $\min \{x\} = c(X)$ , en effet  $C \cap \min \{x\} = \emptyset$ , et par conséquent  $\overline{C \cap \{x\}} = X$ .

**Lemme 1.6** *Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux chaînes telles que  $C_1 \not\subset C_2$ , alors  $\exists x_1 \in C_1$  tel que*

$$C_2 = C_1 \cap \underline{\{x_1\}} \quad (1.6)$$

On a en fait  $x_1 = \min \{C_1 \setminus C_2\}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $C_1$  est bien ordonné, on peut poser  $x_1 = \min \{C_1 \setminus C_2\}$ , on aura alors

$$C_1 \cap \underline{\{x_1\}} \subset C_2,$$

en effet, si  $z \in C_1 \cap \underline{\{x_1\}}$ , on aura  $z < x_1$ , et par conséquent  $z \notin C_1 \setminus C_2$ , soit  $z \in (C_1)^c \cup C_2$ , or  $z \in C_1$ , d'où  $z \in C_2$ .

▷ Supposons que  $C_1 \cap \underline{\{x_1\}} \not\subset C_2$ , comme  $C_2 \setminus (C_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \subset C_2$ , on peut poser  $x_2 = \min \{C_2 \setminus (C_1 \cap \underline{\{x_1\}})\}$ , et comme précédemment, on aura

$$C_2 \cap \underline{\{x_2\}} \subset (C_1 \cap \underline{\{x_1\}}). \quad (1.7)$$

▷ Si on suppose là encore que  $C_2 \cap \underline{\{x_2\}} \not\subset (C_1 \cap \underline{\{x_1\}})$ , comme  $(C_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \setminus (C_2 \cap \underline{\{x_2\}}) \subset C_1 \cap C_2$ , on peut poser  $y = \min \{(C_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \setminus (C_2 \cap \underline{\{x_2\}})\}$ . On aura  $(C_1 \cap \underline{\{x_1\}} \cap \underline{\{y\}}) \subset (C_2 \cap \underline{\{x_2\}})$ , mais comme  $y \in C_1 \cap \underline{\{x_1\}}$ , on aura  $y < x_1$ , d'où  $\underline{\{y\}} \subset \underline{\{x_1\}}$ , et par conséquent  $C_1 \cap \underline{\{x_1\}} \cap \underline{\{y\}} = C_1 \cap \underline{\{y\}}$ , d'où

$$(C_1 \cap \underline{\{y\}}) \subset (C_2 \cap \underline{\{x_2\}}). \quad (1.8)$$

▷ Notons maintenant que si  $z \in C_2$  et  $z \leq x$  pour un certain  $x \in C_2 \cap \underline{\{x_2\}}$ , alors  $z \in C_2 \cap \underline{\{x_2\}}$ . C'est en particulier le cas de  $y \in (C_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \subset C_2$ , comme  $C_2$  est totalement ordonné, il en résulte que  $y > x$ ,  $\forall x \in C_2 \cap \underline{\{x_2\}}$ . On aura donc  $(C_2 \cap \underline{\{x_2\}}) \subset \underline{\{y\}}$ , or  $(C_2 \cap \underline{\{x_2\}}) \subset (C_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \subset C_1$ , d'où par conséquent  $(C_2 \cap \underline{\{x_2\}}) \subset C_1 \cap \underline{\{y\}}$ , et finalement

$$(C_1 \cap \underline{\{y\}}) = (C_2 \cap \underline{\{x_2\}}). \quad (1.9)$$

▷ Comme  $C_1$  et  $C_2$  sont des chaînes, on aura

$$y = c(\overline{C_1 \cap \underline{\{y\}}}) = c(\overline{C_2 \cap \underline{\{x_2\}}}) = x_2, \quad (1.10)$$

soit  $y = x_2$ , et par conséquent  $x_2 \in (C_1 \cap \underline{\{x_1\}})$ , ce qui n'est pas possible. Il en résulte qu'en fait  $C_2 \cap \underline{\{x_2\}} = (C_1 \cap \underline{\{x_1\}})$ , et par conséquent

$$x_2 = c(\overline{C_1 \cap \underline{\{x_2\}}}) = c(\overline{C_2 \cap \underline{\{x_1\}}}) = x_1, \quad (1.11)$$

soit  $x_1 = x_2$ , d'où  $x_1 \in (C_1 \cap \underline{\{x_1\}})$  ce qui là encore est contradictoire. Finalement donc on en déduit que

$$C_1 \cap \underline{\{x_1\}} = C_2$$

□

### **Théorème 1.7**

- (i) *L'axiome du choix,*
  - (ii) *le principe de bon ordre et*
  - (iii) *le lemme de Zorn*
- sont équivalents.*

DÉMONSTRATION.

(i) Supposons que  $X$  est inductivement ordonné, et soit  $c$  une fonction de choix pour  $X$ .

▷ Considérons l'ensemble  $C_j$ ,  $j \in J$  des chaînes dans  $X$  et posons  $C = \bigcup_{j \in J} C_j$ . Pour tout  $x_j \in C_j$ , on aura

$$(C \cap \underline{\{x_j\}}) = (C_j \cap \underline{\{x_j\}}), \quad (1.12)$$

en effet, si  $y \in (C \cap \underline{\{x_j\}})$ , on aura  $y \in (C_i \cap \underline{\{x_j\}})$  pour un certain  $i$ . Dans le cas où  $C_i \subset C_j$ , alors  $y \in (C_j \cap \underline{\{x_j\}})$ ; tandis que dans le cas contraire, selon le lemme **1.6**, il existe  $x_i \in C_i$  tel que  $C_j = (C_i \cap \underline{\{x_i\}})$ . On aura alors  $y < x_j < x_i$ , d'où  $y \in (C_i \cap \underline{\{x_i\}}) = C_j$ . Dans tous les cas, on aura donc  $y \in C_j$ .

▷ Supposons alors que  $C \supset Y \neq \emptyset$ , alors  $\exists j$  tel que  $Y \cap C_j \neq \emptyset$ . Comme  $C_j$  est bien ordonné, on peut poser  $y_j = \min(C_j \cap Y)$ , on aura alors

$$(C \cap \underline{\{y_j\}}) = (C_j \cap \underline{\{y_j\}}) = \emptyset,$$

et par conséquent  $y_j = \min(C \cap Y)$ . C'est dire que  $C$  est bien ordonné.

▷ Soit  $x \in C$ , il existe alors  $j$  tel que  $x \in C_j$ , et on aura  $(C \cap \underline{\{x\}}) = (C_j \cap \underline{\{x\}})$ , d'après (1.12), d'où  $c(\overline{C \cap \{x\}}) = c(\overline{C_j \cap \{x\}})$ , ce qui prouve que  $C$  est une chaîne.

▷ Supposons que  $\overline{C}$  ne soit pas vide, et posons  $x_0 = c(\overline{C})$ . L'ensemble  $D = C \cup \{x_0\}$  est une chaîne, en effet il est bien ordonné, et  $D \cap \underline{\{x_0\}} = C$ , d'où  $\overline{D \cap \{x_0\}} = \overline{C}$  et par conséquent  $c(\overline{D \cap \{x_0\}}) = x_0$ . Comme  $C$  est l'union de toutes les chaînes, il en résulte que  $\overline{C} = \emptyset$ .

▷ Comme  $X$  est inductivement ordonné,  $C$  possède un majorant  $z$  dans  $X$ , et comme  $\overline{C} = \emptyset$ , on a  $z = \max C$ . Si  $t \in X$  majore strictement  $z$ , alors  $t \in \overline{C}$ , ce qui prouve que  $z$  est maximal dans  $X$ .

(ii) Supposons maintenant le lemme de Zorn vérifié et considérons le système  $M$  des sous-ensembles non vides  $D_j$  de  $X$  munis d'un ordre  $\leq_j$  les rendant bien ordonnés.

▷ Les sous-ensembles formés d'un seul élément appartiennent à  $M$ , qui par conséquent n'est pas vide. On définit un ordre sur  $M$  de la façon suivante :  $(D_i, \leq_i) \leq_M (D_j, \leq_j)$  si  $(D_j, \leq_j) = (D_i, \leq_i)$  ou si

$$\leq_i = \leq_j|_{C_i} \text{ et } \exists x_j \in D_j \text{ tel que } D_i = \{x \in D_j \mid x \leq_j x_j\} \quad (1.13)$$

En particulier, si  $(D_i, \leq_i) <_M (D_j, \leq_j)$ , on aura  $D_i \subset D_j$ .

▷ Montrons que  $M$  est inductivement ordonné. Soit  $N$  un sous-ensemble totalement ordonné de  $M$ , et  $D$  l'union des  $D_j$  appartenant à  $N$ . Définissons un ordre sur  $D$  selon

$$x \leq y \text{ si } \exists j \text{ tel que } \{x, y\} \subset D_j \text{ et } x \leq_j y, \quad (1.14)$$

et remarquons que cette définition n'est pas ambiguë en vertu du fait que  $N$  est totalement ordonné par  $\leq_M$ .  $\{x, y\} \subset D_i \in N$  et  $x \leq_i y$ ,

▷ Soient  $D_1$  et  $D_2 \in N$ , comme  $N$  est totalement ordonné, si  $D_1 \not\subset D_2$ , on aura  $D_2 <_M D_1$ , d'où l'existence de  $x'_1 \in D_1$  tel que  $D_2 = \{x \in D_1 \mid x \leq_1 x'_1\}$ . Comme  $D_1$  est bien ordonné,  $D_1 \setminus D_2$  possède un élément minimal, soit  $x_1$ . On ne peut avoir  $x'_1 \geq x_1$ , car on aurait alors  $x_1 \in D_2$ . On aura donc  $x'_1 < x_1$  et par conséquent  $D_2 \subset (D_1 \cap \underline{\{x_1\}})$ ; en fait on aura

$$D_2 = (D_1 \cap \underline{\{x_1\}}),$$

car si  $y \in (D_1 \cap \underline{\{x_1\}}) \setminus D_2$ , alors  $x'_1 < y < x_1$ . La conclusion du lemme 1.6 s'applique donc aux  $D_i \in N$ , et par conséquent la formule (1.12) s'applique aux  $D_j$ , soit pour tout  $y_j \in D_j$ ,

$$(D \cap \underline{\{y_j\}}) = (D_j \cap \underline{\{y_j\}}), \quad (1.15)$$

et comme précédemment, il en résulte que  $D$  est bien ordonné pour  $\leq$ , c'est donc un élément de  $M$ .

▷ Montrons que  $N$  est majoré, c'est bien sûr le cas s'il admet un élément maximal. Sinon tout  $(D_i, \leq_i)$  de  $N$  admet un majrant strict  $(D_j, \leq_j)$  dans  $N$ , et on aura donc

$$D_i = \{x \in D_j \mid x \leq_j x_j\} = \left( D_j \cap \underline{\{x_j\}} \right) \cup \{x_j\}$$

pour un certain  $x_j \in D_j$ . Selon (1.15) on aura donc

$$D_i = \left( D \cap \underline{\{x_j\}} \right) \cup \{x_j\} = \{x \in D \mid x \leq x_j\},$$

c'est dire que  $(D, \leq)$  majore  $N$ , qui est par conséquent inductivement ordonné. Selon le lemme de Zorn,  $M$  admet donc un élément maximal, soit  $(P, \leq_P)$ .

▷ Si  $P \neq X$ , on peut choisir  $p \in X \setminus P$  et prolonger  $\leq_P$  à  $P \cup \{p\}$ , en posant  $x \leq_P p, \forall x \in P$ . On obtient ainsi un ensemble bien ordonné qui majore  $(P, \leq_P)$  pour la relation d'ordre de  $M$ , ce qui aboutit à une contradiction. Il en résulte que  $P = X$ , qui est par conséquent bien ordonné.

(iii) Enfin si  $X$  est un ensemble sur lequel on met un bon ordre, et si  $Y \subset X$ , on notera  $c(Y)$  comme étant l'élément minimal de  $Y$ .

□

On a pu démontrer (Cohen 1963) que l'axiome du choix était indépendant du système d'axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo et Frankl, ce qui fait qu'on peut à volonté choisir de l'accepter ou de le rejeter sans risque de nuire à la cohérence des mathématiques. Cependant on n'a jamais pu trouver d'avantage autre que philosophique à son rejet, tandis que nombre de résultats essentiels de l'analyse en découlent, nous n'aurons donc pas d'états d'âme à cet égard.





# Chapitre 2

## Le théorème d'Ascoli

La compacité est une propriété topologique de première importance, mais au sein des espaces de fonctions, il est généralement difficile d'en apporter la preuve. C'est là qu'intervient le théorème d'Ascoli qui fait découler la compacité d'une propriété beaucoup plus élémentaire d'équicontinuité.

### 2.1 Convergence uniforme et convergence simple

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, on note classiquement  $F^E$  l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$ , et  $\mathcal{C}(E, F)$  l'ensemble des applications continues  $E \rightarrow F$ .

#### 2.1.1 Convergence simple

Si  $a$  est un point de  $E$ , nous noterons

$$p_a(f) = \|f(a)\|, \text{ où } f \in F^E. \quad (2.1)$$

La topologie de la *convergence simple* est celle définie par l'ensemble des semi-normes  $p_a$  où  $a$  parcourt  $E$  ; c'est également la topologie produit sur  $F^E$ . L'ensemble  $F^E$  muni de la topologie de la convergence simple est noté  $F_s^E$ , le sous-ensemble  $\mathcal{C}(E, F)$  des fonctions continues muni de la topologie induite par celle de la convergence simple est noté  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . Si  $a$  ne parcourt qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E$ , on parlera de topologie de la convergence ponctuelle sur le sous-ensemble  $A$  de  $E$ .

#### 2.1.2 Convergence uniforme

Si  $K$  est une partie *compacte* de  $E$ , nous noterons

$$P_K(f) = \sup_{a \in K} \|f(a)\|, \text{ où } f \in \mathcal{C}(E, F). \quad (2.2)$$

Comme une fonction continue sur un compact est bornée,  $P_K(f)$  est bien définie. La topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ou plus simplement *topologie*

de la convergence compacte, est celle définie par l'ensemble des semi-normes  $P_K(f)$  ; l'espace  $\mathcal{C}(E, F)$  muni de cette topologie est noté  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

Rappelons que dans un espace  $X$  semi-normé, soit par les  $p_i, i \in I$ , une base de voisinages de 0 est constituée des intersections finies de semi-boules :

$$\bigcap_{j=1, n} \{x \in X \mid p_i(x) \leq \varepsilon_i\},$$

et que la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  a pour base d'ouverts les  $\prod_{i \in I} A_i$ , où les  $A_i$  sont tous égaux à  $X_i$  hormis un nombre fini d'entre eux  $A_j, j = 1, n$ , respectivement ouverts de  $X_j$ .

## 2.2 Equicontinuité et compacité

**Définition 2.1** Soit  $\mathcal{H}$  une famille d'applications  $E \rightarrow F$ , on dit que  $\mathcal{H}$  est équicontinue au point  $x$ , si pour tout voisinage  $V$  de 0 dans  $F$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $f(y) - f(x) \in V, \forall y \in U, \forall f \in \mathcal{H}$ . On dit que  $\mathcal{H}$  est équicontinue sur  $E$ , ou tout simplement équicontinu, si  $\mathcal{H}$  est équicontinue en tout point de  $E$ .



**Théorème 2.2 (Ascoli)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés et  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble équicontinu de  $\mathcal{C}(E, F)$ , alors

- (i) L'adhérence  $\overline{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$  est un ensemble équicontinu de  $\mathcal{C}(E, F)$ .
- (ii) Sur  $\mathcal{H}$ , et donc sur  $\overline{\mathcal{H}}$ , les topologies de la convergence ponctuelle sur un sous-ensemble dense, de la convergence ponctuelle sur  $E$ , et de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts sont les mêmes.
- (iii) Si  $\forall x \in E, \mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\}$  est relativement compact dans  $F$ , alors  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

DÉMONSTRATION.

- (i) Soient  $x \in E$ , et  $\varepsilon > 0$ , d'après l'équicontinuité de  $\mathcal{H}$ ,  $\exists \eta_x > 0$ , tel que

$$(\|x - y\| \leq \eta_x) \implies (\|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon/3 \forall f \in \mathcal{H}.)$$

Choisissons un tel  $y$ , si on prend maintenant  $g \in \overline{\mathcal{H}}$ , alors dans tout voisinage de  $g$  pour  $\mathcal{C}_s(E, F)$ ,  $\exists f \in \mathcal{H}$  tel que  $\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon/3$  et  $\|g(y) - f(y)\| \leq \varepsilon/3$ . On aura donc

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - g(y)\| \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de  $\overline{\mathcal{H}}$  au point  $x$ .

- (ii) Il est clair que la convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence simple. Il nous suffira donc de démontrer la réciproque, soit que sur  $\mathcal{C}(E, F)$  la topologie  $\mathcal{T}_d$  de la convergence sur un sous-ensemble dense  $A$  de  $E$  est plus fine que la topologie  $\mathcal{T}_c$  de la convergence uniforme sur tout compact. Soit donc  $K \subset E$  compact, et  $g \in \mathcal{H}$ , il nous suffira

de montrer que  $\{f \in \mathcal{H} \mid P_K(f - g) \leq 1\}$  contient un voisinage de  $g$  pour  $\mathcal{T}_d$ . Comme  $\mathcal{H}$  est équicontinue,  $\forall x \in K, \exists \eta_x > 0$ , tel que  $\forall y \in B_{\eta_x}(x), \forall f \in \mathcal{H}, \|f(y) - f(x)\| \leq 1/5$ . Comme  $K$  est compact et que les  $B_{\eta_x}(x)$  le recouvrent,  $\exists x_i, i = 1, n$  tels que  $K \subset \cup_{i=1, n} B_{\eta_i}(x_i)$ . Mais les  $B_{\eta_i}(x_i)$  sont des voisinages de  $x_i$  et contiennent donc chacun au moins un point de  $A$ , soit  $a_i$ , et nous aurons  $\forall y \in B_{\eta_i}(x_i), \forall f, g \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|f(y) - g(y)\| &\leq \|f(y) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(a_i)\| + \|f(a_i) - g(a_i)\| \\ &\quad + \|g(a_i) - g(x_i)\| + \|g(x_i) - g(y)\| \\ &\leq 4/5 + \|f(a_i) - g(a_i)\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$P_K(f - g) \leq 4/5 + \max_{i=1, n} \|f(a_i) - g(a_i)\|$$

soit  $P_K(f - g) \leq 1$  dès que  $\max_{i=1, n} p_{a_i}(f - g) \leq 1/5$ .

(iii) Supposons que  $\forall x, \mathcal{H}(x)$  est relativement compact dans  $F$ , alors d'après le théorème de Tychonoff (Corollaire 2.16 ci-dessous),  $\prod_{x \in E} \overline{\mathcal{H}(x)} = \prod_{x \in E} \overline{\mathcal{H}}(x)$  est compact dans  $F^E = \mathcal{C}_s(E, F)$ . C'est dire en fait que l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$  telles que  $f(x) \in \mathcal{H}(x) \forall x \in E$ , est relativement compact dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . En particulier, il en résulte que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_s(E, F)$ . Nous venons de démontrer à l'item (ii) que sur  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{C}_s(E, F)$  et  $\mathcal{C}_c(E, F)$  coïncident, il en résulte que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_c(E, F)$ .

□

Ce résultat reste valable si  $E$  est un espace topologique et  $F$  un espace vectoriel topologique localement convexe.

**Corollaire 2.3** *Si  $E$  est compact, et  $\mathcal{F}$  est borné et équicontinu, alors  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}(E, F)$ .*



## 2.3 Le théorème de Tychonoff

L'ingrédient non trivial dans le théorème d'Ascoli est constitué du théorème de Tychonoff qui assure qu'un produit quelconque d'espaces compacts est compact. Sa démonstration repose sur la généralisation du théorème de Bolzano-Weierstraß aux espaces non métrisables; elle fait intervenir non plus des suites mais des filtres et fait explicitement appel au lemme de Zorn 1.4.

### 2.3.1 Filtres

#### Définition 2.4

(i) On appelle filtre dans  $E$ , une collection  $\mathcal{F}$  de sous ensembles non vides de  $E$  tels que

- ▷ si  $A$  et  $B \in \mathcal{F}$ , alors  $A \cap B \in \mathcal{F}$
- ▷ si  $A \in \mathcal{F}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \in \mathcal{F}$

(ii) On appelle base de filtre dans  $E$ , une collection  $\mathcal{B}$  de sous ensembles non vides de  $E$  tels que si  $A$  et  $B \in \mathcal{B}$ , alors  $\exists C \in \mathcal{B}$  tel que  $C \subset A \cap B$ .

(iii) Si  $\mathcal{B}$  est une base de filtres, le filtre engendré par  $\mathcal{B}$  est formé de l'ensemble des parties de  $E$  contenant un élément de  $\mathcal{B}$ , c'est le plus petit filtre contenant  $\mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ , on dit que le filtre  $\mathcal{G}$  est *plus fin* que  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 2.5** Si  $u$  est une application  $E \rightarrow F$ , et si  $\mathcal{B}$  est une base de filtre dans  $E$ , alors  $u(\mathcal{B})$  est une base de filtre dans  $F$ . On dira que  $u(\mathcal{B})$  est l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$ .

DÉMONSTRATION. En effet  $u(A \cap B) \subset u(A) \cap u(B)$ .

□

Même si  $\mathcal{B}$  est un filtre,  $u(\mathcal{B})$  n'est pas nécessairement un filtre.

Les filtres constituent une généralisation des suites : à la suite  $x_n$  est associée la base de filtre *dénombrable* formée des  $X_p = \{x_n \mid n \geq p\}$ . Ils constituent également une généralisation des voisinages, l'ensemble des voisinages d'un point  $a$  formant le filtre  $\mathcal{V}(a)$ .

### 2.3.2 Filtres et continuité

Dire que la suite  $x_n$  converge vers  $a$ , c'est dire que tout voisinage de  $a$  contient un  $X_p$ , ou encore que  $\mathcal{V}(a)$  est contenu dans le filtre engendré par les  $X_p$ . Nous sommes donc conduits à adopter la définition suivante :

**Définition 2.6** On dit que le filtre  $\mathcal{F}$  converge vers le point  $a$  s'il contient le filtre des voisinages de  $a$ .

Les filtres jouent vis-à-vis des espaces non métrisables le même rôle que les suites pour ces derniers.

**Proposition 2.7** Dans un espace topologique séparé, un filtre ne peut avoir plus d'une limite

DÉMONSTRATION. En effet, si  $a$  et  $b$  étaient deux limites distinctes du filtre  $\mathcal{F}$ , alors il contiendrait  $\mathcal{V}(a)$  et  $\mathcal{V}(b)$ , et en particulier  $A$  et  $B$  disjoints appartenant respectivement à  $\mathcal{V}(a)$  et  $\mathcal{V}(b)$ , ce qui est impossible.

□

**Proposition 2.8** *Si  $A$  est un sous-ensemble de l'espace topologique  $E$ , et s'il existe un filtre  $\mathcal{F}$  dont  $A$  soit un élément qui converge vers  $a$ , alors  $a \in \overline{A}$ . Réciproquement si  $a \in \overline{A}$ , alors il existe un filtre  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $a$ , dont une base est formée de sous-ensembles de  $A$ .*

DÉMONSTRATION. Rappelons tout d'abord que  $a \in \overline{A}$  si et seulement si  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ .

▷ Si  $\mathcal{F}$  converge vers  $a$ , et  $A \in \mathcal{F}$ , alors comme  $\mathcal{F}$  est plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ , on aura bien  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ .

▷ Réciproquement, si  $A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(a)$ , alors les  $A \cap V$  où  $V$  parcourt  $\mathcal{V}(a)$  forment une base de filtre, soit  $\mathcal{F}$ , dont les éléments sont des sous-ensembles de  $A$ , et par conséquent  $\mathcal{F}$  est plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ . □

Voici par exemple la généralisation aux espaces topologiques quelconques d'un théorème classique dans le cadre des espaces métrisables.

**Théorème 2.9** *Une application  $u : E \rightarrow F$  est continue en  $a \in E$  si et seulement si, pour tout filtre  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $a$ , le filtre engendré par  $u(\mathcal{F})$  converge vers  $u(a)$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $u$  continue en  $a$ , alors si  $W$  est un voisinage de  $u(a)$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$ , tel que  $u(V) \subset W$ . C'est dire que le filtre engendré par  $u(\mathcal{V}(a))$  est plus fin que le filtre des voisinages de  $u(a)$ . Si on choisit alors un filtre  $\mathcal{U}$  dans  $E$ , plus fin que  $\mathcal{V}(a)$ , son image sera plus fine que  $u(\mathcal{V}(a))$ , et par conséquent que le filtre des voisinages de  $u(a)$ .

▷ Réciproquement choisissons pour  $\mathcal{F}$  le filtre des voisinages de  $a$ , et supposons que le filtre engendré par  $u(\mathcal{F})$  converge vers  $u(a)$ . Si  $W$  est un voisinage de  $u(a)$ , il contiendra un élément de  $u(\mathcal{F})$ , c'est-à-dire l'image d'un voisinage de  $a$ . Nous avons donc montré la continuité de  $u$  en  $a$ . □

### 2.3.3 Compacité

Le résultat qui suit joue le même rôle que le théorème de Bolzano-Weierstraß pour les espaces non métrisables.

**Théorème 2.10** *Un espace topologique  $E$  est compact si et seulement si pour tout filtre  $\mathcal{F}$  défini sur  $E$ , il existe un filtre plus fin qui converge.* ♥

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $E$ , supposé compact. Si  $\mathcal{F}$  est formé de la famille des  $A_i, i \in I$  alors, par définition,  $\forall J$  sous-ensemble fini de  $I, \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ , et par conséquent  $\bigcap_{j \in J} \overline{A_j} \neq \emptyset$ . Par compacité de  $E$ , il en résulte que  $\bigcap_{j \in I} \overline{A_j} \neq \emptyset$ . Il existe donc un point  $a$  adhérent à tous les  $A_i$ , c'est-à-dire dont tout voisinage  $V$  rencontre chaque  $A_i$ . L'ensemble des  $V \cap A_i$  forme

la base d'un filtre plus fin que  $\mathcal{F}$  qui est également plus fin que la base des voisinages de  $a$ , et qui converge par conséquent vers  $a$ .

▷ Réciproquement supposons que pour tout filtre  $\mathcal{F}$ , il existe un filtre convergent plus fin, et considérons une famille de fermés  $F_i$  dont les intersections finies sont non vides. La famille  $F_i$  forme la base d'un filtre, et il existe par hypothèse un filtre  $\mathcal{G}$ , plus fin qui converge, soit vers  $a$ . Le point  $a$  appartient à l'adhérence de tous les  $F_i$ , et par conséquent à leur intersection ; la compacité de  $E$  en résulte.

□

### 2.3.4 Ultrafiltres

On peut donner de ce théorème une autre expression, mieux adaptée à la démonstration de résultats de compacité, et c'est là qu'interviennent la notion d'ultrafiltre et le lemme de Zorn.

**Définition 2.11** *On dit qu'un filtre  $\mathcal{U}$  sur  $E$  est un ultrafiltre s'il n'existe pas de filtre strictement plus fin qui le contienne.*

**Proposition 2.12** *Un filtre  $\mathcal{U}$  sur  $E$  est un ultrafiltre si et seulement si  $\forall A \subset E$ , on a  $A \in \mathcal{U}$  ou  $A^c \in \mathcal{U}$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{U}$  un filtre contenant  $A$  ou  $A^c \forall A \subset E$ . Si  $\mathcal{U}$  n'était pas un ultrafiltre, il existerait un filtre  $\mathcal{F}$  strictement plus fin, et par conséquent, il existerait  $A \subset E$  tel que  $A \in \mathcal{F}$  et  $A \notin \mathcal{U}$ , mais alors  $A^c \in \mathcal{U}$ , et par conséquent  $A^c \in \mathcal{F}$  qui est plus fin. Il en résulte que  $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$ , ce qui est impossible.

▷ Réciproquement, si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre et  $A \notin \mathcal{U}$ , alors aucun élément  $V$  de  $\mathcal{U}$  n'est inclus dans  $A$ , et par conséquent  $V \cap A^c \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{U}$ . Mais l'ensemble des  $V \cap A^c$  où  $V$  parcourt  $\mathcal{U}$  est une base de filtre et engendre donc un filtre, soit  $\mathcal{V}$ . Comme  $V \cap A^c \subset V, \mathcal{V}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$ , d'où  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ , puisque  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre ; comme  $A^c = E \cap A^c \in \mathcal{V}$ , il en résulte que  $A^c \in \mathcal{U}$ .

□

**Corollaire 2.13** *Si  $\mathcal{B}$  est une base d'ultrafiltre sur  $E$ , son image par une application  $f : E \rightarrow F$  est une base d'ultrafiltre sur  $F$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $B \subset F, f^{-1}(B)$  et  $f^{-1}(B^c)$  sont complémentaires, et par conséquent l'un d'eux appartient au filtre engendré par  $\mathcal{B}$ . Il en résulte que  $B$  ou  $B^c$  appartient au filtre engendré par  $f(\mathcal{B})$ , qui constitue donc une base d'ultrafiltre.

□

◇ **Théorème 2.14** *Tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{F}_i, i \in I$ , une famille de filtres sur  $E$ , totalement ordonnée, c'est-à-dire telle que de deux filtres de la famille, l'un soit nécessairement plus fin que l'autre. Considérons les sous-ensembles de  $E$  qui appartiennent à l'un des  $\mathcal{F}_i$ . Ils forment un filtre  $\mathcal{S}$ , car si  $A_i \in \mathcal{F}_i$  et  $A_j \in \mathcal{F}_j$ , alors l'un des deux filtres, soit par exemple  $\mathcal{F}_i$ , est plus fin que l'autre, et on aura  $A_j \in \mathcal{F}_i$ . Par conséquent  $A_i \cap A_j \in \mathcal{F}_i$ , d'où il résulte que  $A_i \cap A_j \in \mathcal{S}$ . Enfin il est clair que  $\mathcal{S}$  constitue la borne supérieure des  $\mathcal{F}_i$ .

▷ Considérons alors l'ensemble  $\Sigma$  des filtres plus fins qu'un filtre donné  $\mathcal{F}$ . Il résulte du lemme de Zorn 1.4 que  $\Sigma$  admet un élément  $\mathcal{T}$  maximal, c'est-à-dire un filtre n'admettant pas de majorant dans  $\Sigma$ . Ce filtre est d'une part un ultrafiltre, car s'il admettait un majorant, ce dernier serait nécessairement dans  $\Sigma$ , et d'autre part il est plus fin que  $\mathcal{F}$ .

□

**Corollaire 2.15** *Un espace topologique  $E$  est compact si et seulement si il est séparé et si tout ultrafiltre sur  $E$  converge.*



DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $E$  supposé compact, alors comme il n'existe pas de filtre strictement plus fin,  $\mathcal{U}$  converge. Réciproquement si tout ultrafiltre sur  $E$  converge, alors  $E$  est compact, puisque pour tout filtre  $\mathcal{F}$ , il existe un ultrafiltre convergent plus fin.

□

**Corollaire 2.16 (Théorème de Tychonoff)** *Tout produit d'espaces compact est compact.*



DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $E = \prod_{i \in I} E_i$ , où les  $E_i$  sont compacts. Alors,  $\forall i \in I$ , l'image  $\mathcal{U}_i$  de  $\mathcal{U}$  par l'application coordonnée  $p_i$  est un ultrafiltre sur  $E_i$ , en vertu du corollaire 2.13; il converge donc selon le corollaire 2.15, soit vers  $a_i$ . Notons  $a = (a_i)_{i \in I}$  et  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $E$ . Par définition,  $V$  contient un pavé ouvert  $\prod_{i \in I} V_i$ , avec  $V_i = E_i$  pour  $i \notin J$  fini, et  $V_i \in \mathcal{V}(a_i)$ . Comme  $\mathcal{U}_i$  converge vers  $a_i$ , on aura  $V_i \in \mathcal{U}_i$ ; il en résulte que  $p_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ , et par conséquent  $\prod_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ . L'ultrafiltre  $\mathcal{U}$  est donc convergent, ce qui prouve, toujours selon 2.15, que  $E$  est compact.

□





# Chapitre 3

## La propriété de Baire

Les théorèmes de ce chapitre sont particulièrement importants, ils découlent de la propriété de Baire, qui essentiellement n'est valable que dans les espaces métriques, ce qui constitue une sérieuse limitation. Le développement de l'analyse fonctionnelle a cependant permis d'exhiber une classe particulière, mais assez large, d'espaces vectoriels topologiques, les *espaces tonnelés*, pour lesquels le théorème de Banach-Steinhaus est valable bien que la propriété de Baire ne le soit pas.

### 3.1 Espaces de Baire

#### Définition 3.1


(i) On dit qu'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est rare si son adhérence est d'intérieur vide.

(ii) On dit qu'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est maigre s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares, ce qui revient à dire que  $A$  est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

**Définition 3.2** On dit qu'un espace topologique  $E$  est un espace de Baire si tout sous-ensemble maigre de  $E$  est d'intérieur vide, soit plus explicitement

$$\forall F_i, \text{ fermés tels que } \overset{\circ}{F}_i = \emptyset, \forall A \subset \bigcup_{i=1, n} F_i, \text{ alors } \overset{\circ}{A} = \emptyset.$$

**Remarque 3.3** On peut donner de cette définition diverses formes équivalentes :

(i)  $E$  est un espace de Baire si, lorsqu'une union dénombrable de fermés contient un ouvert non vide, alors l'un au moins des fermés est d'intérieur non vide. 

(ii) Par passage au complémentaire,  $E$  est un espace de Baire si tout sous-ensemble de  $E$  contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses est lui-même dense.

**Théorème 3.4** Un espace métrique complet, est de Baire.

**Remarque 3.5** *En fait on démontre une propriété topologique (le fait d'être de Baire), à partir d'une propriété uniforme (la complétude); il suffit donc que l'espace soit complet pour l'une des métriques compatibles avec la topologie, pour que celle-ci soit une topologie d'espace de Baire.* ♠

DÉMONSTRATION.

▷ Soit une suite de fermés  $A_n$  dont l'union contient une boule ouverte  $S$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun des  $A_n$  ne contienne de boule ouverte. C'est dire que  $\forall n$ , l'ouvert  $A_n^c$  recoupe toutes les boules ouvertes, et en particulier  $S$ .

▷ Notons alors  $\overset{\circ}{B}_{\rho_0}(x_0)$  une boule ouverte contenue dans  $A_0^c \cap S$ . On notera de même  $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(x_1)$  une boule ouverte contenue dans  $A_1^c \cap \overset{\circ}{B}_{\rho_0/2}(x_0)$ , et par récurrence  $\overset{\circ}{B}_{\rho_{n+1}}(x_{n+1})$  une boule ouverte contenue dans  $A_{n+1}^c \cap \overset{\circ}{B}_{\rho_n/2}(x_n)$ .

▷ Les boules fermées  $B_{\rho_n}(x_n)$  sont emboîtées et leur rayon tend vers 0; par conséquent en vertu du lemme 3.6 ci-dessous,  $\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\rho_n}(x_n)$ . Mais  $x \in S$  et  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c$ , ce qui constitue une contradiction, puisque  $S \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . □

**Lemme 3.6** *Soit  $E$  un espace métrique complet et  $B_n$  une suite de boules emboîtées dont le rayon tend vers 0, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$  est réduite à un point.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $x_n$  le centre de  $B_n$  et  $\rho_n$  son rayon.  $\forall n, \forall p, q \geq n$ , on aura  $d(x_p, x_q) \leq 2\rho_n$ , la suite  $x_n$  est donc de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers  $x$ . Pour  $p \geq n$  donné, on aura  $x_p \in B_n$ , et par conséquent, comme  $B_n$  est fermée,  $x = \lim x_p \in B_n$ , ce qui prouve que  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

▷ Aucun autre point ne peut appartenir à  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , soit en effet  $y$  un tel point, on aura  $d(y, x_n) \leq \rho_n, \forall n$ , et par conséquent  $x_n \rightarrow y$ . □

## Une application élémentaire

**Proposition 3.7** *Soit  $E$  un espace métrique complet et  $\mathcal{F}$  une famille d'applications continues  $E \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que*

$$\forall x \in E, \exists k > 0, \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \text{ on ait } |f(x)| \leq k,$$

*alors, il existe une boule ouverte  $S \subset E$ , et  $K > 0$ , tels que*

$$\forall x \in S, \forall f \in \mathcal{F}, |f(x)| \leq K.$$

DÉMONSTRATION. Posons  $A_k = \{x \in E \mid \forall f \in \mathcal{F}, |f(x)| \leq k\}$ , les  $A_k$  sont fermés, en tant que intersections de fermés, et leur union est  $E$  tout entier. Il en résulte l'existence de  $K$  tel que  $A_K$  contienne une boule ouverte  $S$ . □

La simplicité de la preuve ne doit pas masquer l'intérêt d'un tel résultat : à partir d'une borne ponctuelle sur un ensemble de fonctions on a démontré l'existence d'une borne uniforme dans un ouvert. Ce résultat va prendre toute son ampleur dans le cas d'une famille d'applications linéaires.

## 3.2 Théorèmes de la borne uniforme

**Théorème 3.8 (de la borne uniforme)** *Si les  $T_i, i \in I$  forment une famille d'applications linéaires continues d'un espace de Banach  $E$ , dans un espace normé  $F$ , et si  $\forall x$ , la famille des  $\|T_i(x)\|_F, i \in I$  est bornée, alors la famille des  $T_i$  est bornée dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .*



DÉMONSTRATION. Posons  $A_k = \{x \in E \mid \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F \leq k\}$ , de même qu'à la démonstration de la proposition 3.7, l'un au moins des  $A_k$ , soit  $A_K$  contient une boule ouverte, soit  $\overset{\circ}{B}_r(y)$ . Posons  $K' = \sup_{i \in I} \|T_i(y)\|_F$ , choisissons  $z$  tel que  $\|z\| < r$  et posons  $x = y + z$ , on aura  $x \in \overset{\circ}{B}_r(y)$  et par conséquent  $\forall i \in I, \forall z \in \overset{\circ}{B}_r(0)$ ,

$$\|T_i(z)\|_F \leq \|T_i(x)\|_F + \|T_i(y)\|_F \leq K + K' ;$$

il en résulte que  $\forall i \in I, \|T_i\| \leq (K + K') / r$ .

□

**Théorème 3.9 (de Banach-Steinhaus)** *Si les  $T_n$  forment une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach  $E$ , dans un espace normé  $F$ , et si  $\forall x, T_n(x)$  possède une limite, soit  $Tx$ , (c'est-à-dire si  $T_n$  converge simplement vers  $T$ ), alors*



- (i) l'application  $T$  ainsi définie est linéaire continue et vérifie  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$
- (ii) la suite  $T_n$  converge vers  $T$  uniformément sur tout compact.

DÉMONSTRATION.

(i) La norme étant continue,  $\|T_n(x)\|_F$  est borné  $\forall x$ , et par conséquent, en vertu du théorème 3.8,  $\|T_n\|$  est également borné; nous poserons  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$ . On aura donc  $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ , et par conséquent

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_F = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_F \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\|_E,$$

soit  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ .

(ii) Comme  $\|T_n\|$  est bornée, on en déduit que la suite  $T_n$  est équicontinue, et le théorème d'Ascoli 2.2 nous montre alors que la convergence ponctuelle est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

□

Il s'agit là d'un théorème remarquable, puisqu'à partir de la *convergence simple* d'une suite de fonctions *linéaires* continues, il assure la *continuité de la limite et la convergence uniforme sur tout compact*. Bien entendu, la linéarité est ici essentielle. ◇

Ce théorème admet une généralisation au cas où  $E$  est un espace de Fréchet (c'est-à-dire un espace métrique complet) et  $F$  un espace vectoriel topologique localement convexe :

**Théorème 3.10** *Si les  $T_n$  forment une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Fréchet  $E$ , dans un e.v.t.l.c.  $F$ , et si  $T_n$  converge simplement, soit vers  $T$ , alors  $T$  est continue et  $T_n$  converge vers  $T$  uniformément sur tout compact de  $E$ .*

### 3.3 Théorème des homomorphismes

Une autre conséquence de la propriété de Baire est relative à la relation entre inverses algébrique et topologique. De façon surprenante, il suffit qu'une application linéaire continue soit bijective pour que son inverse soit continu.

♥ **Théorème 3.11 (de l'application ouverte)** *Si  $T$  est une application linéaire continue surjective  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, alors l'image par  $T$  de tout ouvert de  $E$  est un ouvert de  $F$ . On dit que  $T$  est une application ouverte.*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $E_r$  et  $F_r$  les boules ouvertes respectives de rayon  $r$  et de centre 0 dans  $E$  et  $F$ . Choisissons  $\varepsilon_0 > 0$ , et posons  $\varepsilon_i = 2^{-i}\varepsilon_0$ . Comme  $T$  est surjective, son image n'est pas maigre, et le lemme **3.12** ci-dessous nous montre alors que  $\forall i, \exists \eta_i > 0$  tel que  $F_{\eta_i} \subset \overline{T(E_{\varepsilon_i})}$ , puis le lemme **3.13** que l'image par  $T$  d'un voisinage quelconque de 0 dans  $E$  contient un voisinage de 0 dans  $F$ .

▷ Soit maintenant  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide de  $E$ , et  $y \in T(\mathcal{O})$ . Il existe donc  $x \in \mathcal{O}$  tel que  $y = Tx$ , et comme  $\mathcal{O}$  est un voisinage de  $x$ , il existe un voisinage  $U$  de 0, tel que  $\mathcal{O} = x + U$ . Nous venons de voir qu'il existe un voisinage, soit  $W$  de 0 dans  $F$  tel que  $W \subset TU$  ; on aura alors

$$y + W \subset Tx + TU = T(x + U) \subset T(\mathcal{O}).$$

C'est dire que  $T(\mathcal{O})$  est ouvert. □

**Lemme 3.12** *Si  $T$  est une application linéaire :  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont normés, et si  $\mathcal{R}(T)$ , image de  $T$ , n'est pas maigre, alors  $\forall r > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que  $F_\eta \subset \overline{T(E_r)}$ , où  $E_\rho$  et  $F_\rho$  notent les boules ouvertes respectives de rayon  $\rho$  et de centre 0 dans  $E$  et  $F$ .*

DÉMONSTRATION. On aura  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE_{r/2}$  et par conséquent  $\mathcal{R}(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT(E_{r/2})$ . Comme par hypothèse  $\mathcal{R}(T)$  n'est pas maigre, il existe  $n_0$  tel que l'intérieur de  $n_0\overline{T(E_{r/2})}$  ne soit pas vide, c'est dire que l'intérieur  $\mathcal{O}$  de  $\overline{T(E_{r/2})}$  n'est pas vide. On aura

$$\overline{T(E_r)} \supset \overline{T(E_{r/2} - E_{r/2})} \supset \overline{T(E_{r/2})} - \overline{T(E_{r/2})} \supset \mathcal{O} - \mathcal{O}.$$

Mais  $\mathcal{O} - \mathcal{O}$  est un ouvert qui contient l'origine, le résultat en découle. □

**Lemme 3.13** *Si  $\forall r > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que  $F_\eta \subset \overline{T(E_r)}$ , où  $E_\rho$  et  $F_\rho$  notent les boules ouvertes respectives de rayon  $\rho$  et de centre 0 dans  $E$  et  $F$ , alors l'image par  $T$  d'un voisinage quelconque de 0 dans  $E$  contient un voisinage de 0 dans  $F$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Quitte à diminuer les  $\eta_i$ , nous pouvons les choisir de telle sorte que  $\eta_i \rightarrow 0$ . Soit  $y_0 \in F_{\eta_0}$ ,  $y_0 + F_{\eta_1}$  est un voisinage de  $y_0$ , et comme  $y_0 \in \overline{T(E_{\varepsilon_0})}$ ,  $(y_0 + F_{\eta_1}) \cap T(E_{\varepsilon_0})$  n'est pas vide. C'est dire qu'il existe  $x_0 \in E_{\varepsilon_0}$  tel que  $y_1 = y_0 - Tx_0 \in F_{\eta_1}$ . Par récurrence, on construit ainsi deux suites  $y_n$  et  $x_n$  telles que  $x_n \in E_{\varepsilon_n}$  et

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n = y_0 - T\left(\sum_{i=0,n} x_i\right) \in F_{\eta_{n+1}}.$$

▷ Posons  $s_n = \sum_{i=0,n} x_i$ , la suite  $s_n$  est de Cauchy, puisque pour  $m > p$ ,  $\|s_m - s_p\| \leq \sum_{i=p+1,m} \|x_i\| \leq 2^{-p}\varepsilon_0$ . Soit  $s$  sa limite, on aura  $\|s\| \leq \sum_{i=0,\infty} \|x_i\| = 2\varepsilon_0 < 3\varepsilon_0$ . Comme  $T$  est continue et  $\eta_i \rightarrow 0$ , il en résulte que  $y_0 = Ts$ , ce qui montre que  $F_{\eta_0} \subset T(E_{3\varepsilon_0})$ . □

**Corollaire 3.14 (Théorème des homomorphismes de Banach)** *Si  $T$  est une application linéaire continue bijective  $E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, alors  $T$  est un isomorphisme.* ♥

DÉMONSTRATION. En effet  $T$  est ouverte d'après le théorème 3.11, ce qui signifie exactement que  $T^{-1}$  est continue. □

Il s'agit là d'un théorème particulièrement utile, car il permet de conclure à la stabilité, à partir d'un résultat d'existence et d'unicité.

## 3.4 Théorème du graphe fermé

**Définition 3.15** *Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces normés. et si  $f$  est une application  $A \subset E \rightarrow F$ ,*

(i) *On appelle graphe de  $f$ , et on note  $\mathcal{G}(f)$ , le sous-ensemble de  $E \times F$  suivant :*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

(ii) On dit que  $f$  est fermée si  $\mathcal{G}(f)$  est fermé dans  $E \times F$ .

Dans le cas où  $f$  est linéaire, la remarque suivante est utile :

**Lemme 3.16** Si  $f : E \rightarrow F$ , normés, est linéaire, alors  $\mathcal{G}(T)$  est fermé si et seulement si

$$(x_n \rightarrow 0 \text{ et } f(x_n) \rightarrow h) \implies h = 0.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que  $y_n \rightarrow y$  et  $f(y_n) \rightarrow z$ , alors  $y_n - y = x_n \rightarrow 0$ , et  $f(x_n) = f(y_n) - f(y) \rightarrow z - f(y)$ . Selon l'hypothèse  $z - f(y) = 0$ , soit en fait  $z = f(y)$ , ce qui prouve que le graphe de  $f$  est fermé. □



**Théorème 3.17 (du graphe fermé)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T$  un opérateur linéaire fermé  $E \rightarrow F$ , alors  $T$  est continu.

DÉMONSTRATION. Le sous-espace  $\mathcal{G}(T)$  étant fermé est lui-même un espace de Banach. Considérons alors les projections respectives  $P$  et  $Q$ , de  $\mathcal{G}(T)$  sur  $E$  et  $F$  :  $P(x; Tx) = x$  et  $Q(x, Tx) = Tx$  ;  $P$  est linéaire bijective et continue  $\mathcal{G}(T) \rightarrow E$ , c'est donc un isomorphisme d'après le corollaire 3.14, et comme  $Q$  est continue,  $T = Q \circ P^{-1}$  l'est également. □

On constate donc que pour démontrer la continuité d'un opérateur linéaire, il n'est pas nécessaire de démontrer que  $Tx_n$  converge vers  $Tx$  dès que  $x_n$  converge vers  $x$ , mais simplement que si  $x_n$  et  $Tx_n$  convergent, soient respectivement vers  $x$  et  $y$ , alors  $y = Tx$ .

# Chapitre 4

## Le théorème de Stone-Weierstraß

La construction d'un opérateur linéaire continu sur une classe donnée de fonctions passe souvent par sa définition sur un sous-espace de fonctions simples, pour lequel on peut réaliser des calculs plus explicites. A cet égard le théorème de Weierstraß qui assure que les fonctions continues peuvent être uniformément approchées par des polynômes constitue un résultat important. Son extension sous forme du théorème de Stone à des sous-espaces de fonctions simples autres que les polynômes s'est révélée particulièrement utile.

**Théorème 4.1 (Weierstraß)** *Une fonction numérique continue sur un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  peut être approchée uniformément par une suite de polynômes.*



DÉMONSTRATION. La démonstration est aisée, donnons la dans le cas de fonctions à valeurs réelles ; dans le cas de fonctions à valeurs complexes il suffit d'en considérer indépendamment les parties réelles et imaginaires. Une méthode constructive consiste à poser

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.1)$$

et à montrer que  $\|p_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |p_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

▷ Comme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad (4.2)$$

on aura

$$p_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n (f(k/n) - f(x)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (4.3)$$

▷ Soit alors  $\varepsilon > 0$ , comme  $f$  est continue sur un compact, elle est uniformément continue, et par conséquent  $\exists \delta > 0$ , tel que  $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Posons alors

$$I_1 = \left\{ k \in [0, n] \left| \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right. \right\} \text{ et } I_2 = \left\{ k \in [0, n] \left| \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right. \right\},$$



on aura  $p_n(x) - f(x) = S_1 + S_2$ , avec

$$S_i = \sum_{k \in I_i} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

▷ On aura alors, d'une part

$$|S_1| \leq \varepsilon \sum_{k \in I_i} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon, \quad (4.4)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in I_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in I_2} \left( \frac{k-nx}{n\delta} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.5) \\ &\leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{n^2 \delta^2} \sum_{k \in I_2} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} x(1-x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{4n\delta^2}. \end{aligned}$$

▷ En effet, par différentiation on déduit de (4.2) que

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} (y)^{n-k}, \quad (4.6)$$

d'où, d'une part

$$nx = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.7)$$

et d'autre part, par différentiation de (4.6)

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} (1-x)^{n-k}, \quad (4.8)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_2} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k \in I_2} (k(k-1) + k - 2knx + n^2x^2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 + nx(1-2nx) + n^2x^2 = nx(1-x). \end{aligned}$$

□

## 4.1 Le théorème de Machado

Si on accepte d'abandonner l'aspect constructif de la démonstration, le théorème de Weierstraß est susceptible d'une généralisation considérable, due à Stone. La démonstration que nous allons en donner est particulièrement simple, elle utilise un résultat de Machado qui fait explicitement appel au lemme de Zorn.

**Définition 4.2**

(i) On dit que  $\mathcal{A}$  est une algèbre si c'est un espace vectoriel muni d'une structure d'anneau compatible.

(ii) L'algèbre  $\mathcal{A}$  est dite unitaire si elle contient l'élément neutre  $\mathbf{1}$  de la multiplication.

C'est en particulier le cas de  $\mathcal{C}(K)$ , ensemble des fonctions numériques continues sur le compact  $K$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.

Considérons maintenant des sous-algèbres  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}(K)$ .

**Définition 4.3**

(i) L'algèbre  $\mathcal{A}$  est dite auto-adjointe si  $h \in \mathcal{A} \implies \bar{h} \in \mathcal{A}$ .

(ii) Un sous-ensemble  $E$  de  $K$  est dit  $\mathcal{A}$ -antisymétrique si les seuls éléments de  $\mathcal{A}$  à valeurs réelles sur  $E$  sont des fonctions constantes sur  $E$ .

(iii) On dit que la sous-algèbre  $\mathcal{A}$  sépare les points si  $\forall x, y \in K$ , avec  $x \neq y$ ,  $\exists f \in \mathcal{A}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ .

Soient  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre fermée de  $\mathcal{C}(K)$ ,  $f \in \mathcal{C}(K)$  et  $F$  fermé non vide de  $K$ , nous poserons

$$\|f\|_F = \sup_{x \in F} |f(x)| \quad \text{et} \quad d_f(F) = \inf_{g \in \mathcal{A}} \|f - g\|_F.$$

Notons que  $F_1 \subset F_2 \implies d_f(F_1) \leq d_f(F_2)$ .

**Théorème 4.4 (Machado)** Si  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre fermée unitaire de  $\mathcal{C}(K)$ , et  $f \in \mathcal{C}(K)$ , alors il existe un sous-ensemble fermé  $\mathcal{A}$ -antisymétrique  $E \subset K$  vérifiant  $d_f(E) = d_f(K)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des sous-espaces fermés non vides de  $K$  vérifiant  $d_f(E) = d_f(K)$ , on aura  $K \in \mathcal{F}$ , qui n'est donc pas vide. Soit alors  $\mathcal{C}$  une sous-famille de  $\mathcal{F}$  totalement ordonnée par la relation d'inclusion, nous poserons  $G = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} F$ , c'est bien entendu un fermé, et on aura  $d_f(G) \leq d_f(K)$ , puisque  $G \subset K$ .

▷ Montrons que  $G \in \mathcal{F}$ . Soit  $g \in \mathcal{A}$ , considérons les ensembles

$$H_G = \{x \in G \mid |f(x) - g(x)| \geq d_f(K)\} \quad \text{et} \quad H_F = \{x \in F \mid |f(x) - g(x)| \geq d_f(K)\} ;$$

on a  $H_G = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} H_F$ . Les ensembles  $H_F$  sont fermés en tant que image réciproque de  $[d_f(K), +\infty]$  par une application continue; ils ne sont pas vides car

$$\sup_{x \in F} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_F \geq d_f(F) = d_f(K),$$

et comme  $F$  est fermé et  $f - g$  continue,  $\sup_{x \in F} |f(x) - g(x)|$  est atteint. Les  $H_F$  étant emboîtés, puisque  $\mathcal{F}$  est totalement ordonnée, l'intersection d'une famille finie de  $H_F$  n'est pas vide; il en résulte par compacité de  $K$  que  $H_G$  n'est pas vide.

▷ On constate donc que  $\forall g \in \mathcal{A}, \exists x \in G$  tel que  $|f(x) - g(x)| \geq d_f(K)$  ; par conséquent  $\|f - g\|_G \geq d_f(K)$ , d'où  $d_f(G) = \inf_{g \in \mathcal{A}} \|f - g\|_G \geq d_f(K)$ , et finalement  $d_f(G) = d_f(K)$ . Nous avons donc montré que  $G \in \mathcal{F}$  ; en vertu du lemme de Zorn,  $\mathcal{F}$  possède donc un élément minimal, soit  $E$ . Nous allons maintenant montrer que  $E$  est  $\mathcal{A}$ -antisymétrique.

▷ Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $h' \in \mathcal{A}$  est réelle et non constante sur  $E$ . Alors la fonction

$$h = \left( h' - \min_{x \in E} h'(x) \mathbf{1} \right) / \left( \max_{x \in E} h' - \min_{x \in E} h'(x) \right)$$

vérifie  $\min_{x \in E} h(x) = 0$ ,  $\max_{x \in E} h = 1$  et appartient à  $\mathcal{A}$ , puisque  $\mathcal{A}$  est une algèbre unitaire. Posons

$$E_1 = \{x \in E \mid 0 \leq h(x) \leq 2/3\} \text{ et } E_2 = \{x \in E \mid 1/3 \leq h(x) \leq 1\},$$

on aura  $E = E_1 \cup E_2$ . Les  $E_i$  ne sont pas vides, sont inclus dans  $E$ , et par conséquent  $\exists g_i \in \mathcal{A}$  tels que  $\|f - g_i\|_{E_i} < d_f(K)$ , en vertu de la propriété de minimalité de  $E$ . Posons alors

$$h_n = (1 - h^n)^{2^n} \text{ et } k_n = h_n g_1 + (1 - h_n) g_2 \in \mathcal{A}.$$

Nous allons montrer que  $\|f - k_n\|_E < d_f(K)$  pour  $n$  assez grand, ce qui constitue une contradiction.

▷ Tout d'abord, pour  $x \in E_1 \cap E_2$ , on a déjà

$$|f(x) - k_n(x)| \leq h_n(x) \|f - g_1\|_{E_1 \cap E_2} + (1 - h_n(x)) \|f - g_2\|_{E_1 \cap E_2} < d_f(K).$$

▷ Mais de plus la fonction  $(1 - y)^{2^\ell}$  est convexe, et par conséquent  $\forall y_0, (1 - y)^{2^\ell} \geq (1 - y_0)^{2^\ell} - 2^\ell y (1 - y_0)^{2^\ell - 1}$ , et en particulier pour  $y_0 = 0$ ,  $(1 - y)^{2^\ell} \geq 1 - 2^\ell y$ . Par conséquent pour  $x \in E_1 \setminus E_2 = \{x \in E \mid 0 \leq h(x) \leq 1/3\}$ ,  $h_n(x) \geq 1 - 2^n h^n(x) \geq 1 - (2/3)^n$ .

▷ Enfin pour  $0 < y < 1$ , on a  $0 < (1 - y)/(1 + y) < 1$ , et par conséquent  $(1 - y)^{2^\ell} < (1 + y)^{-2^\ell}$ , or par convexité  $(1 + y)^{2^\ell} \geq 1 + 2^\ell y \geq 2^\ell y$ , soit par conséquent  $(1 - y)^{2^\ell} < 1/2^\ell y$ . Il en résulte que pour  $x \in E_2 \setminus E_1 = \{x \in E \mid 2/3 \leq h(x) \leq 1\}$ , on a  $h_n(x) \leq 1/2^n h^n \leq (3/4)^n$ .

▷ On constate donc que  $k_n$  tend uniformément vers  $g_1$  sur  $E_1 \setminus E_2$  et vers  $g_2$  sur  $E_2 \setminus E_1$ , avec  $\|f - g_i\|_{E_i} < d_f(K)$ . La conclusion en découle

□

## 4.2 Le théorème de Stone

**Lemme 4.5** *Si  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre auto-adjointe de  $\mathcal{C}(K)$  qui sépare les points, ses seuls sous-ensembles antisymétriques sont réduits à un point.*

DÉMONSTRATION. Soit donc  $E \subset \mathcal{A}$ , antisymétrique. Supposons  $\exists x \neq y \in E$ , alors  $\exists h \in \mathcal{A}$  tel que  $h(x) \neq h(y)$ , et il en sera de même d'au moins l'une des deux fonctions  $\Re h = (h + \bar{h})/2$  ou  $\Im h = (h - \bar{h})/2i$ . Mais elles sont à valeurs réelles, et par conséquent constantes sur  $E$ , ce qui constitue une contradiction.

□



**Théorème 4.6 (Stone)** *Si  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre fermée auto-adjointe unitaire de  $\mathcal{C}(K)$  qui sépare les points, alors  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $f \in \mathcal{C}(K)$ , le théorème de Machado montre qu'il existe  $E$ , sous-ensemble fermé  $\mathcal{A}$ -antisymétrique de  $K$  vérifiant  $d_f(E) = d_f(K)$ . Mais nous savons par ailleurs qu'un tel ensemble est réduit à un point, soit  $\{e\}$  ; choisissons alors  $g = f(e)\mathbf{1}$ , on aura  $d_f(K) = d_f(E) \leq \|f - g\|_E = 0$  ; c'est dire que  $\inf_{g \in \mathcal{A}} \|f - g\|_{\mathcal{C}(K)} = 0$ , et comme  $\mathcal{A}$  est fermé dans  $\mathcal{C}(K)$ , il en résulte que  $f \in \mathcal{A}$ .

□

Comme le fait d'être une algèbre auto-adjointe unitaire séparant les points se conserve par passage à l'adhérence, il en résulte le

**Corollaire 4.7** *Une sous-algèbre auto-adjointe unitaire de  $\mathcal{C}(K)$  qui sépare les points, est dense dans  $\mathcal{C}(K)$ .*



Bien entendu dans le cas de fonctions à valeurs réelles, la condition pour  $\mathcal{A}$  d'être auto-adjointe disparaît, par contre *elle est nécessaire pour des fonctions à valeurs complexes.*



# Chapitre 5

## Les théorèmes de Hahn-Banach

Dans le cas des espaces de Hilbert, le produit scalaire nous permet de construire aisément des formes linéaires continues et, de façon surprenante le théorème de représentation de Riesz, nous assure que ce sont les seules. Dans le cas d'un espace de Banach  $X$ , la question est plus difficile, et sans même tenter de les construire toutes, on peut se demander si en l'absence de produit scalaire, il existe des formes linéaires continues! Si on choisit un vecteur  $x_0 \in X$ , et qu'on considère le sous-espace  $[x_0]$  de dimension 1 qu'il engendre, la forme linéaire  $y = \alpha x_0 \rightarrow \alpha$  est continue sur  $[x_0]$ , puisque  $|\alpha| = \|y\| / \|x_0\|$ ; une façon d'aborder la question consiste donc à tenter de prolonger une telle application à  $X$  tout entier en préservant la continuité; c'est là l'objet du théorème de Hahn-Banach.


Les résultats qui suivent sont valables pour des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ , et certains d'entre eux également pour des espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$ . Dans les énoncés on a noté  $\mathbb{K}$  le corps de base quand il pouvait être indifféremment pris égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 5.1 Formes analytiques

**Définition 5.1** On appelle fonction sous-linéaire sur un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ , toute application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$(i) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

**Théorème 5.2 (Hahn-Banach, cas réel)** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $f$  une forme linéaire sur  $F$ , majorée par une fonction  $p$  sous-linéaire sur  $E$ . Alors il existe une forme linéaire  $g$  sur  $E$ , majorée par  $p$  qui prolonge  $f$ . 

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}$  des couples  $(h, H)$ , où  $H$  est un sous-espace de  $E$  contenant  $F$ , et  $h$  une forme linéaire sur  $H$  majorée par  $p$  prolongeant  $f$ . Nous noterons  $(h, H) \leq (h', H')$

si  $H \subset H'$  et  $h'_{|H} = h$ , il s'agit là d'une relation d'ordre. Il est clair que  $\mathcal{P}$  n'est pas vide, et qu'il est inductivement ordonné, car si  $\mathcal{H}$  est un sous-ensemble totalement ordonné de  $\mathcal{P}$ , formé des couples  $(h_i, H_i)$ ,  $i \in I$ , alors en notant  $H = \cup_{i \in I} H_i$  et en définissant  $h$  sur  $H$  par  $h(x) = h_i(x)$ ,  $\forall x \in H_i$ , on constate que  $(h, H) \in \mathcal{P}$  est un majorant de  $\mathcal{H}$ . Selon le lemme de Zorn,  $\mathcal{P}$  possède alors un élément maximal, soit  $(g, G)$ ; nous montrerons que  $G = E$ .

▷ Supposons le contraire, et choisissons  $a \notin G$  dans  $E$ . Remarquons que  $\forall x, y \in G$ , on a

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - a) + p(y + a),$$

et par conséquent

$$g(x) - p(x - a) \leq p(y + a) - g(y), \quad \forall x, y \in G,$$

d'où

$$\sup_{x \in G} (g(x) - p(x - a)) \leq \inf_{y \in G} (p(y + a) - g(y)). \quad (5.1)$$

Notons alors  $G'$  l'espace  $[G, a]$  engendré par  $G$  et  $a$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $x \in G$ , on pose

$$g'(x + ta) = g(x) + \lambda t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui définit une forme linéaire sur  $G'$ . Nous allons montrer qu'un choix judicieux de  $\lambda$  permet de prouver que  $g'(x + ta) \leq p(x + ta)$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $(g, G)$  est maximal. Selon (5.1) on peut choisir  $\lambda$  vérifiant

$$g(y) - p(y - a) \leq \lambda \leq p(y + a) - g(y), \quad \forall y \in G, \quad (5.2)$$

Si  $t \neq 0$  on note alors  $y = x/|t|$ , et on aura d'après (5.2)

$$\begin{aligned} g'(x + ta) &= t(g(y) + \lambda) \leq tp(y + a) = p(x + ta) \text{ pour } t > 0 \\ g'(x + ta) &= -t(g(y) - \lambda) \leq -tp(y - a) = p(x + ta) \text{ pour } t < 0. \end{aligned}$$

□

**Définition 5.3** On appelle *semi-norme* sur un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , toute application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

- (i)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
- (ii)  $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$



**Théorème 5.4 (Hahn-Banach, cas complexe)** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $f$  une forme linéaire sur  $F$ , dont le module est majoré sur  $E$  par une semi-norme  $p$ . Alors il existe une forme linéaire  $g$  sur  $E$ , majorée par  $p$ , qui prolonge  $f$ .

**DÉMONSTRATION.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , ce résultat est une conséquence évidente du théorème 5.2. Nous traiterons donc le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

▷ On aura  $f(x) = f_1'(x) + if_2(x)$ , où  $f_1' = \Re f$  et  $f_2 = \Im f$  sont des formes linéaires sur  $F$  considéré comme un espace vectoriel réel. Elles vérifient de plus  $f_2(x) = -f_1'(ix)$ , en effet

$$f_1'(ix) + if_2(ix) = f(ix) = if(x) = i(f_1'(x) + if_2(x)) = -f_2(x) + if_1'(x). \quad (5.3)$$

La forme linéaire  $f_1'$  étant majorée par  $p$ , d'après le théorème précédent  $\exists g_1$ , forme linéaire sur  $E$  considéré comme un espace vectoriel réel prolongeant  $f_1'$  et majorée par  $p$ .

▷ Posons alors  $g(y) = g_1(y) - ig_1(iy)$ , c'est une forme linéaire sur  $E$  considéré comme un espace vectoriel complexe, puisque

$$\begin{aligned} g(\lambda y) &= g((\lambda_1 + i\lambda_2)y) = g_1((\lambda_1 + i\lambda_2)y) - ig_1((- \lambda_2 + i\lambda_1)y) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)g_1(y) + (\lambda_2 - i\lambda_1)g_1(iy) = (\lambda_1 + i\lambda_2)g(y). \end{aligned}$$

De plus  $g$  prolonge  $f$ , puisque pour  $x \in F$ , on a  $g(x) = f_1'(x) - if_1'(ix) = f_1'(x) + if_2(x) = f(x)$ . Enfin, on peut écrire  $g(y) = |g(y)|e^{i\theta}$  et par conséquent

$$|g(y)| = e^{-i\theta}g(y) = g(e^{-i\theta}y) = \Re g(e^{-i\theta}y) = g_1(e^{-i\theta}y) \leq p(e^{-i\theta}y) = p(y). \quad (5.4)$$

□

### 5.1.1 Conséquences topologiques

#### Corollaire 5.5

(i) Si  $M$  est un sous-espace de l'espace vectoriel normé  $X$  sur  $\mathbb{K}$ , si  $g$  est une forme linéaire continue sur  $M$ , alors il existe  $f$  continue sur  $X$ , qui prolonge  $g$  et vérifie



$$\sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\| = \|g\| = \sup_{x \in M, x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|}.$$

(ii) Si  $X$  est un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ , et  $a \in X$ ,  $a \neq 0$ , alors il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $E$  qui vérifie

$$\|f\| = 1 \text{ et } f(a) = \|a\|.$$

En particulier, si  $f(a) = 0$  pour toute forme linéaire continue  $f$  sur  $E$ , alors  $a = 0$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $p$  la semi-norme définie sur  $X$  par  $p(x) = \|g\| \|x\|$ , elle majore  $|g|$  sur  $M$ , et par conséquent il existe  $f$  linéaire sur  $X$  qui prolonge  $g$ . et vérifie  $|f(x)| \leq p(x) = \|g\| \|x\| \forall x \in X$ . Il en résulte que  $\|f\| \leq \|g\|$ , comme en tout état de cause on a  $\|f\| \geq \|g\|$ , la conclusion en découle.

▷ Notons  $M$  le sous-espace de dimension 1 engendré par  $a$ , et posons  $g(\lambda a) = \lambda \|a\|$ , comme  $g$  est de norme 1, la conclusion résulte de l'item précédent.

□



Plus généralement, si  $X$  est un espace vectoriel topologique localement convexe,  $M$  un sous-espace vectoriel de  $X$ , et  $g$  une forme linéaire continue sur  $M$ , alors il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $X$  qui prolonge  $g$ .

Notons maintenant ce résultat quelque peu surprenant :

**Théorème 5.6** *Si  $X$  est un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ , alors son dual  $X'$  est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION. Si  $f_n$  est une suite de Cauchy dans  $X'$ , c'est-à-dire vérifiant  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n > N \implies \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ , ou de façon équivalente

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|, \forall x \in X, \quad (5.5)$$

alors  $f_n(x)$  est également une suite de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers  $f(x)$ . La fonction  $f$  ainsi définie est linéaire et bornée, puisque, pour  $m \rightarrow \infty$  l'inégalité (5.5) implique  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \|x\|$ , d'où

$$|f(x)| \leq \varepsilon \|x\| + |f_n(x)| \leq (\varepsilon + \|f_n\|) \|x\|.$$

Nous avons donc montré que  $f \in X'$ . □

Le théorème de Hahn-Banach conduit alors à une intéressante relation de dualité :

**Corollaire 5.7** *Si  $X$  est un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ , alors*



$$\|x\| = \max_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

DÉMONSTRATION. On a  $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ , et par conséquent  $\|x\| \geq \sup_{f \in X', f \neq 0} |f(x)| / \|f\|$ . Mais nous savons que  $\forall x \in X, \exists f \in X'$  telle que  $\|f\| = 1$  et  $f(x) = \|x\|$ , la conclusion en découle. □

## 5.2 Formes géométriques

### Définition 5.8

(i) Si  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , on appelle *hyperplan linéaire* un sous-espace de codimension 1, c'est-à-dire un sous-espace dont un (tout !) supplémentaire algébrique est de dimension 1.

(ii) Si  $H$  est un hyperplan linéaire et  $a \in E$ ,  $a + H = \{x \in E \mid x = a + h, h \in H\}$  est appelé *hyperplan affine*.

Les hyperplans affines découlent de la résolution d'équations linéaires

**Proposition 5.9** *L'application  $\mathcal{H} : (f, \alpha) \rightarrow \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$  où  $(f, \alpha) \in (E^* \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}$ , définit une surjection dans l'ensemble des hyperplans affines de  $E$ . Pour que  $\mathcal{H}(f, \alpha) = \mathcal{H}(g, \beta)$  il faut et il suffit que  $\beta f = \alpha g$  si  $\alpha\beta \neq 0$ , ou  $f$  et  $g$  soient proportionnels, si  $\alpha = \beta = 0$ . On dit que  $f(x) = \alpha$  est l'équation de l'hyperplan. (l'une des, en fait)*

DÉMONSTRATION.

▷ Tout d'abord, comme  $f$  est linéaire,  $\mathcal{H}(f, 0)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et comme de plus  $f \neq 0$ ,  $\exists y \in E$  tel que  $f(y) = 1$ . Si  $z \in E$ , et si on pose  $x = z - f(z)y$ , on aura alors  $f(x) = 0$ , soit  $x \in \mathcal{H}(f, 0)$ , et par conséquent que  $E = \mathcal{H}(f, 0) \oplus \mathbb{K}y$ , soit  $\mathcal{H}(f, 0)$  est un hyperplan..On aura de plus  $\mathcal{H}(f, \alpha) = \mathcal{H}(f, 0) + \alpha y$ .

▷ Réciproquement, si  $a + H$  est un hyperplan affine dans  $E$ , choisissons  $y \in E \setminus H$ , et définissons la forme linéaire  $f$  sur  $E = H \oplus \mathbb{K}y$  de la façon suivante :

$$f(z) = 0, \text{ si } z \in H, \text{ et } f(y) = 1.$$

Il est clair que  $H = \mathcal{H}(f, 0)$ , et par conséquent  $a + H = \mathcal{H}(f, \alpha)$  où on a on posé  $\alpha = f(a)$ .

▷ Soient maintenant  $(f, \alpha)$  et  $(g, \beta) \in (E^* \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}$ , si  $\beta \neq 0$ , on aura  $\mathcal{H}(f, \alpha) = \mathcal{H}(\beta f, \alpha\beta)$ , et de même si  $\alpha \neq 0$ , on aura  $\mathcal{H}(g, \beta) = \mathcal{H}(\alpha g, \alpha\beta)$ . Il en résulte que  $\mathcal{H}(f, \alpha) = \mathcal{H}(g, \beta)$  dès que  $\alpha g = \beta f$ ,  $\alpha\beta \neq 0$ . Enfin, il est clair que si  $f = \lambda g$ , où  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathcal{H}(f, 0) = \mathcal{H}(g, 0)$ .

▷ Réciproquement, supposons que  $\mathcal{H}(f, \alpha) = \mathcal{H}(g, \beta) = a + H$ , on aura  $f|_H = 0 = g|_H$  ainsi que  $f(a) = \alpha$  et  $g(a) = \beta$ . Tout point  $z \in E$  est de la forme  $z = \lambda a + h$ , où  $h \in H$ , et par conséquent  $f(z) = \lambda f(a) = \lambda\alpha$  et  $g(z) = \lambda g(a) = \lambda\beta$ , il en résulte que  $\beta f = \alpha g$ .

□

**Définition 5.10** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ , on dit que  $x \in A$  est point interne de  $A$  si  $\forall y \in E, \exists \varepsilon > 0$ , tel que  $\forall |\delta| < \varepsilon, x + \delta y \in A$ .*

**Définition 5.11** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $A$  un sous-ensemble convexe de  $E$  dont  $0$  est point interne, on appelle jauge de  $A$  la fonction  $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $p(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda A\}$ .*

Notons que

$$0 \leq p(x) < +\infty \quad \forall x \in E.$$

**Proposition 5.12** *Si  $0$  est point interne de  $A$ , convexe, et si  $p(x) < 1$ , alors  $x$  est point interne de  $A$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, il existe alors  $y \in A$  et  $\lambda < 1$  tels que  $x = \lambda y$ , comme de plus  $0$  est point interne,  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $\mu z \in A$  dès que  $|\mu| < \varepsilon$ . Notons alors  $\delta = (1 - \lambda)\mu$ , par convexité,  $x + \delta z = \lambda y + (1 - \lambda)\mu z \in A$ .

□

**Proposition 5.13** *La jauge d'un sous-ensemble convexe de  $E$  dont 0 est point interne, est une fonction sous-linéaire sur  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que  $\forall a > 0, p(ax) = ap(x)$ , et choisissons  $x$  et  $y \in E$ . Si  $\lambda > p(x)$  et  $\mu > p(y)$ , alors  $x/\lambda$  et  $y/\mu \in A$ , et d'après la convexité, il en est de même de  $(x+y)/(\lambda+\mu)$ ; c'est dire que  $x+y \in (\lambda+\mu)A$ , et donc que  $p(x+y) \leq \lambda+\mu$ . Il en résulte que  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ . □

**Définition 5.14** *Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ ,*

(i) *on dit que  $A$  et  $B$  sont séparés par l'hyperplan affine  $H$  d'équation  $f(x) = \alpha$  si  $A$  et  $B$  sont chacun inclus dans l'un des deux demi-espaces de  $E$  :*

$$\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} \text{ et } \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$$

(ii) *on dit que  $A$  et  $B$  sont strictement séparés par l'hyperplan affine  $H$  d'équation  $f(x) = \alpha$  si  $A$  et  $B$  sont chacun inclus dans l'un des deux demi-espaces de  $E$  :*

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \text{ et } \{x \in E \mid f(x) < \alpha\}.$$

**Théorème 5.15 (Hahn-Banach, cas réel)** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $M$  et  $N$  deux sous-ensembles convexes de  $E$  vérifiant*



- (i)  *$M$  possède un point interne*
- (ii)  *$N$  ne contient aucun point interne de  $M$*

*alors il existe un hyperplan  $H$  qui sépare  $M$  et  $N$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Par translation, on peut toujours se ramener au cas où 0 est point interne de  $M$ . Considérons l'ensemble  $M - N$ , il est également convexe. Soit alors  $z \in E$ , comme 0 est point interne de  $M$ , pour  $\varepsilon$  assez petit et  $|\delta| < \varepsilon$ , on aura  $\delta z \in M$ , et si  $x_0 \in N$ ,  $\delta z - x_0 \in M - N$ . Il en résulte que  $-x_0$  est point interne de  $M - N$  dès que  $x_0 \in N$ , ou encore que 0 est point interne de  $K = x_0 + (M - N)$ .

▷ Montrons maintenant que  $x_0$  n'est pas point interne de  $K$ . S'il en était autrement, en effet, 0 serait point interne de  $M - N$ , et  $\forall z \in E$  on aurait  $az \in M - N$ , pour  $|a|$  suffisamment petit, soit encore  $ay = m - n$ , où  $m \in M$  et  $n \in N$ . On aurait donc

$$(ay + n)/(a + 1) = m/(a + 1), \tag{5.6}$$

et par conséquent  $(ay + n)/(a + 1) \in N$  par convexité si on choisit  $z \in N$ . Par ailleurs, comme 0 est un point interne de  $M$ , si  $z \in E$ ,  $\delta z \in M$  pour  $|\delta| < \varepsilon$ , et si on choisit  $a > 0$ , par convexité  $m/(a + 1) + \delta za/(a + 1) \in M$ ; il en résulte que  $m/(a + 1)$  est point interne de  $M$ , ce qui contredit (5.6).

▷ Notons  $p$  la jauge de  $K$ , on a  $p(x) \leq 1, \forall x \in K$ , et comme  $x_0$  n'est pas point interne de  $K$ ,  $p(x_0) \geq 1$ . Sur le sous-espace  $\mathbb{R}x_0$ , la forme linéaire  $f$  définie par  $f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$  vérifie  $f(x_0) = p(x_0)$  ainsi que, pour  $\lambda \geq 0$ ,  $f(\lambda x_0) = p(\lambda x_0)$ , et pour  $\lambda < 0$ ,

$$f(\lambda x_0) = -|\lambda|p(x_0) < 0 \leq p(\lambda x_0) ;$$

il en résulte que sur  $\mathbb{R}x_0$ ,  $f(x) \leq p(x)$ .

▷ On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach sous sa forme analytique, et prolonger  $f$  en une forme linéaire  $F$  sur  $E$  tout entier, avec  $F(x) \leq p(x), \forall x \in E$ . Pour  $m \in M$  et  $n \in N$ , on aura alors

$$F(x_0) + F(m - n) = F(x_0 + m - n) \leq p(x_0 + m - n) \leq 1,$$

et comme  $F(x_0) = f(x_0) = p(x_0) \geq 1$ , on aura  $F(m) - F(n) = F(m - n) \leq 0$ . Il en résulte que  $\sup_{m \in M} F(m) \leq \inf_{n \in N} F(n)$ , et par conséquent pour  $\alpha \in [\sup_{m \in M} F(m), \inf_{n \in N} F(n)]$ , l'hyperplan d'équation  $F(x) = \alpha$  sépare  $M$  et  $N$ .

□

**Lemme 5.16** *Si  $K$  est un sous-ensemble convexe de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ , dont tous les points sont internes, si  $f$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$  vérifiant  $f(x) \leq c \forall x \in K$ , alors on a en fait  $f(x) < c \forall x \in K$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons en effet qu'il existe  $x_0 \in K$  tel que  $f(x_0) = c$ , comme  $f$  n'est pas identiquement nulle, il existe  $z$  tel que  $f(z) \neq c$ . Posons  $y = \delta z + (1 - \delta)x_0 = x_0 + \delta(z - x_0)$ , pour  $|\delta|$  assez petit, comme  $x_0$  est un point interne, on aura  $y \in K$ , et  $f(y) = c + \delta(f(z) - c) > c$ , en choisissant judicieusement le signe de  $\delta$ , ce qui constitue une contradiction.

□

**Proposition 5.17** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $K$  un sous-ensemble convexe de  $E$  dont tous les points sont internes, et  $D$  une variété affine qui ne rencontre pas  $K$ , alors il existe un hyperplan affine qui contient  $D$  et ne rencontre pas  $K$ .*



DÉMONSTRATION.

▷ Par translation, on peut se ramener au cas où  $0 \in D$ , on a vu que  $K$  et  $D$  sont séparés par un hyperplan d'équation  $f(x) = c$ , que nous choisirons par exemple telle que  $f(x) \leq c \forall x \in K$  et  $f(x) \geq c \forall x \in D$ . Comme  $0 \in D$ , on a nécessairement  $c \leq 0$ , et d'après le lemme qui précède, il en résulte que  $f(x) < c \forall x \in K$ .

▷ Supposons qu'il existe  $x \in D$  tel que  $f(x) \neq 0$ , par linéarité,  $\lambda x \in D$  et on peut trouver  $\lambda$  tel que  $f(\lambda x) < c$ , ce qui constitue une contradiction. Il en résulte que  $D \subset H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ , hyperplan qui ne rencontre pas  $K$ .

□

Il est facile d'en déduire un résultat valable dans le cas d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  :

**Théorème 5.18 (Hahn-Banach, cas complexe)** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $K$  un sous-ensemble convexe de  $E$  dont tous les points sont internes, et  $D$  une variété affine qui ne rencontre pas  $K$ , alors il existe un hyperplan affine qui contient  $D$  et ne rencontre pas  $K$ . ♥

DÉMONSTRATION. On se ramène encore par translation au cas où  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'espace  $E$  peut également être considéré comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , le sous-espace  $D$  comme sous-espace réel, et comme de plus un point interne au sens complexe l'est également au sens réel, on peut appliquer la proposition 5.17, qui nous prouve l'existence du sous-espace vectoriel réel  $H$  contenant  $D$  et ne rencontrant pas  $K$ . Notons maintenant que  $D \subset iH$ , et par conséquent  $D \subset G = H \cap iH$ . Comme  $G = iG$ ,  $G$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , qui ne rencontre pas  $K$ . Enfin la codimension de  $G$  en tant que espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  est nécessairement égale à 1 ou 2, et par conséquent égale à 1 en tant que espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . □

### 5.2.1 Conséquences topologiques

**Lemme 5.19** Soit  $A \subset X$  espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ , alors

- (i) tout point de  $\overset{\circ}{A}$  est interne
- (ii) Si  $A$  est convexe d'intérieur non vide et  $b$  est interne à  $A$ , alors  $b \in \overset{\circ}{A}$

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, si  $a \in \overset{\circ}{A}$ , alors il existe une boule  $B$  centrée en  $a$  incluse dans  $X$ , soit  $r$  son rayon, si  $z \in X$ , on aura  $a + \delta z \in B$  dès que  $|\delta| < r / \|y\|$

▷ Soit  $a \in \overset{\circ}{A}$ , et  $b$  interne à  $A$ , pour  $\delta$  de module suffisamment petit, comme  $b$  est un point interne à  $A$ , on aura  $c = b + \delta(a - b) = \delta a + (1 - \delta)b \in A$ . Si on choisit  $\delta < 0$ , alors  $b$  est l'homothétisme de  $a$  dans l'homothétisme de centre  $c$  et de rapport  $k = -\delta / (1 - \delta)$ , où  $0 < k < 1$ . Si  $B$  est une boule de centre  $a$  incluse dans  $A$ , et  $B'$  son homothétisme, c'est une boule de centre  $b$ , incluse dans  $A$ , en vertu de la convexité. Il en résulte que  $b \in \overset{\circ}{A}$ . □

### Proposition 5.20

- (i) Un hyperplan dans un espace vectoriel  $X$  normé sur  $\mathbb{K}$ , est fermé ou dense
- (ii) Soit  $f$  une forme linéaire non nulle sur  $X$ , pour que  $f$  soit continue, il faut et il suffit que l'hyperplan associé  $\mathcal{N}(f)$  soit fermé.

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, l'adhérence  $\overline{H}$  d'un sous-espace vectoriel  $H$  est encore un sous-espace vectoriel, et comme  $H$  est de codimension 1,  $\overline{H} \supset H$  est de codimension 1 ou 0, soit  $\overline{H} = H$  ou  $\overline{H} = X$ .



▷ Il est clair que  $\mathcal{N}(f)$  est fermé si  $f$  est continue. Réciproquement, nous démontrerons que  $f$  est continue en 0 dès que  $\mathcal{N}(f)$  est fermé. Soit  $x_0 \in X$  tel que  $f(x_0) = 1$ , notons  $M$  l'hyperplan affine  $x_0 + H = \{x \mid f(x) = 1\}$ , il est également fermé et son complémentaire étant un voisinage de 0 contient une boule  $B$  centrée en 0.

▷ On aura nécessairement  $|f(x)| < 1$  pour  $x \in B$ , en effet si  $y \in B$ , avec  $|f(y)| \geq 1$ , alors  $z = y/f(y) \in B$ , mais par ailleurs  $f(z) = 1$ , d'où  $z \in M$ , ce qui constitue une contradiction. Par homothétie, il en résulte que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|f(x)| < \varepsilon$  dès que  $x \in \varepsilon B$ , soit la continuité de  $f$  en 0.

□

**Théorème 5.21** *Si  $X$  est un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ ,  $\Omega$  un ouvert convexe non vide de  $X$  et  $F$  un sous-espace affine de  $X$  tel que  $F \cap \Omega = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan fermé  $H$  tel que  $F \subset H$  et  $H \cap \Omega = \emptyset$ .*



DÉMONSTRATION. L'existence de  $H$  est une conséquence du théorème 5.18, et le fait qu'il soit fermé découle de ce qu'il ne rencontre pas  $\Omega$ .

□

**Corollaire 5.22** *Soit  $X$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ , et  $F$  un sous-espace de  $X$ . Pour que  $F$  soit dense dans  $X$ , il faut et il suffit que toute forme linéaire continue qui s'annule sur  $F$  s'annule sur  $E$  tout entier.*



DÉMONSTRATION. Supposons que  $F$  ne soit pas dense, alors  $\exists a \notin \overline{F}$ . Notons  $\Omega$  une boule centrée en  $a$  qui ne rencontre pas le sous-espace  $\overline{F}$ , alors il existe alors un hyperplan fermé  $H$  tel que  $\overline{F} \subset H$  et  $H \cap \Omega = \emptyset$ ; c'est dire qu'il existe une forme linéaire continue  $f$  non nulle sur  $X$ , de noyau  $H$ .

□

**Théorème 5.23** *Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles convexes non vides dans un espace vectoriel  $X$  normé sur  $\mathbb{R}$ . Si on suppose  $\overset{\circ}{A}$  non vide et  $B \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan fermé  $H$  qui sépare  $A$  et  $B$ .*



DÉMONSTRATION. Selon le lemme 5.19,  $\overset{\circ}{A}$  constitue l'ensemble des points internes de  $A$ , et le résultat découle alors du théorème 5.15, et du fait que  $H$  n'est pas dense.

□

**Théorème 5.24** *Soient  $A$  et  $B$  deux ouverts convexes non vides dans un espace vectoriel  $X$  normé sur  $\mathbb{R}$ . Si on suppose que  $B \cap A = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan fermé  $H$  qui sépare strictement  $A$  et  $B$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du théorème 5.23 et du lemme 5.16.

□

Les théorèmes qui précèdent restent valables dans tout espace vectoriel topologique, ceux qui suivent par contre ne le sont que dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes.

**Définition 5.25** Soit  $A \subset X$ , espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On dit que  $W$  est un voisinage uniforme de  $A$  si  $W = A + V$ , où  $V$  est un voisinage de 0.

**Proposition 5.26** Si  $A \subset X$ , espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$

- (i)  $A$  est l'intersection de ses voisinages
- (ii)  $\overline{A}$  est l'intersection des voisinages uniformes de  $A$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $\mathcal{W}$  l'ensemble des voisinages de  $A$ . Soit  $x \notin A$ , alors  $\{x\}^c$  est un ouvert contenant  $A$ , c'est donc un élément de  $\mathcal{W}$  ne contenant pas  $x$ . Il en résulte que  $\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \subset A$ , et comme l'inclusion opposée est triviale que  $\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W = A$ .

▷ Notons  $\mathcal{V}$  l'ensemble des voisinages uniformes de  $A$ . Soit  $x \notin \overline{A}$ , alors il existe un voisinage de 0,  $V$  tel que  $(x + V) \cap A = \emptyset$ ; c'est aussi dire que  $x \notin A + V$ , et par conséquent  $\bigcap_{W \in \mathcal{V}} W \subset A$ .

▷ Réciproquement, si  $x \in \overline{A}$ , pour tout voisinage  $V$  de 0,  $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ , soit  $x \in A + V$ , d'où il résulte que  $A \subset \bigcap_{W \in \mathcal{V}} W$ .

□

**Proposition 5.27** Si  $K$  est compact, les voisinages uniformes de  $K$  forment une base de voisinages de  $A$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $W$  un voisinage de  $K$ , alors  $\forall a \in K$ ,  $W - a$  est un voisinage de 0; il contient donc une boule centrée à l'origine, soit  $B_r$ . On aura  $K \subset \bigcup_{a \in A} a + \overset{\circ}{B}_{r/2}$ , et comme  $K$  est compact,  $\exists a_i \in K$ ,  $i = 1, n$  tels que  $K \subset \bigcup_{i=1, n} a_i + \overset{\circ}{B}_{r_i/2}$ . Posons alors  $V = \bigcap_{i=1, n} \overset{\circ}{B}_{r_i/2}$ , nous allons démontrer que  $K + V \subset W$ .

▷ Soit donc  $x \in K + V$ ,  $\exists y \in K$  tel que  $x \in y + V$ , mais  $\exists i$  tel que  $y \in a_i + \overset{\circ}{B}_{r_i/2}$ , d'où  $x \in a_i + \overset{\circ}{B}_{r_i/2} + \overset{\circ}{B}_{r_i/2} \subset W$ .

□



**Théorème 5.28** Soient  $A$  et  $K$  deux sous-ensembles convexes disjoints de l'espace vectoriel normé  $X$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $A$  étant fermé et  $K$  compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement  $A$  et  $K$ .

DÉMONSTRATION.

▷ L'ensemble  $A^c$  est un voisinage de  $K$ , et par conséquent, d'après la proposition 5.27, il existe une boule  $B_r$  centrée à l'origine telle que  $K + B_r \subset A^c$ .

▷ Montrons que  $(K + \overset{\circ}{B}_{r/2}) \cap (A + \overset{\circ}{B}_{r/2}) = \emptyset$ . Sinon en effet il existerait  $a \in A$  et  $b \in K$  et  $x$  tels que  $b - a = 2x$  et  $\|x\| < r/2$ , ce qui contredit l'inclusion  $K + B_r \subset A^c$ .

▷ Il ne reste plus qu'à constater que  $K + \overset{\circ}{B}_{r/2}$  et  $A + \overset{\circ}{B}_{r/2}$  sont des ouverts convexes disjoints qui peuvent par conséquent, d'après le théorème 5.24, être strictement séparés par un hyperplan fermé.

□

Un cas particulier important de ce théorème est le suivant :

**Corollaire 5.29** *Si  $A$  est convexe fermé dans l'espace vectoriel normé  $X$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $a \notin X$ , alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement  $a$  de  $A$ .*



**Corollaire 5.30** *Un convexe fermé  $A$  dans un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*



DÉMONSTRATION. D'une part  $A$  est contenu dans l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, et d'autre part si  $a \notin A$ , il peut être séparé strictement de  $A$  par un hyperplan fermé, selon le corollaire 5.29 et par conséquent  $a$  n'appartient pas au demi-espace fermé contenant  $A$  associé à cet hyperplan.

□

Il en résulte en particulier que dans un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  normé, l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble  $A$  est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

**Corollaire 5.31** *Un sous-espace fermé  $A$  strictement inclus dans l'espace vectoriel normé  $X$  sur  $\mathbb{K}$ , est l'intersection des hyperplans qui le contiennent.*



DÉMONSTRATION. Démontrons tout d'abord ce résultat dans le cas d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

▷ Notons  $B$  l'intersection des hyperplans fermés contenant  $A$ , on aura  $A \subset B$ . D'autre part si  $b \notin A$ ,  $\exists \overset{\circ}{B}_r(b)$  d'intersection vide avec  $A$ . Comme  $A$  et  $\overset{\circ}{B}_r(b)$  sont des convexes fermés d'intersection vide, selon le théorème 5.28, ils peuvent être séparés strictement par un hyperplan fermé  $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ , où  $f$  est linéaire continue sur  $X$ .

▷ Si  $\alpha$  est positif, on aura  $f(b) > \alpha$  et  $f(a) < \alpha \forall a \in A$ , puisque  $0 \in A$  ; mais comme  $A$  est un espace vectoriel,  $\forall \lambda$  on aura  $\alpha > f(\lambda a) = \lambda f(a)$ , ce qui est absurde si  $f(a) \neq 0$ . Il en résulte que  $A \subset \tilde{H} = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ , et comme  $f(b) > 0$ ,  $\tilde{H}$  ne contient pas  $b$ .

▷ De même qu'au théorème 5.18 on en déduit le résultat annoncé pour un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

□





# Chapitre 6

## Le théorème de Runge

**Théorème 6.1** Soient  $K$  compact dans  $\mathbb{C}$ , et  $\Omega$  un ouvert contenant  $K$ . Si  $E \subset \mathbb{C} \setminus K$  rencontre toutes les composantes connexes bornées de  $\mathbb{C} \setminus K$ , alors une fonction analytique dans  $\Omega$  peut être approchée uniformément sur  $K$  par une suite de fractions rationnelles dont les seuls pôles appartiennent à  $E$  (au nombre desquelles on comptera les polynômes).



DÉMONSTRATION. Notons  $R(K, E)$  l'adhérence dans  $\mathcal{C}(K)$  de l'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles appartiennent à  $E$ . En vertu du corollaire 5.22 du théorème de Hahn-Banach, il nous suffira de montrer que toute mesure de Radon sur  $K$  qui s'annule sur  $R(K, E)$ , s'annule également sur l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\Omega$ .

▷ Supposons donc que  $\mu$  est une mesure sur  $K$  nulle sur  $R(K, E)$ , et que  $g$  est analytique au voisinage de  $K$ . Si  $\mathcal{C}$  est un cycle dans  $\Omega \setminus K$  pour lequel tout point de  $K$  est d'indice 1 (voir le lemme 6.3), pour  $z \in K$ , on aura

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Par conséquent, comme d'après le lemme 6.2 ci-dessous,  $f(\zeta) = \int_K (z - \zeta)^{-1} d\mu(z)$  est intégrable, d'après le théorème de Fubini, on aura

$$\int_K g(z) d\mu(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g(\zeta) d\zeta \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (6.1)$$

▷ Considérons maintenant la fonction  $f$ , en vertu de l'hypothèse et de la formule (6.3), dans chaque composante connexe bornée  $U$  de  $\Omega \setminus K$ , il existe  $\zeta_U$  tel que,  $\forall n, f^{(n)}(\zeta_U) = 0$ . Il en résulte que  $f$  est nulle dans un voisinage de  $\zeta_U$ , et par conséquent que  $f$  est nulle sur  $U$ . Par ailleurs, d'après l'hypothèse et la formule (6.4),  $f$  est nulle au voisinage de l'infini, et par conséquent dans la composante connexe non bornée de  $\Omega \setminus K$ .

▷ De la formule (6.1) on déduit alors que  $\int_K g(z) d\mu(z) = 0$ , et la conclusion.

□

**Lemme 6.2** Si  $\mu$  est une mesure sur  $K$ , si  $\lambda$  est la mesure surfacique et  $z \in K$ , alors

(i) la fonction

$$f(\zeta) = \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \quad (6.2)$$

est intégrable relativement à  $\lambda$  sur tout disque  $B_R(0)$ ,

(ii)  $f$  est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus K$

(iii)  $f$  tend vers 0 à l'infini.

DÉMONSTRATION.

▷ On appliquera à cet effet le théorème de Fubini. Pour  $\rho$  assez grand, on aura

$$\int_{B_R(0)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} \leq \int_{B_\rho(z)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho dr d\theta = 2\pi\rho.$$

Il en résulte que

$$\int_K d|\mu|(z) \int_{B_R(0)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} \leq 2\pi\rho \|\mu\|,$$

et l'intégrabilité de  $f$  d'après les théorèmes de Tonelli et Fubini.

▷ Pour  $\xi \in \mathbb{C} \setminus K$ , par dérivation sous le signe somme, on aura

$$f'(\zeta) = \int_K \frac{d\mu(z)}{(z - \zeta)^2}.$$

▷ De même,

$$f^{(n)}(\zeta) = n! \int_K \frac{d\mu(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} \quad (6.3)$$

et, au voisinage de l'infini, le développement en série de Neumann nous montre que

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \int_K \frac{d\mu(z)}{1 - z/\zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_K \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\mu(z) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta^{-n-1} \int_K z^n d\mu(z), \quad (6.4)$$

d'où le résultat. □

**Lemme 6.3** Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}$  inclus dans l'ouvert  $\Omega$ , alors il existe un cycle  $\Gamma$  formé d'un nombre fini de segments de droite, inclus dans  $\Omega \setminus K$  tel que,  $\forall z \in K$ , pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)/2$ , et considérons une grille de maille  $\delta$ , par compacité de  $K$ , ce dernier ne coupe qu'un nombre fini  $Q_\ell$ ,  $\ell = 1, L$  des carrés qui la composent. Compte tenu du choix de  $\delta$ , on aura

$$K \subset Q = \bigcup_{\ell=1, L} Q_\ell \subset \Omega.$$

▷ Notons  $\gamma_n$ ,  $n = 1, N$  les segments formant le bord de  $Q$ , aucun des  $\gamma_n$  ne coupe  $K$ , car si tel était le cas, les deux carrés de la grille qui partagent  $\gamma_n$  couperaient  $K$  ce qui contredit le fait que  $\gamma_n \in \partial Q$ .

▷ Soit maintenant  $z \in \overset{\circ}{Q}_k$ , on aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1, N} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\ell=1, L} \int_{\partial Q_\ell} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Comme un point de  $K$  n'appartient pas à  $\partial Q$ , la formule précédente reste valable, par continuité pour un point quelconque  $z \in K$ .

□

**Corollaire 6.4** *Si  $K$  est compact et  $\mathbb{C} \setminus K$  connexe, alors toute fonction holomorphe au voisinage de  $K$  peut être uniformément approchée sur  $K$  par une suite de polynômes.*





## Deuxième partie

# Opérateurs linéaires et équations aux dérivées partielles



# Chapitre 7

## Formulations faibles

L'objectif que nous poursuivons consiste essentiellement à appliquer la théorie spectrale à l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous allons développer deux points de vue complémentaires à cet égard, le premier ressortit aux formulations variationnelles et le second aux opérateurs non bornés.

L'étude d'une équation aux dérivées partielles elliptique telle

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $\mathcal{O}$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\partial\mathcal{O}$  sa frontière, nécessite trois ingrédients : le théorème 7.2 qui nous garantit le caractère bien posé de certains problèmes variationnels abstraits, la formule de Green qui assure le passage d'une équation concrète du type (7.1) à un problème abstrait tel (7.3), enfin les espaces de Sobolev qui forment le cadre fonctionnel de cette analyse.

### 7.1 Le théorème de Lax-Milgram

**Définition 7.1** *La forme sesquilinéaire  $a$  définie sur l'espace de Hilbert  $V$  est dite coercive si il existe un nombre  $\alpha > 0$ , tel que*

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \quad (7.2)$$

**Théorème 7.2 (Lax-Milgram)** *Soient  $V$  un espace de Hilbert,  $a$  et  $\ell$  respectivement une forme sesquilinéaire coercive et une forme antilinéaire continues sur  $V$ , alors*

(i) *il existe une solution et une seule  $u$  dans  $V$  de l'équation*

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (7.3)$$

(ii) *l'application*

$$V' \xrightarrow{\mathcal{S}} V : \ell \mapsto u,$$



est un isomorphisme, et plus précisément vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}, \quad (7.4)$$

où  $\alpha$  est la constante d'ellipticité de  $a$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Résoudre (7.3) revient à démontrer l'existence et l'unicité de  $u$  tel que  $a(u, \cdot) = \ell$  dans  $V'$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{S}$  est bijective. Démontrer (7.4) revient à montrer que  $\mathcal{S}$  est continue. Nous étudierons l'application inverse :

$$V \longrightarrow V' : u \mapsto a(u, \cdot)$$

que nous montrerons être un isomorphisme.

▷ Soit  $u \in V$ , en vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe  $A_u$  unique dans  $V$ , tel que  $(A_u | \cdot) = a(u, \cdot)$ , l'application

$$V' \longrightarrow V : (A_u | \cdot) \mapsto A_u$$

étant une isométrie, puisque

$$\|(A_u | \cdot)\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|(A_u | v)|}{\|v\|} = \|A_u\|_V.$$

Il nous suffira donc de montrer que l'application

$$V \xrightarrow{A} V : u \mapsto A_u,$$

trivialement linéaire, est elle-même un isomorphisme. Désormais nous remplacerons la notation  $A_u$  par  $Au$ , plus usuelle.

▷ L'application  $A$  est continue, en vertu de l'inégalité

$$\|Au\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|(Au | v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} \leq \|a\| \|u\|,$$

où

$$\|a\| = \sup_{u, v \in V} \sup_{u, v \in V, u, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\| \|v\|}.$$

La coercivité de  $a$  implique de plus  $\alpha \|v\|^2 \leq |(Av | v)| \leq \|Av\| \|v\|$ , soit

$$\|v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Av\|, \quad \forall v \in V. \quad (7.5)$$

On a ainsi montré que  $A$  est injective.

▷ Montrons que son image  $\mathcal{R}(A)$  est fermée. Soit donc  $w_n \in \mathcal{R}(A)$ , qui converge, soit vers  $w$ , par hypothèse,  $\exists u_n$  tel que  $w_n = Au_n$ . Nous devons montrer que  $w \in \mathcal{R}(A)$ , c'est-à-dire

qu'il existe  $u$  tel que  $w = Au$ . La suite  $w_n$  étant convergente est de Cauchy, soit  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , tel que  $m, n > N \implies \|w_m - w_n\| \leq \varepsilon$ . Selon (7.5),

$$\|u_m - u_n\| \leq \frac{1}{\alpha} \|A(u_m - u_n)\| = \frac{1}{\alpha} \|w_m - w_n\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

ce qui prouve que  $u_n$  est de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers  $u$ . Comme  $A$  est continue, on aura

$$w = \lim w_n = \lim Au_n = Au.$$

▷ Un raisonnement par l'absurde permet ensuite de montrer que  $A$  est surjective. Supposons que  $\mathcal{R}(A) \subsetneq V$ , alors il existe  $u_0 \in V \setminus \mathcal{R}(A)$ , non nul.  $\mathcal{R}(A)$  étant fermé, selon le théorème de projection, on peut y projeter  $u_0$ . Soit  $v_0 \in \mathcal{R}(A)$  cette projection, et  $w_0 = u_0 - v_0$ ;  $w_0$  est non nul et orthogonal à  $\mathcal{R}(A)$ , il en résulte que

$$\alpha \|w_0\|^2 \leq |a(w_0, w_0)| = |(Aw_0 | w_0)| = 0,$$

ce qui conduit à une contradiction. L'application  $A$  est donc bijective, d'inverse  $A^{-1}$  continu, d'après (7.5) :

$$\|A^{-1}w\| \leq \frac{1}{\alpha} \|w\|, \quad \forall w \in V.$$

▷ La formule (7.4) enfin n'est qu'une autre façon d'écrire (7.5) :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|Au\|_V = \|a(u, \cdot)\|_{V'} = \|\ell\|_{V'}.$$

□

Notons que le théorème des homomorphismes de Banach **3.14** nous montre qu'une application linéaire continue bijective est d'inverse continu; nous n'avons pas eu matière à l'utiliser ici grâce à l'inégalité (7.5), mais dans des situations plus délicates, il nous sera d'un grand secours.

## 7.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev constituent une échelle de régularité bien adaptée aux formulations variationnelles. Leur étude constitue cependant un vaste domaine non dépourvu de difficultés techniques; en particulier la régularité du bord peut jouer un rôle déterminant pour la plupart des résultats: régularité, densité ou compacité. Nous nous contenterons de signaler sans démonstration quelques propriétés des espaces construits à partir de  $L^2$ , et nous choisirons les ouverts assez réguliers pour éviter les subtilités principales. Les références les plus classiques à cet égard sont Adams [?], Nečas [?], Lions et Magenes [?], Brézis. On notera  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est 'suffisamment régulier'. Cette expression volontairement imprécise permet de ranger dans la même catégorie des hypothèses techniques différentes, il suffit souvent de savoir qu'un ouvert dont le bord est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et présente d'éventuels sommets ou arêtes, mais pas de rebroussement fait partie de cette catégorie.

**Définition 7.3**

(i) Espaces d'indice entier : on pose

$$H^\ell(\mathcal{O}) = \{v \in L^2(\mathcal{O}) \mid \partial^\alpha v \in L^2(\mathcal{O}), \forall \alpha, |\alpha| \leq \ell\}, \quad (7.6)$$

où  $\ell$  est un entier positif. Cet espace est muni de la norme du graphe, soit

$$\|v\|_{H^\ell(\mathcal{O})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2. \quad (7.7)$$

(ii) Espaces d'indice fractionnaire : on note

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}, \quad (7.8)$$

où  $s$  est un réel positif et  $\hat{v}$  note la transformée de Fourier de  $v$ . Cet espace est muni de la norme naturelle :

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \left\| (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{v}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (7.9)$$

(iii) Dans le cas d'un ouvert, on pose

$$H^s(\mathcal{O}) = \{v \in L^2(\mathcal{O}) \mid \exists \tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^n), \tilde{v}|_{\mathcal{O}} = v\}. \quad (7.10)$$

On munit cet espace de la norme quotient :

$$\|v\|_{H^s(\mathcal{O})} = \inf_{\substack{\tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^n) \\ \tilde{v}|_{\mathcal{O}} = v}} \|\tilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (7.11)$$

ou de la norme équivalente suivante :

$$\|v\|_{H^s(\mathcal{O})}^2 = \|v\|_{H^\ell(\mathcal{O})}^2 + \int_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{2\delta+n}} dx dy, \quad (7.12)$$

où  $\ell$  est la partie entière de  $s$  et  $\delta = s - \ell$ .

**Remarque 7.4**

(i) Les espaces définis ci-dessus sont en fait des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire naturel dérivant de celui de  $L^2$ .

(ii) Dans ces définitions tant les dérivées que la transformation de Fourier doivent être comprises au sens des distributions ; ce n'est que dans le cas d'une régularité suffisante qu'elles peuvent l'être au sens des fonctions, les deux acceptations se correspondant alors bien entendu.

Bien d'autres espaces de cette nature peuvent être définis, et nous aurons l'occasion d'en rencontrer ultérieurement, contentons-nous pour l'instant d'introduire

$$H^1(\mathcal{O}; \Delta) = \{v \in H^1(\mathcal{O}) \mid \Delta v \in L^2(\mathcal{O})\},$$

il sera muni de la norme du graphe :

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}; \Delta)}^2 = \|v\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2. \quad (7.13)$$

### 7.2.1 Régularité

Les espaces que nous venons de définir peuvent paraître quelque peu abstraits, les théorèmes de régularité suivants permettent de s'en faire une image plus précise :

**Lemme 7.5 (Inégalité d'interpolation)** *Si  $h \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ , avec  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , alors,  $\forall r \in [p, q]$ ,  $h \in L^r(\Omega)$  et*

$$\|h\|_{L^r} \leq \|h\|_{L^p}^\alpha \|h\|_{L^q}^{1-\alpha}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (7.14)$$

DÉMONSTRATION. On aura  $|h|^r = |h|^{\alpha r} |h|^{(1-\alpha)r}$ , et si nous posons  $s = p/\alpha r$  et  $s' = p/(1-\alpha)r$  nous aurons  $|h|^{\alpha r} \in L^s$ ,  $|h|^{(1-\alpha)r} \in L^{s'}$ , avec  $1/s + 1/s' = 1$ . En vertu de l'inégalité de Hölder, on aura alors  $h \in L^r$ , avec

$$\|h\|_{L^r}^r \leq \| |h|^{\alpha r} \|_{L^s} \| |h|^{(1-\alpha)r} \|_{L^{s'}} = \|h\|_{L^p}^{p/s} \|h\|_{L^q}^{q/s'}$$

soit

$$\|h\|_{L^r} \leq \|h\|_{L^p}^{p/rs} \|h\|_{L^q}^{q/rs'} = \|h\|_{L^p}^\alpha \|h\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

□

**Théorème 7.6 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg, Morrey)** *Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  'suffisamment régulier'*

(i) *Si  $m/n < 2$  alors*

$$H^m(\mathcal{O}) \underset{\rightarrow}{\subset} L^q(\mathcal{O}) \quad \forall q, \text{ tel que } 1/2 \geq 1/q \geq 1/2 - m/n \quad (7.15)$$

(ii) *Si  $m/n = 2$  alors*

$$H^m(\mathcal{O}) \underset{\rightarrow}{\subset} L^q(\mathcal{O}) \quad \forall q, \text{ tel que } 1/2 \geq 1/q > 0 \quad (7.16)$$

(iii) *Si  $m/n > 2$  alors*

$$H^m(\mathcal{O}) \underset{\rightarrow}{\subset} L^q(\mathcal{O}) \quad \forall q, \text{ tel que } 1/2 \geq 1/q \geq 0 \quad (7.17)$$

**Théorème 7.7 (Théorème d'inclusion de Sobolev)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  suffisamment régulier', alors l'inclusion suivante est valable (algébriquement et topologiquement) :*

$$H^s(\mathcal{O}) \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{C}_c^k(\overline{\mathcal{O}}), \quad \forall s > k + \frac{n}{2}, \quad (7.18)$$

où  $\mathcal{C}_c^k$  est l'espace des traces sur  $\mathcal{O}$  des fonctions  $k$  fois dérivables sur  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ .

**Remarque 7.8** *Notons par exemple qu'en dimension un, le théorème d'inclusion de Sobolev affirme que les fonctions de  $H^s(\mathcal{O})$  sont continues pour  $s > 1/2$ , dérivables pour  $s > 3/2, \dots$*

### 7.2.2 Théorèmes de densité et de trace

Les fonctions composant les espaces de Sobolev n'étant pas nécessairement régulières, il est fréquemment utile de les approcher par des fonctions plus régulières. La démonstration de la formule de Green par exemple se réalise en deux temps : on commence par la démontrer pour des fonctions indéfiniment dérivables, puis on montre par densité et continuité qu'elle reste valable pour les fonctions de  $H^1$ .

**Théorème 7.9 (Théorème de densité)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert 'suffisamment régulier', alors  $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$  est dense dans  $H^s(\mathcal{O})$ ,  $\forall s \geq 0$ , où  $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$  est l'ensemble des traces sur  $\mathcal{O}$  des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur  $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition 7.10** *On note  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  l'ensemble des fonctions à support compact dans l'ouvert  $\mathcal{O}$ , et on pose*

$$H_0^s(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{D}(\mathcal{O})}^{H^s(\mathcal{O})}, \quad (7.19)$$

*(adhérence de  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  dans  $H^s(\mathcal{O})$ ), cet espace étant muni de la topologie induite par  $H^s(\mathcal{O})$ .*

**Proposition 7.11** *Pour  $s \leq 1/2$  on a  $H_0^s(\mathcal{O}) = H^s(\mathcal{O})$ .*

Les problèmes aux limites nous conduisent naturellement à étudier les espaces formés des traces des fonctions composant les espaces de Sobolev précédemment définis.

### 7.2.3 Espace des traces

Il est bien connu que l'application trace

$$\gamma_0 : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

se prolonge continûment. Cependant ce prolongement a pour image un sous-espace strict de  $L^2(\Gamma)$  :

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma) \left| \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y < +\infty \right. \right\}, \quad (7.20)$$

où  $n$  est la dimension de  $\Gamma$ . Quand on munit  $H^{1/2}(\Gamma)$  de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 = \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y,$$

alors la trace  $\gamma_0$  est continue et surjective :  $H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ .

**Théorème 7.12 (Théorème de trace)** *Pour  $s > 1/2$ , et si  $\mathcal{O}$  est assez régulier, alors l'application  $\gamma_0$  définie sur  $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ , qui à une fonction régulière définie sur  $\overline{\mathcal{O}}$  fait*

correspondre sa trace sur  $\partial\mathcal{O}$  se prolonge de façon unique en une application continue surjective

$$\gamma_0 : H^s(\mathcal{O}) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\mathcal{O}). \quad (7.21)$$

On a de plus

$$\mathcal{N}(\gamma_0) = H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^s(\mathcal{O}).$$

Si maintenant on note  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence définie sur  $H^1(\Omega)$  par

$$(u \mathcal{R} v) \Leftrightarrow (\gamma_0 u = \gamma_0 v),$$

on peut munir l'espace  $H^1(\Omega)/\mathcal{R}$  de la norme quotient :

$$\left\| \dot{u} \right\|_{H^1(\Omega)/\mathcal{R}} = \inf_{v \in \dot{u}} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (7.22)$$

qui en fait un espace de Banach. Il est clair que  $\gamma_0$  est bijective :  $H^1(\Omega)/\mathcal{R} \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ , mais comme

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_0\| \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall v \in \dot{u}, \end{aligned}$$

il en résulte qu'elle est continue, et *par le théorème des homomorphismes 3.14*, que c'est un isomorphisme.

**Corollaire 7.13** *Pour  $s > 3/2$ , et  $\mathcal{O}$  assez régulière, l'application  $\gamma_1$  qui à une fonction de  $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$  fait correspondre la trace de sa dérivée normale sur  $\partial\mathcal{O}$  se prolonge de façon unique en une application continue surjective*

$$\gamma_1 : H^s(\mathcal{O}) \rightarrow H^{s-3/2}(\partial\mathcal{O}), \quad (7.23)$$

si on note  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ , on a

$$\mathcal{N}(\gamma) = H_0^2(\mathcal{O}) \cap H^s(\mathcal{O})$$

## 7.2.4 Compacité

### Théorème 7.14 (Rellich)

Nous aurons dans la suite l'occasion d'utiliser maintes fois ce résultat, sa démonstration repose sur le théorème d'Ascoli, relatif à la compacité des sous-ensembles de fonctions équicontinues dans l'ensemble des fonctions continues. Comme les espaces que nous considérons ici ne sont pas formés de fonctions continues, nous devons en passer par une première étape de régularisation.

**Définition 7.15** *La suite  $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\theta(x/\varepsilon)$ , où la fonction positive  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $B_1(0)$  vérifie  $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1$ , est appelée approximation de l'identité ou suite régularisante. Notons que  $\text{Supp } \chi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ .*

L'existence d'une telle fonction n'est pas tout à fait évidente, mais en fait il n'est pas difficile de montrer que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = e^{1/(\|x\|^2-1)} \text{ pour } \|x\| \leq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } \|x\| > 1$$

est indéfiniment dérivable et a pour support  $B_1(0)$ . On prendra alors par exemple

$$\theta(x) = f(x) / \|f\|_{L^1}.$$

Si  $\Omega$  est un ouvert, on dit que  $\omega$  est fortement inclus dans  $\Omega$  si  $\bar{\omega}$  est compact et  $\bar{\omega} \subset \Omega$  ; on notera  $\omega \Subset \Omega$ .

**Définition 7.16** *On dira que le sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $L^2(\Omega)$  est équicontinu, au sens de  $L^2(\omega)$  si*

$$\forall \eta > 0, \exists \delta, \text{ tel que } |h| \leq \delta \implies \|\tau_h f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \eta, \forall f \in \mathcal{F}. \quad (7.24)$$

**Théorème 7.17 (Fréchet, Kolmogorov)** *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  un ensemble de fonctions nulles à l'extérieur de  $\Omega$ , borné dans  $L^2(\Omega)$ . Soit  $\omega \Subset \Omega$  tel que  $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$  et  $\mathcal{F}$  soit équicontinu dans  $L^2(\omega)$ , alors  $\mathcal{F}|_\omega$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\theta_\varepsilon$  une approximation de l'identité, posons  $f_\varepsilon = f * \theta_\varepsilon$  et  $\mathcal{F}^\varepsilon = \{f_\varepsilon \mid f \in \mathcal{F}\}$ , où  $|\varepsilon| \leq d$ , et choisissons  $\rho > 0$ .

▷ Tout d'abord, on aura

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) f(x - \varepsilon z) dz, \quad (7.25)$$

d'où

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) (f(x - \varepsilon z) - f(x)) dz \\ &= \int_{|z| < 1} \theta(z) (\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)) dz, \end{aligned}$$

et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)|^2 \leq \int_{|z| < 1} |\theta(z)|^2 dz \int_{|z| < 1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2 dz,$$

Par conséquent, selon le théorème de Fubini

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \int_\omega dx \int_{|z| < 1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2 dz = C \int_{|z| < 1} \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^2(\omega)}^2 dz.$$

A l'aide de (7.24), on en déduit que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on aura

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(\omega)} \leq \rho, \forall f \in \mathcal{F}. \quad (7.26)$$

▷ Montrons alors que  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$  est un ensemble borné et équicontinu dans  $\mathcal{C}(\bar{\omega})$ . Selon (7.25) on aura d'une part

$$|f_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = C\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq C'\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (7.27)$$

et d'autre part, comme

$$\left| \theta\left(\frac{x' - y}{\varepsilon}\right) - \theta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right| \leq \frac{\|x' - x\|}{\varepsilon} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|D\theta(z)\|,$$

il en résulte que

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| = M\varepsilon^{-1-n} \|x' - x\| \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq M'\varepsilon^{-1-n} \|x' - x\| \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

▷ On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli à  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$ , qui se trouve donc être relativement compact dans  $\mathcal{C}(\bar{\omega})$ , et à plus forte raison dans  $L^2(\omega)$ , puisque  $\mathcal{C}(\bar{\omega}) \subseteq L^2(\omega)$ , et que l'image continue d'un compact est compacte. De la compacité relative de  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$ , il résulte que  $\mathcal{F}_{|\omega}^\varepsilon$  peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon  $\rho$  dans  $L^2(\omega)$ , et de la formule (7.26) que les boules correspondantes de rayon  $2\rho$  recouvrent  $\mathcal{F}_{|\omega}$ . Comme  $L^2(\omega)$  est complet, on en déduit que  $\mathcal{F}_{|\omega}$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ . □

**Corollaire 7.18** *Si les hypothèses du théorème 7.17, sont vérifiées  $\forall \omega \in \Omega$ , et si  $\forall \varepsilon, \exists \omega \in \Omega$  tel  $\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$ , alors  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $\omega$  tel que  $\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$ . D'après le théorème 7.17,  $\mathcal{F}_{|\omega}$  est relativement compact dans  $L^2(\omega)$ , et par conséquent  $\mathcal{F}_{|\omega}$  peut être recouvert par un nombre fini de boules  $B_\varepsilon(g_i)$  de rayon  $\varepsilon$  dans  $L^2(\omega)$ . Si  $\tilde{g}_i$  note le prolongement de  $g_i$  par 0 à l'extérieur de  $\omega$ , les  $B_{2\varepsilon}(\tilde{g}_i)$  recouvrent alors  $\mathcal{F}$ . La compacité relative de  $\mathcal{F}$  dans  $L^2(\Omega)$  en résulte. □

**Lemme 7.19** *Si  $u \in H^1(\Omega)$ , alors,  $\forall \omega \in \Omega$ , tel que  $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$ ,  $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\| \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$*

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par le cas où  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , selon la formule de Taylor avec reste intégral, on pourra écrire

$$u(x - h) - u(x) = \int_0^1 (\nabla u(x - th) | h) dt,$$

et par conséquent  $|\tau_h u(x) - u(x)|^2 \leq \|h\|^2 \int_0^1 \|\nabla u(x - th)\|^2 dt$  d'où, pour  $h$  assez petit du moins,

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq \|h\|^2 \int_0^1 dt \int_\omega \|\nabla u(x - th)\|^2 dx \\ &\leq \|h\|^2 \int_0^1 dt \int_\Omega \|\nabla u(y)\|^2 dy = \|h\|^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$



▷ Par ailleurs, on sait que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  : si  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\exists u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H^1(\Omega)$ . On aura alors  $\tau_h u_n \rightarrow \tau_h u$ , et de l'inégalité  $\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\| \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ , on déduit par conséquent le résultat annoncé.  $\square$

**Théorème 7.20 (Rellich, Kondrasov)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ‘suffisamment régulier’ alors l’injection suivante est compacte :*

$$H^{m+1}(\Omega) \underset{c}{\subset} H^m(\Omega) \quad \forall m \geq 0 \quad (7.28)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par traiter le cas  $m = 0$ , et notons  $\mathcal{F}$  la boule unité de  $H^1(\Omega)$ , il s’agit de démontrer qu’elle est compacte dans  $L^2(\Omega)$  ; nous utiliserons à cet effet le corollaire 7.18. Soit  $\omega \Subset \Omega$ , tel que  $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$ .

▷ Choisissons  $\varepsilon > 0$ , en vertu du théorème d’injection 7.6,  $\exists q > 2$  tel que  $H^1(\Omega \setminus \omega) \underset{c}{\subset} L^q(\Omega \setminus \omega)$ , et par conséquent, selon l’inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 \leq \|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)}^2 |\Omega \setminus \omega|^{1-2/q}$$

soit

$$\|u\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} |\Omega \setminus \omega|^{1/2-1/q} \leq C |\Omega \setminus \omega|^{1/2-1/q}.$$

Il est donc possible de choisir  $\omega$  de telle sorte que  $\|u\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$ ,  $\forall u \in \mathcal{F}$ .

▷ Par ailleurs,  $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\|$ , en vertu du lemme 7.19, et par conséquent pour  $\|h\|$  suffisamment petit, on aura  $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon/2$ ,  $\forall u \in \mathcal{F}$ . La compacité de l’injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  découle alors du corollaire 7.18.

▷ Raisonnons maintenant par récurrence et supposons compacte l’injection de  $H^m(\Omega)$  dans  $H^{m-1}(\Omega)$ , selon l’hypothèse, si la suite  $u_n$  est bornée dans  $H^{m+1}(\Omega)$ , on peut en extraire une sous-suite  $u_{n'}$  qui converge dans  $H^{m-1}(\Omega)$  ainsi que  $\nabla u_{n'}$ , comme  $u_{n'}$  et  $\nabla u_{n'}$  sont de Cauchy dans  $H^{m-1}(\Omega)$ , il en est de même de  $u_{n'}$  dans  $H^m(\Omega)$ , et la conclusion en résulte.  $\square$

Plus généralement on démontre que

$$H^s(\mathcal{O}) \underset{c}{\subset} H^t(\mathcal{O}) \quad \forall s > t \geq 0. \quad (7.29)$$

## 7.2.5 Dualité

On définit également des espaces de Sobolev d’indice négatif par dualité.

**Définition 7.21** *Pour  $s \geq 0$ , on pose*

$$H^{-s}(\mathcal{O}) = (H_0^s(\mathcal{O}))', \quad (7.30)$$

*c’est un espace de distributions que l’on munit de la norme du dual fort :*

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathcal{O})} = \sup_{\substack{v \in H_0^s(\mathcal{O}) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{H^s(\mathcal{O})}}. \quad (7.31)$$

## 7.3 La formule de Green

C'est la généralisation à plusieurs dimensions de la formule bien connue d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'v = - \int_a^b uv' + [uv]_a^b$$

Sous sa forme la plus simple, elle s'écrit :

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\mathcal{O}} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial \mathcal{O}} uv n_i d\gamma, \quad (7.32)$$

où  $n_i$  est la  $i$ ème composante de la normale  $\mathbf{n}$ , *extérieure* à  $\mathcal{O}$ . Bien entendu, il faut indiquer sous quelles conditions de régularité de la frontière  $\partial \mathcal{O}$ , et des fonctions  $u$  et  $v$  s'applique la formule de Green ; en fait il suffit que les diverses intégrales existent, ainsi que les traces de  $u$  et  $v$ . Plus précisément il suffit d'imposer

$$u, v \in H^1(\mathcal{O}), \mathcal{O} \in \mathcal{C}^{1,1}.$$

### 7.3.1 Opérateurs du premier ordre

La formule qui précède est susceptible de prendre diverses formes, notons parmi les plus fréquemment employées :

$$\int_{\mathcal{O}} (E | \nabla \bar{\psi}) = - \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} E \bar{\psi} + \int_{\partial \mathcal{O}} (E | \mathbf{n}) \bar{\psi} d\gamma. \quad (7.33)$$

et

$$\int_{\mathcal{O}} (H | \operatorname{rot} \bar{\psi}) = \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{rot} H | \bar{\psi}) + \int_{\partial \mathcal{O}} (H | \mathbf{n} \wedge \bar{\psi}) d\gamma. \quad (7.34)$$

### 7.3.2 Opérateurs du second ordre

Si, dans (7.33), on remplace  $E$  par  $\operatorname{grad} \varphi$ , on obtient

$$\int_{\mathcal{O}} (\nabla \varphi | \nabla \bar{\psi}) = - \int_{\mathcal{O}} \Delta \varphi \bar{\psi} + \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \bar{\psi} d\gamma. \quad (7.35)$$

Si, par contre, on remplace  $\psi$  par  $\operatorname{div} H$ , on aboutit à

$$\int_{\mathcal{O}} (E | \nabla \operatorname{div} \bar{H}) = - \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} E \operatorname{div} \bar{H} + \int_{\partial \mathcal{O}} (E | \mathbf{n}) \operatorname{div} \bar{H} d\gamma, \quad (7.36)$$

et de même, en remplaçant dans (7.34),  $H$  par  $\operatorname{rot} \Phi$ ,

$$\int_{\mathcal{O}} (\operatorname{rot} \Phi | \operatorname{rot} \bar{\psi}) = \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \Phi | \bar{\psi}) + \int_{\partial \mathcal{O}} (\operatorname{rot} \Phi | \mathbf{n} \wedge \bar{\psi}) d\gamma. \quad (7.37)$$

## 7.4 Le problème de Dirichlet

Traisons tout d'abord le *problème de Dirichlet homogène* :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \quad (7.38)$$

### 7.4.1 Formulation variationnelle

Nous allons utiliser une fonction auxiliaire  $v$  (dite fonction d'essai) et la formule de Green (7.35) pour abaisser l'ordre de dérivation de  $u$ . Si nous choisissons  $v \in H^1(\mathcal{O})$  et si nous supposons que  $u \in H^2(\mathcal{O})$ , nous aurons :

$$\int_{\mathcal{O}} -\Delta u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) - \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} d\gamma, \quad (7.39)$$

et, par conséquent,

$$\int_{\mathcal{O}} f \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} - \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} d\gamma;$$

il reste que la condition de Dirichlet homogène n'a pas été prise en compte, elle doit donc subsister comme une contrainte supplémentaire imposée à  $u$ . On aboutit ainsi au problème, dit variationnel, suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ nulle sur } \partial\mathcal{O}, \text{ telle que } \forall v \text{ nulle sur } \partial\mathcal{O}, \\ \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}. \end{cases}$$

Cette formulation manque de précision, on doit en particulier choisir l'espace où doit être cherchée  $u$  pour envisager la démonstration d'un théorème d'existence et d'unicité, de sorte que les conditions relatives aux traces aient un sens. Compte tenu de la formulation que nous venons d'obtenir et du théorème de trace **7.12** nous choisirons de chercher  $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ , et d'y faire varier  $v$ . On aboutit ainsi au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\mathcal{O}), \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}, \end{cases} \quad (7.40)$$

où  $f \in L^2(\mathcal{O})$ .

### 7.4.2 Existence et unicité

Notre théorème de base sera le théorème de Lax-Milgram **7.2** dans lequel nous poserons  $V = H_0^1(\mathcal{O})$ ,

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} \text{ et } \ell(v) = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}.$$

La continuité de  $a$  et  $\ell$  est évidente, ainsi que l'ellipticité de  $a$ . Le théorème de Lax-Milgram 7.2 nous assure alors que le problème (7.40) est *bien posé*, c'est-à-dire que sa solution existe, est unique et dépend continûment de la donnée, puisque  $\|\ell\|_{V'} \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{O})}$ .

### 7.4.3 Retour au problème fort

La question qui subsiste est celle du lien entre les problèmes (7.38) et (7.40). Il est tout à fait clair que si  $u$  est solution de (7.38) elle l'est de (7.40); réciproquement si  $u$  est solution du problème variationnel (7.40), alors pour  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  on a

$$\langle -\Delta u + u - f, \bar{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{O}), \mathcal{D}(\mathcal{O})} = 0,$$

soit

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}). \quad (7.41)$$

D'autre part  $u \in H_0^1(\mathcal{O})$  peut, en vertu du théorème 7.12, s'interpréter comme signifiant  $u|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ , au sens précis suivant :

$$\gamma_0(u) = 0. \quad (7.42)$$

On a donc montré que  $u$  est solution du problème fort (7.38), en un sens quelque peu généralisé.

### 7.4.4 Le problème non-homogène

Nous n'avons traité que du cas d'une trace nulle, supposons qu'il n'en n'est plus ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \mathcal{O} \\ u = g \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \quad (7.43)$$

Si  $u \in H^1(\mathcal{O})$ , alors en vertu du théorème de trace 7.12,  $u|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ ; réciproquement, si on suppose que  $g \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ , d'après ce même théorème de trace, il existe  $U \in H^1(\mathcal{O})$ , telle que  $U|_{\partial\mathcal{O}} = g$ ,  $U$  est appelé *relèvement* de  $g$  dans  $H^1(\mathcal{O})$ . Comme  $u$  est solution de (7.41) il en résulte que  $u' = u - U$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u' + u' = f + \Delta U - U \text{ dans } \mathcal{O} \\ u' = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (7.44)$$

soit encore, sous forme variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u' \in H_0^1(\mathcal{O}), \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ a(u', v) = \ell'(v), \text{ avec } \ell'(v) = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v} - \int_{\mathcal{O}} (\nabla U | \nabla \bar{v}) - \int_{\mathcal{O}} U \bar{v}, \end{cases} \quad (7.45)$$

problème tout à fait semblable à (7.40).

### 7.4.5 L'inégalité de Poincaré-Friedrichs

Le problème suivant est plus difficile, mais mérite d'être étudié car il est fréquent en mécanique des fluides ou en électrostatique :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \quad (7.46)$$

La difficulté est relative à la démonstration de l'ellipticité sur  $H_0^1(\mathcal{O})$  de la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) , \quad (7.47)$$

dont découleront l'existence et l'unicité de la solution  $u$  de (7.46). Nous utiliserons le théorème suivant :

**Théorème 7.22 (Poincaré-Friedrichs)** *Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert borné connexe et  $\Gamma$  une partie de son bord, de mesure non nulle, alors*

$$\exists K > 0, \|v\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq K \left\{ \int_{\mathcal{O}} \|\nabla v\|^2 + \left| \int_{\Gamma} v \, d\gamma \right|^2 \right\}, \forall v \in H^1(\mathcal{O}). \quad (7.48)$$

DÉMONSTRATION. On effectue un raisonnement par l'absurde

▷ Admettons que l'inégalité annoncée soit fautive, on en déduit l'existence d'une suite dans  $H^1(\mathcal{O})$  vérifiant

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{H^1(\mathcal{O})} &= 1, \text{ et} \\ [v_n] &\leq \frac{1}{n}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

avec

$$[v_n]^2 = \int_{\mathcal{O}} \|\nabla v_n\|^2 + \left| \int_{\Gamma} v_n \, d\gamma \right|^2.$$

A l'aide du Théorème de compacité de Rellich, et d'après (7.49), on peut extraire de  $v_n$  une sous-suite, encore notée  $v_n$  qui converge, soit vers  $v$  dans  $L^2(\mathcal{O})$ .

▷ Toujours en vertu de (7.49), la suite  $\nabla v_n$  est de Cauchy dans  $L^2(\mathcal{O})$ ; il en est de même de  $v_n$  d'après l'item qui précède, et par conséquent  $v_n$  est de Cauchy dans  $H^1(\mathcal{O})$ , elle y converge donc vers  $v$ .

▷ D'après (7.49), la fonction  $v$  vérifie  $\nabla v = 0$ , c'est donc une constante, mais également  $\int_{\Gamma} v \, d\gamma = 0$ , par continuité de la trace  $H^1(\mathcal{O}) \rightarrow L^2(\Gamma)$ . On en déduit que  $v = 0$ , ce qui constitue une contradiction avec (7.49).

□

**Remarque 7.23** Dans le théorème qui précède, le terme  $\int_{\Gamma} v d\gamma$  peut être remplacé par de nombreux autres, par exemple  $\int_{\Delta} v$  où  $\Delta$  est un ouvert de mesure non nulle inclus dans  $\mathcal{O}$ . L'essentiel est la continuité de ce terme vis-à-vis de la topologie de  $H^1(\mathcal{O})$  et le fait que  $[v]$  reste une norme.

Démontrons maintenant l'ellipticité de la forme bilinéaire (7.47) : on aura en effet pour  $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ ,

$$a(u, u) = \int_{\mathcal{O}} \|\nabla u\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \|\nabla u\|^2 + \left| \int_{\partial\mathcal{O}} u d\gamma \right|^2 \geq \frac{1}{K} \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}^2$$

## 7.5 Le problème de Neumann

### 7.5.1 Dualité et dérivées normales

Dans le cas où  $u \in H^2(\Omega)$ , nous avons vu que la dérivée normale  $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  est une application continue, mais elle ne se prolonge pas à  $H^1(\Omega)$ . Soyons donc moins exigeants et étudions  $\partial u / \partial n$  par l'intermédiaire de la forme linéaire

$$w \in H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma, \quad (7.50)$$

soit en fait la distribution  $\partial u / \partial n$ . Il est facile de montrer que cette application est continue, en effet, si  $v$  est un relèvement de  $w$  dans  $H^1(\Omega)$ , on aura, d'après la formule de Green

$$\int_{\Omega} \Delta uv = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma, \quad (7.51)$$

et par conséquent,  $\forall v \in H^1(\Omega)$  tel que  $v|_{\Gamma} = w$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \Delta uv \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (7.52)$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma \right| &\leq \inf_{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = w} \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)/\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (7.53)$$

et comme l'application relèvement, inverse de  $\gamma_0$ , est continue :  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)/\mathcal{R}$ ,

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma \right| \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (7.54)$$

Ce que nous avons donc démontré, c'est que pour  $u \in H^2(\Omega)$ , la forme linéaire

$$w \rightarrow \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma,$$

appartient au dual  $H^{-1/2}(\Gamma)$  de  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Plus brièvement, on écrit  $\partial u / \partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Mais si on note maintenant

$$H^1(\Delta; \Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \quad (7.55)$$

muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^1(\Delta; \Omega)} = \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

on constate que, selon (7.54)

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}=1} \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{w} d\gamma \right| \leq C \|u\|_{H^1(\Delta; \Omega)}.$$

Il nous suffit donc de démontrer la densité de  $H^2(\Omega)$  dans  $H^1(\Delta; \Omega)$  pour prolonger l'application  $u \rightarrow \partial u / \partial n$  à  $H^1(\Delta; \Omega)$  tout entier :

**Proposition 7.24**  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Delta; \Omega)$ .

DÉMONSTRATION. Selon le corollaire 5.22, on va montrer que toute forme linéaire continue sur  $H^1(\Delta; \Omega)$  qui s'annule sur  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  s'annule également sur  $H^1(\Delta; \Omega)$  tout entier ; la proposition en résultera alors.

▷ Considérons donc une forme linéaire continue  $\xi$  sur  $H^1(\Delta; \Omega)$ , par le théorème de Riesz, il existe un vecteur  $\Xi$  de  $H^1(\Delta; \Omega)$  tel que pour tout  $u \in H^1(\Delta; \Omega)$ ,

$$\langle \xi, u \rangle_{H^1(\Delta; \Omega)', H^1(\Delta; \Omega)} = (\Xi | u)_{H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \Delta \Xi \Delta u.$$

C'est dire qu'il existe une forme linéaire  $\lambda$  continue sur  $H^1(\Omega)$  et un vecteur  $L$  de  $L^2(\Omega)$  tels que

$$\langle \xi, u \rangle = \langle \lambda, u \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} L \Delta u.$$

▷ Définissons alors la forme linéaire continue  $\tilde{\lambda}$  sur  $H^1(\mathbb{R}^n)$  par

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} = \langle \lambda, \tilde{v}|_{\Omega} \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}, \forall \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (7.56)$$

Comme il existe un prolongement linéaire continu  $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ , on aura

$$\langle \lambda, u \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} = \langle \tilde{\lambda}, Pu \rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in H^1(\Omega), \quad (7.57)$$

et si nous notons  $\tilde{L}$  le prolongement de  $L$  par 0 en dehors de  $\Omega$ ,

$$\langle \xi, u \rangle = \left\langle \tilde{\lambda}, Pu \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{L} \Delta u, \forall u \in H^1(\Delta; \not\subseteq).$$

Notons que  $H^1(\mathbb{R}^n)'$  est un espace normal de distributions puisque  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , et que d'après (7.56),  $\tilde{\lambda}$  s'annule sur les fonctions dont le support ne rencontre pas  $\Omega$ , soit encore  $\text{Supp } \tilde{\lambda} \subset \bar{\Omega}$ .

▷ Supposons maintenant que  $\xi$  s'annule sur  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  et choisissons  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on aura  $\tilde{\varphi}|_{\bar{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  et

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\lambda}, P\tilde{\varphi}|_{\Omega} \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} + \left\langle \tilde{\lambda}, P\tilde{\varphi}|_{\Omega} - \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

car  $\text{Supp}(P\tilde{\varphi}|_{\Omega} - \tilde{\varphi}) \cap \Omega = \emptyset$ ; par conséquent

$$0 = \langle \xi, \tilde{\varphi}|_{\Omega} \rangle = \left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{L} \Delta \tilde{\varphi}.$$

Il en résulte que  $\Delta \tilde{L} = -\tilde{\lambda}$  au sens des distributions. Par coercivité, cette équation a une solution dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , c'est en fait la seule qui appartienne à  $L^2(\Omega)$ , car toute autre en diffère d'un polynôme harmonique, ainsi qu'il est facile de le montrer par transformation de Fourier. On aura donc  $\tilde{L} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , ce qui implique  $L \in H_0^1(\Omega)$ .

▷ Plus précisément, nous aurons

$$\left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{u} \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\Omega} \nabla L \cdot \nabla \tilde{u}, \forall \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

En effet pour  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} = - \left\langle \Delta \tilde{L}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \left\langle \nabla \tilde{L}, \nabla \tilde{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)},$$

soit

$$\left\langle \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \tilde{L} \cdot \nabla \tilde{\varphi} = \int_{\Omega} \nabla L \cdot \nabla \tilde{\varphi},$$

dont découle la formule ci-dessus, par densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ .

▷ Nous aurons donc  $\forall u \in H^1(\Delta; \Omega)$ ,

$$\langle \xi, u \rangle = \int_{\Omega} \nabla L \cdot \nabla u + \int_{\Omega} L \Delta u.$$

Mais si  $L_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} \nabla L_m \cdot \nabla u + \int_{\Omega} L_m \Delta u = 0,$$

dont il résulte que  $\langle \xi, u \rangle = 0$ , par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

□



Nous en déduisons la proposition suivante :

**Proposition 7.25** *L'application  $\gamma_1 : u \in H^2(\Omega) \rightarrow \partial u / \partial n \in H^{1/2}(\Gamma)$  se prolonge de façon unique en une application continue :  $H^1(\Delta; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ .*



### 7.5.2 Formule de Green

Ce prolongement peut être explicité : par densité de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  dans  $H^1(\Delta; \Omega)$ , on déduit de (7.51) la formule de Green suivante, qui fournit une expression concrète de la dérivée normale  $\gamma_1$  (7.51)

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v|_{\Gamma} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall u \in H^1(\Delta; \Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (7.58)$$

On peut alors étudier le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial \mathcal{O}. \end{cases} \quad (7.59)$$

### 7.5.3 Formulation variationnelle

Si on suppose que  $g \in L^2(\partial \mathcal{O})$ , on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\mathcal{O}) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\mathcal{O}) \\ \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v} + \int_{\partial \mathcal{O}} g \bar{v} d\gamma. \end{cases} \quad (7.60)$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique alors, faisant de (7.60) un problème bien posé.

### 7.5.4 Retour au problème fort

Si on choisit, dans un premier temps de considérer uniquement des fonctions test dans  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ , comme dans le cas du problème de Dirichlet, on montre aisément que  $u$  vérifie  $-\Delta u + u = f$ . L'interprétation de la condition de Neumann est plus difficile, elle nécessite de faire appel à l'espace  $H^1(\mathcal{O}; \Delta)$ .

**Proposition 7.26** *Si  $u$  est solution du problème variationnel (7.60), où  $f \in L^2(\mathcal{O})$  et  $g \in L^2(\partial \mathcal{O})$ , alors au sens du prolongement précédent, on a  $\partial u / \partial n|_{\partial \mathcal{O}} = g$ .*

DÉMONSTRATION. On a déjà remarqué que  $u$  vérifie  $\Delta u = u - f$ , et par conséquent  $u \in H^1(\mathcal{O}; \Delta)$ . On pourra donc écrire

$$\int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} (-\Delta u + u) \bar{v} + \int_{\partial \mathcal{O}} g \bar{v} d\gamma,$$

soit

$$\int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) + \int_{\mathcal{O}} \Delta u \bar{v} = \int_{\partial \mathcal{O}} g \bar{v} d\gamma,$$

et par conséquent, d'après (7.58),  $\partial u / \partial n = g$  dans  $H^{-1/2}(\partial \mathcal{O})$ .

□

### 7.5.5 Le problème de Neumann pur

Si on tente de traiter le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial \mathcal{O}, \end{cases} \quad (7.61)$$

une difficulté supplémentaire se présente : le problème ne peut admettre une unique solution, en effet si  $u$  en est solution, alors  $u + C$  l'est encore quelle que soit la constante  $C$ . De plus une condition de compatibilité doit être imposée à  $f$  et  $g$  pour garantir l'existence d'une solution : d'après la formule de Green (7.35), on a nécessairement

$$\int_{\mathcal{O}} f + \int_{\partial \mathcal{O}} g d\gamma = 0. \quad (7.62)$$

Nous sommes donc conduits à montrer que (7.61) est bien posé dans un espace de fonctions définies à une constante additive près ; à cet effet on pose

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R} &= \{ \dot{v} \mid v \in H^1(\mathcal{O}) \}, \text{ où} \\ \dot{v} &= \{ w \in H^1(\mathcal{O}) \mid w - v = \text{Cte} \} \end{aligned} \quad (7.63)$$

L'espace  $H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$  est un espace de Hilbert pour la norme quotient :

$$\| \dot{v} \|_{H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}} = \inf_{w \in \dot{v}} \| w \|_{H^1(\mathcal{O})} \quad (7.64)$$

Si nous supposons que (7.62) est vérifié par les données  $f$  et  $g$ , alors on peut donner de (7.61) la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \dot{u} \in H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R} \text{ tel que } \forall \dot{v} \in H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}, \\ a(\dot{u}, \dot{v}) = \ell(\dot{v}), \text{ avec} \end{cases} \quad (7.65)$$

$$\begin{aligned} a(\dot{u}, \dot{v}) &= \int_{\mathcal{O}} (\nabla u | \nabla \bar{v}) \quad \forall u \in \dot{u}, \quad \forall v \in \dot{v} \\ \ell(\dot{v}) &= \int_{\mathcal{O}} f \bar{v} + \int_{\partial \mathcal{O}} g \bar{v} d\gamma, \quad \forall v \in \dot{v}, \end{aligned}$$

ces définitions étant indépendantes des représentants  $u$  et  $v$  choisis. Ce problème est bien posé en vertu du Théorème de Lax-Milgram **7.2**, car  $a$  est elliptique sur  $H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$  : on a en effet, d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (7.48)

$$\begin{aligned} a(\dot{u}, \dot{u}) &= \int_{\mathcal{O}} \|\nabla \dot{u}\|^2 \\ &= \inf_{u \in \dot{u}} \left\{ \int_{\mathcal{O}} \|\nabla u\|^2 + \text{mod} \int_{\partial \mathcal{O}} u \, d\gamma^2 \right\} \\ &\geq \frac{1}{K} \|\dot{u}\|_{H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}}^2 \end{aligned}$$

## Troisième partie

# Opérateurs bornés dans les espaces de Banach



Nous noterons  $X$  un espace de Banach, et  $\mathcal{L}(X)$  l'ensemble des opérateurs bornés  $X \rightarrow X$ , muni de la norme des opérateurs :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Etant donné un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X)$ , la question qui nous motivera tout particulièrement consiste à décomposer l'espace  $X$  en somme directe de sous-espaces invariants par  $T$ , de telle sorte qu'en restriction à chacun d'entre eux,  $T$  agisse de façon particulièrement simple, cette description prendra le nom de *décomposition spectrale* de  $T$ . Dans les meilleurs cas  $T$  agira sur chaque sous-espace comme un opérateur de multiplication, on pourra alors parler d'une *représentation spectrale* de  $T$ .



# Chapitre 8

## Algèbres de Banach

Une particularité de la théorie réside dans le fait qu'elle peut être, jusqu'à un certain point, développée dans un cadre beaucoup plus large que celui des opérateurs linéaires bornés. L'un des avantages inhérents à ce point de vue consiste à faire ressortir plus clairement les hypothèses dont découlent les résultats essentiels de la théorie spectrale.

**Définition 8.1** On appelle algèbre un espace vectoriel sur le corps des complexes, muni d'une opération interne de multiplication

(i) qui lui confère une structure d'anneau, c'est-à-dire associative et distributive par rapport à l'addition

(ii) qui vérifie  $\alpha(TS) = (\alpha T)S = T(\alpha S)$ , pour tous  $S, T$  appartenant à l'espace vectoriel et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(iii) Quand l'algèbre est munie d'un élément neutre relativement à la multiplication, ou unité, on dit que c'est une algèbre unifère.

**Définition 8.2**

(i) On appelle algèbre de Banach, un espace de Banach  $\mathcal{A}$  muni d'une structure d'algèbre telle que

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\| \quad \forall S, T \in \mathcal{A}. \quad (8.1)$$

(ii) Si  $\mathcal{A}$  possède un élément unité, que l'on supposera non nul, on le note  $I$ , et on dit que  $T$  est inversible dans  $\mathcal{A}$  si  $\exists S \in \mathcal{A}$ , tel que  $TS = ST = I$ .

On notera

$$G(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} \mid T \text{ est inversible}\}, \quad (8.2)$$

c'est un groupe. Dans le cas où  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$ , alors dire que  $T$  est inversible dans  $\mathcal{A}$  signifie que  $T$  est continûment inversible, en tant qu'élément de  $\mathcal{L}(X)$ . Notons qu'une inverse est unique, en effet si  $TS = TZ = I$ ,

$$S = SI = STZ = IZ = Z.$$

Il est clair que  $\mathcal{L}(X)$  est une algèbre de Banach pour la composition des opérateurs, mais il y en a beaucoup d'autres, au nombre desquelles



- ▷ l'ensemble  $\mathcal{C}(K)$  des fonctions continues sur le compact  $K$
- ▷ l'ensemble  $\mathcal{H}(\Omega)$  des fonctions holomorphes sur l'ouvert relativement compact  $\Omega$ .
- ▷ l'ensemble des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  muni du produit de convolution, qui ne possède pas d'élément unité dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , puisque c'est la distribution de Dirac.

### Remarque 8.3

(i) Sauf mention explicite du contraire, nous ne considérerons désormais que des algèbres de Banach unifères et nous choisirons la norme de telle façon que

$$\|\mathbf{1}\| = 1 ;$$

si tel n'était pas le cas il suffirait de la remplacer par la norme équivalente

$$\|\mathbf{T}\| = \sup_{\|s\| \leq 1} \|\mathbf{T}s\| .$$

On aura en effet,  $\forall \|s\| \leq 1$ ,

$$\|\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2s\| = \|\mathbf{T}_2s\| \left\| \mathbf{T}_1 \frac{\mathbf{T}_2s}{\|\mathbf{T}_2s\|} \right\| \leq \|\mathbf{T}_2s\| \|\mathbf{T}_1\| \leq \|\mathbf{T}_2\| \|\mathbf{T}_1\| \|s\| .$$

(ii) Dans le cas où il n'existe pas d'élément unité, il est toujours possible de plonger l'algèbre  $\mathcal{A}$  dans une plus vaste qui en possède un, soit  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ , avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}, \alpha) \cdot (s, \beta) &= (\mathbf{T}s + \alpha s + \beta\mathbf{T}, \alpha\beta) \text{ et} \\ \|(\mathbf{T}, \alpha)\| &= \|\mathbf{T}\| + |\alpha| ; \end{aligned}$$

on aura alors  $\mathbf{1} = (0, 1)$ .

**Proposition 8.4** Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre et un espace de Banach, il suffit que la multiplication soit continue à gauche et à droite pour qu'il existe une norme équivalente faisant de  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $s \in \mathcal{A}$ , on pose  $M_s(\mathbf{T}) = s\mathbf{T}$  et on note  $\tilde{\mathcal{A}} = \{M_s \mid s \in \mathcal{A}\}$  ; par continuité à droite, on aura  $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ .

▷ Démontrons que  $\tilde{\mathcal{A}}$  est fermé dans  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  ; c'est donc un espace de Banach. Soit donc  $M \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$  et une suite  $s_i \in \mathcal{A}$  telle que  $M_i = M_{s_i} \rightarrow M$  ; on aura

$$M_i(\mathbf{T}) = s_i\mathbf{T} = M_i(\mathbf{1})\mathbf{T},$$

d'où il résulte par continuité à gauche, que  $M(\mathbf{T}) = M(\mathbf{1})\mathbf{T}$ , et par conséquent avec  $s = M(\mathbf{1})$ , que  $M = M_s$ . Comme  $M(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , il en résulte que  $\tilde{\mathcal{A}}$  est une algèbre de Banach.

▷ Considérons l'application  $s \rightarrow M_s$ , comme  $M_{s\mathbf{T}} = M_s \circ M_{\mathbf{T}}$ , c'est un homomorphisme d'algèbres ; elle est injective et d'inverse continu, car

$$\|s\| = \|s\mathbf{1}\| = \|M_s(\mathbf{1})\| = \|M_s(\mathbf{1})\| \leq \|M_s\| .$$

En vertu du théorème des homomorphismes, il en résulte que  $s \rightarrow M_s$  est continue, et par conséquent que  $\|s\|$  et  $\|M_s\|$  sont des normes équivalentes sur  $\mathcal{A}$ .

□

**Proposition 8.5** Si  $T \in \mathcal{A}$ , avec  $\|T\| < 1$ , alors

(i)  $I - T$  est inversible avec

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

(ii)  $\left\| (I - T)^{-1} - \sum_{k=0}^n T^k \right\| \leq \|T\|^{n+1} / (1 - \|T\|)$

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons la suite  $s_n = \sum_{k=0, n} T^k$ , c'est une suite de Cauchy, car

$$\|s_q - s_p\| \leq \sum_{k=p+1, q} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{p+1} - \|T\|^{q+1}}{1 - \|T\|}, \quad (8.3)$$

elle converge par conséquent, soit vers  $s$ , et on aura

$$s_n (I - T) = I - T^{n+1} = (I - T) s_n,$$

d'où, à la limite

$$s (I - T) = I = (I - T) s.$$

Il en résulte que la somme de la série de Neumann  $s = \sum_{k=0, \infty} T^k$  est l'inverse de  $I - T$ .

▷ On aura de plus, d'après (8.3),

$$\left\| (I - T)^{-1} - \sum_{k=0}^n T^k \right\| = \left\| \sum_{k=0, \infty} T^k - \sum_{k=0}^n T^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1, \infty} T^k \right\| \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

□

**Corollaire 8.6** Si  $T_n$  est une suite d'éléments inversibles de  $\mathcal{A}$  qui converge vers un élément non inversible  $T$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{-1}\| = \infty$ .

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors il existe une constante  $C$  et une sous-suite  $T_{n'}$  extraite de  $T_n$  telle que  $\|T_{n'}^{-1}\| \leq C$ . On aura

$$T = T_{n'} + (T - T_{n'}) = T_{n'} (I + T_{n'}^{-1} (T - T_{n'})),$$

et  $\|T_{n'}^{-1} (T - T_{n'})\| \leq C \|T - T_{n'}\| < 1$ , pour  $n$  assez grand. D'après la proposition 8.5, il en résulte que  $I + T_{n'}^{-1} (T - T_{n'})$  est inversible, et par conséquent  $T$ , ce qui constitue une contradiction.

□

## 8.1 Spectre

De façon générale, si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , nous noterons  $T_\lambda = T - \lambda I$ .

### Définition 8.7

(i) On appelle spectre de  $T$ , et on note

$$\Sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ n'est pas inversible}\}.$$

(ii) On appelle ensemble résolvant de  $T$ , et on note  $\Pi(T)$ , le complémentaire de  $\Sigma(T)$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 8.1.1 Résolvante

**Définition 8.8** Si  $\zeta \in \Pi(T)$ , c'est-à-dire si  $T_\zeta$  est inversible, on pose

$$R(\zeta) = (T_\zeta)^{-1}; \quad (8.4)$$

la fonction  $\zeta \rightarrow R(\zeta)$  est la résolvante de  $T$ .

**Proposition 8.9** L'opérateur  $T$  et sa résolvante  $R(\zeta)$  commutent.

DÉMONSTRATION. On a en effet

$$\begin{aligned} TR(\zeta) &= (T - \zeta)R(\zeta) + \zeta R(\zeta) \\ &= I + \zeta R(\zeta) \\ &= R(\zeta) (R(\zeta)^{-1} + \zeta) = R(\zeta)T. \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.10** Si  $S$  commute avec  $T$  et  $\zeta, \xi \notin \Sigma(T)$ ,  $\xi \notin \Sigma(S)$ , alors  $(T - \zeta)^{-1}$  commute avec  $S$  et avec  $(S - \xi)^{-1}$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de multiplier à gauche et à droite par  $R(\zeta)$  l'égalité

$$(T - \zeta)S = S(T - \zeta)$$

pour obtenir  $SR(\zeta) = R(\zeta)S$ . On aura alors

$$(T - \zeta)^{-1}(S - \xi) = (S - \xi)(T - \zeta)^{-1},$$

et par conséquent, comme précédemment

$$(S - \xi)^{-1}(T - \zeta)^{-1} = (T - \zeta)^{-1}(S - \xi)^{-1}.$$

□

**Proposition 8.11 (Première identité de la résolvante)** Si  $\zeta$  et  $\zeta'$  appartiennent à  $\Pi(\mathbb{T})$ , alors

$$\mathbf{R}(\zeta) - \mathbf{R}(\zeta') = (\zeta - \zeta')\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{R}(\zeta'). \quad (8.5)$$

Il en résulte en particulier que  $\mathbf{R}(\zeta)$  et  $\mathbf{R}(\zeta')$  commutent.

DÉMONSTRATION. On a en effet

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\zeta) - \mathbf{R}(\zeta') &= \mathbf{R}(\zeta)(\mathbb{T} - \zeta')\mathbf{R}(\zeta') - \mathbf{R}(\zeta)(\mathbb{T} - \zeta)\mathbf{R}(\zeta') \\ &= \mathbf{R}(\zeta)(\zeta - \zeta')\mathbf{R}(\zeta') \\ &= (\zeta - \zeta')\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{R}(\zeta') \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.12** Si  $\mathbb{T} \in G(\mathcal{A})$  et  $\mathbf{H} \in \mathcal{A}$ , avec

$$\|\mathbf{H}\| \leq \frac{1}{2\|\mathbb{T}^{-1}\|},$$

alors  $\mathbb{T} + \mathbf{H} \in G(\mathcal{A})$ , avec

$$\|(\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - \mathbb{T}^{-1}\| \leq 2\|\mathbb{T}^{-1}\|^3 \|\mathbf{H}\|. \quad (8.6)$$

et

$$\|(\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - (\mathbb{I} - \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})\mathbb{T}^{-1}\| \leq 2\|\mathbb{T}^{-1}\|^3 \|\mathbf{H}\|^2. \quad (8.7)$$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord  $\mathbb{T} + \mathbf{H} = \mathbb{T}(\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})$ , et comme  $\|\mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}\| \leq \|\mathbb{T}^{-1}\| \|\mathbf{H}\| \leq 1/2$ , il résulte de la proposition (8.5) que  $\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}$  est inversible, d'où  $\mathbb{T} + \mathbf{H} \in G(\mathcal{A})$ .

▷ On aura

$$\begin{aligned} (\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - \mathbb{T}^{-1} &= (\mathbb{T}(\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}))^{-1} - \mathbb{T}^{-1} \\ &= \left( (\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})^{-1} - \mathbb{I} \right) \mathbb{T}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où, d'après la proposition 8.5 (ii),

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - \mathbb{T}^{-1}\| &\leq \|\mathbb{T}^{-1}\| \|\mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}\| / (1 - \|\mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}\|) \\ &\leq \|\mathbb{T}^{-1}\|^3 \|\mathbf{H}\| / (1 - \|\mathbb{T}^{-1}\| \|\mathbf{H}\|) \\ &\leq 2\|\mathbb{T}^{-1}\|^3 \|\mathbf{H}\|. \end{aligned}$$

▷ De même

$$\begin{aligned} (\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - (\mathbb{I} - \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})\mathbb{T}^{-1} &= (\mathbb{T}(\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}))^{-1} - (\mathbb{I} - \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})\mathbb{T}^{-1} \\ &= \left( (\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})^{-1} - (\mathbb{I} - \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H}) \right) \mathbb{T}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|(\mathbb{T} + \mathbf{H})^{-1} - (\mathbb{I} - \mathbb{T}^{-1}\mathbf{H})\mathbb{T}^{-1}\| \leq 2\|\mathbb{T}^{-1}\|^3 \|\mathbf{H}\|^2.$$

□

**Théorème 8.13**  $G(\mathcal{A})$  est ouvert et  $T \rightarrow T^{-1}$  est un homomorphisme de  $G(\mathcal{A})$ .

DÉMONSTRATION. Le lemme qui précède nous montre que si  $T \in G(\mathcal{A})$ , alors  $G(\mathcal{A})$  contient un voisinage de  $T$ . L'application  $T \rightarrow T^{-1}$  est bijective car  $T = (T^{-1})^{-1}$ , et continue d'après (8.6). □

## 8.1.2 Rayon spectral

**Théorème 8.14**

(i) Si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , on a

$$|\lambda| \leq \|T\|. \quad (8.8)$$

(ii)  $\Sigma(T)$  est un compact

(iii) La résolvante est une fonction holomorphe dans l'ensemble résolvant.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $|\lambda| > \|T\|$ , on aura  $I - \lambda^{-1}T \in G(\mathcal{A})$ , d'où  $T_\lambda \in G(\mathcal{A})$ , soit  $\lambda \notin \Sigma(T)$ . De plus  $\Sigma(T)$  est fermé, en effet l'application  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  définie par  $g(\lambda) = T_\lambda$  est continue, et par conséquent  $\Pi(T) = g^{-1}(G(\mathcal{A}))$  est ouvert. Il en résulte que  $\Sigma(T) = (\Pi(T))^c$  est compact.

▷ L'application  $\mu \rightarrow R(\mu)$  est continue dans  $\Pi(T)$  en vertu du théorème 8.13; l'identité de la résolvante (8.5) nous montre alors qu'elle est dérivable, de dérivée  $R'(\lambda) = (R(\lambda))^2$ . C'est dire que la fonction  $\lambda \rightarrow R(\lambda)$  est holomorphe (fortement) au point  $\lambda$ . □

### Première série de la résolvante

Comme la résolvante est holomorphe dans l'ensemble résolvant, elle peut y être développée en série entière, pour  $\lambda$  et  $\mu \in \Pi(T)$ , nous aurons

$$T_\mu = T_\lambda + (T_\mu - T_\lambda) = T_\lambda (I - (\mu - \lambda)R(\lambda)),$$

et par conséquent, dès que  $|\mu - \lambda| \|R(\lambda)\| < 1$ ,

$$R(\mu) = R(\lambda) \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu - \lambda)^k R(\lambda)^k,$$

soit

$$R(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu - \lambda)^k R(\lambda)^{k+1}, \quad (8.9)$$

qui constitue le développement en série entière de  $R(\mu)$  au voisinage de  $\lambda$ , et porte le nom de *première série de la résolvante*. Son rayon de convergence est supérieur ou égal à  $1/\|R(\lambda)\|$ , on verra dans la suite qu'il peut être déterminé exactement.

### Seconde série de la résolvante

On peut également développer la résolvante au voisinage de l'infini, soit en posant  $\zeta = 1/\lambda$ ,

$$R(\lambda) = \left( T - \frac{I}{\zeta} \right)^{-1} = \zeta (\zeta T - I)^{-1} = -\zeta \sum_{n \in \mathbb{N}} (\zeta T)^n,$$

série convergente dès que  $\|\zeta T\| < 1$ . On écrira

$$R(\lambda) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^{-n-1} T^n, \quad (8.10)$$

c'est la *seconde série de la résolvante*, elle converge dès que  $|\lambda| > \|T\|$ .

**Proposition 8.15** *Si  $T \neq 0$ , son spectre n'est pas vide.*

DÉMONSTRATION. Selon (8.10), si  $r > \|T\|$ , d'après le théorème des résidus,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r} \lambda^k R(\lambda) d\lambda = - \sum_{n \in \mathbb{N}} T^n \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r} \lambda^{k-n-1} d\lambda = -T^k, \quad (8.11)$$

puisque

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r} \lambda^{k-n-1} d\lambda = \delta_{k1}.$$

Il en résulte en particulier que si  $T \neq 0$ ,  $\Sigma(T) \neq \emptyset$ , car si tel n'était pas le cas  $R(\lambda)$  serait une fonction entière, et on aurait  $-T = \int_{|\lambda|=r} \lambda R(\lambda) d\lambda = 0$ . □

**Définition 8.16** *On appelle rayon spectral de  $T$ , et on note  $\rho(T)$  le nombre réel*

$$\rho(T) = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \Sigma(T) \} \quad (8.12)$$

Notons que d'après le théorème 8.14 on a

$$\rho(T) \leq \|T\|. \quad (8.13)$$

**Théorème 8.17** *On a*

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}, \quad (8.14)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons maintenant que cette formule reste valable pour tout  $r > \rho(T)$ , puisque  $R(\lambda)$  est holomorphe à l'extérieur du disque de rayon  $\rho(T)$ , et posons

$$M(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\| R\left( r e^{i\theta} \right) \right\|, \quad (8.15)$$

d'après (8.11), on aura

$$-T^k = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{ik\theta} \mathbf{R}(re^{i\theta}) d\theta, \quad (8.16)$$

d'où

$$\|T^k\| \leq r^{k+1} M(r), \quad (8.17)$$

et par conséquent  $\|T^k\|^{1/k} \leq r (rM(r))^{1/k}$ , d'où il résulte que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} \leq r$ , et ceci dès que  $r > \rho(T)$ . On a donc montré que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} \leq \rho(T).$$

▷ Démontrons maintenant que si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , alors  $\lambda^n \in \Sigma(T^n)$ , résultat qui sera considérablement généralisé au théorème 9.6. Supposons donc que  $\mu^n \in \Pi(T^n)$ , nous aurons

$$T^n - \mu^n I = (T - \mu I) C,$$

où  $C = \sum_{k=1, n} \mu^{k-1} T^{n-k}$ . Il en résulte que

$$I = (T^n - \mu^n I)^{-1} (T - \mu I) C = (T^n - \mu^n I)^{-1} C (T - \mu I),$$

et par conséquent  $\mu \in \Pi(T)$ , avec

$$(T - \mu I)^{-1} = \left( \sum_{k=1, n} \mu^{k-1} T^{n-k} \right) (T^n - \mu^n I)^{-1}.$$

▷ Pour  $\lambda \in \Sigma(T)$ , on aura donc  $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \rho(T^n) \leq \|T^n\|$ , soit

$$|\lambda| \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n},$$

et par conséquent

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} \leq \rho(T) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n},$$

d'où il résulte que  $\|T^k\|^{1/k}$  converge et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \rho(T).$$

□

**Remarque 8.18** *Il faut bien voir toutes les implications de ce résultat apparemment innocent*

(i) *la suite  $\|T^n\|^{1/n}$  possède une limite, cette limite ne dépend pas de la norme qui fait de  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach.*

(ii) *Si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est une algèbre de Banach, alors  $\Sigma_{\mathcal{B}}(T) \subset \Sigma_{\mathcal{A}}(T)$ ,  $\forall T \in \mathcal{A}$ , mais  $\rho_{\mathcal{B}}(T) = \rho_{\mathcal{A}}(T)$ .*

**Théorème 8.19 (Gelfand, Mazur)** *Une algèbre dans laquelle tout élément non nul est inversible est isométriquement isomorphe à  $\mathbb{C}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $T \in \mathcal{A}$ , non nul, d'après la proposition 8.15  $\exists \lambda$  tel que  $T - \lambda I$  ne soit pas inversible, et on aura  $T = \lambda I$ . puisque tout élément non nul de  $\mathcal{A}$  est inversible. Le spectre de  $T$  est donc constitué d'un seul élément que nous noterons  $\lambda(T)$ . Considérons alors l'application  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  qui en découle, c'est un isomorphisme puisque  $T = \lambda(T)I$ , et une isométrie puisque  $\|I\| = 1$ . □

C'est là un résultat quelque peu surprenant, puisqu'il en résulte en particulier que  $\mathcal{A}$  est commutative.

**Corollaire 8.20** *Si  $S$  et  $T$  commutent, alors  $\rho(ST) \leq \rho(S)\rho(T)$*

DÉMONSTRATION. On aura alors en effet  $(ST)^n = S^n T^n$ , et par conséquent

$$\rho(ST) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \rho(S)\rho(T).$$

□

**Corollaire 8.21**

- (i) *La résolvante tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow \infty$ .*
- (ii) *La couronne de convergence de la seconde série de la résolvante est donnée par  $\lambda \in ]\rho(T), \infty[$ .*
- (iii) *Le rayon de convergence de la série*

$$s(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta^n T^n$$

*est égal à  $1/\rho(T)$ .*

- (iv) *Le rayon de convergence de la première série de la résolvante au voisinage de  $\lambda$ , est égal à  $1/\rho(R(\lambda))$*

DÉMONSTRATION.



▷ Pour  $|\lambda| > \|T\|$ , on tout d'abord

$$\|R(\lambda)\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda|^{-n-1} \|T\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{T}{\lambda} \right\|^n = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|},$$

qui tend vers 0 quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

▷ Il est clair tout d'abord que la seconde série de la résolvante converge en dehors du disque de rayon  $\rho(T)$ , puisque  $R(\lambda)$  y est holomorphe. Supposons maintenant que la seconde série de la résolvante converge dans la couronne  $] \sigma, +\infty[$ , avec  $\sigma < \rho(T)$ , si  $\tau > \sigma$ , selon (8.17), on aura

$$\|T^k\| \leq \tau^{k+1} M(\tau),$$

où

$$M(\tau) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\| R\left(\tau e^{i\theta}\right) \right\|.$$

D'après la formule du rayon spectral (8.14), il en résulte que  $\rho(T) \leq \tau$ , et ceci  $\forall \tau > \sigma$ , d'où par conséquent  $\rho(T) = \sigma$ .

▷ On a

$$s(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} R\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

ce qui prouve que le rayon de convergence de la série  $s(\zeta)$  est égal à  $1/\rho(T)$ .

▷ Pour appliquer ce résultat à la première série de la résolvante, il suffit de poser  $\zeta = \mu - \lambda$  et  $R(\lambda) = T$ .

□

# Chapitre 9

## Le calcul fonctionnel holomorphe

### 9.1 Intégrale de Cauchy

Si  $p(z) = \sum_{n=0, N} a_n z^n$  est un polynôme de la variable complexe  $z$ , et si  $T \in \mathcal{A}$ , on note classiquement  $p(T)$  l'élément de  $\mathcal{A}$  défini par la formule

$$p(T) = \sum_{n=0, N} a_n T^n, \quad (9.1)$$

où, par définition  $T^0 = I$ . On va voir que l'intégrale de Cauchy permet de prolonger cette formule et de définir aisément des fonctions de  $T$ , du moins tant que ces dernières sont analytiques au voisinage du spectre. Si  $\varphi$  est holomorphe dans un ouvert  $\Delta$  du plan complexe contenant le spectre de  $T$ , on posera

$$\varphi(T) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) R(\zeta) d\zeta, \quad (9.2)$$

où  $\Gamma$  est un cycle (une somme finie de lacets) pour lequel chaque point de  $\Delta^c$  est d'indice 0 (on dit alors que  $\Gamma$  est homologue à 0 dans  $\Delta$ ), et chaque valeur spectrale de  $T$  d'indice 1 ; on dira alors que  $\Gamma$  est un cycle *compatible* avec  $\Sigma(T)$ . Le bord orienté d'un compact contenant  $\Sigma(T)$  et contenu dans  $\Delta$  constitue un tel cycle.

**Proposition 9.1** *Dans la formule (9.2) ci-dessus, le résultat ne dépend pas du cycle choisi.*

DÉMONSTRATION. Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux cycles compatibles avec  $\Sigma(T)$ , alors  $\Gamma \cup \{-\Gamma'\}$  est homologue à 0 dans  $\Delta \setminus \Sigma(T)$ , et comme  $\varphi(\zeta)R(\zeta)$  y est holomorphe, d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma \cup \{-\Gamma'\}} \varphi(\zeta) R(\zeta) d\zeta = 0.$$

□

**Lemme 9.2**

- (i) Si  $q$  est un polynôme sans zéros dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ , alors  $q(\mathbb{T})$  est inversible.  
(ii) Si  $p$  et  $q$  sont des polynômes sans zéros dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ , alors  $p(\mathbb{T})$  commute avec  $q(\mathbb{T})$  et  $(q(\mathbb{T}))^{-1}$ ,  $(p(\mathbb{T}))^{-1}$  commute avec  $(q(\mathbb{T}))^{-1}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, on pourra écrire

$$q(z) = C \prod_{n=1, N} (z - \zeta_n),$$

où  $\zeta_n \in \Pi(\mathbb{T})$  ; il en résulte que les  $\mathbb{T} - \zeta_n$  sont inversibles et que

$$(q(\mathbb{T}))^{-1} = C^{-1} \prod_{n=1, N} R(\zeta_n).$$

▷ Comme  $p(\mathbb{T})$  commute trivialement avec  $q(\mathbb{T})$ , le résultat découle alors du lemme 8.10. □

Constatons maintenant que si  $r$  est une fraction rationnelle sans pôles dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ , elle peut être mise sous la forme  $r = p/q$  où  $p$  et  $q$  sont des polynômes et  $q$  ne possède pas de zéros dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ . En vertu du lemme 9.2, il est alors possible de définir  $r(\mathbb{T})$  par la formule

$$r(\mathbb{T}) = p(\mathbb{T}) (q(\mathbb{T}))^{-1}. \quad (9.3)$$

Vérifions maintenant que la formule (9.2) est compatible avec la définition (9.3).

**Lemme 9.3** Si  $\Delta$  est un ouvert contenant  $\Sigma(\mathbb{T})$ ,  $r(\zeta)$  une fraction rationnelle dont tous les pôles sont à l'extérieur de  $\Delta$ , et  $\Gamma$  un cycle compatible avec  $\Sigma(\mathbb{T})$ , alors

$$r(\mathbb{T}) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} r(\zeta) R(\zeta) d\zeta.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Commençons par le cas où  $r_n(\zeta) = (\zeta - \alpha)^n$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $\alpha \notin \Delta$ . Comme  $\zeta \notin \Sigma(\mathbb{T})$ , on peut utiliser la première identité de la résolvante :  $R(\zeta) - R(\alpha) = (\zeta - \alpha)R(\zeta)R(\alpha)$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} r_n(\zeta)R(\zeta) &= r_n(\zeta) (R(\alpha) + (\zeta - \alpha)R(\zeta)R(\alpha)) \\ &= r_n(\zeta)R(\alpha) + r_{n+1}(\zeta)R(\zeta)R(\alpha). \end{aligned}$$

Si on pose alors

$$\theta_n(\mathbb{T}) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} r_n(\zeta)R(\zeta) d\zeta,$$

on obtient

$$\theta_n(\mathbb{T}) = -\frac{1}{2i\pi} R(\alpha) \int_{\Gamma} r_n(\zeta) d\zeta + R(\alpha) \theta_{n+1}(\mathbb{T}) = R(\alpha) \theta_{n+1}(\mathbb{T}),$$

puisque  $r_n$  est holomorphe dans  $\Delta$ .

▷ Montrons maintenant que  $\theta_0(\mathbb{T}) = \mathbb{I}$ . Comme  $R(\zeta)$  est holomorphe en dehors de  $\Sigma(\mathbb{T})$ , si  $\Gamma_s$  est un cercle centré à l'origine de rayon  $s$  supérieur à  $\rho(\mathbb{T})$ , on aura

$$\theta_0(\mathbb{T}) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_s} R(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 0} \int_{\Gamma_s} \zeta^{-n-1} \mathbb{T}^n d\zeta,$$

en vertu du développement (8.10) de la résolvante au voisinage de l'infini, soit

$$\theta_0(\mathbb{T}) = \mathbb{I} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_s} \zeta^{-1} d\zeta = \mathbb{I}.$$

Par récurrence, il en résulte alors que  $\theta_n(\mathbb{T}) = (\mathbb{T} - \alpha)^n$ .

▷ Dans le cas général, on utilisera la décomposition de la fraction rationnelle  $r(\zeta)$  en éléments simples :

$$r(\zeta) = p(\zeta) + \sum_{k=1, K} \sum_{n=1, N(k)} \frac{a_{k,n}}{(\zeta - \alpha_k)^n},$$

où  $p$  est un polynôme et les  $\alpha_k$  sont par hypothèse extérieurs à  $\Delta$ . La conclusion en découle. □

Par abus de langage, on notera  $\mathbf{1}$  la fonction  $\varphi$  constante égale à 1, et  $\zeta$  la fonction  $\varphi : \zeta \rightarrow \zeta$ .

**Lemme 9.4** *L'application  $\Phi : \varphi(\cdot) \rightarrow \varphi(\mathbb{T})$  de l'ensemble  $\mathfrak{R}$  des fractions rationnelles sans pôles dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ , vers  $\mathcal{A}$ , est l'unique homomorphisme d'algèbres qui vérifie  $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbb{I}$  et  $\Phi(\zeta) = \mathbb{T}$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord  $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbb{T}^0 = \mathbb{I}$  et  $\Phi(\zeta) = \mathbb{T}$ , d'après (9.1). D'autre part, si  $r_i = p_i/q_i \in \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, 2$  où les  $p_i$  et  $q_i$  sont des polynômes et  $q_i$  n'a pas de zéro dans  $\Sigma(\mathbb{T})$ , on aura

$$\begin{aligned} \Phi(r_1 r_2) &= (r_1 r_2)(\mathbb{T}) = (p_1 p_2)(\mathbb{T}) ((q_1 q_2)(\mathbb{T}))^{-1} \\ &= p_1(\mathbb{T}) p_2(\mathbb{T}) (q_1(\mathbb{T}))^{-1} (q_2(\mathbb{T}))^{-1} = r_1(\mathbb{T}) r_2(\mathbb{T}) = \Phi(r_1) \Phi(r_2), \end{aligned}$$

en vertu des lemmes 9.2 et 9.3.

▷ Supposons maintenant que  $\Phi'$  soit également un homomorphisme d'algèbres vérifiant  $\Phi'(\mathbf{1}) = \mathbb{I}$  et  $\Phi'(\zeta) = \mathbb{T}$  ; si  $p(z) = \sum_{n=0, N} a_n z^n$ , on a tout d'abord

$$\Phi'(p) = \sum_{n=0, N} a_n \Phi'(\zeta^n) = \sum_{n=0, N} a_n (\Phi'(\zeta))^n = \sum_{n=0, N} a_n \mathbb{T}^n = \Phi(p).$$

Si maintenant  $r = p/q$  est une fraction rationnelle sans pôle au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$ , on a  $r q = p$ , et par conséquent  $\Phi'(r) \Phi'(q) = \Phi'(p)$ , soit  $\Phi'(r) \Phi'(q) = \Phi(p)$ , et comme  $q$  ne s'annule pas au voisinage du spectre,  $\Phi'(r) = \Phi(p) (\Phi(q))^{-1} = \Phi(r)$ . □

**Proposition 9.5 (Riesz)** *L'application  $\Phi : \varphi(\cdot) \rightarrow \varphi(\mathbb{T})$  de l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$  dans  $\mathcal{A}$ , est l'unique homomorphisme d'algèbres qui vérifie*

$$(i) \quad \Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{I} \text{ et } \Phi(\zeta) = \mathbb{T}$$

(ii)  $\varphi_n(\mathbb{T}) \rightarrow \varphi(\mathbb{T})$ , quand  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformément sur tout compact.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord  $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{I}$  et  $\Phi(\zeta) = \mathbb{T}$  en vertu du lemme 9.4 Par ailleurs, si  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformément sur tout compact, alors comme  $\|\mathbb{R}(\zeta)\|$  est borné sur  $\Gamma$ ,

$$\int_{\Gamma} \varphi_n(\zeta) \mathbb{R}(\zeta) d\zeta \rightarrow \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \mathbb{R}(\zeta) d\zeta,$$

soit  $\varphi_n(\mathbb{T}) \rightarrow \varphi(\mathbb{T})$ .

▷ Il reste donc à démontrer que  $\Phi$  est un homomorphisme d'algèbres. On utilisera le théorème de Runge 6.1. Soient donc  $q_n$  et  $r_n$  deux suites de fractions rationnelles dont les pôles sont extérieurs à  $\Delta$  et qui convergent respectivement vers  $\varphi$  et  $\psi$ , uniformément sur tout compact de  $\Delta$ . D'après le lemme 9.4, on aura  $(q_n r_n)(\mathbb{T}) = q_n(\mathbb{T}) r_n(\mathbb{T})$ , et par conséquent  $(\varphi\psi)(\mathbb{T}) = \varphi(\mathbb{T})\psi(\mathbb{T})$ , c'est-à-dire  $\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$ .

▷ Supposons maintenant que  $\Phi'$  soit également un homomorphisme d'algèbres vérifiant (i), alors il coïncide avec  $\Phi$  sur  $\mathfrak{R}$ , d'après le lemme 9.4. S'il vérifie également (ii), le théorème de Runge permet de conclure à l'identité de  $\Phi$  et  $\Phi'$ .

□

Notons bien que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes au voisinage du spectre de  $\mathbb{T}$ , alors  $f(\mathbb{T})$  et  $g(\mathbb{T})$  commutent, puisque

$$f(\mathbb{T})g(\mathbb{T}) = (fg)(\mathbb{T}) = (gf)(\mathbb{T}) = g(\mathbb{T})f(\mathbb{T}).$$

**Théorème 9.6 (de transformation spectrale)** *Si  $\varphi$  est holomorphe au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$ , alors  $\Sigma(\varphi(\mathbb{T})) = \varphi(\Sigma(\mathbb{T}))$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons  $\lambda \in \Sigma(\mathbb{T})$ , et montrons que  $\varphi(\lambda) \in \Sigma(\varphi(\mathbb{T}))$ . Posons

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\lambda)}{\zeta - \lambda},$$

la fonction  $\psi$  est non seulement holomorphe en dehors de  $\lambda$ , mais également bornée au voisinage de  $\lambda$  car  $\psi(\zeta) \rightarrow \varphi'(\lambda)$  quand  $\zeta \rightarrow \lambda$ . Elle est donc holomorphe dans  $\Delta$ . Supposons que  $\varphi(\lambda) \notin \Sigma(\varphi(\mathbb{T}))$ , alors  $\varphi(\mathbb{T}) - \varphi(\lambda)$  est inversible et, selon le calcul holomorphe

$$(\mathbb{T} - \lambda) \psi(\mathbb{T}) = \varphi(\mathbb{T}) - \varphi(\lambda),$$

ce qui prouve que  $\psi(\mathbb{T}) (\varphi(\mathbb{T}) - \varphi(\lambda))^{-1}$  est l'inverse de  $\mathbb{T} - \lambda$ , et qui constitue une contradiction. Il en résulte que  $\varphi(\Sigma(\mathbb{T})) \subset \Sigma(\varphi(\mathbb{T}))$ .

▷ Réciproquement, comme  $\Sigma(\mathbb{T})$  est compact,  $\varphi(\Sigma(\mathbb{T}))$  est fermé, et par conséquent si on suppose que  $\mu \notin \varphi(\Sigma(\mathbb{T}))$ , la fonction  $\xi \rightarrow (\xi - \mu)^{-1}$  est holomorphe dans un voisinage de  $\varphi(\Sigma(\mathbb{T}))$ . Il en est donc de même pour la fonction  $\psi(\zeta) = (\varphi(\zeta) - \mu)^{-1}$  dans un voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$ . On aura alors  $\psi(\mathbb{T})(\varphi(\mathbb{T}) - \mu) = I$ , ce qui prouve que  $\mu \notin \Sigma(\varphi(\mathbb{T}))$ , d'où  $\Sigma(\varphi(\mathbb{T})) \subset \varphi(\Sigma(\mathbb{T}))$ .

□

**Proposition 9.7** *Si  $\varphi_2$  et  $\varphi_1$  sont respectivement analytiques au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$  et de  $\varphi_2(\Sigma(\mathbb{T}))$ , et si on pose  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$  alors  $\varphi(\mathbb{T}) = \varphi_1(\varphi_2(\mathbb{T}))$ .*

DÉMONSTRATION. Posons en effet  $s = \varphi_2(\mathbb{T})$ , notons  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  des ouverts contenant respectivement  $\Sigma(\mathbb{T})$  et  $\varphi_2(\Sigma(\mathbb{T})) = \Sigma(s)$ , d'après le théorème 9.6. Si  $\Gamma_2$  est un cycle compatible avec  $\Sigma(s)$ , nous aurons

$$\varphi_1(s) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} \varphi_1(\xi)(s - \xi)^{-1} d\xi,$$

mais si  $\Gamma_1$  est un cycle compatible avec  $\Sigma(\mathbb{T})$ , dont l'image par  $\varphi_2$  est contenue dans  $\Delta_2$  et formée de points d'indice 1 par rapport à  $\Gamma_2$ , alors pour  $\xi \in \Gamma_2$ , la fonction  $\zeta \rightarrow \varphi_2(\zeta) - \xi$  est holomorphe sur  $\Sigma(\mathbb{T})$ , et par conséquent

$$(s - \xi)^{-1} = (\varphi_2(\mathbb{T}) - \xi)^{-1} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} (\varphi_2(\zeta) - \xi)^{-1}(\mathbb{T} - \zeta)^{-1} d\zeta,$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_2} \varphi_1(\xi) \int_{\Gamma_1} (\varphi_2(\zeta) - \xi)^{-1}(\mathbb{T} - \zeta)^{-1} d\zeta d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_1} (\mathbb{T} - \zeta)^{-1} \left(\int_{\Gamma_2} \varphi_1(\xi)(\varphi_2(\zeta) - \xi)^{-1} d\xi\right) d\zeta \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(\varphi_2(\zeta))(\mathbb{T} - \zeta)^{-1} d\zeta = \varphi_1 \circ \varphi_2(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

d'après le théorème des résidus.

□

**Proposition 9.8** *Si  $\zeta \notin \Sigma(\mathbb{T})$ , alors*

$$\rho(\mathbb{R}(\zeta)) = \frac{1}{d(\zeta, \Sigma(\mathbb{T}))}. \tag{9.4}$$

DÉMONSTRATION. Posons en effet  $f(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ , c'est une fonction holomorphe au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$ , et par conséquent, d'après le théorème 9.6,  $\Sigma(\mathbb{R}(\zeta)) = \Sigma(f(\mathbb{T})) = f(\Sigma(\mathbb{T}))$ , soit  $\Sigma(\mathbb{R}(\zeta)) = \{(\lambda - \zeta)^{-1} \mid \lambda \in \Sigma(\mathbb{T})\}$ . Il en résulte que

$$\rho(\mathbb{R}(\zeta)) = \sup \{|\lambda - \zeta|^{-1} \mid \lambda \in \Sigma(\mathbb{T})\} = \frac{1}{\inf \{|\lambda - \zeta| \mid \lambda \in \Sigma(\mathbb{T})\}} = \frac{1}{d(\zeta, \Sigma(\mathbb{T}))}.$$

□

Notons que ce résultat corrobore celui relatif au rayon de convergence de la première série de la résolvante obtenu en 8.21 (iv), en effet ce dernier est égal au rayon du plus grand disque de centre  $\zeta$  inclus dans  $\Pi(\mathbb{T})$ , soit  $d(\zeta, \Sigma(\mathbb{T}))$ .

## 9.2 Réduction spectrale

**Définition 9.9** On dit que  $P \in \mathcal{A}$  est une projection si  $P$  est idempotent, c'est-à-dire si  $P^2 = P$

Il est clair que si  $P$  est une projection, alors  $P' = I - P$  également.

Dans le cas où  $\Sigma(\mathbb{T})$  est formé de deux fermés disjoints  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , le calcul holomorphe permet de réduire  $\mathbb{T}$ , au sens de la proposition suivante :

**Proposition 9.10 (de réduction spectrale)** Supposons que  $\Sigma(\mathbb{T}) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , où les  $\Sigma_i$  sont deux fermés disjoints non vides, notons  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2$  deux ouverts disjoints contenant respectivement  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , ainsi que  $\Gamma_i$  deux cycles respectivement compatibles avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , et posons

$$P_i = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R(\zeta) d\zeta, \quad i = 1, 2. \quad (9.5)$$

(i) Les  $P_i$  sont des projections vérifiant  $I = P_1 + P_2$ .

(ii) On a

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}P_1 + \mathbb{T}P_2 \text{ avec } \mathbb{T}P_i = g_i(\mathbb{T}), \quad (9.6)$$

où  $g_i(\zeta) = \zeta f_i(\zeta)$ , avec  $f_i = 1$  au voisinage de  $\Sigma_i$ ,  $f_i = 0$  au voisinage de  $\Sigma_j$ ,  $j \neq i$ , et

$$\Sigma(\mathbb{T}P_i) = \Sigma_i \cup \{0\}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , on a

$$P_i = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f_i(\zeta) R(\zeta) d\zeta, \quad (9.7)$$

Par conséquent, d'après le calcul holomorphe

$$P_i^2 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f_i^2(\zeta) R(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f_i(\zeta) R(\zeta) d\zeta = P_i,$$

ainsi que

$$P_1 + P_2 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (f_1(\zeta) + f_2(\zeta)) R(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta = I.$$

▷ On aura tout d'abord  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(P_1 + P_2) = \mathbb{T}P_1 + \mathbb{T}P_2$ , et on constate que

$$\mathbb{T}P_i = \Phi(\zeta) \Phi(f_i) = \Phi(\zeta f_i) = g_i(\mathbb{T}),$$

et par conséquent, d'après le théorème 9.6,

$$\Sigma(\mathbb{T}P_i) = \Sigma(g_i(\mathbb{T})) = g_i(\Sigma(\mathbb{T})) = \Sigma_i \cup \{0\}.$$

□

## 9.3 Singularités isolées

Dans le cas où la résolvante possède une singularité isolée, nous sommes à même d'utiliser le résultat de réduction spectrale de la proposition 9.10. Mais une étude détaillée va nous permettre d'obtenir des résultats plus précis.

### 9.3.1 Nilpotents

**Définition 9.11** On dit qu'un élément de l'algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est nilpotent si l'un de ses itérés est nul.

#### Proposition 9.12

- (i) Si  $T$  est nilpotent, son rayon spectral  $\rho(T)$  est nul
- (ii) Si  $\rho(T) = 0$  et  $T \neq 0$ , alors  $T$  n'est pas inversible

DÉMONSTRATION.

▷ En effet  $\rho(T) = \inf_n \|T^n\|^{1/n} = 0$ .

▷ Nous aurons  $\Sigma(T) \subset \{0\}$ , et en fait  $\Sigma(T) = \{0\}$ , si  $T$  est non nul, en vertu du théorème 8.14.

□

Contrairement au cas des opérateurs linéaires en dimension finie que nous étudierons ultérieurement, un élément de rayon spectral nul n'est pas nécessairement nilpotent, nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

**Définition 9.13** Un élément de l'algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  ayant un rayon spectral nul est dit quasi-nilpotent.

### 9.3.2 Développement en série de Laurent

Nous allons nous livrer à une étude détaillée du développement en série de Laurent de la résolvante au voisinage d'une *singularité isolée*.

Considérons  $\lambda \in \Sigma(T)$ , isolé, et développons  $R(\zeta)$  en série de Laurent au voisinage de  $\lambda$ , nous aurons

$$R(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\zeta - \lambda)^n A_n, \quad (9.8)$$

où les  $A_n$  dépendent bien entendu de  $\lambda$ .

Soit alors  $\gamma$  un lacet dont l'indice soit 1 par rapport à  $\lambda$  et 0 par rapport  $\Sigma(T) \setminus \lambda$ , par exemple un cercle parcouru dans le sens direct, contenant  $\lambda$  et suffisamment petit pour ne contenir aucun autre point de  $\Sigma(T)$ . Nous dirons que  $\gamma$  est un *lacet associé* à  $\lambda$ . Selon le théorème des résidus, nous aurons

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\zeta - \lambda)^{-n-1} R(\zeta) d\zeta, \quad (9.9)$$



**Lemme 9.14** Posons  $\eta_n = 0$  si  $n < 0$ , et  $\eta_n = 1$  si  $n \geq 0$ , alors

$$A_n A_m = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1} \quad (9.10)$$

Il en résulte en particulier que les coefficients du développement en série de Laurent commutent entre eux.

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $\gamma'$  un lacet associé à  $\lambda$ , contenant  $\gamma$  (c'est-à-dire pour lequel tout point de  $\gamma$  soit d'indice 1). Bien entendu on aura encore

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} (\zeta' - \lambda)^{-n-1} R(\zeta') d\zeta',$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} A_n A_m &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma'} (\zeta' - \lambda)^{-n-1} R(\zeta') d\zeta' \int_{\gamma} (\zeta - \lambda)^{-m-1} R(\zeta) d\zeta \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma'} \int_{\gamma} \frac{(\zeta' - \lambda)^{-n-1} (\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\zeta' - \zeta} (R(\zeta') - R(\zeta)) d\zeta d\zeta', \end{aligned}$$

d'après la première identité de la résolvante (8.5), soit

$$A_n A_m = \alpha - \beta,$$

avec

$$\alpha = \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma'} (\zeta' - \lambda)^{-n-1} R(\zeta') \int_{\gamma} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\zeta' - \zeta} d\zeta d\zeta',$$

et

$$\beta = \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma} (\zeta - \lambda)^{-m-1} R(\zeta) \int_{\gamma'} \frac{(\zeta' - \lambda)^{-n-1}}{\zeta' - \zeta} d\zeta' d\zeta,$$

▷ Selon le lemme 9.15 ci-dessous, on aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\zeta' - \zeta} d\zeta = \eta_m (\zeta' - \lambda)^{-m-1},$$

et par conséquent

$$\alpha = \frac{\eta_m}{2i\pi} \int_{\gamma'} (\zeta' - \lambda)^{-n-m-2} R(\zeta') d\zeta' = \eta_m A_{n+m+1}.$$

▷ De même

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{(\zeta' - \lambda)^{-n-1}}{\zeta - \zeta'} d\zeta' = (\eta_n - 1) (\zeta - \lambda)^{-n-1},$$

d'où

$$-\beta = \frac{\eta_n - 1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\zeta - \lambda)^{-n-m-2} R(\zeta) d\zeta = (\eta_n - 1) A_{n+m+1}.$$

La formule annoncée en découle.

□

**Lemme 9.15** Soit  $\delta$  un cercle de centre  $\lambda$ , parcouru dans le sens direct

(i) Si  $\xi$  est extérieur au disque de bord  $\delta$ , on aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\xi - \zeta} d\zeta = \eta_m (\xi - \lambda)^{-m-1}.$$

(ii) Si  $\xi$  est intérieur au disque de bord  $\delta$ , on aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\xi - \zeta} d\zeta = (\eta_m - 1) (\xi - \lambda)^{-m-1}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que si  $f$  et  $g$  ont pour développement en série de Laurent respectifs au voisinage de  $\lambda$

$$f(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (\zeta - \lambda)^n, \text{ et } g(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\zeta - \lambda)^n$$

alors le terme d'ordre  $-1$  du développement de  $fg$  n'est autre que

$$a_{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{-n-1} c_n.$$

▷ Notons alors que la fonction  $\psi_m(\zeta) = (\zeta - \lambda)^{-m-1} (\xi - \zeta)^{-1}$  est holomorphe dans le disque de bord  $\delta$  pour  $m < 0$ . Dans le cas contraire, elle admet une singularité en  $\zeta = \lambda$ , dont nous allons calculer le développement en série de Laurent. On pose  $f(\zeta) = (\zeta - \lambda)^{-m-1}$  et  $g(\zeta) = (\xi - \zeta)^{-1}$ , et on aura

$$c_n = g^{(n)}(\lambda) / (n + 1)! = (\xi - \lambda)^{-n-1}$$

et par conséquent

$$a_{-1} = (\xi - \lambda)^{-m-1}$$

Plus simplement on peut aussi écrire

$$\frac{1}{\xi - \zeta} = \frac{1}{\xi - \lambda} \frac{\xi - \lambda}{\xi - \lambda - (\zeta - \lambda)} = \frac{1}{\xi - \lambda} \sum_{k=0, \infty} \left( \frac{\zeta - \lambda}{\xi - \lambda} \right)^k,$$

et par conséquent

$$\frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\xi - \zeta} = \sum_{k=0, \infty} \frac{(\zeta - \lambda)^{k-m-1}}{(\xi - \lambda)^{k+1}}. \quad (9.11)$$

Il en résulte que le résidu de  $\psi_m$  en  $\zeta = \lambda$  est égal à  $2i\pi (\xi - \lambda)^{-m-1}$ , d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\xi - \zeta} d\zeta = (\xi - \lambda)^{-m-1}.$$

▷ Dans le second cas la fonction  $\psi_m(\zeta)$  admet une singularité en  $\zeta = \xi$ , et le résidu associé est égal à  $-2i\pi f(\xi) = -2i\pi (\xi - \lambda)^{-m-1}$ . Si  $m \geq 0$ , comme précédemment elle admet également une singularité en  $\zeta = \lambda$  à laquelle est associé le résidu  $2i\pi (\xi - \lambda)^{-m-1}$ . On aura donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{(\zeta - \lambda)^{-m-1}}{\xi - \zeta} d\zeta = -(\xi - \lambda)^{-m-1} + \eta_m (\xi - \lambda)^{-m-1}.$$

□

On va maintenant voir que les divers coefficients  $A_n$  se déduisent aisément de trois d'entre eux. On posera

$$\begin{aligned} S_\lambda = A_0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\zeta - \lambda)^{-1} R(\zeta) d\zeta \\ P_\lambda = -A_{-1} &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R(\zeta) d\zeta \\ D_\lambda = -A_{-2} &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\zeta - \lambda) R(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (9.12)$$

**Lemme 9.16** *Les coefficients du développement en série de Laurent de la résolvante vérifient*

$$\begin{aligned} A_{-k} &= -(D_\lambda)^{k-1}, \quad k \geq 2, \\ A_n &= (S_\lambda)^{n+1}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence à l'aide du lemme 9.14 et supposons que

$$A_{n-1} = (S_\lambda)^n, \quad n \geq 1,$$

alors  $(S_\lambda)^{n+1} = A_{n-1}A_0 = A_n$ . Admettons maintenant que

$$A_{-k} = -(D_\lambda)^{k-1}, \quad k \geq 2,$$

alors  $(D_\lambda)^k = A_{-k}A_{-2} = -A_{-k-1}$ .

□

Au voisinage de  $\zeta = \lambda$ , la résolvante pourra donc s'écrire sous la forme

$$R(\zeta) = V_\lambda(\zeta) + U_\lambda(\zeta), \quad (9.14)$$

où la partie régulière du développement en série de Laurent

$$U_\lambda(\zeta) = \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^n (S_\lambda)^{n+1}, \quad (9.15)$$

est appelée *résolvante réduite* et

$$V_\lambda(\zeta) = - \sum_{n \leq -2} (\zeta - \lambda)^n (D_\lambda)^{-n-1} - (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda, \quad (9.16)$$

est constituée de la partie singulière du développement.

**Proposition 9.17** *L'opérateur  $D_\lambda$  est quasi-nilpotent.*

DÉMONSTRATION. Le développement en série de Laurent de  $R(\zeta)$  au voisinage de  $\lambda$  converge dans un disque pointé de centre  $\lambda$ . Sa partie singulière  $v_\lambda$  converge donc dans le complémentaire de  $\{\lambda\}$ , et c'est donc vis-à-vis de  $t = (\zeta - \lambda)^{-1}$ , une série entière de rayon de convergence infini. Nous avons vu à la proposition 8.21 que ce rayon de convergence n'est autre que  $1/\rho(D_\lambda)$ ; il en résulte que  $\rho(D_\lambda) = 0$ , c'est-à-dire que  $D_\lambda$  est quasi-nilpotent.  $\square$

**Définition 9.18** *Une singularité isolée  $\lambda$  est dite semi-simple si l'opérateur quasi nilpotent  $D_\lambda$  associé est nul, c'est-à-dire si  $\lambda$  est un pôle simple de  $R(\zeta)$ .*

**Remarque 9.19**

(i) Soit  $e_\lambda(\zeta)$  identique à 1 au voisinage de  $\lambda$  et nulle au voisinage de  $\Sigma(T) \setminus \{\lambda\}$  et

$$f_\lambda^n(\zeta) = (\zeta - \lambda)^n e_\lambda(\zeta),$$

alors,  $\forall n > 0$ ,

$$\begin{aligned} P_\lambda &= (P_\lambda)^n = f_\lambda^0(T) = e_\lambda(T) \text{ et} & (9.17) \\ (D_\lambda)^n &= (T - \lambda)^n P_\lambda = (T - \lambda)^n e_\lambda(T) = f_\lambda^n(T). \end{aligned}$$

C'est dire, entre autres, que  $P_\lambda$  est une projection.

(ii) Remarquons également que le calcul fonctionnel holomorphe ne s'applique pas à  $S_\lambda$ , puisque  $(\zeta - \lambda)^{-1}$  n'est pas bornée au voisinage de  $\lambda$ .

**Proposition 9.20** *On a*

(i)

$$S_\lambda P_\lambda = P_\lambda S_\lambda = 0 \tag{9.18}$$

$$P_\lambda D_\lambda = D_\lambda P_\lambda = D_\lambda \tag{9.19}$$

(ii)

$$(T - \lambda) P_\lambda = P_\lambda (T - \lambda) = D_\lambda \tag{9.20}$$

(iii)

$$(T - \lambda) S_\lambda = S_\lambda (T - \lambda) = I - P_\lambda \tag{9.21}$$

DÉMONSTRATION.

▷ On a tout d'abord

$$P_\lambda S_\lambda = S_\lambda P_\lambda = -A_{-1} A_0 = 0$$

$$P_\lambda D_\lambda = D_\lambda P_\lambda = A_{-1} A_{-2} = -A_{-2} = D_\lambda,$$

en vertu des lemmes 9.14 et 9.16

▷ D'après (9.17), on a  $(T - \lambda)P_\lambda = f_\lambda^1(T) = D_\lambda$

▷ On aura

$$\begin{aligned} (T - \lambda)S_\lambda &= (T - \lambda)A_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\zeta - \lambda)^{-1} (T - \lambda)R(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\zeta - \lambda)^{-1} (T - \zeta)R(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma R(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} I \int_\gamma (\zeta - \lambda)^{-1} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma R(\zeta) d\zeta \\ &= I - P_\lambda \end{aligned}$$

□

Il résulte en particulier de (9.20) que

$$TP_\lambda = P_\lambda T = \lambda P_\lambda + D_\lambda, \quad (9.22)$$

soit encore  $TP_\lambda = g_\lambda(T)$ , où  $g_\lambda(\zeta) = \zeta$  au voisinage de  $\zeta = \lambda$  et  $g_\lambda = 0$  au voisinage de  $\Sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ , ce qui n'est rien d'autre que la formule (9.6) qui découle du théorème de réduction spectrale **9.10**. On peut maintenant se faire une idée plus précise de la signification de  $U_\lambda$  et  $V_\lambda$ .

**Proposition 9.21** *On a*

$$(i) \quad U_\lambda(\lambda) = S_\lambda$$

(ii)

$$\begin{aligned} V_\lambda(\zeta)P_\lambda &= P_\lambda V_\lambda(\zeta) = V_\lambda(\zeta) \\ U_\lambda(\zeta)(I - P_\lambda) &= (I - P_\lambda)U_\lambda(\zeta) = U_\lambda(\zeta) \end{aligned} \quad (9.23)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} R(\zeta)P_\lambda &= P_\lambda R(\zeta) = V_\lambda(\zeta) \\ R(\zeta)(I - P_\lambda) &= (I - P_\lambda)R(\zeta) = U_\lambda(\zeta) \end{aligned} \quad (9.24)$$

(iii)

$$\begin{aligned} U_\lambda(\zeta)(T - \zeta) &= (T - \zeta)U_\lambda(\zeta) = I - P_\lambda \\ V_\lambda(\zeta)(T - \zeta) &= (T - \zeta)V_\lambda(\zeta) = P_\lambda \end{aligned} \quad (9.25)$$

DÉMONSTRATION.

▷ La définition même (9.15) de  $U_\lambda$  implique  $U_\lambda(\lambda) = S_\lambda$ .

▷ En vertu de (9.19), on aura

$$\begin{aligned} V_\lambda(\zeta)P_\lambda &= - \sum_{n \leq -2} (\zeta - \lambda)^n (D_\lambda)^{-n-1} P_\lambda - (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda \\ &= - \sum_{n \leq -2} (\zeta - \lambda)^n (D_\lambda)^{-n-1} - (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda = V_\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

▷ De même en vertu de (9.18),

$$U_\lambda(\zeta)P_\lambda = P_\lambda U_\lambda(\zeta) = \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^{n+1} P_\lambda = 0,$$

et par conséquent

$$U_\lambda(\zeta) (I - P_\lambda) = (I - P_\lambda) U_\lambda(\zeta) = U_\lambda(\zeta)$$

▷ On écrira

$$\begin{aligned} U_\lambda(\zeta) (T - \zeta) &= U_\lambda(\zeta) (T - \lambda) + U_\lambda(\zeta) (\lambda - \zeta) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^n s_\lambda (T - \lambda) - \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^{n+1} (s_\lambda)^{n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^n (I - P_\lambda) - \sum_{n \geq 1} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^n (I - P_\lambda) - \sum_{n \geq 1} (\zeta - \lambda)^n (s_\lambda)^n (I - P_\lambda) = I - P_\lambda \end{aligned}$$

en vertu de (9.21) et (9.18).

▷ On aura enfin

$$\begin{aligned} I &= R(\zeta) (T - \zeta) = V_\lambda(\zeta) (T - \zeta) + U_\lambda(\zeta) (T - \zeta) \\ &= V_\lambda(\zeta) (T - \zeta) + I - P_\lambda, \end{aligned}$$

et par conséquent  $V_\lambda(\zeta) (T - \zeta) = P_\lambda$

□



# Chapitre 10

## Application aux opérateurs bornés

Considérons maintenant l'algèbre de Banach  $\mathcal{L}(X)$  formée des opérateurs bornés  $X \rightarrow X$ , et précisons dans ce cadre les résultats que nous venons d'obtenir.

### 10.1 Noyau, Image

#### Définition 10.1

(i) On appelle noyau de  $T$ , et on note  $\mathcal{N}(T)$ , le sous-espace suivant de  $X$  :

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in X \mid Tu = 0\}.$$

(ii) On appelle image de  $T$  (en fait de  $X$  par  $T$ ), et on note  $\mathcal{R}(T)$ , le sous-espace suivant de  $X$  :

$$\mathcal{R}(T) = \{v \in X \mid \exists u \in X, Tu = v\}.$$

**Lemme 10.2**  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est injectif et d'image fermée si et seulement si  $\exists C > 0$  tel que  $\forall x \in X$ , on ait  $\|x\| \leq C \|Tx\|$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que l'inégalité soit vérifiée, l'injectivité de  $T$  est alors claire. Supposons que  $y_n = Tx_n$  converge, soit vers  $y$ , elle est de Cauchy et on aura  $\|x_m - x_n\| \leq C \|T(x_m - x_n)\|$ , ce qui prouve que  $x_n$  est elle-même de Cauchy, elle converge donc, soit vers  $x$ , et par continuité, on aura  $y = Tx$ . Il en résulte que  $y \in \mathcal{R}(T)$  et par conséquent que  $\mathcal{R}(T)$  est fermé.

▷ Réciproquement si  $T$  est injective et d'image fermée, alors elle est continue et bijective sur l'espace de Banach  $\mathcal{R}(T)$ , et admet par conséquent un inverse continu  $\tilde{S} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ , d'après le théorème des homomorphismes **3.14**. Supposons maintenant que l'inégalité ne soit pas vérifiée, alors  $\exists x_n$  telle que  $\|x_n\| = 1$  et  $\|Tx_n\| < 1/n$ , mais on aura alors

$$1 = \|x_n\| = \left\| \tilde{S} \circ Tx_n \right\| \leq \left\| \tilde{S} \right\| / n,$$

ce qui constitue une contradiction.

□



Dans le spectre de  $T$ , nous distinguerons tout particulièrement l'ensemble des valeurs propres de  $T$

**Définition 10.3**

(i) On pose

$$N_\lambda = \{u \in X \mid Tu = \lambda u\},$$

c'est le noyau de  $T - \lambda$ , encore appelé sous-espace propre géométrique associé à la valeur propre  $\lambda$ , sa dimension  $n_\lambda$ , si elle est finie, est appelée multiplicité géométrique de la valeur propre  $\lambda$ .

(ii) On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$  si  $T - \lambda$  n'est pas injectif, c'est-à-dire s'il existe  $u \neq 0$  dans  $X$ , tel que  $Tu = \lambda u$ . On dit alors que  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . On appellera spectre ponctuel de  $T$  l'ensemble de ses valeurs propres :

$$\Sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N_\lambda \neq \{0\}\}$$

**Définition 10.4** On appelle

(i) Spectre ponctuel l'ensemble des valeurs propres :

$$\Sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{N}(T - \lambda) \neq \{0\}\},$$

(ii) Spectre continu

$$\Sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \Sigma(T) \mid T - \lambda \text{ injectif, et } \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = X \right\}.$$

(iii) Spectre résiduel

$$\Sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ injectif, et } \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq X \right\}$$

$\Sigma_p(T)$ ,  $\Sigma_c(T)$  et  $\Sigma_r(T)$  sont mutuellement disjoints, et comme de plus d'après le théorème des homomorphismes **3.14**, si  $T - \lambda$  est bijective elle est inversible, on aura

$$\Sigma(T) = \Sigma_p(T) \cup \Sigma_c(T) \cup \Sigma_r(T)$$

## 10.2 Réduction spectrale

La décomposition de l'espace en somme de sous-espaces stables permet de réduire l'opérateur selon ses restrictions. Il est alors facile d'expliciter le lien entre le spectre de l'opérateur et celui de ses restrictions.

**Proposition 10.5** Si  $T_M$  et  $T_{M'}$  sont les parties respectives de  $T$  dans  $M$  et  $M'$ , où  $M$  et  $M'$  sont deux supplémentaires topologiques invariants par  $T$ , alors

(i) Si  $\zeta \notin \Sigma(T)$ ,  $R(\zeta)$  laisse  $M$  et  $M'$  invariants.

(ii)

$$\begin{aligned}\Sigma(T) &= \Sigma(T_M) \cup \Sigma(T_{M'}) \\ \Sigma_p(T) &= \Sigma_p(T_M) \cup \Sigma_p(T_{M'})\end{aligned}$$

(iii) *Le sous-espace propre de  $T$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est la somme directe des sous-espaces propres respectifs de  $T_M$  et  $T_{M'}$  associés à  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $P$  la projection sur  $M$  parallèlement à  $M'$  et  $P'$  celle sur  $M'$  parallèlement à  $M$ . Selon la proposition **A.3**  $T$  commute avec  $P$ , et par conséquent d'après le lemme **8.10**  $R(\zeta)$  commute avec  $P$ , ainsi qu'avec  $P' = I - P$  ; il en résulte d'après la proposition **A.3** que  $R(\zeta)$  laisse  $M$  et  $M'$  invariants.

▷ Supposons tout d'abord que  $\xi \notin \Sigma(T)$ , alors  $(T - \xi)R(\xi) = I = R(\xi)(T - \xi)$ , et par conséquent

$$(T_M - \xi)R(\xi)|_M = I|_M = R(\xi)|_M(T_M - \xi)$$

Il en résulte que  $\xi \notin \Sigma(T_M)$ , et de même  $\xi \notin \Sigma(T_{M'})$ . Nous avons donc démontré que  $\Sigma(T_M) \cup \Sigma(T_{M'}) \subset \Sigma(T)$

▷ Réciproquement, si  $\xi \notin \Sigma(T_M) \cup \Sigma(T_{M'})$ , alors il existe  $S$  et  $S'$  telles que  $(T_M - \xi)S = S(T_M - \xi) = I|_M$  et  $(T_{M'} - \xi)S' = S'(T_{M'} - \xi) = I|_{M'}$ . On aura alors d'une part

$$\begin{aligned}(T - \xi)(SP + S'P') &= (T - \xi)SP + (T - \xi)S'P' \\ &= (T_M - \xi)SP + (T_{M'} - \xi)S'P' = P + P' = I\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(SP + S'P')(T - \xi) &= SP(T - \xi) + S'P'(T - \xi) \\ &= S(T - \xi)P + S'(T - \xi)P' = P + P' = I\end{aligned}$$

▷ Bien entendu, il est clair qu'une valeur propre de  $T_M$  ou  $T_{M'}$  est valeur propre de  $T$ . Supposons réciproquement que  $\lambda$  soit valeur propre de  $T$ , et  $u$  un vecteur propre associé, on aura  $T_M Pu = TPu = PTu = \lambda Pu$ , ce qui montre, si  $Pu \neq 0$ , que  $\lambda$  est valeur propre de  $T_M$ ; de même, si  $(I - P)u \neq 0$ ,  $\lambda$  est valeur propre de  $T_{M'}$ . Comme  $u = Pu + (I - P)u$ , on ne peut avoir simultanément  $u \neq 0$  et  $Pu = (I - P)u = 0$ , il en résulte que  $\lambda$  est valeur propre de  $T_M$  ou  $T_{M'}$  et que  $u$  appartient à la somme des (éventuels) sous-espaces propres de  $T_M$  et  $T_{M'}$  associés à  $\lambda$ . □

Il est souvent commode d'identifier les opérateurs  $T_M$  et  $TP = PT$ , puisqu'ils coïncident sur  $M$ . Toutefois, il faut prendre garde à la valeur propre 0 :

**Proposition 10.6** *Soient  $M$  et  $M'$  deux supplémentaires topologiques invariants par  $T$ ,  $P$  et  $P'$  les projections associées.*

(i) *Si  $\lambda$  est valeur propre de  $T_M$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $TP$ .*

(ii) Réciproquement, si  $\lambda \neq 0$ , est valeur propre de  $TP$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $T_M$ .

(iii) Si  $L$  est le noyau de  $T_M$ , alors  $L \oplus M'$  est le noyau de  $TP$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $u$  est vecteur propre de  $T_M$  associé à  $\lambda$ , on aura  $\lambda u = T_M u = TPu$ , puisque  $u \in M$ .

▷ Réciproquement, si  $PTu = TPu = \lambda u$ , alors, si  $\lambda \neq 0$ ,  $u \in M$ , et par conséquent  $\lambda$  est valeur propre de  $T_M$ .

▷ Notons déjà que  $L$  et  $M'$  sont de somme directe puisque  $L \subset M$ . Supposons alors que  $u \in \mathcal{N}(TP)$ , alors on aura  $T_M Pu = TPu = 0$ , et par conséquent  $Pu \in L$ . Comme  $u = Pu + (I - P)u$ , et  $L \subset M$ , il en résulte que  $u \in L \oplus M'$ . Réciproquement, il est clair que si  $u \in L \oplus M'$ , alors  $Pu \in L$  d'où  $TPu = 0$ .

□

Dans le cas où  $\Sigma(T)$  est formé de deux fermés disjoints  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , on va pouvoir préciser les résultats de la proposition **9.10** Rappelons que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux cycles respectivement compatibles avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , que  $f_i$  note une fonction vérifiant  $f_i = 1$  sur  $\Delta_i$  et 0 sur  $\Delta_j$ ,  $j \neq i$ , et que

$$P_i = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R(\zeta) d\zeta, \quad i = 1, 2.$$

(i) Selon la proposition **9.10**, les  $P_i$  sont des projections continues vérifiant  $I = P_1 + P_2$

(ii) d'après la proposition **A.1** on aura  $X = M_1 \oplus M_2$  avec  $M_i = \mathcal{R}(P_i)$

(iii) les  $M_i$  sont fermés d'après la proposition **A.6**

(iv) comme les  $P_i$  commutent avec  $T$ , les  $M_i$  sont invariants d'après la proposition **A.3**, et on aura

$$T = TP_1 + TP_2.$$

**Proposition 10.7 (de réduction spectrale)** Supposons que  $\Sigma(T) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , où les  $\Sigma_i$  sont deux fermés disjoints non vides

(i) Si  $S$  commute avec  $T$ , les  $M_i$  sont invariants par  $S$

(ii)  $\Sigma(T_i) = \Sigma_i$ , où  $T_i = T|_{M_i}$  est la partie de  $T$  dans  $M_i$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En effet  $S$  commute avec  $R(\zeta)$ , d'après le lemme **8.10**, et par conséquent  $S$  commute avec les  $P_i$  ; il en résulte que les  $M_i$  sont invariants par  $S$ .

▷ Choisissons  $\xi$  en dehors de  $\Sigma_i$ , et  $\Gamma_i$  tel que  $\xi$  soit d'indice nul par rapport à  $\Gamma_i$  ; avec  $g_i(\zeta) = \zeta f_i(\zeta)$  et  $\theta_i(\zeta) = (\zeta - \xi) f_i(\zeta)$ , nous aurons

$$(TP_i - \xi P_i) = g_i(T) - \xi f_i(T) = \theta_i(T),$$

et si nous posons  $h_i(\zeta) = f_i(\zeta)/(\zeta - \xi)$ , fonction analytique sur le spectre, nous aurons

$$\begin{aligned} (TP_i - \xi P_i) \circ h_i(T) &= h_i(T) \circ (TP_i - \xi P_i) = (h_i \theta_i)(T) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R(\zeta) d\zeta = P_i. \end{aligned}$$

C'est dire que  $h_i(T)|_{M_i}$  est l'inverse de  $(TP_i - \xi)|_{M_i}$  et par conséquent que  $\xi \notin \Sigma(T_i)$ . Il en résulte que  $\Sigma(T_i) \subset \Sigma_i$ .

▷ Réciproquement, selon la proposition **10.5**, on a

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma(T) = \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2) \text{ avec } \Sigma(T_i) \subset \Sigma_i,$$

et par conséquent, comme les  $\Sigma_i$  sont disjoints,  $\Sigma(T_i) = \Sigma_i$ .

□

Il est bon de noter que la différence de conclusion entre les items (ii) des propositions **9.10** et **10.7** est expliquée par la proposition **10.6**

## 10.3 Singularités isolées

Notons maintenant

$$M_\lambda = \mathcal{R}(P_\lambda) \text{ et } M'_\lambda = \mathcal{R}(I - P_\lambda) = \mathcal{N}(P_\lambda); \quad (10.1)$$

$M_\lambda$  est appelé *sous-espace algébrique* associé à la valeur spectrale  $\lambda$  et la décomposition

$$X = M_\lambda \oplus M'_\lambda, \quad (10.2)$$

constitue une somme directe topologique, puisque  $P_\lambda$  est continue.

Nous avons vu à la proposition **9.20** que

$$TP_\lambda = P_\lambda T = \lambda P_\lambda + D_\lambda \text{ et } D_\lambda P_\lambda = P_\lambda D_\lambda = D_\lambda, \quad (10.3)$$

c'est dire que  $T_{M_\lambda}$ , partie de  $T$  dans  $M_\lambda$  est formé de la somme d'un opérateur scalaire :  $\lambda I$ , et d'un opérateur quasi-nilpotent  $D_\lambda|_{M_\lambda}$ , partie de  $D_\lambda$  dans  $M_\lambda$ . De plus, d'après la proposition **9.21**, on constate

$$V_\lambda(\zeta) = -(\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda - \sum_{n=1, \infty} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (D_\lambda)^n \quad (10.4)$$

représente la partie de  $R(\zeta)$  dans  $M_\lambda$ , tandis que la la résolvante réduite,

$$U_\lambda(\zeta) = \sum_{n=0, \infty} (\zeta - \lambda)^n (S_\lambda)^{n+1}, \quad (10.5)$$

représente la partie de  $R(\zeta)$  dans  $M'_\lambda$ .

Enfin les parties de  $(T - \zeta)$  et  $V_\lambda(\zeta)$  dans  $M_\lambda$  sont inverses l'une de l'autre, tandis que les parties de  $(T - \zeta)$  et  $U_\lambda(\zeta)$  dans  $M'_\lambda = \mathcal{R}(I - P_\lambda)$  le sont également, ce qui justifie le nom de *résolvante réduite* que nous avons attribué à  $U_\lambda(\zeta)$ .

**Proposition 10.8**

(i) Si la singularité isolée  $\lambda$  est une valeur propre, son sous-espace propre géométrique  $N_\lambda$  est inclus dans le sous-espace algébrique  $M_\lambda$ .

(ii) Une singularité isolée  $\lambda$  semi-simple est une valeur propre, et on aura  $M_\lambda = N_\lambda$  si et seulement si  $\lambda$  est semi-simple.

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, puisque  $U_\lambda(\lambda) = S_\lambda$ , de (9.25) il résulte que  $S_\lambda(T - \lambda) = I - P_\lambda$ , et par conséquent que si  $u \in N_\lambda$ , c'est-à-dire  $(T - \lambda)u = 0$ , alors  $u = P_\lambda u$ , soit  $u \in M_\lambda$ .

▷ Selon la formule (9.20), on aura  $D_\lambda = (T - \lambda)P_\lambda = P_\lambda(T - \lambda)$ . Il en résulte que, si  $D_\lambda$  est nul alors  $(T - \lambda)P_\lambda u = 0 \forall u$ , d'où  $(T - \lambda)u = 0, \forall u \in M_\lambda$ , c'est dire que  $M_\lambda \subset N_\lambda$ , et par conséquent que  $\lambda$  est une valeur propre. Réciproquement, comme  $D_\lambda = (T - \lambda)P_\lambda$ , on aura  $D_\lambda = 0$  dès que  $M_\lambda \subset N_\lambda$ .

□

**10.4 La dimension finie**

Il s'agit ici d'appliquer au cas de la dimension finie, c'est-à-dire des opérateurs matriciels, les résultats que nous avons obtenus précédemment pour un opérateur borné.

Le résultat suivant est à la fois particulièrement simple et tout-à-fait essentiel ; il est bien entendu spécifique de la dimension finie.

**Théorème 10.9** Si  $T$  est un opérateur linéaire sur un espace  $X$  de dimension finie  $N$ , on a

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{R}(T) = \dim X.$$

DÉMONSTRATION. On notera  $\dot{u}$  la classe de  $u \in X$ .

▷ Montrons que  $T$  est une bijection  $X/\mathcal{N}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ . Nous notons  $T\dot{u}$  l'image de  $\dot{u}$ , elle ne dépend pas du représentant choisi dans  $\dot{u}$ . Supposons tout d'abord que  $T\dot{u} = 0$ , c'est dire que  $Tv = 0, \forall v \in \dot{u}$  ; il en résulte que  $\dot{u} = \mathcal{N}(T) = \dot{0}$ , et donc que  $T$  est injective. Réciproquement, si  $v \in \mathcal{R}(T)$ , on aura  $v = Tu$ , et par conséquent  $v = T\dot{u}$ .

▷ Notons  $e_1, \dots, e_k, k \leq N$ , une base de  $\mathcal{N}(T)$ , et  $e_{k+1}, \dots, e_N$  une base d'un sous-espace complémentaire dans  $X$ . Nous montrerons que les  $\dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_N$  forment une base de  $X/\mathcal{N}(T)$ , d'où le résultat.

▷ Les  $\dot{e}_j, j = k+1, N$  forment un système libre, supposons en effet que  $\dot{0} = \sum_{j=k+1, N} \mu_j \dot{e}_j$ , donc  $\exists w \in \mathcal{N}(T), 0 = w + \sum_{j=k+1, N} \mu_j e_j$ , et par conséquent  $w = 0 = \sum_{j=k+1, N} \mu_j e_j$ . Il en résulte que  $\mu_j = 0, j = k+1, N$ .

▷ Enfin un élément  $u$  de  $X$  est de la forme  $u = w + \sum_{j=k+1, N} \mu_j e_j$ , où  $w \in \mathcal{N}(T)$  ; il en résulte que  $\dot{u} = \sum_{j=k+1, N} \mu_j \dot{e}_j$ .

□

**Remarque 10.10** Notons que le théorème (et sa démonstration) restent valables si  $T$  est linéaire  $X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ , où  $X$  et  $\mathcal{R}(T)$  sont de dimension finie

**Corollaire 10.11** En dimension finie, un opérateur linéaire est injectif si et seulement si il est surjectif.

DÉMONSTRATION. En effet, dire que  $T$  est injectif, c'est dire que  $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ , et dire qu'il est surjectif, c'est dire que  $\dim \mathcal{R}(T) = \dim X$ .

□

**Remarque 10.12** Si  $X$  est de dimension finie, en vertu du corollaire 10.11,  $T - \lambda$  est inversible si et seulement si  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $T$ , c'est dire que

$$\Sigma(T) = \Sigma_p(T)$$

ou encore que les valeurs propres de  $T$  sont les singularités de la résolvante.

**Corollaire 10.13** En dimension finie, le rayon spectral est égal au module de la valeur propre de plus grand module, en d'autres termes

$$\rho(T) = \max_{\lambda \in \Sigma_p(T)} |\lambda|. \quad (10.6)$$

**Proposition 10.14** Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.

DÉMONSTRATION. En effet, Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des valeurs propres et  $u$  est à la fois vecteur propre associé à  $\lambda$  et  $\mu$ , on aura  $\lambda u = Tu = \mu u$ . Comme  $u \neq 0$ , il en résulte que  $\lambda = \mu$ .

□

Le corollaire suivant en découle :

**Corollaire 10.15** Si  $X$  est de dimension finie  $N$ , l'opérateur  $T$  possède au plus  $N$  valeurs propres.

Il en résulte en particulier que le spectre de  $T$  est formé d'au plus  $N$  points.

**Proposition 10.16** En dimension finie, un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X)$  dont le rayon spectral est nul, est nilpotent. De plus  $T^L = 0$  où  $L = \dim \mathcal{R}(T)$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\rho(T) = 0$ , alors, pour tout sous-espace invariant  $M$ ,  $\rho(T_M) \leq \rho(T) = 0$ , puisque la norme dans  $M$  est inférieure à celle dans  $X$  ; par conséquent  $T_M$  n'est pas inversible. Notons alors que les  $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(T^k)$  sont invariants par  $T$ , et vérifient

$$\mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_m \supset \cdots,$$

où les inclusions sont strictes. En effet,  $T|_{\mathcal{R}_k}$  n'étant pas inversible son image, qui n'est autre que  $\mathcal{R}_{k+1}$ , ne peut être  $\mathcal{R}_k$  tout entier. On aura donc nécessairement  $\mathcal{R}_m = \{0\}$  pour un certain  $m \leq L$ , c'est dire que  $T^m = 0$ .

□

Ce que nous avons démontré ci-dessus, c'est qu'en dimension finie, un opérateur quasi-nilpotent est en fait nilpotent. Il en résulte donc, d'après la proposition **9.17**

**Corollaire 10.17** *L'opérateur  $D_\lambda$  est nilpotent.*

**Définition 10.18** *Notons  $m_\lambda$  la dimension de  $M_\lambda = R(P_\lambda)$ .*

- (i) *Le nombre  $m_\lambda$  est appelé multiplicité algébrique de  $\lambda$*   
(ii) *On appelle indice de  $\lambda$ , et on note  $\nu_\lambda$ , le plus grand nombre entier tel que  $(D_\lambda)^{\nu_\lambda-1} \neq 0$ , soit*

$$0 = (D_\lambda)^{\nu_\lambda} \neq (D_\lambda)^{\nu_\lambda-1}.$$

**Corollaire 10.19** *On a*

$$\nu_\lambda \leq m_\lambda. \quad (10.7)$$

DÉMONSTRATION. En effet selon la formule (9.19), on a  $P_\lambda D_\lambda = D_\lambda$ , et par conséquent  $\mathcal{R}(D_\lambda) \subset M_\lambda$ , la proposition **10.16** nous prouve alors que  $(D_\lambda)^{m_\lambda} = 0$ , soit encore  $\nu_\lambda \leq m_\lambda$ .  $\square$

**Définition 10.20** *Une valeur propre  $\lambda$  est dite simple si  $m_\lambda = 1$ . Notons que dans ce cas, en vertu du corollaire **10.19**, on aura  $D_\lambda = (D_\lambda)^{m_\lambda} = 0$ , et que si toutes les valeurs propres de  $T$  sont simples, alors en vertu de (10.10) ci-après,  $T$  possède exactement  $N$  valeurs propres.*

### 10.4.1 La forme canonique d'un opérateur

**Proposition 10.21** *On a*

(i) 
$$P_\lambda P_\mu = P_\lambda D_\mu = D_\lambda D_\mu = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu. \quad (10.8)$$

(ii) 
$$\sum_{\lambda \in \Sigma(T)} P_\lambda = I \quad (10.9)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $e_\lambda$  une fonction égale à 1 au voisinage de la valeur propre  $\lambda$  et à 0 au voisinage des autres valeurs propres et  $f_\lambda(\zeta) = (\zeta - \lambda)e_\lambda(\zeta)$ , comme  $P_\lambda = e_\lambda(T)$  et  $D_\lambda = f_\lambda(T)$ , selon le calcul holomorphe on aura  $P_\lambda P_\mu = e_\lambda e_\mu(T) = 0$  et  $D_\lambda D_\mu = f_\lambda f_\mu(T) = 0$ .

▷ Selon la formule (9.12), le résidu de la résolvante au point  $\lambda$  est égal à  $-P_\lambda$  et en vertu de la formule (8.10) qui représente son développement au voisinage de l'infini, le résidu à l'infini de la résolvante est égal à  $T^0 = I$ . La formule (10.9) est donc la conséquence de la nullité de la somme de tous les résidus, y compris celui à l'infini.  $\square$

D'après (10.9)  $X$  est alors la somme des  $M_\lambda$ , et cette somme est directe puisque

$$P_\lambda P_\mu = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu,$$

soit

$$X = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma(T)} M_\lambda. \quad (10.10)$$

Posons alors

$$S = \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} \lambda P_\lambda \text{ et } D = \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} D_\lambda, \quad (10.11)$$

on aura

$$T = T \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} P_\lambda = \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} T P_\lambda$$

soit, selon la formule (10.3)

$$T = S + D. \quad (10.12)$$

L'opérateur  $S$ , somme directe d'opérateurs de multiplication est dit *diagonalisable*, quant à l'opérateur  $D$ , il est nilpotent, en effet, si  $n \geq \max_{\lambda \in \Sigma(T)} \nu_\lambda$ , on a

$$D^n = \left( \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} D_\lambda \right)^n = \prod_{\lambda \in \Sigma(T)} (D_\lambda)^n = 0,$$

puisque  $D_\lambda D_\mu = 0$  si  $\lambda \neq \mu$ .

Nous avons vu par ailleurs que le développement en série de Laurent (9.8) de la résolvante au voisinage de la valeur propre  $\lambda$  prend la forme suivante :

$$R(\zeta) = -(\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda - \sum_{n=1, \nu_\lambda-1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (D_\lambda)^n + \sum_{n=0, \infty} (\zeta - \lambda)^n (S_\lambda)^{n+1}, \quad (10.13)$$

et comme les valeurs propres sont en nombre fini, il en résulte que  $R(\zeta)$  est une fonction *méromorphe*.

Considérons maintenant la fonction

$$H(\zeta) = R(\zeta) + \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} \left( \sum_{n=1, \nu_\lambda-1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (D_\lambda)^n + (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda \right);$$

au voisinage de la valeur propre  $\mu$ , elle peut s'écrire sous la forme

$$H(\zeta) = \sum_{n=0, \infty} (\zeta - \mu)^n (S_\mu)^{n+1} + \sum_{\substack{\lambda \in \Sigma(T) \\ \lambda \neq \mu}} \left( \sum_{n=1, \nu_\lambda-1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (D_\lambda)^n + (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda \right),$$

elle est donc régulière en  $\zeta = \mu$ , et ceci en fait pour toute valeur propre  $\mu$ , c'est donc une fonction entière. Comme elle s'annule à l'infini, en vertu du corollaire **8.21**, elle



est nulle selon le théorème de Liouville, ce qui prouve la formule suivante, dite du *développement de la résolvante en fractions partielles* :

$$R(\zeta) = - \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} \left( (\zeta - \lambda)^{-1} P_\lambda + \sum_{n=1, \nu_\lambda - 1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (D_\lambda)^n \right). \quad (10.14)$$

Si on compare alors cette formule avec (10.13), on constate que le rôle de l'opérateur  $S_\lambda$  consiste fournir au voisinage de la valeur propre  $\lambda$  une représentation de la contribution de toutes les autres.

**Théorème 10.22 (Représentation spectrale)** *Tout opérateur  $T \in \mathcal{L}(X)$  est la somme d'un opérateur diagonalisable et d'un opérateur nilpotent, qui commutent entre eux; une telle décomposition est unique.*

DÉMONSTRATION. C'est l'unicité que nous devons démontrer. Nous supposons donc que l'opérateur  $T$  est de la forme  $T = S + D$ , où  $SD = DS$ , et  $D$  est nilpotent, soit  $D^N = 0$ , et qu'il existe un ensemble fini  $\Theta$  et des projecteurs  $P_\theta, \theta \in \Theta$ , tels que  $P_\theta P_\rho = 0$  pour  $\theta \neq \rho$ ,  $I = \sum_{\theta \in \Theta} P_\theta$ , et  $S = \sum_{\theta \in \Theta} \theta P_\theta$ .

▷ Démontrons tout d'abord que  $D$  commute avec chaque  $P_\theta$ . Comme  $P_\theta P_\rho = \delta_{\theta\rho}$ , on aura

$$\begin{aligned} \rho P_\theta D P_\rho &= \sum_{\mu} \mu P_\theta D P_\mu P_\rho = P_\theta D S P_\rho \\ &= P_\theta S D P_\rho = \sum_{\mu} \mu P_\theta P_\mu D P_\rho = \theta P_\theta D P_\rho, \end{aligned}$$

et par conséquent  $P_\theta D P_\rho = 0$  pour  $\theta \neq \rho$ . Comme  $\sum_{\theta \in \Theta} P_\theta = I$ , il en résulte que

$$0 = \sum_{\rho \neq \theta} P_\theta D P_\rho = P_\theta D (I - P_\theta),$$

et de même,  $0 = (I - P_\theta) D P_\theta$ , soit par conséquent  $D P_\theta = P_\theta D$ .

▷ Posons  $D_\theta = D P_\theta$ , nous aurons  $T - \zeta = \sum_{\theta \in \Theta} ((\theta - \zeta) P_\theta + D_\theta)$ , dont nous allons vérifier qu'en résulte l'expression suivante de la résolvante :

$$(T - \zeta)^{-1} = - \sum_{\tau \in \Theta} \left( (\zeta - \tau)^{-1} P_\tau + \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \tau)^{-k-1} D_\tau^k \right),$$

Il s'agit d'une décomposition en fractions partielles, dont l'unicité est aisée à démontrer.

▷ En effet, on aura tout d'abord

$$D_\tau^k P_\theta = D^k P_\tau P_\theta = \delta_{\tau\theta} D^k,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
& - (T - \zeta) \sum_{\tau \in \Theta} \left( (\zeta - \tau)^{-1} P_\tau + \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \tau)^{-k-1} D_\tau^k \right) \\
&= - \sum_{\theta \in \Theta} ((\theta - \zeta) P_\theta + D_\theta) \sum_{\tau \in \Theta} \left( (\zeta - \tau)^{-1} P_\tau + \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \tau)^{-k-1} D_\tau^k \right) \\
&= I + \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \theta)^{-k} D_\theta^k - \sum_{\theta \in \Theta} (\zeta - \theta)^{-1} D_\theta - \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \theta)^{-k-1} D_\theta^{k+1},
\end{aligned}$$

soit

$$- (T - \zeta) \sum_{\tau \in \Theta} \left( (\zeta - \tau)^{-1} P_\tau + \sum_{k=1, N-1} (\zeta - \tau)^{-k-1} D_\tau^k \right) = I.$$

□

### Proposition 10.23

(i) On a

$$\mathcal{N}(T - \lambda I)^n = M_\lambda \text{ et } \mathcal{R}(T - \lambda I)^n = M'_\lambda, \forall n \geq \nu_\lambda \quad (10.15)$$

(ii) L'indice  $\nu_\lambda$  vérifie

$$\mathcal{N}(T - \lambda I)^{\nu_\lambda} = \mathcal{N}(T - \lambda I)^n \text{ si et seulement si } n \geq \nu_\lambda. \quad (10.16)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $n \geq \nu_\lambda$ , comme selon (9.17) on a  $D_\lambda^n = (T - \lambda)^n P_\lambda$ , il en résulte que  $0 = (D_\lambda)^n = (T - \lambda)^n P_\lambda$ , et par conséquent  $\mathcal{N}(T - \lambda)^n \supset M_\lambda = \mathcal{R}(P_\lambda)$ ,  $\forall n \geq \nu_\lambda$ . On a également  $0 = (D_\lambda)^n = P_\lambda (T - \lambda)^n$ , d'où  $\mathcal{R}(T - \lambda I)^n \subset \mathcal{N}(P_\lambda) = M'_\lambda$ ,  $\forall n \geq \nu_\lambda$ ; enfin comme  $X = M_\lambda \oplus M'_\lambda$  et

$$\dim \mathcal{N}(T - \lambda I)^n + \dim \mathcal{R}(T - \lambda I)^n = \dim X,$$

il en résulte que  $\mathcal{N}(T - \lambda I)^n = M_\lambda$  et  $\mathcal{R}(T - \lambda I)^n = M'_\lambda$ ,  $\forall n \geq \nu_\lambda$ .

▷ Par ailleurs, pour  $n < \nu_\lambda$ ,  $(D_\lambda)^n \neq 0$ , c'est-à-dire qu'il existe  $u$  tel que  $(T - \lambda)^n P_\lambda u \neq 0$ , et par conséquent,  $\mathcal{N}(T - \lambda I)^n \neq M_\lambda = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\nu_\lambda}$ . La conclusion en découle.

□

On obtient aisément la représentation spectrale de  $\varphi(T)$  à partir de celle de  $T$  à l'aide des formules (9.2) et (10.14) : au voisinage de  $\lambda$ , on aura

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(\lambda) (\zeta - \lambda)^k, \text{ où } \alpha_k(\lambda) = \frac{\varphi^{(k)}(\lambda)}{k!},$$

et par conséquent, le résidu de  $\varphi(\zeta)R(\zeta)$  au voisinage de  $\lambda$ . est égal à

$$-\alpha_0(\lambda)P_\lambda - \sum_{j=1, \nu_\lambda-1} \alpha_j(\lambda)D_\lambda^j.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta)R(\zeta) d\zeta & (10.17) \\ &= \sum_{\lambda \in \Sigma(T)} (\lambda' P_\lambda + D'_\lambda) \text{ avec } \lambda' = \varphi(\lambda) \text{ et } D'_\lambda = \sum_{j=1, \nu_\lambda-1} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda)}{j!} D_\lambda^j \end{aligned}$$

En particulier on aura  $\varphi(T) = \psi(T)$  dès que les dérivées de  $\varphi$  et  $\psi$  sont égales au moins jusqu'à l'ordre  $\nu_\lambda - 1$  en chaque point du spectre. Une conséquence immédiate en est le

**Théorème 10.24 (de Cayley-Hamilton)** *Si  $q(\zeta)$  est un polynôme contenant en facteur  $\prod_{\lambda \in \Sigma(T)} (\zeta - \lambda)^{\nu_\lambda}$ , alors  $q(T) = 0$ .*

A dire vrai, dans la forme classique du Théorème de Cayley-Hamilton, les  $\nu_\lambda$  sont remplacés par les  $m_\lambda$ , mais comme  $\nu_\lambda \leq m_\lambda$ , ce n'en est là qu'une conséquence. On peut également noter un phénomène intéressant : comme, étant donnée une fonction  $\varphi(\zeta)$  régulière au voisinage des points du spectre, on peut toujours construire un polynôme  $p(\zeta)$  ayant les mêmes dérivées en ces points jusqu'à l'ordre  $\nu_\lambda - 1$ , on aura  $\varphi(T) = p(T)$ , ce qui réduit (moyennant la construction du polynôme  $p$ ) la théorie des fonctions analytiques d'opérateurs à une pure théorie algébrique portant sur des polynômes.

Compte tenu de ce que les  $D_\lambda$  commutent avec les  $P_\mu$ , et de l'unicité de la représentation spectrale, il en résulte que (10.17) *constitue la représentation spectrale de  $\varphi(T)$* , et par conséquent le

**Théorème 10.25** *Le spectre de  $\varphi(T)$  est l'image par  $\varphi$  du spectre de  $T$ , les projecteurs spectraux ainsi que les multiplicités algébriques étant conservés, étant entendu que si  $\theta = \varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$ , alors  $P_\theta = P_\lambda + P_\mu$  et  $m_\theta = m_\lambda + m_\mu$ .*

# Chapitre 11

## Représentation matricielle

Nous n'avons jusqu'ici pas eu besoin de nous départir de notre parti pris d'utiliser des méthodes intrinsèques pour obtenir des résultats tout à fait détaillés. Il reste que l'intervention de bases devient nécessaire si nous voulons aller plus loin, la théorie des déterminants et la représentation matricielle (que nous avons soigneusement évitées) se révélant des outils précieux.

### 11.1 La forme réduite de Jordan

La décomposition de l'espace sous la forme  $X = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma(T)} M_\lambda$  que nous venons d'obtenir nous permet de choisir pour base la réunion de bases de chacun des  $M_\lambda$ . et d'obtenir ainsi une matrice sous forme bloc diagonale, chaque bloc, de dimension  $m_\lambda$ , correspondant à l'action de  $\lambda P_\lambda + D_\lambda$  dans  $M_\lambda$ . Il s'agit donc seulement de choisir une base adéquate dans chacun des  $M_\lambda$ . En ce qui concerne le terme  $\lambda P_\lambda$ , le choix est indifférent, la matrice associée à  $P_\lambda$  étant l'identité. la difficulté ne se présentera donc que si  $\lambda$  n'est pas semi-simple, c'est-à-dire si  $D_\lambda$  n'est pas nul.

Nous partirons de la chaîne suivante d'inclusions, que nous savons strictes :

$$M_\lambda = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\nu_\lambda} \supset \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\nu_\lambda - 1} \supset \dots \supset \mathcal{N}(T - \lambda I) = N_\lambda,$$

Comme nous ne nous intéresserons qu'à une valeur propre déterminée, nous simplifierons les notations, omettant généralement de l'indiquer quand elle apparaît en indice ; en particulier nous noterons  $\nu$  l'indice de la valeur propre,  $m$  sa multiplicité algébrique et  $n$ , dimension de  $N_\lambda$ , sa multiplicité géométrique. Nous poserons  $E^\mu = \mathcal{N}(T - \lambda I)^\mu$

**Lemme 11.1** *Il existe une suite de sous-espaces  $F^\mu$ ,  $\mu = 2, \nu$  tels que*

- (i)  $F^\mu \oplus E^{\mu-1} = E^\mu$
- (ii)  $(T - \lambda I)F^\mu \subset F^{\mu-1}$

DÉMONSTRATION.





- (i) Une permutation circulaire de  $n$  termes est le produit de  $n - 1$  transpositions élémentaires.
- (ii) Pour  $j > i$ , la transposition  $\sigma^{(i,j)}$  est le produit de  $2(j - i) - 1$  transpositions élémentaires.
- (iii) Toute permutation est le produit d'un nombre fini de transpositions élémentaires.

DÉMONSTRATION.

▷ On a en effet  $\sigma = \tau^{(1)} \circ \tau^{(2)} \circ \dots \circ \tau^{(n-1)}$ .

▷ On a en effet  $\sigma^{(i,j)} = \tau^{(i)} \circ \tau^{(i+1)} \circ \dots \circ \tau^{(j-2)} \circ \tau^{(j-1)} \circ \tau^{(j-2)} \circ \dots \circ \tau^{(i)}$ .

▷ On raisonnera par récurrence sur  $n$  ; il est clair que la proposition est vérifiée pour  $n = 2$ . Posons  $\mu = \sigma^{(n,\sigma(n))} \circ \sigma$ , on aura  $\mu(n) = n$  et on pourra donc poser  $\tilde{\mu} = \mu|_{\{1, \dots, n-1\}}$ , formule qui fait de  $\tilde{\mu}$  une permutation de  $\{1, \dots, n-1\}$ . En vertu de l'hypothèse de récurrence  $\tilde{\mu}$  est le produit  $\tilde{\tau}_1 \circ \tilde{\tau}_2 \circ \dots \circ \tilde{\tau}_r$  d'un nombre fini de transpositions élémentaires de  $\{1, \dots, n-1\}$ ; si on note  $\tau_i$  la transposition élémentaire de  $\{1, \dots, n\}$  telle que

$$\tau_i(k) = \tilde{\tau}_i(k), \quad k \leq n-1 \text{ et } \tau_i(n) = n,$$

on constate que

$$\mu = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r;$$

il en résulte que  $\mu$  est le produit d'un nombre fini de transpositions élémentaires. Or il en est de même de  $\sigma^{(n,\sigma(n))}$ , et comme une transposition est égale à son inverse, de  $\sigma$ .

□

## 11.2.2 Applications alternées

### Définition 11.5

(i) Une application  $u$ ,  $n$ -linéaire :  $X^n \rightarrow X$  est dite antisymétrique si pour toute transposition élémentaire  $\tau^{(i)}$ ,

$$u(a_{\tau^{(i)}(1)}, a_{\tau^{(i)}(2)}, \dots, a_{\tau^{(i)}(n)}) = -u(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \forall a_j \quad j = 1, n.$$

(ii) Une application  $n$ -linéaire :  $X^n \rightarrow X$  est dite alternée si

$$u(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

dès que  $\exists i \neq j$ , avec  $a_i = a_j$ .

**Remarque 11.6** Comme une transposition  $\sigma^{(i,j)}$  est le produit d'un nombre impair de transpositions élémentaires, si  $u$  est antisymétrique, on aura également pour toute transposition  $\sigma^{(i,j)}$

$$u(a_{\sigma^{(i,j)}(1)}, a_{\sigma^{(i,j)}(2)}, \dots, a_{\sigma^{(i,j)}(n)}) = -u(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \forall a_j \quad j = 1, n.$$

**Lemme 11.7** Dans le cas où  $X$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $u$  est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura

$$\begin{aligned} 0 &= u(a_1, \dots, a_i + a_{i+1}, a_i + a_{i+1}, \dots, a_m) \\ &= u(a_1, \dots, a_i, a_i, \dots, a_m) + u(a_1, \dots, a_{i+1}, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ &\quad + u(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) + u(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_m) \\ &= u(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) + u(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_m) \end{aligned}$$

par conséquent,  $u$  est antisymétrique.

▷ Réciproquement, si  $u$  est antisymétrique, alors

$$u(e_1, e_2, \dots, e, e, \dots, e_m) + u(e_1, e_2, \dots, e, e, \dots, e_m) = 0,$$

soit

$$u(e_1, e_2, \dots, e, e, \dots, e_m) = 0.$$

□

### 11.2.3 Signature

#### Théorème 11.8

(i) Il existe une et une seule application  $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, +1\}$ , qui soit un homomorphisme de groupes et vérifie  $\varepsilon(\tau) = -1$  pour toute transposition élémentaire  $\tau$ . Alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$  si  $\sigma$  est le produit de  $r$  transpositions, en particulier  $\varepsilon(\sigma^{(i,j)}) = -1$  pour toute transposition  $\sigma^{(i,j)}$ . La fonction  $\varepsilon(\sigma)$  est appelée signature de la permutation  $\sigma$ .

(ii) Si  $f$  est antisymétrique  $X^n \rightarrow M$ , groupe additif, alors

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $f$  une fonction antisymétrique  $X^n \rightarrow M$ , on va montrer que si  $\sigma$  s'écrit comme produit de  $r$  transpositions élémentaires, alors

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^r f(x_1, \dots, x_n).$$

On opère par récurrence relativement à  $r$ . C'est vrai tout d'abord pour  $r = 1$ , par définition de l'antisymétrie. Supposons que ce le soit pour  $r - 1$ , et que  $\sigma$  soit le produit de  $r$  transpositions élémentaires, on aura  $\sigma = \tau \circ \omega$ , où  $\omega$  est le produit de  $r - 1$  transpositions élémentaires. Il en résulte que

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= -f(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}) \\ &= -(-1)^{r-1} f(x_1, \dots, x_n) \\ &= (-1)^r f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$



▷ Supposons maintenant que  $\sigma$  soit simultanément le produit de  $r$  et  $p$  transpositions élémentaires, alors pour toute fonction  $f$  antisymétrique,

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= (-1)^r f(x_1, \dots, x_n) \\ &= (-1)^p f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

soit

$$0 = ((-1)^r - (-1)^p) f(x_1, \dots, x_n).$$

Si nous choisissons  $X = \mathbb{Z}$  et  $M = \mathbb{Z}$ , nous pouvons prendre pour  $f$ , la fonction  $g : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  définie selon

$$g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

Elle est bien entendu alternée, et par conséquent antisymétrique ; elle n'est pas identiquement nulle et par conséquent  $(-1)^r = (-1)^p$ . On pourra donc poser  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$ , et on aura

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall f \text{ antisymétrique : } X^n \rightarrow M. \quad (11.1)$$

▷ Il est clair que  $\varepsilon(\tau) = -1$  pour toute transposition élémentaire, il reste à démontrer que  $\varepsilon$  est un homomorphisme. On aura en effet pour  $\sigma = \omega \circ \mu$ ,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\omega) f(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}) = \varepsilon(\omega) \varepsilon(\mu) f(x_1, \dots, x_n)$$

soit  $\varepsilon(\omega \circ \mu) = \varepsilon(\omega) \varepsilon(\mu)$  (et en particulier  $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ ).

□

## 11.2.4 Endomorphismes

Supposons que  $X$  est de dimension finie  $n$ , et notons  $e_i, i = 1, n$  une base de  $X$ . On peut alors calculer la valeur d'une application multilinéaire  $f$  de la façon suivante : si  $a_i = \sum_{j_i=1, n} a_i^{j_i} e_{j_i}$ , on aura

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j_1=1, n} \sum_{j_2=1, n} \dots \sum_{j_n=1, n} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

Si  $f$  est  $n$ -linéaire alternée, alors seuls sont non nuls les termes de la forme  $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$ . Il en résulte que,

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)} \quad (11.2)$$

et si  $f_0$  note une forme  $n$ -linéaire alternée non nulle, on aura

$$f(a_1, \dots, a_n) = f_0(a_1, \dots, a_n) \frac{f(e_1, \dots, e_n)}{f_0(e_1, \dots, e_n)};$$

C'est dire que dans un espace de dimension  $n$ , toutes les formes  $n$ -linéaires alternées sont proportionnelles.

**Théorème 11.9** *Si  $u$  est un endomorphisme de  $X$ , alors il existe un unique scalaire, noté  $\det u$ , tel que, pour toute forme  $n$ -linéaire alternée  $f$ , on ait*

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x_i \in X \quad (11.3)$$

DÉMONSTRATION. Considérons l'application  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f_0(u(x_1), \dots, u(x_n))$ , c'est une forme  $n$ -linéaire alternée, et par conséquent elle est proportionnelle à  $f_0$ , le résultat découle alors du fait que toute forme  $n$ -linéaire alternée est proportionnelle à  $f_0$ . □

Notons que  $\det I = 1$ .

**Proposition 11.10** *Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes, alors*

$$\det (u \circ v) = \det u \det v. \quad (11.4)$$

DÉMONSTRATION. On aura

$$\begin{aligned} \det (u \circ v) f_0(x_1, \dots, x_n) &= f_0(u(v(x_1)), \dots, u(v(x_n))) \\ &= \det u f_0(v(x_1), \dots, v(x_n)) \\ &= \det u \det v f_0(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

**Proposition 11.11** *Pour que  $\det u \neq 0$ , il faut et il suffit que  $u$  soit bijectif.*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $u$  est bijectif, on aura  $I = u \circ u^{-1}$ , et par conséquent  $1 = \det u \det (u^{-1})$ . il en résulte que  $\det u \neq 0$

▷ Réciproquement, si  $u$  n'est pas bijectif, choisissons  $e_1 \in \mathcal{N}(u)$ , et construisons une base  $e_i$  dont  $e_1$  soit le premier élément, on aura

$$0 = f_0(0, \dots, u(e_n)) = \det u f_0(e_1, \dots, e_n),$$

et par conséquent  $\det u = 0$ . □

Il en résulte en particulier que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\det (u - \lambda I) = 0$

**Proposition 11.12** *Si  $a_i = u(e_i)$ , et*

$$a_i = \sum_{j=1, n} a_i^j e_j$$

on a

$$\det u = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)} \quad (11.5)$$

DÉMONSTRATION. En effet

$$\begin{aligned} f_0(a_1, \dots, a_n) &= f_0(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)} \\ &= \det u f_0(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

□

Sous cette forme il est clair que  $\det(u - \zeta I)$  est un polynôme de degré  $n$  vis-à-vis de  $\zeta$ , dont le coefficient de  $\zeta^n$  est égal à  $(-1)^n \det I = (-1)^n$ . Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de la matrice de  $u$  dans la base  $e_i$  ; ses racines sont les valeurs propres de  $u$ . Il est également clair que le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est égal au produit des déterminants de ces blocs ; la forme réduite de Jordan que nous avons précédemment étudiée nous montre alors qu'on peut choisir une base sur chaque espace  $M_\lambda$ , de dimension  $m_\lambda$ , telle que la matrice de la partie de  $T$  dans  $M_\lambda$ , soit une matrice triangulaire inférieure de diagonale  $\lambda$ . Il en résulte que  $m_\lambda$  est la multiplicité de la racine  $\lambda$  du polynôme caractéristique. La dénomination de *multiplicité algébrique* n'est donc pas mal choisie.

### 11.2.5 Mineurs

Notons  $A$  l'ensemble des indices  $1, 2, \dots, n$  et  $I$  un sous-ensemble de  $A$  formé de  $r$  indices  $i_1, i_2, \dots, i_r$  que nous rangerons dans l'ordre croissant.  $X(I)$  sera l'espace engendré par les  $e_{i_k, k=1, \dots, r}$  et  $j_I$  la bijection linéaire  $\mathbb{C}^r \rightarrow X(I)$  définie par  $j_I(\alpha_k) = e_{i_k}$ , où les  $\alpha_k$  forment la base canonique de  $\mathbb{C}^r$ . Nous noterons également  $p_I$  la surjection linéaire  $X \rightarrow \mathbb{C}^r$  définie par  $p_I(e_{i_k}) = \alpha_k$  pour  $k \leq r$ , et  $p_I(e_\ell) = 0$  pour  $\ell \notin I$ . Si  $u$  est un endomorphisme de  $X$ , de matrice  $\mathbb{M} = (a_{ij})$ , considérons deux sous-ensembles  $I$  et  $J$  de  $A$ , composés du même nombre d'indices et posons  $u_{IJ} = p_J \circ u \circ j_I$ , c'est un endomorphisme de  $\mathbb{C}^r$  dont la matrice dans la base des  $\alpha_k$  est formée des  $a_{ij}^j$  où  $i \in I$  et  $j \in J$ .

**Définition 11.13** On appelle mineur d'ordre  $r$  de  $u$  correspondant aux parties  $I$  et  $J$  de l'ensemble d'indices  $A$ , le déterminant de la matrice de  $u_{IJ}$ .

**Proposition 11.14** Pour que le rang de l'endomorphisme  $u$  soit égal à  $\rho$ , il faut et il suffit que tous ses mineurs d'ordre  $> \rho$  soient nuls et que l'un de ses mineurs d'ordre  $\rho$  ne le soit pas.

DÉMONSTRATION. Notons  $\rho$  le rang de  $u$

▷ Soient  $I$  et  $J$  des ensembles de  $r$  indices, nous aurons  $u_{IJ}(\mathbb{C}^r) = p_J \circ u(X(I))$  et par conséquent  $\text{rg } u_{IJ} = \dim(u_{IJ}(\mathbb{C}^r)) \leq \dim u(X(I)) \leq \dim u(X) = \rho$

▷ Par ailleurs, comme  $\dim \mathcal{N}(u) = n - \rho$  et  $\dim \mathcal{R}(u) = \rho$ , il est possible de déterminer un ensemble  $I_0$  de  $\rho$  indices tel que  $X(I_0)$  soit un supplémentaire de  $\mathcal{N}(u)$ , ainsi qu'un ensemble

$J_0$  de  $\rho$  indices tel que  $X(A \setminus J_0)$  soit un supplémentaire de  $\mathcal{R}(u)$ . Mais alors  $\mathcal{N}(u|_{X(I_0)}) = X(I_0) \cap \mathcal{N}(u) = \{0\}$ , et  $u|_{X(I_0)}$  est donc injective et donc bijective de  $X(I_0)$  sur  $\mathcal{R}(u)$ ; de plus  $X(A \setminus J_0) \subset \mathcal{N}(p_{J_0|\mathcal{R}(u)})$ , et par conséquent  $p_{J_0|\mathcal{R}(u)}$  est surjective et donc bijective de  $\mathcal{R}(u)$  sur  $\mathbb{C}^\rho$ . Il en résulte que  $u_{I_0 J_0}$ , mineur d'ordre  $\rho$  est une bijection, et que son déterminant n'est par conséquent pas nul.

▷ Des deux items qui précèdent on déduit tout d'abord que les mineurs d'ordre supérieur à  $\rho$  sont nuls et qu'il en existe un non nul d'ordre  $\rho$ .

▷ Réciproquement, s'il existe un mineur d'ordre  $r$  non nul, alors  $r \leq \rho$ , d'après le premier item, et si tous les mineurs d'ordre supérieur à  $r$  sont nuls, alors d'après le second item,  $\rho = \dim \mathcal{R}(u) \neq \sigma$  pour tout  $\sigma > r$ , soit  $\rho \leq r$ .

□



# Chapitre 12

## Applications de la dualité

### 12.1 Transposé

Si  $T \in \mathcal{L}(X)$ , on définit  ${}^tT \in \mathcal{L}(X')$  par la formule

$$\langle {}^tTf, x \rangle = \langle f, Tx \rangle, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

Les propriétés de  $T$  et de son transposé  ${}^tT$  sont intimement liées comme nous allons le voir ci-dessous. Dans le cadre des espaces de Hilbert, la notion de transposé est avantageusement remplacée par celle d'adjoint, et les démonstrations de ce chapitre simplifiées, parfois notablement, nous invitons donc le lecteur à s'y reporter.

**Proposition 12.1** *Si  $T \in \mathcal{L}(X)$ , alors*

- (i)  ${}^tT \in \mathcal{L}(X)$  et  $\|T\| = \|{}^tT\|$
- (ii)  $\Sigma(T) = \Sigma({}^tT)$

DÉMONSTRATION.

▷ On a tout d'abord,  $\forall f \in X'$

$$\|{}^tTf\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle {}^tTf, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, Tx \rangle| \leq \|f\| \|T\|,$$

et par conséquent  $\|{}^tT\| \leq \|T\|$ .

▷ Réciproquement  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ , et par conséquent,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists x$ , de norme 1, tel que  $\|T\| - \|Tx\| < \varepsilon$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, **5.5** (ii), il existe  $f \in X'$  telle que  $\|f\| = 1$  et  $\langle f, Tx \rangle = \|Tx\|$ ; par conséquent

$$\|T\| < \|Tx\| + \varepsilon = \langle f, Tx \rangle + \varepsilon = \langle {}^tTf, x \rangle + \varepsilon \leq \|{}^tT\| + \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  a été choisi arbitrairement, il en résulte que  $\|T\| \leq \|{}^tT\|$ .

▷ Supposons tout d'abord  $\lambda \notin \Sigma(T)$ , alors  $R(\lambda)(T - \lambda) = (T - \lambda)R(\lambda) = I$ , et par conséquent  $({}^tT - \lambda){}^tR(\lambda) = {}^tR(\lambda)({}^tT - \lambda) = I$ . Il en résulte que  $({}^tT - \lambda)$  est inversible avec

$$({}^tT - \lambda)^{-1} = {}^tR(\lambda).$$

▷ Supposons réciproquement que  ${}^tT - \lambda$  soit inversible. En vertu du théorème de Hahn-Banach **5.5** (ii),  $\forall x \in X$ , il existe  $f \in X'$  telle que  $\|f\| = 1$  et  $\langle f, x \rangle = \|x\|$ . Posons alors  $g = ({}^tT - \lambda)^{-1} f$ , on aura  $\|g\| \leq \|({}^tT - \lambda)^{-1}\|$  et

$$\|x\| = \langle f, x \rangle = \langle ({}^tT - \lambda)g, x \rangle = \langle g, (T - \lambda)x \rangle \leq \|({}^tT - \lambda)^{-1}\| \|(T - \lambda)x\|.$$

Par conséquent, en vertu du lemme **10.2**,  $T - \lambda$  est injectif et d'image fermée.

▷ Supposons alors que  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  ne soit pas égal à  $X$ . Le théorème de Hahn-Banach **5.22** nous montre que si un sous-espace n'est pas dense, il existe une forme linéaire continue différente de 0 qui s'y annule; il existe donc  $f \neq 0 \in X'$  telle que  $\langle f, x \rangle = 0 \forall x \in \mathcal{R}(T - \lambda)$ . C'est dire que  $({}^tT - \lambda)f = 0$ , et comme  ${}^tT - \lambda$  est injective, que  $f = 0$ , ce qui constitue une contradiction. □

On va voir qu'on peut obtenir des résultats très précis reliant les noyaux et les images respectives de  $T$  et de son transposé.

**Proposition 12.2** Si  $A \in \mathcal{L}(X)$ , alors

- (i)  $\mathcal{N}({}^tA) = \mathcal{R}(A)^\perp$  et  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}({}^tA)^\perp$   
(ii)  $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}({}^tA)^\perp$  et  $\overline{\mathcal{R}({}^tA)} \subset \mathcal{N}(A)^\perp$ ,

si de plus  $X$  est réflexif, alors

$$\overline{\mathcal{R}({}^tA)} = \mathcal{N}(A)^\perp.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Pour que  $f \in \mathcal{N}({}^tA)$ , il faut et il suffit que  $\forall x \in X$

$$0 = \langle {}^tA f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle,$$

c'est dire que  $f \in \mathcal{R}(A)^\perp$ .

▷ Supposons maintenant que  $x \in \mathcal{N}(A)$ , alors,  $\forall f \in X'$

$$0 = \langle f, Ax \rangle = \langle {}^tA f, x \rangle,$$

ce qui montre que  $x \in \mathcal{R}({}^tA)^\perp$ . Mais si réciproquement  $y \in \mathcal{R}({}^tA)^\perp$ , alors  $\forall g \in X'$ ,

$$0 = \langle {}^tA g, y \rangle = \langle g, Ay \rangle,$$

ce qui montre que toutes les formes linéaires continues s'annulent au point  $Ay$ . Mais le théorème de Hahn-Banach **5.5** (ii) nous prouve qu'il existe  $g \in X'$ , telle que  $\|Ay\| = \langle g, Ay \rangle$ ; il en résulte que  $Ay = 0$ , et par conséquent  $y \in \mathcal{N}(A)$ .

▷ D'après le premier item, nous aurons  $\mathcal{N}({}^tA)^\perp = (\mathcal{R}(A)^\perp)^\perp$ , et par conséquent  $\mathcal{N}({}^tA)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)}$  en vertu du lemme **B.2**; de même  $\overline{\mathcal{R}({}^tA)} \subset (\mathcal{R}({}^tA)^\perp)^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp$ , avec égalité si l'espace est réflexif. □

**Proposition 12.3 (Théorème de l'image fermée)** Soit  $A \in \mathcal{L}(X)$ ,

(i) si  $\mathcal{R}(A)$  est fermée, alors

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}({}^tA)^\perp \text{ et } \mathcal{R}({}^tA) = \mathcal{N}(A)^\perp,$$

en particulier  $\mathcal{R}({}^tA)$  est fermé.

(ii) si  $\mathcal{R}({}^tA)$  est fermé, alors  $\mathcal{R}(A)$  est fermé.

DÉMONSTRATION.

▷ On sait que  $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}({}^tA)^\perp$ , il est donc clair que si  $\mathcal{R}(A)$  est fermée, alors  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}({}^tA)^\perp$ .

▷ On sait déjà que  $\overline{\mathcal{R}({}^tA)} \subset \mathcal{N}(A)^\perp$ . Réciproquement, considérons  $f \in \mathcal{N}(A)^\perp$ , alors  $\langle f, x \rangle = \langle f, x' \rangle$  dès que  $Ax = Ax'$ . Il en résulte que la formule  $\langle \varphi, y \rangle = \langle f, x \rangle$ , où  $y = Ax \in \mathcal{R}(A)$ , définit une application linéaire sur  $\mathcal{R}(A)$ . On peut considérer  $A$  comme un opérateur borné, injectif  $X/\mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{R}(A) \subset X$ , et d'après le lemme 10.2, comme  $\mathcal{R}(A)$  est fermé, on aura alors  $\|x\|_{X/\mathcal{N}(A)} \leq C \|Ax\|$ . Il en résulte que

$$|\langle \varphi, y \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|_{X/\mathcal{N}(A)} \leq C \|f\| \|y\|,$$

et par conséquent, d'après le théorème de Hahn-Banach 5.5 (i), que  $\varphi$  se prolonge en une forme linéaire  $\tilde{\varphi}$  continue sur  $X$  tout entier. On aura donc

$$\langle {}^tA\tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \tilde{\varphi}, Ax \rangle = \langle \varphi, Ax \rangle = \langle f, x \rangle, \forall x \in X,$$

c'est-à-dire  $f = {}^tA\tilde{\varphi}$ , il en résulte que  $f \in \mathcal{R}({}^tA)$ . Nous avons donc démontré que  $\mathcal{R}({}^tA) = \mathcal{N}(A)^\perp$ .

▷ Considérons maintenant  $A$  comme un opérateur  $X \rightarrow Y = \overline{\mathcal{R}(A)}$ , que nous noterons  $\tilde{A}$ . Montrons tout d'abord que  ${}^t\tilde{A}$  est injective, en effet si  $\varphi \in Y'$  et  ${}^t\tilde{A}\varphi = 0$ , alors  $\langle {}^t\tilde{A}\varphi, x \rangle = 0$ ,  $\forall x \in X$ , d'où  $\langle \varphi, \tilde{A}x \rangle = 0$ , et par conséquent  $\varphi = 0$ , puisque  $\mathcal{R}(\tilde{A}) = \mathcal{R}(A)$  est dense dans  $\overline{\mathcal{R}(A)}$ . Il en résulte que  ${}^t\tilde{A}$  est inversible  $Y' \rightarrow \mathcal{R}({}^tA) = \mathcal{R}({}^t\tilde{A})$ , en vertu du théorème des homomorphismes 3.14.

▷ Supposons que les hypothèses du lemme 3.13, soit  $\forall r > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $B_\eta \subset \overline{\tilde{A}(B_r)}$ , ne soient pas vérifiées. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  et une suite  $y_n \in Y \setminus \overline{\tilde{A}(B_\varepsilon)}$  telle que  $y_n \rightarrow 0$ . Comme  $\overline{\tilde{A}(B_\varepsilon)}$  est un convexe fermé, d'après le théorème de Hahn-Banach 5.29,  $\forall n$  il existe un hyperplan fermé qui le sépare strictement de  $y_n$ , soit  $\exists f_n \in Y'$  tel que  $\langle f_n, y_n \rangle > \sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|\langle f_n, \tilde{A}x \rangle\|$ . On aura donc

$$\|{}^t\tilde{A}f_n\| = \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|\langle f_n, \tilde{A}x \rangle\| < \frac{\langle f_n, y_n \rangle}{\varepsilon} \leq \frac{\|f_n\| \|y_n\|}{\varepsilon},$$

comme  $\|y_n\| \rightarrow 0$ , c'est exactement dire que  $({}^t\tilde{A})^{-1}$  n'est pas bornée, ce qui constitue une contradiction.



▷ La conclusion du lemme est donc valable, soit l'image par  $\tilde{A}$  d'un voisinage quelconque de 0 dans  $X$  contient un voisinage de 0 dans  $Y$ . Par homothétie, il en résulte que tout point de  $Y$  est l'image d'un point de  $X$  par  $\tilde{A}$ , c'est-à-dire que  $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A)$ .

□

L'égalité  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}({}^tA)^\perp$  constitue le fondement de la *technique d'estimation a priori* : on démontre que  $\mathcal{R}(A)$  est fermée à l'aide d'une estimation et du lemme **10.2**, puis l'existence d'une solution, soit en fait  $\mathcal{R}(A) = X$ , découle de l'unicité pour le transposé, c'est-à-dire  $\mathcal{N}({}^tA) = \{0\}$ .

## 12.2 Spectre

**Corollaire 12.4** *Si  $A \in \mathcal{L}(X)$ , alors*

$$\Sigma_r(A) = \Sigma_p({}^tA) \setminus \Sigma_p(A) \text{ et } \Sigma_c({}^tA) \subset \Sigma_c(A),$$

*et si  $X$  est réflexif,*

$$\Sigma_c({}^tA) = \Sigma_c(A) \text{ et } \Sigma_r({}^tA) = \Sigma_p(A) \setminus \Sigma_p({}^tA).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\lambda \in \Sigma_r(A)$ , par définition on aura  $\overline{R(A - \lambda)} \neq X$ , soit en vertu de la proposition **12.3**  $\mathcal{N}({}^tA - \lambda)^\perp \neq X$ , et par conséquent  $\mathcal{N}({}^tA - \lambda) = \overline{\mathcal{N}({}^tA - \lambda)} = (\mathcal{N}({}^tA - \lambda)^\perp)^\perp \neq \{0\}$ . C'est dire que  $\lambda \in \Sigma_p({}^tA)$ , et par conséquent que  $\lambda \in \Sigma_p({}^tA) \setminus \Sigma_p(A)$ .

▷ Réciproquement si  $\lambda \in \Sigma_p({}^tA) \setminus \Sigma_p(A)$ , on aura  $\mathcal{N}({}^tA - \lambda) \neq \{0\}$ , et par conséquent, selon la proposition **12.2**,  $\overline{R(A - \lambda)} = \mathcal{N}({}^tA - \lambda)^\perp \neq X$ . Comme de plus  $\mathcal{N}(A - \lambda) = \{0\}$ , il en résulte que  $\lambda \in \Sigma_r(A)$ .

▷ Soit  $\lambda \in \Sigma_c({}^tA)$ , on aura  $\mathcal{N}({}^tA - \lambda) = \{0\}$ , et par conséquent, selon la proposition **12.2**,  $R(A - \lambda)^\perp = 0$ , d'où  $\overline{R(A - \lambda)} = X$ . On aura également  $X' = \overline{R({}^tA - \lambda)} \subset \mathcal{N}(A - \lambda)^\perp$ , et par conséquent  $\mathcal{N}(A - \lambda)^\perp = X'$ , d'où  $\mathcal{N}(A - \lambda) = \overline{\mathcal{N}(A - \lambda)} = \{0\}$ . Il en résulte que  $\lambda \in \Sigma_c(A)$ , soit  $\Sigma_c({}^tA) \subset \Sigma_c(A)$ . Dans le cas où  $X$  est réflexif, on a  $(R({}^tA - \lambda)^\perp)^\perp = \overline{R({}^tA - \lambda)}$ , et par conséquent le même raisonnement s'applique en échangeant  $A$  et  ${}^tA$ , ce qui prouve que  $\Sigma_c({}^tA) = \Sigma_c(A)$ .

▷ Il suffit de remarquer que selon la proposition **12.1**  $\Sigma(A) = \Sigma({}^tA)$ , et par conséquent d'après l'item qui précède,  $\Sigma_r({}^tA) \cup \Sigma_p({}^tA) = \Sigma_r(A) \cup \Sigma_p(A)$  d'où

$$\begin{aligned} \Sigma_r({}^tA) &= (\Sigma_r({}^tA) \cup \Sigma_p({}^tA)) \setminus \Sigma_p({}^tA) = (\Sigma_r(A) \cup \Sigma_p(A)) \setminus \Sigma_p({}^tA) \\ &= ((\Sigma_p({}^tA) \setminus \Sigma_p(A)) \cup \Sigma_p(A)) \setminus \Sigma_p({}^tA) \\ &= (\Sigma_p({}^tA) \cup \Sigma_p(A)) \setminus \Sigma_p({}^tA) = \Sigma_p(A) \setminus \Sigma_p({}^tA). \end{aligned}$$

□

# Appendice A

## Projections et sous-espaces invariants

Il s'agit ici de mettre au point le cadre dans lequel il est possible de décomposer l'espace  $X$  selon une somme directe de sous-espaces invariants, de telle sorte que l'opérateur  $T$  puisse se décrire à l'aide de ses restrictions à ces sous-espaces. On dira qu'alors on a décomposé l'opérateur  $T$ .

### A.1 Supplémentaires algébriques

#### Proposition A.1

(i) Soit  $P$  une projection, si on pose  $M = \mathcal{R}(P)$  et  $M' = \mathcal{R}(I - P)$ , alors  $X = M \oplus M'$  et  $M' = \mathcal{N}(P)$ . On dit que  $M$  et  $M'$  sont supplémentaires algébriques et que  $P$  est la projection sur  $M$  parallèlement à  $M'$ .

(ii) Réciproquement, si  $X = M \oplus M'$ , alors l'application  $P : u \rightarrow u_M$  telle que  $u = u_M + u_{M'}$ , où  $u_M \in M$  et  $u_{M'} \in M'$ , est la projection sur  $M$  parallèlement à  $M'$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On aura  $X = M + M'$ , en effet,  $\forall u \in X$ ,  $u = Pu + u - Pu$ . Si par ailleurs,  $u \in M \cap M'$ , on aura  $u = Pv = w - Pw$  et par conséquent  $u = Pv = Pu = P(w - Pw) = 0$ .

▷ De plus si  $u \in M'$ , alors  $Pu = P(s - Ps) = 0$ , soit  $u \in \mathcal{N}(P)$ . Si  $u \in \mathcal{N}(P)$ , alors  $u = u - Pu$ , soit  $u \in M'$ .

▷ Réciproquement la décomposition de  $u$  sous la forme  $u = u_M + u_{M'}$  étant unique on pourra bien parler de l'application  $P$ , et on aura  $Pu = u_M + 0$ , et par conséquent  $P^2u = u_M = Pu$ .

□

**Définition A.2** On dit que le sous-espace  $M$  de  $X$  est invariant par  $T$  si  $T(M) \subset M$ .

Si  $M$  est invariant par  $T$ , on notera alors  $T_M$  la restriction de  $T$  à  $M$ , et on aura  $T_M \in \mathcal{L}(M)$ .

**Proposition A.3**

(i) Si  $M$  et  $M'$  sont invariants par  $T$ , et  $X = M \oplus M'$ , alors la projection  $P$  sur  $M$  parallèlement à  $M'$ , commute avec  $T$ .

(ii) Réciproquement, si  $P$  est une projection qui commute avec  $T$ , alors  $M = \mathcal{R}(P)$ , et  $M' = \mathcal{R}(I - P)$  sont invariants par  $T$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On aura en effet  $PTPu = TPu$ , puisque  $Pu$  et donc  $TPu \in M$ , et  $PT(I - P)u = 0$ , puisque  $(I - P)u$  et donc  $T(I - P)u \in M'$ . Il en résulte que  $PTu = PTPu + PT(I - P)u = TPu$ .

▷ Si  $v \in M$ , on a  $v = Pu$  et  $Tv = TPu = PTu \in M$ .

□

Les restrictions respectives  $T_M$  et  $T_{M'}$ , de  $T$  à  $M$  et  $M'$  seront respectivement appelées *les parties de  $T$  dans  $M$  et  $M'$* .

**A.2 Supplémentaires topologiques**

**Définition A.4** On dit que les sous-espaces  $M$  et  $M'$  de  $X$  sont *supplémentaires topologiques dans  $X$* , s'ils sont *supplémentaires algébriques* et si l'application  $E : (u, v) \rightarrow u + v$ , de  $M \times M'$  dans  $X$  est un isomorphisme.

**Proposition A.5**

(i) Si  $M$  et  $M'$  sont *supplémentaires topologiques*, ils sont *fermés*

(ii) Réciproquement, si  $X$  est un espace de Banach et si  $M$  et  $M'$  sont des *supplémentaires algébriques fermés*, alors ils sont *supplémentaires topologiques*

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, l'image réciproque de  $M \times \{0\}$ , qui est fermé dans  $M \times M'$ , par  $E^{-1}$  est égale à  $M$ .

▷ Réciproquement, si  $M$  et  $M'$  sont fermés, alors  $M \times M'$  est un espace de Banach pour la topologie induite par celle de  $X \times X$  et  $E$  une bijection continue :  $M \times M' \rightarrow X$ , c'est donc un isomorphisme, en vertu du théorème des homomorphismes **3.14**.

□

**Proposition A.6** Si  $M$  et  $M'$  sont *algébriquement supplémentaires*, pour qu'ils soient *topologiquement supplémentaires*, il faut et il suffit que la projection  $P$  sur  $M$  parallèlement à  $M'$  soit continue.

DÉMONSTRATION. Notons  $P'$  la projection sur  $M'$  le long de  $M$ , on aura  $I = P + P'$  et par conséquent, la continuité de  $P$  équivaut à celle de  $P$  et  $P'$ , mais en fait  $E^{-1}(u + v) = (P(u + v), P'(u + v))$  ; la continuité de  $E^{-1}$  est donc équivalente à celle de  $P$  et  $P'$ .

□

# Appendice B

## Orthogonalité dans les espaces de Banach

### Définition B.1

(i) Si  $M \subset X$  on appelle orthogonal de  $M$  et on note  $M^\perp$  le sous espace (fermé) de  $X'$  défini par

$$M^\perp = \{f \in X' \mid \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M\}$$

(ii) Si  $N \subset X'$  on appelle orthogonal de  $N$  et on note  $N^\perp$  le sous espace (fermé) de  $X$  défini par

$$N^\perp = \{x \in X \mid \langle f, x \rangle = 0, \forall f \in N\}$$

Remarquons bien que, par définition, l'orthogonal d'un sous ensemble du dual est dans l'espace et non dans le bidual, et que la symétrie des définitions qui précèdent n'est qu'apparente, ainsi qu'en témoigne le lemme suivant :

### Lemme B.2

(i) Si  $M$  est un sous-espace vectoriel de  $X$ , alors  $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ .

(ii) Si  $N$  est un sous-espace vectoriel de  $X'$ , alors  $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$ . Si de plus  $X$  est réflexif, alors  $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $x \in M$ , alors  $\langle f, x \rangle = 0, \forall f \in M^\perp$ , et par conséquent  $x \in (M^\perp)^\perp$ , et comme de plus un orthogonal est fermé, il en résulte que  $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$ . Réciproquement, supposons qu'il existe  $x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$ , alors le théorème de Hahn-Banach sous sa forme géométrique **5.29** nous permet de séparer strictement  $x_0$  de  $\overline{M}$  par un hyperplan fermé. C'est dire qu'il existe  $f \in X'$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle, \forall x \in M.$$

Comme  $M$  est un espace vectoriel il en résulte que  $\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M$ , et donc que  $f \in M^\perp$ , d'où  $\langle f, x_0 \rangle = 0$ , ce qui constitue une contradiction.

▷ De même  $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$ . Mais si nous tentons la réciproque, nous sommes amenés à supposer l'existence de  $f_0 \in (N^\perp)^\perp \setminus \overline{N}$ , de  $\varphi \in X''$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\langle \varphi, f \rangle < \beta < \langle \varphi, f_0 \rangle, \forall f \in N.$$

Il en résulte alors que  $\langle \varphi, f \rangle = 0, \forall f \in N$ , ce qui ne suffit pas pour conclure que  $\langle \varphi, f_0 \rangle$ , car il y a a priori trop d'éléments dans  $X'$  pour que la condition  $\langle \varphi, f \rangle = 0, \forall f \in N$  soit suffisante à cet effet. Si  $X$  est réflexif, alors  $\exists x \in X$ , tel que  $\langle \varphi, f \rangle = \langle f, x \rangle, \forall f \in X'$ , soit donc en fait

$$\langle f, x \rangle < \beta < \langle f_0, x \rangle, \forall f \in N,$$

et on conclut alors comme à l'item précédent que  $x \in N^\perp$ , et par conséquent  $\langle f_0, x \rangle = 0$ . □

Si  $M$  est un sous-espace fermé de l'espace de Banach  $X$ , on sait que  $\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}}$  est une norme sur l'espace quotient  $X/M$ , qui est alors un espace de Banach.

**Proposition B.3**  $(X/M)'$  est isomorphe à  $M^\perp$

DÉMONSTRATION. Soit en effet  $g \in M^\perp$ , pour  $x \in X$  nous poserons  $\langle \xi, \dot{x} \rangle = \langle g, x \rangle$  et nous aurons  $|\langle \xi, \dot{x} \rangle| \leq \|g\| \|x\| \forall x \in \dot{x}$ , d'où il résulte que  $\xi \in (X/M)'$ . L'application  $g \rightarrow \xi : M^\perp \rightarrow (X/M)'$  est clairement injective; elle est également surjective, car d'une part si on note  $g$  l'application  $x \rightarrow \langle \xi, \dot{x} \rangle$  on aura  $|\langle g, x \rangle| \leq \|\xi\| \|\dot{x}\| \leq \|\xi\| \|x\|$ , soit  $g \in M^\perp$ , et d'autre part  $\langle g, y \rangle = \langle \xi, \dot{y} \rangle = 0, \forall y \in M$ , d'où  $g \in M^\perp$ . □

**Définition B.4** Soit  $M$  un sous-espace vectoriel fermé de  $X$ , on appelle codimension de  $M$ , la dimension de  $X/M$ .

Si  $X/M$  est de dimension finie, on aura donc  $\text{codim } M = \dim X/M$  en vertu de l'isomorphisme entre  $X/M$  et  $(X/M)'$ .

**Proposition B.5**

(i) Si  $M$  est un sous-espace fermé de  $X$  et si  $N$  est un sous-espace de  $M$ , de codimension finie, alors  $M$  est de codimension finie, et  $\text{codim } M \leq \text{codim } N$ .

(ii) Si  $M$  a un supplémentaire topologique  $N$  de dimension finie, alors  $\text{codim } M = \dim N$

(iii) Si  $f \neq 0 \in X'$ , alors  $\text{codim } \mathcal{N}(f) = 1$ .

(iv) Si  $g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C}^n)$ , alors  $\text{codim } \mathcal{N}(g) \leq n$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $\dot{x}$  la classe de  $x$  dans  $X/M$  et  $\tilde{x}$  la classe de  $x$  dans  $X/N$ . On aura  $\tilde{x} \subset \dot{x}$ , et par conséquent  $\dot{x}$  est le seul élément de  $X/M$  contenant  $\tilde{x}$ . Notons  $f$  l'application  $\tilde{x} \rightarrow \dot{x}$ ; elle est surjective, d'où il résulte que  $\dim X/M \leq \dim X/N$ .

▷ Soit  $x \in X$ ,  $\exists! (y, z) \in M \times N$ , tel que  $x = y + z$ , et par conséquent, si  $x - x' \in M$ , alors  $z - z' = 0$ . Il en résulte que pour  $\dot{x} \in X/M$ ,  $\exists! z \in N$  tel que  $x - z \in M$ ,  $\forall x \in \dot{x}$ . L'application linéaire  $f : \dot{x} \rightarrow z$  est une bijection ; d'une part en effet, si  $z = 0$ , alors  $x = y + z \in M$ , et par conséquent  $\dot{x} = 0$ , et d'autre part  $\forall z \in N$ ,  $f(\dot{z}) = z$ .

▷ Considérons alors l'application  $\Phi : \dot{x} \rightarrow f(x)$ ,  $X/\mathcal{N}(f) \rightarrow \mathbb{C}$  ; elle est injective car si  $f(x) = 0$ , alors  $x \in \mathcal{N}(f)$ , et par conséquent  $\dot{x} = 0$ . Elle d'autre part surjective, car si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et si  $x_0$  est choisi tel que  $f(x_0) \neq 0$ , avec  $x = \lambda x_0 / f(x_0)$  on aura  $\Phi(\dot{x}) = f(x) = \lambda$ . Il en résulte que  $\text{codim } \mathcal{N}(f) = \dim X/\mathcal{N}(f) = 1$ .

▷ On démontre de même que l'application  $\dot{x} \rightarrow g(x) : X/\mathcal{N}(g) \rightarrow \mathbb{C}^n$  est injective.

□



## Quatrième partie

# Opérateurs bornés dans les espaces de Hilbert





# Chapitre 13

## Les algèbres de Banach involutives

### 13.1 Définitions, propriétés élémentaires

**Définition 13.1** Une involution de l'algèbre  $\mathcal{A}$  est une application antilinéaire  $T \rightarrow T^*$  de  $\mathcal{A}$  dans lui-même qui vérifie

- (i)  $(PT)^* = T^*P^*$
- (ii)  $T^{**} = T$

Cette définition découle directement de celle de l'adjoint d'un opérateur borné dans un espace de Hilbert :

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , considérons l'application  $x \rightarrow (Tx | y)$ , elle est continue, et par conséquent, d'après le théorème de représentation de Riesz,  $\exists! z_y \in H$ , tel que  $(Tx | y) = (x | z_y)$ ,  $\forall y \in H$ . De plus,

$$\|z_y\| = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|(x | z_y)|}{\|x\|} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|(Tx | y)|}{\|x\|} \leq \|T\| \|y\|.$$

On est donc fondé à poser  $T^*y = z_y$ , ce qui fait de  $T^*$  un élément de  $\mathcal{L}(H)$ , et on aura alors

$$(Tx | y) = (x | T^*y), \forall x, y \in H.$$

**Définition 13.2** Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Banach involutive, alors on dit que

- (i)  $T$  est auto-adjoint si  $T = T^*$
- (ii)  $T$  est normal si  $TT^* = T^*T$
- (iii)  $T$  est unitaire si  $TT^* = T^*T = I$

**Proposition 13.3** Si  $T \in \mathcal{A}$ , algèbre de Banach involutive, alors

- (i)  $I$  est auto-adjoint et  $(\lambda I)^* = \bar{\lambda}I$
- (ii)  $T + T^*$ ,  $i(T - T^*)$ ,  $TT^*$  et  $T^*T$  sont auto-adjoints

(iii)  $\exists!$   $P$  et  $Q$  auto-adjoints tels que  $T=P+iQ$ , et on a

$$P = \frac{T + T^*}{2} \text{ et } Q = \frac{T - T^*}{2i}.$$

$T$  est normal si et seulement si  $PQ=QP$ .

(iv)  $T$  est inversible si et seulement si  $T^*$  l'est, auquel cas  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

(v)  $\Sigma(T^*) = \overline{\Sigma(T)}$  (complexe conjugué!) et en particulier  $\rho(T^*) = \rho(T)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ De l'égalité  $I^* = II^*$ , il résulte que  $I = I^{**} = (II^*)^* = I^{**}I^* = II^* = I^*$ .

▷ Démontrons l'unicité de la décomposition de  $T$ , et supposons à cet effet qu'on a également  $T=P_1 + iQ_1$ , où  $P_1$  et  $Q_1$  sont auto-adjoints. On aura  $P-P_1 = i(Q_1 - Q)$ , mais également, par passage à l'adjoint  $P-P_1 = -i(Q_1 - Q)$ , d'où il résulte que  $P=P_1$  et  $Q=Q_1$ . On aura  $TT^* = (P + iQ)(P - iQ) = P^2 + Q^2 + i(QP - PQ)$  et  $T^*T = P^2 + Q^2 - i(QP - PQ)$ , soit  $TT^* = T^*T$  si et seulement si  $PQ=QP$ .

▷ On aura  $(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I^* = I = T^*(T^{-1})^*$ , d'où il résulte que  $T^*$  est inversible et  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ , que l'on note  $T^{-*}$ .

▷ Si  $\lambda \in \Pi(T)$ , alors  $T-\lambda I$  est inversible, donc également  $T^* - \bar{\lambda}I$ , ce qui montre que  $\bar{\lambda} \in \Pi(T^*)$ . Il en résulte que  $\overline{\Sigma(T^*)} \subset \Sigma(T)$ , et par conséquent  $\overline{\Sigma(T)} = \overline{\Sigma(T^{**})} \subset \Sigma(T^*)$ , soit  $\Sigma(T^*) = \overline{\Sigma(T)}$ .

□

**Lemme 13.4** Si  $T$  est normal, alors les résolvantes de  $T$  et  $T^*$  commutent, et chacun commute avec la résolvante de l'autre

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord

$$(T - \zeta)(T^* - \xi)R(\zeta)R^*(\xi) = (T^* - \xi)(T - \zeta)R(\zeta)R^*(\xi) = I = (T - \zeta)(T^* - \xi)R^*(\xi)R(\zeta);$$

il en résulte que  $R^*(\xi)R(\zeta) = R(\zeta)R^*(\xi)$ .

▷ De même

$$R(\zeta)(T^* - \xi)R^*(\xi)(T - \zeta) = I = (T^* - \xi)R^*(\xi)R(\zeta)(T - \zeta) = (T^* - \xi)R(\zeta)R^*(\xi)(T - \zeta),$$

d'où  $R(\zeta)(T^* - \xi) = (T^* - \xi)R(\zeta)$ .

□

## 13.2 Le calcul holomorphe

**Lemme 13.5** *Si  $f$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ , et si on note  $g(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})}$ , alors  $g$  est holomorphe dans  $\bar{\Omega} = \{z \mid \bar{z} \in \Omega\}$  et  $g'(\zeta) = \overline{f'(\bar{\zeta})}$ .*

DÉMONSTRATION. Donnons-en deux, la première étant bien entendu la meilleure, et l'intérêt de la seconde résidant dans l'explicitation du lien entre fonctions d'une variable complexe et fonctions de deux variables réelles.

▷ Soit  $z_0 \in \Omega$  et  $B_r(z_0) \subset \Omega$ , où  $B_r(z_0)$  note le disque de rayon  $r$  et de centre  $z_0$ . La fonction  $f$  est développable en série entière dans  $B_r(z_0)$ , soit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n.$$

Il en résulte que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{a_n} (z - \bar{z}_0)^n$  constitue une série entière convergente dans le disque  $B_r(\bar{z}_0)$ , et par conséquent que  $g(z)$  est holomorphe au voisinage de  $\bar{z}_0$ .

▷ Posons

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + iy) \text{ et } \tilde{g}(x, y) = g(x + iy),$$

on aura

$$\left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right),$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}} = 0$$

en vertu des relations de Cauchy-Riemann. De même,

$$g' = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}} = \overline{f'}.$$

□

**Proposition 13.6** *Si  $f$  est holomorphe dans un voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$  et si on note  $\hat{f}(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})}$ , alors  $\hat{f}(\mathbb{T}^*) = \overline{f(\mathbb{T}^*)}$ .*

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que si  $R^*(\zeta) = (\mathbb{T}^* - \zeta)^{-1}$ , alors  $(R(\zeta))^* = R^*(\bar{\zeta})$ . Choisissons maintenant un lacet  $\Gamma$  compatible avec  $\Sigma(\mathbb{T}^*)$ , qui sera paramétré par  $t \in (-\pi, \pi)$  ; si  $\zeta(t)$  décrit  $\Gamma$ , alors  $\xi(t) = \bar{\zeta}(t)$  décrit le chemin  $\bar{\Gamma}$  dans le sens inverse et nous aurons  $\overline{\zeta'(t)} = \xi'(t)$ , d'où

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbb{T}^*) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \hat{f}(\zeta) R^*(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \overline{f(\bar{\zeta})} R^*(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\zeta(t))} (R(\bar{\zeta}(t)))^* \zeta'(t) dt = \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta(t)) R(\zeta(t)) \overline{\zeta'(t)} dt \right)^* \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi(t)) R(\xi(t)) \xi'(t) dt \right)^* = \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} f(\xi) R(\xi) d\xi \right)^*. \end{aligned}$$

Comme  $\Sigma(\mathbb{T}^*) = \overline{\Sigma(\mathbb{T})}$ , au sens de parcours près le lacet  $\bar{\Gamma}$  sera compatible avec  $\Sigma(\mathbb{T})$  ; il en résulte que

$$\hat{f}(\mathbb{T}^*) = f(\mathbb{T})^*.$$

□

**Proposition 13.7** Soit  $f$  analytique au voisinage de  $\Sigma(\mathbb{T})$ ,

- (i) Si  $\mathbb{T}$  est normal,  $f(\mathbb{T})$  est normal.
- (ii) Si  $\mathbb{T}$  est auto-adjoint et si  $f = \hat{f}$ , où  $\hat{f}(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})}$ , alors  $f(\mathbb{T})$  est auto-adjoint

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $\hat{f}$  est également analytique au voisinage de  $\overline{\Sigma(\mathbb{T})}$ , si  $\Gamma$  note un chemin compatible avec  $\Sigma(\mathbb{T})$ , selon la proposition 13.6, on aura

$$\begin{aligned} f(\mathbb{T})^* f(\mathbb{T}) &= \hat{f}(\mathbb{T}^*) f(\mathbb{T}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\bar{\Gamma}} \hat{f}(\xi) \mathbb{R}^*(\xi) d\xi \int_{\Gamma} f(\zeta) \mathbb{R}(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\bar{\Gamma} \times \Gamma} \hat{f}(\xi) f(\zeta) \mathbb{R}^*(\xi) \mathbb{R}(\zeta) d\xi d\zeta. \end{aligned}$$

Mais, selon le lemme 13.4  $\mathbb{R}^*(\xi)$  et  $\mathbb{R}(\zeta)$  commutent ; il en résulte que

$$f(\mathbb{T})^* f(\mathbb{T}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma \times (-\bar{\Gamma})} f(\zeta) \hat{f}(\xi) \mathbb{R}(\zeta) \mathbb{R}^*(\xi) d\zeta d\xi = f(\mathbb{T}) \hat{f}(\mathbb{T}^*) = f(\mathbb{T}) f(\mathbb{T})^*.$$

▷ Par ailleurs, si  $\mathbb{T}$  est auto adjoint et  $\hat{f} = f$ , alors  $f(\mathbb{T})^* = \hat{f}(\mathbb{T}^*) = \hat{f}(\mathbb{T}) = f(\mathbb{T})$ .

□

### 13.3 Les $C^*$ -algèbres

Parmi les qualités de l'adjoint, la suivante que nous démontrerons à la proposition 14.2 est particulièrement importante :

$$\|TT^*\| = \|T\|^2.$$

Nous sommes donc conduits à la définition suivante :

**Définition 13.8** Une  $C^*$ -algèbre est une algèbre involutive qui vérifie

$$\|\mathbb{T}\mathbb{T}^*\| = \|\mathbb{T}\|^2.$$

L'involution possède alors des propriétés supplémentaires, tout-à-fait essentielles :

**Proposition 13.9** Soit  $\mathbb{T} \in \mathcal{A}$ ,  $C^*$ -algèbre, alors

- (i)  $\|T\| = \|T^*\|$  et  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .
- (ii)  $\rho(TT^*) = \|T\|^2$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura  $\|T\|^2 = \|TT^*\| \leq \|T\| \|T^*\|$ , et par conséquent  $\|T\| \leq \|T^*\|$ . Mais comme  $T=T^{**}$ , il en résulte que  $\|T^*\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|$ , soit  $\|T\| = \|T^*\|$ . On aura alors

$$\|T^*T\| = \|T^*T^{**}\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

▷ Supposons tout d'abord  $T$  auto-adjoint, on aura  $\|T^2\| = \|T\|^2$ , et par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ . En vertu de la formule (8.14), il en résulte que  $\rho(T) = \|T\|$ . Dans le cas général, comme  $TT^*$  est auto-adjoint, on aura  $\rho(TT^*) = \|TT^*\| = \|T\|^2$ .

□

**Proposition 13.10** Soit  $T \in \mathcal{A}$ ,  $C^*$ -algèbre, alors

- (i) Si  $T$  est normal,  $\rho(T) = \|T\|$
- (ii) si  $T$  est auto-adjoint,  $e^{iT}$  est unitaire et  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .
- (iii) Si  $U$  est unitaire alors  $\|U\| = 1$  et  $\Sigma(U) \subset \mathbb{T}$ , où  $\mathbb{T}$  est le cercle unité.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $T$  est normal, d'après la proposition 13.9 et le corollaire 8.20, on aura  $\|T\|^2 = \rho(TT^*) \leq \rho(T)\rho(T^*)$ , d'où  $\|T\|^2 \leq (\rho(T))^2 \leq \|T\|^2$  d'après la proposition 13.3 et l'inégalité (8.8), soit  $\rho(T) = \|T\|$ .

▷ Posons  $f(z) = e^{iz}$ , on aura  $(e^{iT})^* e^{iT} = \hat{f}(T^*) f(T) = \hat{f} f(T) = I$ .

▷ Supposons que  $\lambda = \alpha + i\beta \in \Sigma(T)$ , où  $\beta \neq 0$ . Posons  $s = (T - \alpha)/\beta$ , c'est un opérateur auto-adjoint qui vérifie  $i \in \Sigma(s)$ ; par conséquent,  $\forall \mu, I + is = (\mu + 1)I - (\mu - is)$  n'est pas inversible, ce qui implique  $|\mu + 1| \leq \|\mu - is\|$ , d'après la proposition 8.5. Si on choisit  $\mu \in \mathbb{R}$ , il en résulte que

$$(\mu + 1)^2 \leq \|\mu - is\|^2 = \|(\mu - is)(\mu - is)^*\| = \|\mu^2 + s^2\| \leq \mu^2 + \|s\|^2.$$

On aura donc  $2\mu \leq \|s\|^2 - 1, \forall \mu \in \mathbb{R}$ , ce qui constitue une contradiction, et on aura par conséquent  $\beta = 0$ , soit  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

▷ On aura tout d'abord  $1 = \|I\| = \|UU^*\| = \|U\|^2$ . Soit alors  $\lambda \in \Sigma(U)$ , on aura  $|\lambda| \leq \rho(U) = \|U\| = 1$ ; de plus  $0 \notin \Sigma(U)$ , puisque  $U$  est inversible. D'autre part, en vertu du théorème de transformation spectrale 9.6, on a  $\Sigma(U^*) = \Sigma(U^{-1}) = g(\Sigma(U))$ , où  $g(z) = 1/z$ , et par conséquent  $1/\lambda \in \Sigma(U)$ , d'où  $|1/\lambda| \leq 1$ , et par conséquent  $|\lambda| = 1$ .

□



# Chapitre 14

## Applications de l'orthogonalité

Dans ce chapitre  $H$  désigne un espace de Hilbert.

### 14.1 Adjoint, orthogonalité

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , nous avons vu au chapitre précédent que la formule  $(Tx|y) = (x|T^*y), \forall x, y \in H$  définit un opérateur  $T^* \in \mathcal{L}(H)$  :

**Définition 14.1 (Adjoint)** Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , on pose

$$(Tx|y) = (x|T^*y), \forall x, y \in H.$$

$T^* \in \mathcal{L}(H)$  est l'adjoint de  $T$ .

L'opération  $T \rightarrow T^*$  est une involution de l'algèbre  $\mathcal{L}(H)$ .

Les avantages qui découlent du cadre hilbertien sont en fait considérables et nous aurons l'occasion de démontrer de nombreux résultats qui n'ont pas leur équivalent dans les espaces de Banach. La seule difficulté supplémentaire qui découle de l'utilisation de l'adjoint réside dans l'apparition régulière de complexes conjugués, qu'un peu d'attention doit permettre de ne pas confondre avec l'adhérence.

**Proposition 14.2** Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors

- (i)  $\|T\| = \|T^*\|$
- (ii)  $\|T^*T\| = \|T\|^2$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura

$$\|T^*\| = \sup_{y \in H, y \neq 0} \frac{\|T^*y\|}{\|y\|} = \sup_{y \in H, y \neq 0} \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|(x|T^*y)|}{\|x\| \|y\|} = \sup_{y \in H, y \neq 0} \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|(Tx|y)|}{\|x\| \|y\|} = \|T\|.$$



▷ On a, d'une part  $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$ , et d'autre part

$$\|Tx\|^2 = (Tx | Tx) = (T^*Tx | x) \leq \|T^*T\| \|x\|^2,$$

ce qui prouve que  $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$  ; il en résulte que  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .

□

Par ailleurs, si on note  $\{x\}^\perp$  le noyau de l'application  $y \rightarrow (x | y)$ , c'est un fermé, ainsi que par conséquent  $\bigcap_{x \in A} \{x\}^\perp$ , où  $A$  est un sous-ensemble de  $H$ .

**Définition 14.3 (Orthogonal)** Si  $M$  est un sous-espace de  $H$ , on appelle orthogonal de  $M$  le sous-espace fermé

$$M^\perp = \{y \in H \mid (x | y) = 0, \forall x \in M\}$$

L'isomorphisme antilinéaire isométrique  $J : H' \rightarrow H$  défini par

$$(x | Jf) = \langle f, x \rangle, \forall f \in H', \forall x \in H$$

permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual et fait correspondre le transposé à l'adjoint selon la formule

$${}^tT = J^{-1} \circ T^* \circ J,$$

puisque

$$(x | J {}^tTf) = \langle {}^tTf, x \rangle = \langle f, Tx \rangle = (Tx | Jf) = (x | T^*Jf).$$

De même l'isométrie  $J$  met en correspondance les deux notions d'orthogonalité respectivement issues des définitions **B.1** et **14.3** selon les formules (à manier prudemment !)

$$M^\perp = JM^\perp \text{ pour } M \in H \text{ et } N^\perp = (JN)^\perp \text{ pour } N \in H' !$$

Cette identification permet de traduire en termes d'adjoint les résultats que nous avons obtenus dans les espaces de Banach, mais le cadre des espaces de Hilbert offre des avantages substantiels, tout d'abord en ce qui concerne le caractère élémentaire des démonstrations et c'est pourquoi nous avons jugé utile de les reprendre, alors même que les résultats découlent de l'identification réalisée par  $J$ .

#### Lemme 14.4

- (i) Si  $M$  est un sous-espace fermé de  $H$ , alors  $H = M \oplus M^\perp$ ,
- (ii) Si  $M$  est un sous-espace de  $H$ , alors  $M^\perp = \overline{M}^\perp$
- (iii) Si  $M$  est un sous-espace de  $H$ , alors  $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $x \in M \cap M^\perp$  alors  $(x | x) = 0$ , et par conséquent  $x = 0$ . Enfin si  $z \in H$ , d'après le théorème de projection, on pourra écrire  $z = z_1 + z_2$  où  $z_1 = Pz \in M$  et vérifie  $(z - z_1 | y) = 0 \forall y \in M$ , soit  $z_2 \in M^\perp$ .

▷ Il est clair tout d'abord que  $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$  ; réciproquement, si  $x \in M^\perp$  on aura  $(x|y) = 0 \forall y \in M$ , et par continuité,  $(x|z) = 0 \forall z \in \overline{M}$ . Il en résulte que  $x \in \overline{M}^\perp$ .

▷ Comme  $M^\perp$  est fermé, d'après les items précédents, on pourra écrire  $H = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp$  et  $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp = \overline{M} \oplus M^\perp$ , soit  $M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp = M^\perp \oplus \overline{M}$ . Mais  $M \subset (M^\perp)^\perp$ , et par conséquent  $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$  ; il en résulte que  $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ .

□

**Proposition 14.5** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors*

$$(i) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{R}(T^*)^\perp \text{ et } \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \\ \mathcal{N}(T)^\perp &= \overline{\mathcal{R}(T^*)} \text{ et } \mathcal{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)} \end{aligned}$$

(ii) *Si l'un de  $\mathcal{R}(T)$  ou  $\mathcal{R}(T^*)$  est fermé, l'autre l'est également et*

$$\mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*) \text{ et } \mathcal{N}(T^*)^\perp = \mathcal{R}(T)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $x \in \mathcal{N}(T^*)$ , alors  $(Ty|x) = (y|T^*x) = 0 \forall y$ , et par conséquent  $x \in \mathcal{R}(T)^\perp$  ; c'est dire que  $\mathcal{N}(T^*) \subset \mathcal{R}(T)^\perp$ . Réciproquement si  $x \in \mathcal{R}(T)^\perp$ , alors  $(y|T^*x) = (Ty|x) = 0 \forall y$ , d'où  $T^*x = 0$ , et par conséquent  $x \in \mathcal{N}(T^*)$  ; il en résulte que  $\mathcal{R}(T)^\perp \subset \mathcal{N}(T^*)$ , et par conséquent  $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$ . De l'identité  $(T^*)^* = T$  résulte alors la relation  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$ .

▷ D'après le lemme 14.4, il en résulte que  $\mathcal{N}(T)^\perp = (\mathcal{R}(T^*)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$  et  $\mathcal{N}(T^*)^\perp = (\mathcal{R}(T)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$ .

▷ Si on suppose  $\mathcal{R}(T)$  fermé, on a tout d'abord  $\mathcal{N}(T^*)^\perp = \mathcal{R}(T)$ . Considérons par ailleurs l'application  $\tilde{T} : H/\mathcal{N}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$  définie par  $\tilde{T}(\dot{x}) = T(z)$ , où  $z \in \dot{x}$ . C'est une bijection continue, et comme  $\mathcal{R}(T)$  est fermé, d'après le théorème des homomorphismes 3.14, elle est inversible, d'inverse  $\tilde{S}$ . Si  $q \in \mathcal{N}(T)^\perp$ , on posera  $(q|\dot{x}) = (q|z)$ , où  $z \in \dot{x}$ .

▷ L'application  $y \rightarrow (q|\tilde{S}y)$  est continue sur  $\mathcal{R}(T)$  et par conséquent, en vertu du théorème de représentation de Riesz,  $\exists r \in \mathcal{R}(T)$  tel que  $(q|\tilde{S}y) = (r|y)$ ,  $\forall y \in \mathcal{R}(T)$ . Pour  $x \in H$ , on aura alors

$$(q|x) = (q|\dot{x}) = (q|\tilde{S}y) = (r|y) = (r|\tilde{T}\dot{x}) = (r|Tx) = (T^*r|x),$$

d'où  $q = T^*r$ . On a donc montré que  $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T^*)$ , d'où il résulte que  $\mathcal{R}(T^*)$  est fermé et vérifie  $\mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)$ .

□

**Proposition 14.6** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors*

$$\Sigma_r(T) = \overline{\Sigma_p(T^*)} \setminus \Sigma_p(T) \text{ et } \Sigma_c(T^*) = \overline{\Sigma_c(T)}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $\lambda \in \Sigma_r(T)$ , alors  $\overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq H$ , d'où  $\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda})^\perp \neq H$  en vertu de la proposition 14.5, et par conséquent  $\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda}) \neq \{0\}$ . Il en résulte que  $\bar{\lambda} \in \Sigma_p(T^*)$ , et par conséquent  $\Sigma_r(T) \subset \overline{\Sigma_p(T^*)} \setminus \Sigma_p(T)$

▷ Réciproquement, si  $\lambda \in \overline{\Sigma_p(T^*)} \setminus \Sigma_p(T)$ , alors  $\overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda})^\perp \neq H$ , et comme de plus  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$ , il en résulte que  $\lambda \in \Sigma_r(T)$ .

▷ Soit  $\mu \in \Sigma_c(T^*)$ , on aura  $\mathcal{N}(T^* - \mu) = \{0\}$ , et par conséquent selon la proposition 14.5,  $\overline{\mathcal{R}(T - \bar{\mu})} = H$ . Mais on aura aussi  $\overline{\mathcal{R}(T^* - \mu)} = H$ , d'où  $\mathcal{N}(T - \bar{\mu}) = \{0\}$ , soit  $\bar{\mu} \in \Sigma_c(T)$ . Il en résulte que  $\Sigma_c(T^*) \subset \overline{\Sigma_c(T)}$ , mais également que  $\Sigma_c(T) = \Sigma_c((T^*)^*) \subset \overline{\Sigma_c(T^*)}$ , d'où la conclusion. □

**Corollaire 14.7** *Pour que  $T \in \mathcal{L}(H)$  soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe  $C > 0$  tel que,  $\forall x \in H$ ,  $\|Tx\| \geq C \|x\|$  et  $\|T^*x\| \geq C \|x\|$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $T$  est inversible,  $\forall x \in H$ ,

$$\|x\| = \|TT^{-1}x\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|,$$

et par conséquent  $\|Tx\| \geq 1/\|T^{-1}\| \|x\|$ . Comme d'après la proposition 13.3,  $T^*$  est inversible, on aura également  $\|T^*x\| \geq 1/\|T^{-*}\| \|x\|$ .

▷ Réciproquement d'après le lemme 10.2,  $T$  est d'image fermée, d'où selon la proposition 14.5,  $\mathcal{N}(T^*)^\perp = \mathcal{R}(T)$ , mais  $T^*$  est injectif, d'où  $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$ , et par conséquent  $\mathcal{R}(T) = H$ . Comme de plus  $T$  est injectif, il est inversible d'après le théorème des homomorphismes 3.14. □

**Corollaire 14.8 (Critère de Weyl)**

(i) *S'il existe une suite  $x_n$  vérifiant  $\|x_n\| = 1$  et  $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0$ , alors  $\lambda \in \Sigma(T)$ .*

(ii) *Si  $\lambda \in \Sigma(T)$  et s'il existe  $C > 0$  tel que,  $\forall x \in H$ ,  $\|(T - \lambda)x\| \geq C \|x\|$ , alors  $\bar{\lambda} \in \Sigma_p(T^*)$*

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $R(\lambda)$  est un opérateur borné sur  $\Pi(T)$ , si  $\lambda \in \Pi(T)$  et  $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0$ , alors  $\|x_n\| \rightarrow 0$ . il en résulte que  $\lambda \in \Sigma(T)$ .

▷ Si  $\forall x \in H$ ,  $\|(T - \lambda)x\| \geq C \|x\|$ , alors  $\mathcal{R}(T - \lambda I)$  est fermé, d'après le lemme 10.2. Comme de plus  $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ , d'après la proposition 14.5, on aura  $\overline{\mathcal{R}(T^* - \bar{\lambda}I)} = H$ ; et comme  $\bar{\lambda} \in \Sigma(T^*)$ ,  $T^* - \bar{\lambda}I$  n'est pas injectif, soit  $\bar{\lambda} \in \Sigma_p(T^*)$ . □

## 14.2 Opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires

**Corollaire 14.9** *Si  $T$  est normal, alors  $\Sigma_p(T^*) = \overline{\Sigma_p(T)}$  et  $\Sigma_r(T) = \emptyset$ .*

DÉMONSTRATION. En effet  $T - \lambda$  est également normal, et  $\forall x$  on aura

$$\begin{aligned} \|(T^* - \bar{\lambda})x\|^2 &= \|(T - \lambda)^*x\|^2 = ((T - \lambda)^*x | (T - \lambda)^*x) = (x | (T - \lambda)(T - \lambda)^*x) \\ &= (x | (T - \lambda)^*(T - \lambda)x) = ((T - \lambda)x | (T - \lambda)x) = \|(T - \lambda)x\|^2 \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda}) = \mathcal{N}(T - \lambda)$ , et par conséquent  $\Sigma_p(T^*) = \overline{\Sigma_p(T)}$ . Il résulte alors de la proposition 14.6 que  $\Sigma_r(T) = \emptyset$ . □

**Lemme 14.10 (Égalité de polarisation)** *Si  $b$  est une forme sesquilinéaire, elle satisfait l'égalité de polarisation :*

$$\sum_{k=0,3} i^k b(u + i^k v, u + i^k v) = 4b(u, v). \quad (14.1)$$

DÉMONSTRATION. On aura en effet

$$b(u + i^k v, u + i^k v) = b(u, u) + b(v, v) + (-i)^k b(u, v) + i^k b(v, u)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0,3} i^k b(u + i^k v, u + i^k v) &= (b(u, u) + b(v, v)) \sum_{k=0,3} i^k + b(u, v) \sum_{k=0,3} 1^k + b(v, u) \sum_{k=0,3} (-1)^k \\ &= 4b(u, v) \end{aligned}$$

□

### Proposition 14.11

(i)  *$T$  est unitaire si et seulement si il est surjectif et vérifie  $\|Tx\| = \|x\|$  (on dit encore isométrique)*

(ii)  *$T$  est auto adjoint si et seulement si  $(Tx | x) \in \mathbb{R}, \forall x \in H$*

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $T$  est unitaire, alors il est inversible et donc surjectif, et  $\|x\|^2 = (T^*Tx | x) = \|Tx\|^2$

▷ Réciproquement, si  $T$  est isométrique et surjectif, il est inversible, car il est bijectif et continu. Prenons.  $b(u, v) = (u | v)$ , on déduit de l'égalité de polarisation (14.1) que  $\forall x, y \in H$

$$\begin{aligned} 4(x | y) &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \\ &= \|T(x + y)\|^2 - \|T(x - y)\|^2 + i\|T(x + iy)\|^2 - i\|T(x - iy)\|^2 = 4(Tx | Ty), \end{aligned}$$

soit

$$(x | y) = (Tx | Ty) = (T^*Tx | y),$$

et par conséquent  $T^*T = I$ , soit  $T^* = T^{-1}$ .

▷ Posons

$$b(x, y) = (Tx | y) - \overline{(Ty | x)} = ((T - T^*)x | y).$$

D'après l'égalité de polarisation (14.1),  $b(x, y)$  est nul  $\forall x, y$  si et seulement si  $b(x, x)$  est nul  $\forall x$ , comme de plus  $b(x, x) = 2 \Im(Tx | x)$ , il en résulte que  $T = T^*$  si et seulement si  $(Tx | x)$  est réel  $\forall x$ .

□

**Lemme 14.12** *Si  $T$  est auto-adjoint, on a*

$$\|(T - \lambda)x\|^2 = ((T - \Re \lambda)x | (T - \Re \lambda)x) + |\Im \lambda|^2 \|x\|^2, \quad (14.2)$$

DÉMONSTRATION. Posons  $\alpha = \Re \lambda$  et  $\beta = \Im \lambda$ , on aura

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)x\|^2 &= ((T - \alpha)x - i\beta x | (T - \alpha)x - i\beta x) \\ &= \|(T - \alpha)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 + 2\beta \Im(x | (T - \alpha)x), \end{aligned}$$

mais

$$(x | (T - \alpha)x) = ((T - \alpha)x | x) = \overline{(x | (T - \alpha)x)} \in \mathbb{R},$$

d'où la conclusion.

□

**Proposition 14.13** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $I + T^*T$  est inversible et  $\|(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1$ .*

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} \|(I + T^*T)x\|^2 &= ((I + T^*T)x | (I + T^*T)x) \\ &= \|x\|^2 + 2\|Tx\|^2 + \|T^*Tx\|^2 \geq \|x\|^2, \end{aligned}$$

d'où il résulte selon **10.2** que  $I + T^*T$  est injective à image fermée. Mais  $I + T^*T$  est auto-adjoint, et par conséquent n'a pas de spectre résiduel d'après le corollaire **14.9**, ce qui prouve que  $I + T^*T$  est inversible, et comme  $\|(I + T^*T)x\|^2 \geq \|x\|^2$ , que  $\|(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1$ .

□

Le corollaire suivant constitue un résultat très précis qui complète le corollaire **14.9** :

**Théorème 14.14** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , autoadjoint, alors*

- (i)  $\|T\|^n = \|T^n\|$
- (ii) Si on pose  $M = \sup_{\|x\|=1} (Tx | x)$ , alors  $M$  est réel et  $\|T\| = M$
- (iii) Si on pose  $m = \inf_{\|x\|=1} (Tx | x)$ , alors  $m$  est réel
- (iv) De plus

$$\Sigma(T) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}, \quad m \in \mathcal{A}(T) \text{ et } M \in \mathcal{A}(T).$$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura en effet  $\forall x$ ,

$$\|T^n x\|^2 = (T^n x | T^n x) = (T^{n+1} x | T^{n-1} x) \leq \|T^{n+1} x\| \|T^{n-1} x\|,$$

et par conséquent,  $\forall n \geq 2$ ,  $\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\|$ . Si on fait l'hypothèse, vérifiée pour  $n = 2$  en vertu de la proposition **14.2**, que  $\|T^k\| = \|T\|^k$  pour  $k \leq n$ , il en résulte que  $\|T\|^{2n} \leq \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1}$ , d'où  $\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|$ , et comme  $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$ , on aura donc  $\|T^{n+1}\| = \|T\|^{n+1}$ .

▷ Il est tout d'abord clair que  $M \leq \|T\|$ . Réciproquement choisissons  $z \in H$ ,  $\mu$  réel non nul, et posons  $u = Tz/\mu$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \{ (T(\mu z + u) | \mu z + u) - (T(\mu z - u) | \mu z - u) \} &= \frac{1}{2} \{ (T(\mu z) | u) + (Tu | \mu z) \} \\ &= \Re(T(\mu z) | u) = \|Tz\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\|Tz\|^2 \leq \frac{M}{4} (\|\mu z + u\|^2 + \|\mu z - u\|^2) = \frac{M}{2} (\|\mu z\|^2 + \|u\|^2),$$

selon le lemme de la médiane. Si  $Tz \neq 0$ , on peut choisir  $\mu = (\|Tz\| / \|z\|)^{1/2}$ , nous aurons alors

$$\|\mu z\|^2 + \|u\|^2 = \mu^2 \|z\|^2 + \frac{1}{\mu^2} \|Tz\|^2 = 2 \|Tz\| \|z\|,$$

et par conséquent  $\|Tz\|^2 \leq M \|Tz\| \|z\|$ . Il en résulte que  $\|Tz\| \leq M \|z\|$ , d'où  $\|T\| \leq M$ .

▷ Posons  $\beta = \Im \lambda$ , la formule (14.2) nous montre que  $\|(T - \lambda)x\| \geq |\beta| \|x\|$ . Il en résulte, d'après le lemme **10.2**, que  $T - \lambda$  est injective et d'image fermée pour  $\beta \neq 0$ , il en est de même en remplaçant  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$ , et on aura par conséquent  $\mathcal{R}(T - \lambda) = \mathcal{N}(T - \bar{\lambda})^\perp = H$  et  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$ ; il en résulte que  $T - \lambda$  est bijectif et donc inversible. On a donc montré que  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

▷ Choisissons maintenant  $\lambda > M$ , nous aurons  $\lambda \|x\|^2 > M \|x\|^2 = \sup_{x \in H} (Tx | x)$ , et par conséquent

$$\|x\| \|(T - \lambda)x\| \geq |(T - \lambda)x | x| = |(Tx | x) - \lambda \|x\|^2| \geq (\lambda - M) \|x\|^2;$$

comme précédemment, il en résulte que  $T - \lambda$  est inversible. De même, comme  $-m = \sup_{\|x\|=1} (-Tx | x)$ ,  $-T - \mu$  est inversible pour  $\mu > -m$ , et par conséquent  $T - \lambda$  est inversible pour  $\lambda < m$ .

▷ Montrons que  $M \in \Sigma(T)$ . Soit  $x_n$  une suite majorante unitaire de  $(Tx | x)$ , nous aurons  $\|x_n\| = 1$  et  $\delta_n \rightarrow 0$ , avec  $\delta_n = (Tx_n | x_n) - M \in \mathbb{R}$ . Pour  $\gamma \in \mathbb{R}$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \|(T - M)x_n\|^2 &= \|(T + \gamma)x_n - (M + \gamma)x_n\|^2 \\ &= \|(T + \gamma)x_n\|^2 + (M + \gamma)^2 - 2(M + \gamma) \Re((T + \gamma)x_n | x_n) \\ &= \|(T + \gamma)x_n\|^2 + (M + \gamma)^2 - 2(M + \gamma)(M + \delta_n + \gamma), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|(T - M)x_n\|^2 + (M + \gamma)^2 - \|(T + \gamma)x_n\|^2 \right\} = 0 \quad (14.3)$$

▷ Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|(T + \gamma)x_n\| &\leq \|T + \gamma\| = \sup_{\|x\|=1} |((T + \gamma)x|x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx|x) + \gamma| \\ &= \max \left\{ \left| \sup_{\|x\|=1} (Tx|x) + \gamma \right|, \left| \inf_{\|x\|=1} (Tx|x) + \gamma \right| \right\} = \max \{ |M + \gamma|, |m + \gamma| \}, \end{aligned}$$

d'après (ii). Choisissons alors  $\gamma > \|T\|$ , comme

$$\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} |(Tx|x)| \geq \left| \inf_{\|x\|=1} (Tx|x) \right| = |m|,$$

on aura  $M + \gamma \geq m + \gamma > 0$ , d'où  $\|(T + \gamma)x_n\| \leq M + \gamma$ , et par conséquent

$$(M + \gamma)^2 - \|(T + \gamma)x_n\|^2 \geq 0. \quad (14.4)$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - M)x_n\|^2 = 0,$$

car dans l'hypothèse contraire, il existerait  $\varepsilon > 0$  et  $x_{n'}$  extraite telle que  $\|(T - M)x_{n'}\|^2 > \varepsilon$ , ce qui est impossible compte tenu de (14.3) et (14.4).

▷ Supposons maintenant que  $M \notin \Sigma(T)$ , alors  $x_n = (T - M)^{-1}(T - M)x_n$ , et par conséquent

$$1 = \|x_n\| \leq \left\| (T - M)^{-1} \right\| \|(T - M)x_n\|,$$

ce qui constitue une contradiction. Nous avons donc démontré que  $M \in \Sigma(T)$ , il en résulte que  $-m = \sup_{\|x\|=1} (-Tx|x) \in \Sigma(-T) = -\Sigma(T)$ , soit  $m \in \Sigma(T)$ .

□

Il n'est pas sans intérêt de faire la relation entre ce résultat et la notion de coercivité. Considérons  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et posons  $a(x, y) = ((T - \lambda)x|y)$ . Pour que  $T - \lambda$  soit inversible, il suffit que  $a$  soit coercive, soit qu'il existe  $\alpha > 0$ , telle que  $\inf_{\|x\|=1} ((T - \lambda)x|x) \geq \alpha$ ; il en résulte alors que  $m - \lambda \geq \alpha$ , soit  $\lambda < m$ . On voit donc que la coercivité nous renseigne sur la possibilité d'inverser  $T - \lambda$  pour des valeurs de  $\lambda$  plus petites que  $m$ , par contre elle est impuissante à nous instruire sur le fait que  $T - \lambda$  est inversible pour  $\lambda > M$ .

**Corollaire 14.15** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $\Sigma(T^*T) \subset \mathbb{R}^+$ .

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 14.13  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $I + \lambda^2 T^*T = I + (\lambda T)^* \lambda T$  est inversible, et par conséquent  $\Sigma(T^*T) \subset \mathbb{R}^+$ .

□

**Remarque 14.16** Nous avons vu que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel et que celui d'un opérateur unitaire est contenu dans le cercle unité, en fait il existe une réciproque de ce résultat, qui stipule qu'un opérateur normal  $T$  est auto adjoint si et seulement si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$  et qu'il est unitaire si et seulement si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{T}$  ; nous nous appuierons sur le calcul fonctionnel des fonctions continues pour démontrer ce résultat (voir le corollaire **19.36**).

## 14.3 La transformation de Cayley

La transformation homographique  $\kappa(\xi) = (\xi - i) / (\xi + i)$ , dite *transformation de Cayley*, est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ , où  $\mathbb{T}$  est le cercle unité de  $\mathbb{C}$  ; c'est une fonction holomorphe en dehors de  $\xi = -i$ . dont la fonction inverse est donné par  $\kappa^{-1}(\zeta) = i(1 + \zeta) / (1 - \zeta)$ . Notons que  $\kappa^{-1}(1/\zeta) = -\kappa^{-1}(\zeta)$  et que

$$\kappa(\xi) = \frac{\xi^2 - 1 - 2i\xi}{\xi^2 + 1},$$

d'où il résulte que, pour  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa(-\xi) = \overline{\kappa(\xi)}$ .

### Proposition 14.17

- (i) Si  $T$  est borné auto-adjoint, alors  $\kappa(T)$  est unitaire et  $1 \notin \Sigma(\kappa(T))$
- (ii) Si  $U$  est unitaire, et si  $1 \notin \Sigma(U)$ , alors  $\kappa^{-1}(U)$  est auto-adjoint.

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $\kappa$  est holomorphe au voisinage de la droite réelle, d'après la proposition **13.6**, on aura  $(\kappa(T))^* = \check{\kappa}(T)$ , où  $\check{\kappa}(\xi) = \kappa(\overline{\xi}) = (\xi + i) / (\xi - i) = 1/\kappa(\xi)$ , d'où il résulte que  $\check{\kappa}(T) = (1/\kappa)(T)$ , soit  $(\kappa(T))^* = (\kappa(T))^{-1}$ , et par conséquent que  $\kappa(T)$  est unitaire. D'après le théorème de transformation spectrale, on aura  $\Sigma(\kappa(T)) = \kappa(\Sigma(T)) \subset \mathbb{T} \setminus \{1\}$ .

▷ La fonction  $\kappa^{-1}(\zeta)$  étant holomorphe au voisinage de  $\Sigma(U)$ , on aura

$$(\kappa^{-1}(U))^* = \overbrace{\kappa^{-1}}^{\vee}(U^*) = -\kappa^{-1}(U^*) = -\kappa^{-1}(U^{-1}).$$

Choisissons maintenant un chemin  $\Gamma$  contenant le spectre  $U^*$ , mais pas le point 1, on aura

$$\begin{aligned} (\kappa^{-1}(U))^* &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \kappa^{-1}(\zeta) (U^{-1} - \zeta)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \kappa^{-1}(\zeta) \left( -\zeta U^{-1} \left( U - \frac{1}{\zeta} \right) \right)^{-1} d\zeta \\ &= -\frac{U}{2i\pi} \int_{\Gamma} \kappa^{-1}(\zeta) R\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{U}{2i\pi} \int_{\Gamma^{-1}} \kappa^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right) R(\mu) \frac{d\mu}{\mu} \\ &= -\frac{U}{2i\pi} \int_{\Gamma^{-1}} \frac{\kappa^{-1}(\mu)}{\mu} R(\mu) d\mu = -\frac{U}{2\pi} \int_{\Gamma^{-1}} \frac{1}{\mu} \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) R(\mu) d\mu \\ &= -\frac{U}{2\pi} \left( \int_{\Gamma^{-1}} \frac{1}{\mu} R(\mu) d\mu + \int_{\Gamma^{-1}} \frac{2}{1-\mu} R(\mu) d\mu \right) \end{aligned}$$



où le chemin  $\Gamma^{-1}$ , formé des  $\mu = 1/\zeta$ ,  $\zeta \in \Gamma$ , ne contient pas de point du spectre de  $U$  mais entoure les singularités  $\mu = 0$  et  $\mu = 1$ , et ceci dans le sens rétrograde. D'après le théorème des résidus, on aura

$$\begin{aligned}
 (\kappa^{-1}(U))^* &= -\frac{U}{2\pi} (-2i\pi R(0) + 4i\pi R(1)) \\
 &= -\frac{U}{2\pi} (-2i\pi U^{-1} + 4i\pi (U-1)^{-1}) \\
 &= iU (U^{-1} - 2(U-1)^{-1}) = iU (1-U)^{-1} (U^{-1}(1-U) + 2) \\
 &= i(I+U)(1-U)^{-1} = \kappa^{-1}(U).
 \end{aligned}$$

□

On voit donc que la transformation de Cayley définit un isomorphisme entre les opérateurs bornés auto-adjoints et les opérateurs unitaires dont le spectre ne contient pas le point 1.

**Cinquième partie**  
**Opérateurs compacts**



# Chapitre 15

## Opérateurs compacts dans les espaces de Banach

### 15.1 Opérateurs de rang fini

Il est aisé de construire des opérateurs linéaires continus dont la dimension ou la codimension de l'image soit finie ; on parle dans le premier cas d'opérateur de rang fini et dans le second d'opérateurs de co-rang fini. Considérons par exemple un sous-espace  $M$  de  $X$ , de dimension finie, dont une base est formée des  $e_i$ ,  $i = 1, m$ , ainsi que  $m$  formes linéaires continues  $h_i$ . Posons alors

$$T(x) = \sum_{i=1,m} h_i(x)e_i,$$

c'est un opérateur borné dont l'image est incluse dans  $M$ , il est donc de rang fini  $\leq m$ .

Un procédé analogue permet de construire des opérateurs de co-rang fini :

**Lemme 15.1** *Soit  $M$  un sous-espace fermé de dimension finie de  $X$  dont les  $e_i$  forment une base et les  $f_i \in M'$  la base duale. Soit  $P \in M'$  l'opérateur défini par*

$$P(x) = \sum_{i=1,m} f_i(x)e_i.$$

(i) *Chaque  $f_i$  se prolonge à  $X$  tout entier en un élément  $\tilde{f}_i$  de  $X'$ . La formule*

$$\tilde{P}(x) = \sum_{i=1,m} \tilde{f}_i(x)e_i \tag{15.1}$$

*constitue un prolongement de  $P$  à  $X$  en un projecteur borné d'image  $M$*

(ii) *On a  $X = M \oplus M'$ , où  $M$  et  $M' = \mathcal{R}(I - \tilde{P})$ , sont fermés et constituent donc une somme directe topologique, d'où il résulte que  $M'$  est de codimension finie.*

(iii) On a  $M' = \bigcap_{i=1,n} \mathcal{N}(\tilde{f}_i)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En vertu du théorème de Hahn-Banach **5.5** (i), chaque  $f_j$  se prolonge à  $X$  tout entier en une forme linéaire continue, et comme  $\tilde{f}_i(e_j) = f_i(e_j) = \delta_{ij}$ , il est clair que  $\tilde{P}$  est un projecteur borné d'image  $M$ .

▷ Selon la proposition **A.6**,  $M$  et  $M'$  sont fermés ; ils forment donc une somme directe topologique, d'après la proposition **A.5**. Il en résulte que  $M'$  est de codimension finie, d'après la proposition **B.5** (ii).

▷ On aura  $\forall j$ ,

$$\tilde{f}_j(x - \tilde{P}x) = \tilde{f}_j(x) - \sum_{i=1,m} \tilde{f}_i(x) \tilde{f}_j(e_i) = \tilde{f}_j(x) - \sum_{i=1,m} \tilde{f}_i(x) f_j(e_i) = 0,$$

d'où  $\mathcal{R}(I - \tilde{P}) \subset \bigcap_{i=1,m} \mathcal{N}(\tilde{f}_i)$ . Mais par ailleurs si  $y \in \bigcap_{i=1,m} \mathcal{N}(\tilde{f}_i)$ , on a  $\tilde{P}y = 0$ , et comme de plus, pour  $z \in M$  on a  $(I - \tilde{P})z = 0$ , on pourra écrire  $y = y - \tilde{P}y + (I - \tilde{P})z$ , d'où  $y = (I - \tilde{P})(y + z) \in \mathcal{R}(I - \tilde{P})$ . Il en résulte que

$$\mathcal{R}(I - \tilde{P}) = \bigcap_{i=1,m} \mathcal{N}(\tilde{f}_i), \quad (15.2)$$

□

### Proposition 15.2

- (i) Si  $M$  est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique
- (ii) Si  $M$  est fermé et de codimension finie, il admet un supplémentaire topologique.

DÉMONSTRATION.

▷ C'est une conséquence immédiate du lemme **15.1** (ii).

▷ Comme  $X/M$  est de dimension finie,  $\exists \ell_i \in X$ ,  $i = 1, n$  tels que les  $\dot{\ell}_i$  forment une base de  $X/M$  ; notons  $g_i$  la base duale, nous aurons  $\dot{x} = \sum_{i=1,n} g_i(\dot{x}) \dot{\ell}_i$ . Posons alors  $P'(x) = \sum_{i=1,n} g_i(\dot{x}) \ell_i$ , c'est un projecteur continu ; nous noterons  $M' = \mathcal{R}(P')$  le sous-espace engendré par les  $\ell_i$ . Nous aurons  $P'(x) = \sum_{i=1,n} g_i(\dot{x}) \dot{\ell}_i = \dot{x}$ , et par conséquent  $x - P'(x) \in M$ , d'où  $\mathcal{R}(I - P') \subset M$ . Réciproquement, si  $y \in M$ ,  $g_i(\dot{y}) = 0 \forall i$ , d'où  $P'(y) = 0$  et par conséquent  $y = y - P'(y)$ , soit  $y \in \mathcal{R}(I - P')$ . Nous avons donc démontré que  $\mathcal{R}(I - P') = M$ , et par conséquent  $X = M \oplus M'$ .

□

Notons maintenant que *l'ensemble des opérateurs bornés de rang fini n'est pas stable par passage à la limite* :

**Proposition 15.3** *Si  $X$  est un espace de Banach de dimension infinie, alors il existe un opérateur borné de rang infini, limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{F}_n$  le sous-espace des opérateurs de rang inférieur ou égal à  $n$ ,  $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ , le sous-espace des opérateurs de rang fini, et  $\overline{\mathcal{F}}$  son adhérence ; nous supposons la proposition fautive, c'est-à-dire que  $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ .

▷ Commençons par démontrer que les  $\mathcal{F}_n$  sont fermés, en effet, si nous supposons le contraire, alors il existe  $T_k \in \mathcal{F}_n$  qui converge vers  $T \notin \mathcal{F}_n$ . C'est dire qu'il existe  $x_j \in X$ ,  $j = 1, n+1$ , tels que les  $T(x_j)$  soient linéairement indépendants. Le lemme 15.4 ci-dessous nous montre alors qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que si  $\|(T - T_k)x_j\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall j = 1, n+1$ , alors les  $T_k x_j = T x_j + (T_k - T)x_j$  sont linéairement indépendants. Mais si  $k$  est choisi suffisamment grand pour que  $\|T - T_k\| < \varepsilon$ , ceci aboutit à une contradiction, puisque  $T_k \in \mathcal{F}_n$  et par conséquent les  $T_k(x_j)$ ,  $j = 1, n+1$  sont linéairement *dépendants*.

▷ Considérons alors l'espace  $\overline{\mathcal{F}}$ , il est complet pour la topologie induite et c'est par conséquent un espace de Baire, comme il n'est pas vide et ouvert pour cette topologie, selon 3.4 l'un au moins des  $\mathcal{F}_n$  est d'intérieur non vide dans  $\overline{\mathcal{F}}$ .

▷ En conséquence, pour  $S \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_n$  et  $\forall T \in \mathcal{F}$ , il existe  $\Lambda < 0$ , tel que  $S + \lambda T \in \mathcal{F}_n$ ,  $\forall \lambda \leq \Lambda$ , ce qui implique  $T \in \mathcal{F}_{2n}$ . C'est dire qu'un opérateur de rang fini est en fait de rang  $2n$  au plus, ce qui contredit la construction d'opérateurs de rang quelconque que nous avons effectuée au début du paragraphe.

□

**Lemme 15.4** *Si les  $a_i \in X$ ,  $i = 1, N$  forment un ensemble de  $N$  vecteurs linéairement indépendants, alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que les  $a_i + b_i$  soient également indépendants, dès que  $\|b_i\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall i = 1, N$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Raisonnons par récurrence, et supposons qu'il en est ainsi au rang  $N-1$ . Soit donc une collection finie  $a_i$  de  $N$  vecteurs linéairement indépendants, nous supposons que le résultat est faux au rang  $N$ , c'est-à-dire que pour chaque  $i \leq N$ , il existe une suite indicée par  $k$  :  $b_i^k$  vérifiant  $\|b_i^k\| \leq 1/k$  et telle que  $\forall k > 1/\varepsilon$ , les  $(a_i + b_i^k)$ ,  $i = 1, N$  ne soient pas linéairement indépendants, c'est-à-dire telle que  $a_N + b_N^k$  appartienne à l'espace engendré par les  $(a_i + b_i^k)$ ,  $i = 1, N-1$ , puisque ces derniers sont par hypothèse linéairement indépendants. C'est dire en fait que  $\forall k$ , existe une collection de  $\alpha_i^k$ ,  $i = 1, N-1$ , telle que  $a_N + b_N^k = \sum_{i=1, N-1} \alpha_i^k (a_i + b_i^k)$

▷ Supposons maintenant que les diverses suites  $\alpha_i^k$ ,  $k = 1, \infty$ , soient bornées, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, elles contiennent une sous-suite convergente, soit vers  $\alpha_i$ , et on aura  $a_N = \sum_{i=1, N-1} \alpha_i a_i$ , ce qui contredit l'hypothèse stipulant que les  $a_i$ ,  $i = 1, N$  sont linéairement indépendants.

▷ Il en résulte que nécessairement l'une des suites  $\alpha_i^k$  n'est pas bornée, soit par exemple  $\alpha_1^k$ , et quitte à ne considérer qu'une sous-suite extraite, nous pouvons supposer que  $|\alpha_1^k| \rightarrow \infty$ .

On aura alors, avec  $\beta_i^k = \alpha_i^k / \alpha_1^k$

$$0 = -\frac{a_N + b_N^k}{\alpha_1^k} + \sum_{i=1, N-1} \beta_i^k (a_i + b_i^k) = a_1 + \left( b_1^k - \frac{a_N + b_N^k}{\alpha_1^k} \right) + \sum_{i=2, N-1} \beta_i^k (a_i + b_i^k),$$

mais  $c_1^k = b_1^k - (a_N + b_N^k) / \alpha_1^k$  tend vers 0, ainsi que les  $b_i^k$ ,  $i = 2, N - 1$  ; la formule qui précède contredit donc l'hypothèse de récurrence.

□

Soit maintenant  $S$  continu, de rang fini ;  $\mathcal{R}(S)$  étant un sous-espace de dimension finie est fermé, et par conséquent, si  $B$  est la boule unité de  $X$ , on aura  $\overline{S(B)} \subset \mathcal{R}(S)$ . Comme  $S$  est continu,  $\overline{S(B)}$  est borné, et par conséquent compact dans  $\mathcal{R}(S)$ , qui est de dimension finie. Il en résulte que  $S(B)$  est relativement compact dans  $X$ . La définition suivante est donc celle d'une classe plus vaste que celle des opérateurs de rang fini, et nous allons voir qu'en fait elle contient  $\overline{\mathcal{F}}$ .

**Définition 15.5** On appelle opérateur compact un opérateur linéaire  $S : X \rightarrow X$  tel que  $S(B)$  soit relativement compact. En vertu du théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut encore dire que  $T$  est compact si de l'image par  $T$  de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. On note  $\mathcal{K}(X)$  l'ensemble des opérateurs compacts  $X \rightarrow X$ .

Comme un compact est borné, il en résulte que si  $S$  est compact,  $S(B)$  est borné et par conséquent qu'un opérateur compact est continu. Nous allons voir ci-dessous que les propriétés spectrales des opérateurs compacts sont très proches de celles des opérateurs en dimension finie.

**Proposition 15.6** Un opérateur compact, soit  $S : X \rightarrow Y$ , transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons donc que  $x_n \rightharpoonup x$ , c'est dire que  $\forall f \in X'$ ,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$  et en particulier que les suites  $\langle f, x_n \rangle$  sont bornées. Considérons les applications  $T_n : f \rightarrow \langle f, x_n \rangle$ , en vertu du principe de la borne uniforme 3.8, la suite des  $\|T_n\|$  est donc bornée. Mais par ailleurs

$$\|T_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\langle f, x_n \rangle}{\|f\|} = \|x_n\|,$$

d'après le corollaire 5.7, la suite des  $\|x_n\|$  est donc bornée.

▷ Posons alors  $y_n = Sx_n$  et  $y = Sx$ ,  $\forall g \in Y'$  on aura  $\langle g, y_n \rangle - \langle g, y \rangle = \langle {}^t S(g), x_n - x \rangle \rightarrow 0$ , ce qui prouve que  $y_n \rightarrow y$ . Supposons maintenant que  $\|y_n - y\| \not\rightarrow 0$ , soit que  $\exists \varepsilon > 0$  et une suite extraite  $y_{n'}$  telle que  $\|y_{n'} - y\| \geq \varepsilon$ . Comme  $x_{n'}$  est bornée, par compacité de  $S$ , il existe une suite extraite  $y_{n''}$  qui converge fortement et donc faiblement, soit vers  $y''$ , nécessairement différent de  $y$ . Mais  $y_{n''} \rightarrow y$  ce qui constitue une contradiction.

□

**Théorème 15.7** *Si  $T \in \mathcal{L}(X)$  est limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis, alors il est compact, soit  $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{K}(X)$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $X$  est un espace métrique complet, il suffira de démontrer que  $\overline{T(B)}$  est précompact, soit en fait que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\overline{T(B)}$  peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ . Soit donc  $S$  de rang fini, tel que  $\|T - S\| \leq \varepsilon/4$ ; comme  $\overline{S(B)}$  est compact ainsi que nous venons de le voir,  $\exists y_i \in \overline{S(B)}$ ,  $i = 1, n$  tels que  $\overline{S(B)} \subset \left(\bigcup_{i=1, n} B_{y_i}(\varepsilon/4)\right)$ . Pour tout  $i$ , il existe alors  $x_i \in B$  tel que  $\|S(x_i) - y_i\| < \varepsilon/4$ , et par conséquent  $B_{y_i}(\varepsilon/4) \subset B_{z_i}(\varepsilon/2)$ , où  $z_i = S(x_i)$ . Il en résulte que  $S(B) \subset \overline{S(B)} \subset \left(\bigcup_{i=1, n} B_{z_i}(\varepsilon/2)\right)$ , d'où  $T(B) \subset \left(\bigcup_{i=1, n} B_{z_i}(3\varepsilon/4)\right)$ , et par conséquent  $\overline{T(B)} \subset \left(\bigcup_{i=1, n} B_{z_i}(\varepsilon)\right)$ . □

La question qui se pose alors est de savoir si  $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{K}(X)$ , c'est-à-dire si tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. La réponse est négative en général, mais d'une part  $\overline{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{K}(X)$  sont malgré tout proches d'un point de vue spectral, et d'autre part pour de nombreux espaces de Banach, et en particulier les espaces de Hilbert,  $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{K}(X)$ . (voir le corollaire 16.3)

**Proposition 15.8**

- (i)  $\mathcal{F}$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(X)$
- (ii)  $\overline{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{K}(X)$  sont des idéaux bilatères fermés de  $\mathcal{L}(X)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $T \in \mathcal{L}(X)$  et  $S \in \mathcal{F}$ , d'une part il est clair que  $\mathcal{R}(ST) \subset \mathcal{R}(S)$ , et d'autre part que  $\mathcal{R}(TS)$  est engendré par les  $Te_i$ , où les  $e_i$  forment une base de  $\mathcal{R}(S)$ .

▷ Si maintenant  $S \in \overline{\mathcal{F}}$  est la limite des  $S_n \in \mathcal{F}$ , nous venons voir que  $S_n T \in \mathcal{F}$ , et par conséquent  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tel que  $\forall n > N$ ,  $\|S_n T - ST\| \leq \varepsilon$ , puisque  $\|S_n T - ST\| \leq \|S_n - S\| \|T\|$ . C'est dire que  $ST \in \overline{\mathcal{F}}$ , et de même on aura  $ST \in \overline{\mathcal{F}}$ .

▷ Soient  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $S \in \mathcal{K}(X)$ . Si  $x_n$  est une suite bornée alors d'une part  $Sx_n$  admet une sous-suite  $Sx_{n'}$  convergente et par conséquent  $TSx_{n'}$  converge également. D'autre part  $Tx_n$  est bornée, et par conséquent on peut extraire de  $STx_n$  une sous-suite convergente.

▷ Enfin  $\mathcal{K}(X)$  est fermé, en effet si  $T_k \rightarrow T$ , où  $T_k \in \mathcal{K}(X)$ , alors la démonstration du théorème 15.7 ci-dessus s'applique en remplaçant  $S$  par  $T_k$  avec  $k$  suffisamment grand, et montre que  $T$  est compact. □

## 15.2 Spectre des opérateurs compacts

**Théorème 15.9 (Riesz)** *Si  $X$  est un espace de Banach et si sa boule unité fermée  $\overline{B}$  est compacte (on dit alors que  $X$  est localement compact), alors  $X$  est de dimension finie.*



DÉMONSTRATION. La boule  $B_X$  étant compacte, elle peut être recouverte par un ensemble fini de boules ouvertes de rayon  $1/2$ , dont les centres seront notés  $x_i$ ,  $i = 1, k$ . Notons  $F$  l'espace vectoriel, de dimension finie, engendré par les  $x_i$  ; nous montrerons que  $X = F$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire, alors  $\exists x \in X \setminus F$ . Comme  $F$  est fermé, car de dimension finie,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ , et quitte à augmenter  $\varepsilon$ ,  $B(x, 2\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ . Notons  $y$  un élément de  $B(x, 2\varepsilon) \cap F$  et  $z = (x - y)/\|x - y\|$  ; pour tout  $i$  on peut écrire  $x = y + z\|x - y\| = y + x_i\|x - y\| + (z - x_i)\|x - y\|$ , et comme  $t = y + x_i\|x - y\| \in F$  on aura  $\|z - x_i\|\|x - y\| > \|x - t\| > \varepsilon$ . Si nous choisissons alors  $i$ , comme c'est possible par construction des  $x_i$ , tel que  $\|z - x_i\| \leq 1/2$ , on en déduit que  $\|x - y\| > 2\varepsilon$ , ce qui constitue une contradiction. □

**Proposition 15.10** *Si  $X$  est de dimension infinie et  $T$  compact, alors  $0 \in \Sigma(T)$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, s'il n'en n'était pas ainsi, alors  $T$  serait inversible, et par conséquent d'après la proposition 15.8,  $I = TT^{-1}$  serait compact, ce qui prouverait que  $X$  est localement compact, et par conséquent de dimension finie, d'après le théorème de Riesz 15.9. □

Bien entendu il n'en est pas ainsi en dimension finie !

**Théorème 15.11** *Soit  $T$  un opérateur compact, alors*

- (i) *Si  $\mathcal{R}(T)$  est fermé, il est de dimension finie*
- (ii) *Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\dim \mathcal{N}(T - \lambda) < +\infty$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons donc  $\mathcal{R}(T)$  fermé, alors, c'est un espace de Banach pour la topologie induite, sur lequel  $T$  est continue et surjective. D'après le théorème de l'application ouverte 3.11, il en résulte que  $T$  est ouverte en tant que application de  $X$  dans  $\mathcal{R}(T)$ . L'image  $A$  de la boule unité ouverte de  $X$  est donc un ouvert, elle contient l'origine, et par conséquent une boule fermée  $B$  centrée à l'origine. Comme  $T$  est compact,  $A$  est relativement compacte, et par conséquent  $B$  est compacte. Il en résulte que  $\mathcal{R}(T)$  est localement compact, et par conséquent de dimension finie.

▷ Posons  $Y = \mathcal{N}(T - \lambda)$ , c'est un fermé de  $X$ , et  $T|_Y$  a pour image l'ensemble des  $u = T(v)$ , où  $\lambda v - T(v) = 0$ , soit  $u = \lambda v$ , et par conséquent si  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathcal{R}(T|_Y) = Y$ . Comme  $T|_Y$  est compact, il résulte de l'item précédent que  $\dim Y < +\infty$ . □

**Corollaire 15.12** *Si  $P$  est une projection compacte, alors  $\mathcal{R}(P)$  est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION.  $\mathcal{R}(P)$  est fermé, en effet, si  $Px_n$  converge, soit vers  $y$ ,  $P^2x_n = Px_n$  converge vers  $Py$ , il en résulte que  $y = Py \in \mathcal{R}(P)$ . La conclusion découle alors du théorème 15.11. □

**Théorème 15.13** *Si  $T$  est compact et  $\lambda \neq 0$ , alors*

- (i)  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  est fermé
- (ii)  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  est de codimension finie.

DÉMONSTRATION.

▷ Nous savons que  $\dim \mathcal{N}(T - \lambda) < +\infty$  et nous avons vu à la proposition 15.2 que  $X = \mathcal{N}(T - \lambda) \oplus M'$ , où  $M'$  est fermé, et constitue donc un espace de Banach pour la topologie induite.

▷ Considérons l'opérateur  $Q = (T - \lambda)|_{M'} : M' \rightarrow X$ , il est injectif et vérifie  $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(T - \lambda)$ . Nous montrerons que  $\mathcal{R}(Q)$  est fermé, et à cet effet ainsi que nous y invite le lemme 10.2, qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\|Q(x)\| \geq r \|x\|$ ,  $\forall x \in M'$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors il existe une suite  $x_n$  dans  $M'$  telle que  $\|x_n\| = 1$  et  $Qx_n \rightarrow 0$ ; par compacité de  $T$ , on peut en extraire une sous-suite  $x_{n'}$  telle que  $Tx_{n'}$  converge, soit vers  $a \in X$ . Comme  $Tx_{n'} - \lambda x_{n'} = Qx_{n'} \rightarrow 0$ , il en résulte que  $\lambda x_{n'}$  converge également vers  $a$ , et par conséquent comme  $\lambda \neq 0$ , que  $a \in M'$ . Mais alors  $Qa = 0$ , et par conséquent  $a = 0$ , puisque  $Q$  est injectif, soit encore  $\lambda x_{n'} \rightarrow 0$ , ce qui constitue une contradiction.

▷ Nous allons démontrer que  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  possède un supplémentaire de dimension finie. Si tel n'est pas le cas en effet, alors il existe une suite  $a_n$  dans  $X$  telle que  $a_n \notin V_{n-1}$ , où  $V_{n-1}$  est le sous-espace engendré par  $\mathcal{R}(T - \lambda) \cup \{a_1\} \cdots \cup \{a_{n-1}\}$ . Comme  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  est fermé, il en est de même des  $V_n$ , de plus  $(T - \lambda)V_n \subset \mathcal{R}(T - \lambda) \subset V_{n-1}$ ; par conséquent d'après le lemme 15.15 ci-dessous, il existe une suite  $b_n \in V_n \setminus V_{n-1}$  qui vérifie  $\|b_n\| = 1$  et  $\|Tb_n - Tb_i\| > |\lambda|/2$ ,  $\forall i = 1, n-1$ . Il en résulte que  $Tb_n$  ne peut pas avoir de sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que  $T$  est compact, puisque  $b_n$  est bornée.

□

Le lemme qui suit remplace dans une certaine mesure le théorème de projection sur un sous-espace fermé dans un espace de Hilbert; en quelque sorte, il nous assure de l'existence de directions 'orthogonales à  $\varepsilon$  près' à tout sous-espace fermé propre.

**Lemme 15.14 (de Riesz)** *Si  $F$  est un espace vectoriel normé et  $E$  un sous-espace fermé de  $F$ , tel que  $E \neq F$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists a \in F$  tel que  $\|a\| = 1$  et  $d(a, E) \geq 1 - \varepsilon$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $v \in F \setminus E$ , comme  $E$  est fermé, on aura  $d = d(v, E) > 0$ , et on pourra choisir  $w_0 \in E$  tel que  $d \leq \|v - w_0\| \leq d/(1 - \varepsilon)$ . Posons alors  $a = (v - w_0) / \|v - w_0\|$ , on aura  $\|a\| = 1$  et pour  $w \in E$ ,

$$\|a - w\| = \|v - (w_0 + w \|v - w_0\|)\| / \|v - w_0\| \geq d / \|v - w_0\| \geq 1 - \varepsilon.$$

□

**Lemme 15.15** *Si  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et si  $E$  et  $F$  sont deux sous-espaces fermés qui vérifient  $E \subsetneq F$  et  $(T - \lambda)F \subset E$ , alors il existe  $a \in F \setminus E$ , tel que  $\|a\| = 1$  et  $\|Ta - Tx\| \geq |\lambda|/2$ ,  $\forall x \in E$ .*

DÉMONSTRATION. Le cas  $\lambda = 0$ , étant trivial, nous ne considérerons que celui où  $\lambda \neq 0$ .

▷ Selon le lemme **15.14**  $\exists a \in F \setminus E$  tel que  $\|a\| = 1$  et  $d(a, E) \geq 1/2$ .

▷ Soit maintenant  $x \in E$ , on aura  $a - x \in F$ , d'où  $(T - \lambda)(a - x) \in E$  ; posons alors  $y = \lambda x - (T - \lambda)(a - x)$  on aura  $y \in E$  et

$$T(a - x) = (T - \lambda)(a - x) + \lambda(a - x) = \lambda a - y = \lambda(a - z),$$

où  $z = x/\lambda \in E$ . Il en résulte que

$$\|T(a - x)\| = |\lambda| \|a - z\| \geq |\lambda| d(a, E) \geq |\lambda|/2.$$

□

**Théorème 15.16 (Décomposition en somme directe)** *Soit  $T$  un opérateur compact, pour  $\lambda \neq 0$  on pose*

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N}(T - \lambda)^k \text{ et } \mathcal{R}_k = \mathcal{R}(T - \lambda)^k,$$

alors

(i) *Les  $\mathcal{N}_k$  forment une suite croissante de sous-espaces fermés de dimension finie et les  $\mathcal{R}_k$  une suite décroissante de sous-espaces fermés de codimension finie.*

(ii) *Il existe un plus petit entier  $n$  tel que,  $\forall k \geq n$ ,  $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_n$  ; on aura alors  $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_n$ , ainsi que*

$$X = \mathcal{N}_n \oplus \mathcal{R}_n.$$

(iii)  *$\mathcal{N}_n$  et  $\mathcal{R}_n$  sont des sous-espaces invariants par  $T - \lambda$ , qui vérifient*

$$(T - \lambda)|_{\mathcal{N}_n}^n = 0 \text{ dans } \mathcal{L}(\mathcal{N}_n) \text{ et } (T - \lambda)|_{\mathcal{R}_n} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(\mathcal{R}_n).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair tout d'abord que les  $\mathcal{N}_n$  forment une suite croissante et les  $\mathcal{R}_n$  une suite décroissante ; par ailleurs, les  $\mathcal{N}_n$  sont de dimension finie en vertu du théorème **15.11**, et les  $\mathcal{R}_n$  sont fermés et de codimension finie, d'après le théorème **15.13**

▷ Montrons que les suites  $\mathcal{N}_k$  et  $\mathcal{R}_k$  sont stationnaires à partir d'un certain rang. Supposons à cet effet que  $\mathcal{N}_{k+1} \neq \mathcal{N}_k \forall k$ . Comme  $(T - \lambda)\mathcal{N}_{k+1} \subset \mathcal{N}_k$ , le lemme **15.15** nous montre qu'il existe une suite  $x_k \in \mathcal{N}_{k+1} \setminus \mathcal{N}_k$  telle que  $\|x_k\| = 1$  et  $\|Tx_k - Tx_i\| \geq |\lambda|/2, \forall i < k$ , ce qui est contradictoire avec la compacité de  $T$ . De même  $(T - \lambda)\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_{k+1}$ , par conséquent si  $\mathcal{R}_{k+1} \neq \mathcal{R}_k \forall k$ , il existe une suite  $y_k \in \mathcal{R}_k \setminus \mathcal{R}_{k+1}$  telle que  $\|y_k\| = 1$  et  $\|Ty_k - Ty_i\| \geq |\lambda|/2, \forall i > k$ , ce qui constitue là encore une contradiction.

▷ Soit maintenant  $\nu$  un entier tel que  $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}, \forall k \geq \nu$ . Si  $y \in \mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{R}_\nu$ , on a  $(T - \lambda)^\nu y = 0$  et  $y = (T - \lambda)^\nu x$ , d'où  $(T - \lambda)^{2\nu} x = 0$ , et par conséquent  $x \in \mathcal{N}_{2\nu} = \mathcal{N}_\nu$ . Il en résulte que  $0 = (T - \lambda)^\nu x = y$ , soit  $\mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{R}_\nu = \{0\}$  ; en particulier  $\mathcal{N}_n \cap \mathcal{R}_n = \{0\}$ .

▷ Soit alors  $m$  le plus petit entier tel que  $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_{k+1}, \forall k \geq m$ , on aura  $\mathcal{R}_{m-1} \supsetneq \mathcal{R}_m$ . Choisissons donc  $z \in \mathcal{R}_{m-1} \setminus \mathcal{R}_m$ , on aura  $(T - \lambda)z \in \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m+1}$ , soit  $(T - \lambda)z = (T - \lambda)y$ , où  $y \in \mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_{m-1}$ , et par conséquent d'une part  $z - y \in \mathcal{R}_{m-1}$ , et d'autre part  $z - y \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_{m-1}$ . Supposons que  $m - 1 \geq n$ , alors  $z - y = 0$ , puisqu'alors  $\mathcal{N}_{m-1} \cap \mathcal{R}_{m-1} = \{0\}$ , ce qui constitue une contradiction car  $y \in \mathcal{R}_m$  et  $z \notin \mathcal{R}_m$ . Il en résulte que  $m \leq n$ .

▷ Soit maintenant  $x \in X$ , on aura  $(T - \lambda)^n x \in \mathcal{R}_n$  et  $(T - \lambda)^n \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n$ ; par conséquent, il existe  $y \in \mathcal{R}_n$  tel que  $(T - \lambda)^n x = (T - \lambda)^n y$ , soit  $x - y \in \mathcal{N}_n$ . Nous avons donc prouvé que  $X = \mathcal{N}_n \oplus \mathcal{R}_n$

▷ Soit  $x \in \mathcal{N}_n$ , on aura  $(T - \lambda)^n x = 0$ , d'où  $(T - \lambda)^{n+1} x = 0$ , et par conséquent  $(T - \lambda)x \in \mathcal{N}_n$ . Par ailleurs, si  $x \in \mathcal{R}_n$ , il existe  $y$  tel que  $(T - \lambda)^n y = x$  et par conséquent  $(T - \lambda)x = (T - \lambda)^{n+1} y \in \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n$ . Il en résulte que  $\mathcal{N}_n$  et  $\mathcal{R}_n$  sont stables par  $T - \lambda$ .

▷ Enfin  $\mathcal{R}((T - \lambda)|_{\mathcal{R}_n}) = \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n$ , ce qui prouve que  $(T - \lambda)|_{\mathcal{R}_n}$  est surjectif, mais il est aussi injectif, car  $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{R}_n \subset \mathcal{N}_n \cap \mathcal{R}_n = \{0\}$ , et par le théorème des homomorphismes 3.14 inversible.

□

Notons qu'en fait une telle décomposition de l'espace est unique :

**Proposition 15.17** *Si  $T$  est compact et  $\lambda \neq 0$ , il y a unicité de la décomposition  $X = E \oplus F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux sous-espaces fermés stables par  $T$  qui vérifient*

- (i)  $(T - \lambda)|_E$  est nilpotent
- (ii)  $(T - \lambda)|_F$  est inversible

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $x \in E$ , on aura  $x = y + z$  où  $y \in \mathcal{N}_n$  et  $z \in \mathcal{R}_n$ , comme  $(T - \lambda)|_E$  est nilpotent, il existe  $p$  tel que  $(T - \lambda)^p x = 0$ , soit  $(T - \lambda)^p y = -(T - \lambda)^p z$ , mais  $(T - \lambda)^p y \in \mathcal{N}_n$  et  $(T - \lambda)^p z \in \mathcal{R}_n$ , et par conséquent  $(T - \lambda)^p z = 0$ . Comme  $T - \lambda$  est inversible sur  $\mathcal{R}_n$ , il en est de même de  $(T - \lambda)^p$ , d'où il résulte que  $z = 0$ . On a donc montré que  $E \subset \mathcal{N}_n$ . On montre de même que  $\mathcal{N}_n \subset E$ , et par conséquent que  $\mathcal{N}_n = E$

▷ Soit maintenant  $x = y + z \in F$ , avec  $y \in \mathcal{N}_n$  et  $z \in \mathcal{R}_n$ , on aura  $(T - \lambda)^n x = (T - \lambda)^n z \in \mathcal{R}_n$ , et par conséquent  $(T - \lambda)^n F \subset \mathcal{R}_n$ . Comme  $(T - \lambda)|_F$  est inversible, on aura  $(T - \lambda)^n F = F$ , et par conséquent  $F \subset \mathcal{R}_n$ . On montre de même que  $\mathcal{R}_n \subset F$ , soit  $\mathcal{R}_n = F$

□

Le théorème suivant est essentiel, il montre que, hormis en ce qui concerne la valeur spectrale  $\lambda = 0$ , le statut des opérateurs compacts est similaire à celui des matrices :

**Théorème 15.18** *Si  $\lambda \neq 0$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$
- (ii)  $\mathcal{R}(T - \lambda) = X$
- (iii)  $\lambda \notin \Sigma(T)$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord si (i) est vérifié,  $\mathcal{N}_k = \{0\}$ ,  $\forall k \geq 1$ , et par conséquent  $n = 1$  dans le théorème **15.16**, d'où (ii).

▷ Si c'est maintenant (ii) qui est vérifié, alors  $\mathcal{R}_k = X$ ,  $\forall k \geq 1$ , et par conséquent  $n = 1$ , d'où  $\mathcal{N}_1 = \{0\}$ , soit (i).

▷ Dans tous les cas on aura  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$  et  $\mathcal{R}(T - \lambda) = X$ , d'où  $T - \lambda$  est bijective, et par conséquent inversible d'après **3.14**, soit (iii).

▷ Réciproquement, il est clair que si  $\lambda \notin \Sigma(T)$  alors  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$ .

□

**Théorème 15.19** *Si  $T$  est compact*

- (i) *Tout point de  $\Sigma(T)$  autre que 0 est une valeur propre de  $T$ .*
- (ii) *Le seul éventuel point d'accumulation de  $\Sigma(T)$  est  $\{0\}$*
- (iii)  *$\Sigma(T)$  est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points*

DÉMONSTRATION.

▷ Le théorème **15.18** nous montre que pour  $\lambda \neq 0$ , si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , alors  $\mathcal{N}(T - \lambda) \neq \{0\}$ , il en résulte que tout point non nul du spectre est une valeur propre.

▷ Choisissons  $\lambda \in \Sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$  et notons que  $\forall \mu$ ,  $\mathcal{N}_n$  et  $\mathcal{R}_n$  sont invariants par  $T - \mu$ . Comme  $(T - \lambda)|_{\mathcal{N}_n}$  est nilpotent, selon la proposition **9.12** son spectre est réduit à  $\{0\}$ , ce qui prouve que  $(T - \mu)|_{\mathcal{N}_n}$  est inversible pour tout  $\mu \neq \lambda$ . Mais par ailleurs,  $(T - \lambda)|_{\mathcal{R}_n}$  est inversible et comme le spectre est un fermé, il en résulte que  $(T - \mu)|_{\mathcal{R}_n}$  est inversible dans un voisinage de  $\lambda$ , soit pour  $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ . Comme  $X = \mathcal{N}_n \oplus \mathcal{R}_n$ , il en résulte que  $\mathcal{N}(T - \mu) = \{0\}$  et selon le théorème **15.18** que  $T - \mu$  est inversible pour  $0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon$ ; c'est dire que  $\lambda$  est un point isolé du spectre.

▷ Considérons l'ensemble  $\Sigma(T) \setminus \overset{\circ}{B}(0, 1/n)$ , c'est un compact, puisque le spectre est compact, et comme il ne peut contenir de point d'accumulation, le théorème de Bolzano-Weierstraß nous montre qu'il est formé d'un nombre fini de points. On en déduit que  $\Sigma(T)$  est dénombrable.

□

Il est alors tout à fait instructif de se reporter aux résultats qui découlent de la considération de singularités isolées. Si  $\lambda$  est une valeur spectrale non nulle, nous savons que c'est une singularité isolée, et nous avons démontré au paragraphe 10.3 que  $X = M_\lambda \oplus M'_\lambda$  où  $P_\lambda$  est le projecteur spectral associé à la singularité  $\lambda$ ,  $M_\lambda = \mathcal{R}(P_\lambda)$  et  $M'_\lambda = \mathcal{R}(I - P_\lambda)$ . Les sous-espaces  $M_\lambda$  et  $M'_\lambda$  sont fermés et stables par  $T$ , on a  $T|_{M_\lambda} = \lambda I + D_\lambda$ , où  $D_\lambda$  est quasi-nilpotent et  $(T - \lambda)|_{M'_\lambda}$  est inversible, d'inverse  $U_\lambda(\lambda)$ . Mais en fait, comme  $T$  est compact, d'après le lemme **15.20** ci-dessous,  $M_\lambda$  est nécessairement de dimension finie et par conséquent  $D_\lambda$  est nilpotent, en vertu de la proposition **10.16**. Il résulte alors de la proposition **15.17** que  $M_\lambda = \mathcal{N}_n$ , et  $M'_\lambda = \mathcal{R}_n$ .

**Lemme 15.20** *Si  $T \in \mathcal{L}(E)$  est compact,  $\lambda \neq 0$  et  $T - \lambda$  quasi nilpotent, alors  $E$  est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. On aura  $\rho(T - \lambda) = 0$ , et par conséquent  $\Sigma(T) = \{\lambda\}$ . Comme  $T$  est compact, il résulte de la proposition **15.10** que  $\dim E < +\infty$ .

□

Le résultat suivant constitue essentiellement une transcription du théorème **15.19** en termes de résolution d'équation :

**Corollaire 15.21 (Alternative de Fredholm)** *Si  $T$  est compact et  $\lambda \neq 0$ , alors une et une seule des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(i) *pour tout  $y$ , l'équation  $(T - \lambda)x = y$  admet une solution  $x$  et une seule, elle dépend alors continûment de  $y$ .*

(ii) *L'équation  $(T - \lambda)x = 0$  admet une solution non nulle. Dans ces conditions l'équation  $(T - \lambda)x = y$  admet une solution si et seulement si*

$$\langle f, y \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{N}({}^tT - \lambda). \tag{15.3}$$

Dans le cas des espaces de Hilbert on montre aisément que la condition (15.3) prend la forme suivante :

$$(f | y) = 0, \forall f \in \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda}). \tag{15.4}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $T$  est compact et  $\lambda \neq 0$  et si  $(T - \lambda)$  est bijectif, alors en vertu du théorème **15.18**  $\lambda \notin \Sigma(T)$  ; c'est dire que  $(T - \lambda)^{-1}$  est borné. Si  $(T - \lambda)$  n'est pas injectif, alors  $\lambda \in \Sigma(T)$ , et comme  $\lambda \neq 0$ , d'après le théorème **15.19** c'est une valeur propre.

▷ Comme  $\lambda \neq 0$ , on sait que  $R(T - \lambda)$  est fermé, et par conséquent d'après la proposition **12.3**,  $R(T - \lambda) = \mathcal{N}({}^tT - \lambda)^\perp$ .

□

**Corollaire 15.22** *Si  $T$  est compact sur  $X$  et si  $0$  n'est pas une valeur propre de  $T$*

(i) *Si  $0$  est valeur propre de  ${}^tT$ , alors  $\{0\} = \Sigma_r(T)$*

(ii) *Si  $0$  n'est pas valeur propre de  ${}^tT$ , alors  $\{0\} = \Sigma_c(T)$*

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $T$  est compact, alors  $0 \in \Sigma(T) = \{0\} \cup \Sigma_p(T)$ , et comme de plus  $0 \notin \Sigma_p(T)$ , nécessairement  $\{0\} = \Sigma_r(T) \cup \Sigma_c(T)$ .

▷ D'après le corollaire **12.4**,  $\Sigma_p({}^tT) \setminus \Sigma_p(T) = \Sigma_r(T)$ , et par conséquent si  $0 \in \Sigma_p({}^tT)$  et  $0 \notin \Sigma_p(T)$ , alors  $0 \in \Sigma_r(T)$ , d'où  $\{0\} = \Sigma_r(T)$  ; de même, si  $0 \notin \Sigma_p({}^tT)$ , alors  $0 \notin \Sigma_r(T)$ , et par conséquent  $\{0\} = \Sigma_c(T)$ .

□

**Proposition 15.23** *Si  $T$  est compact, et  $\lambda \neq 0$ , alors  $\dim \mathcal{N}(T - \lambda) = \text{codim } \mathcal{R}(T - \lambda)$ .*

DÉMONSTRATION. Notons  $m = \dim \mathcal{N}(T - \lambda)$  et  $n = \dim X/\mathcal{R}(T - \lambda)$ , ainsi que  $x_i, i = 1, m$ , une base de  $\mathcal{N}(T - \lambda)$  et  $y_i, i = 1, n$  un ensemble de vecteurs tels que les  $\dot{y}_i, i = 1, n$  forment une base de  $X/\mathcal{R}(T - \lambda)$ . Comme  $\mathcal{N}(T - \lambda)$  est de dimension finie, d'après la proposition 15.2, il possède un supplémentaire topologique, soit  $N$  :

$$X = \mathcal{N}(T - \lambda) \oplus N.$$

▷ Notons que nécessairement, les  $y_i$  sont linéairement indépendants, en effet si  $0 = \sum_{k=1, n} \alpha_k y_k$ , alors  $\dot{0} = \sum_{k=1, n} \alpha_k \dot{y}_k$ , et par conséquent les  $\alpha_k$  sont nuls.

▷ Supposons tout d'abord que  $m \leq n$ , et notons  $F$  l'opérateur de rang fini, et par conséquent compact, défini par  $F|_N = 0$  et  $Fx_k = y_k, k = 1, m$ . On aura  $\mathcal{N}$

$$(T - \lambda) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\},$$

car si  $x \in \mathcal{N}(T - \lambda)$  alors  $x = \sum_{k=1, m} \alpha_k x_k$ , et si de plus  $F(x) = 0$ , alors  $0 = \sum_{k=1, m} \alpha_k y_k$ , d'où  $x = 0$ .

▷ De plus

$$\mathcal{R}(T - \lambda) \cap \mathcal{R}(F) = \{0\};$$

en effet, si  $y \in \mathcal{R}(F)$ , alors  $y = \sum_{k=1, m} \alpha_k y_k$ , et si de plus  $y \in \mathcal{R}(T - \lambda)$ , alors  $\sum_{k=1, m} \alpha_k \dot{y}_k = \dot{y} = 0$ , et par conséquent  $y = 0$ .

▷ Posons alors  $\tilde{T} = T + F$ , et montrons que  $\mathcal{N}(\tilde{T} - \lambda) = \{0\}$  : soit  $x \in \mathcal{N}(\tilde{T} - \lambda)$ , on aura  $Tx - \lambda x = Fx$ , d'où  $Fx \in \mathcal{R}(T - \lambda) \cap \mathcal{R}(F) = \{0\}$ , et par conséquent  $Tx - \lambda x = Fx = 0$ , soit  $x \in \mathcal{N}(T - \lambda) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$ .

▷ Montrons maintenant que  $\mathcal{R}(\tilde{T} - \lambda) = X$ . Comme  $F$  est compact,  $\tilde{T}$  l'est également, et on aura  $\mathcal{R}(\tilde{T} - \lambda) = X$ , d'après le théorème 15.18, puisque  $\mathcal{N}(\tilde{T} - \lambda) = \{0\}$ .

▷ On aura d'une part  $\mathcal{R}(\tilde{T} - \lambda) \subset \mathcal{R}(T - \lambda) + \mathcal{R}(F)$ , et par conséquent  $\dim \left( \mathcal{R}(\tilde{T} - \lambda) / \mathcal{R}(T - \lambda) \right) \leq \dim \mathcal{R}(F) = m$ , et d'autre part, d'après l'item précédent  $\dim \left( \mathcal{R}(\tilde{T} - \lambda) / \mathcal{R}(T - \lambda) \right) = \dim (X / \mathcal{R}(T - \lambda)) = n$ , ce qui prouve qu'en fait  $n = m$ .

▷ Supposons maintenant que  $n \leq m$  et construisons  $G$  selon  $G|_N = 0, Gx_k = y_k, k = 1, n$  et  $Gx_k = 0, k = n + 1, m$ . Posons  $\hat{T} = T + G$  et montrons que  $\mathcal{R}(\hat{T} - \lambda) = X$ . Soit en effet  $y \in X$ , on aura  $\dot{y} = \sum_{k=1, n} \alpha_k \dot{y}_k$ , et par conséquent  $y = a + b$ , où  $a = \sum_{k=1, n} \alpha_k y_k \in \mathcal{R}(G)$  et  $b \in \mathcal{R}(T - \lambda)$ , soit  $a = G(x)$  et  $b = (T - \lambda)s$  où  $x = \sum_{k=1, n} \alpha_k x_k \in \mathcal{N}(T - \lambda)$  et  $s \in N$ . Mais on aura également  $a = G(x + s)$  et  $b = (T - \lambda)(x + s)$ , et par conséquent  $y \in \mathcal{R}(\hat{T} - \lambda)$ .

▷ En vertu de la compacité de  $\hat{T}$ , selon le théorème 15.18 il en résulte que  $\mathcal{N}(\hat{T} - \lambda) = \{0\}$ , mais comme  $\mathcal{N}(\hat{T} - \lambda) \supset \mathcal{N}(T - \lambda) \cap \mathcal{N}(G)$ , on en déduit que  $\mathcal{N}(T - \lambda)$  est engendré par les  $x_k, k = 1, n$ , soit  $m = \dim \mathcal{N}(T - \lambda) = n$ .

□

## 15.3 Le théorème de Schauder

Le théorème suivant est très important, nous aurons l'occasion d'en voir une démonstration plus élémentaire dans le cadre des espaces de Hilbert.

**Théorème 15.24 (Schauder)**  *$T$  est compact si et seulement si son transposé  ${}^tT$  est compact*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $f_n$  une suite dans la boule unité de  $X'$ , on aura

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|x - y\|,$$

ce qui prouve que  $\mathcal{H} = \{f_n\}$  forme un ensemble équicontinu, de plus  $\forall x \in X, \{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  est borné, et donc relativement compact dans  $\mathbb{C}$ . Le théorème d'Ascoli 2.2 (iii) nous apprend alors que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans l'ensemble des applications continues  $X \rightarrow \mathbb{C}$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

▷ Supposons  $T$  compact sur  $X$  et notons  $B$  la boule unité de  $X$ , comme  $\overline{T(B)}$  est compact dans  $X$ , il en résulte que  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans l'ensemble des applications continues  $\overline{T(B)} \rightarrow \mathbb{C}$ , muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est dire que l'on peut extraire de  $f_n$  une sous-suite  $f_{n'}$  qui converge uniformément sur  $\overline{T(B)}$ , soit vers  $f$ . On aura alors

$$\sup_{y \in \overline{T(B)}} |\langle f_{n'} - f, y \rangle| = \sup_{x \in B} |\langle f_{n'} - f, Tx \rangle| = \sup_{x \in B} |\langle {}^tT(f_{n'} - f), x \rangle|,$$

d'où la convergence de la suite  ${}^tTf_{n'}$ . Il en résulte que  ${}^tT$  est compact.

▷ Supposons maintenant que  ${}^tT$  est compact, nous noterons  $J$  l'isométrie canonique  $X \rightarrow X''$  définie par  $\langle J(x), f \rangle_{X'', X'} = \langle f, x \rangle_{X', X}$ . On aura

$$\langle J(Tx), f \rangle = \langle f, Tx \rangle = \langle {}^tTf, x \rangle = \langle J(x), {}^tTf \rangle = \langle {}^t({}^tT)J(x), f \rangle,$$

soit  $J \circ T = {}^t({}^tT) \circ J$ . Soit alors  $x \in B$ , si  $B''$  est la boule unité de  $X''$ , on aura  $J(B) \subset B''$ , et par conséquent  $J \circ T(B) \subset {}^t({}^tT)(B'')$ . D'après le début du théorème, nous savons que  ${}^t({}^tT)$  est compact, et par conséquent  $\overline{J \circ T(B)}$ ; comme  $J$  est une isométrie, il en est de même de  $\overline{T(B)}$ . □

## 15.4 Opérateurs de Fredholm ou à indice

**Définition 15.25** *On dit que  $T$  est un opérateur de Fredholm, soit  $T \in \mathcal{I}(X)$ , si  $\mathcal{N}(T)$  est de dimension finie et  $\mathcal{R}(T)$  est un sous-espace fermé de codimension finie.*

Il en résulte en particulier que les opérateurs inversibles ainsi que les opérateurs de la forme  $T - \lambda$  où  $\lambda \neq 0$  et  $T$  est compact, sont de Fredholm.



Rappelons que selon la proposition **15.8** l'ensemble  $\mathcal{K}(X)$  des opérateurs compacts est fermé ce qui nous permet de considérer l'algèbre de Banach quotient  $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$  qu'on appelle *algèbre de Calkin*.

**Théorème 15.26 (Atkinson)** *Un opérateur borné  $T$  est un opérateur de Fredholm si et seulement si  $\dot{T}$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons tout d'abord que  $\dot{T}$  est inversible et notons  $S$  un opérateur borné tel que  $S = \dot{T}^{-1}$ ; c'est dire qu'il existe  $K_1$  et  $K_2$  compacts, tels que  $I - ST = K_1$  et  $I - TS = K_2$ . On aura  $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(ST) = \mathcal{N}(I - K_1)$ , d'où il résulte que  $\mathcal{N}(T)$  est de dimension finie d'après le théorème **15.11**. D'autre part  $\mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(I - K_2)$ , qui se trouve être un sous-espace fermé de codimension finie d'après le théorème **15.13**. Il en résulte que  $\mathcal{R}(T)$  est de codimension finie, d'après la proposition **B.5**.

▷ Réciproquement, supposons que  $T$  est un opérateur de Fredholm, d'après la proposition **15.2**,  $\mathcal{N}(T)$  et  $\mathcal{R}(T)$  admettent des supplémentaires topologiques, et par conséquent, selon la proposition **A.6**, il existe deux projections  $P$  et  $Q$  telles que  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(P)$  et  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(Q)$ , où  $P$  et  $I - Q$  sont de rang fini.

▷ La restriction  $T_0$  de  $T$  à  $\mathcal{R}(I - P)$  est bijective  $\mathcal{R}(I - P) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ ; en effet, on aura  $T_0(I - P)x = T(x - Px) = Tx$ , et par conséquent d'une part  $T_0$  est surjective sur  $\mathcal{R}(T)$  et d'autre part  $\mathcal{N}(T_0) \subset \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(I - P) = \{0\}$ . D'après le théorème des homomorphismes **3.14**, il en résulte que  $T_0$  est inversible; soit  $S_0 : \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{R}(I - P)$  cet inverse et  $S = S_0Q$ . On aura  $QT = T$  et  $TS_0 = I|_{\mathcal{R}(Q)}$ , d'où

$$\begin{aligned} ST &= S_0QT = S_0T = S_0T_0(I - P) = I - P \text{ et} \\ TS &= TS_0Q = Q = I - (I - Q). \end{aligned}$$

Comme les opérateurs  $P$  et  $I - Q$  sont de rang fini, ils sont compacts, d'où  $\dot{S}\dot{T} = \dot{T}\dot{S} = \dot{I}$ .

□

### Corollaire 15.27

(i) *Un opérateur borné  $T$  appartient à  $\mathcal{I}(X)$  si et seulement si il existe  $S \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $I - ST$  et  $I - TS$  soient compacts.*

(ii)  *$\mathcal{I}(X)$  est stable par les perturbations compactes et en particulier si  $T$  est inversible et  $K$  compact,  $T + K$  est de Fredholm.*

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, dire que  $I - ST = K_1$  et  $I - TS = K_2$ , où  $K_1$  et  $K_2$  sont compacts, c'est exactement dire que  $S$  est l'inverse de  $\dot{T}$ , dans  $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ , et donc que  $T$  est de Fredholm d'après le théorème d'Atkinson **15.26**.

▷ Supposons que  $T' = T + K$ , où  $T$  est de Fredholm et  $K$  compact, on aura  $I - ST' = K_1 + SK$  et  $I - T'S = K_2 + KS$ , d'où il résulte que  $T'$  est de Fredholm, puisque  $\mathcal{K}(X)$  est un idéal bilatère.

□

**Corollaire 15.28**  $\mathcal{I}(X)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(X)$ , il est stable par multiplication.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème d'Atkinson **15.26**,  $\mathcal{I}(X)$  est l'image réciproque de l'algèbre de Banach  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$  par l'homomorphisme continu  $T \rightarrow \dot{T}$ . La conclusion découle alors du fait que l'ensemble  $G(\mathcal{A})$  des éléments inversibles de  $\mathcal{A}$  est ouvert selon le théorème **8.13** et forme un groupe multiplicatif.

□

### 15.4.1 Spectre essentiel

**Définition 15.29** Si  $T \in \mathcal{L}(X)$ , le spectre de  $\dot{T}$  dans  $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$  est appelé spectre essentiel de  $T$  et noté  $\Sigma_e(T)$ .

**Corollaire 15.30** Si  $X$  est un espace de Banach de dimension infinie et  $T$  est borné, alors

$$\Sigma_e(T) \subset \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \Sigma(T + K).$$

DÉMONSTRATION. Nous montrerons que  $\bigcup_{K \in \mathcal{K}(X)} \Pi(T + K) \subset \Pi(\dot{T})$ . Soit donc  $K$  compact et  $\lambda \notin \Sigma(T + K)$ , alors

$$(T + K - \lambda)R(\lambda) = I = R(\lambda)(T + K - \lambda),$$

et par conséquent  $I - R(\lambda)(T - \lambda) = R(\lambda)K$  et  $I - (T - \lambda)R(\lambda) = KR(\lambda)$ ; d'après le corollaire **15.27**, il en résulte que  $T - \lambda$  est de Fredholm et par conséquent que  $\dot{T} - \lambda\dot{I}$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ . C'est dire que  $\lambda \notin \Sigma(T)$ .

□

### 15.4.2 Indice

**Définition 15.31** Si  $T$  est un opérateur de Fredholm, on appelle indice de  $T$ , et on note

$$\text{ind } T = \dim \mathcal{N}(T) - \text{codim } \mathcal{R}(T).$$

#### Remarque 15.32

(i) Selon la proposition **B.3**,  $\text{codim } \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{R}(T)^\perp$ , et d'après la proposition **12.2**,  $\mathcal{N}({}^t T) = \mathcal{R}(T)^\perp$ ; il en résulte donc que  $\text{codim } \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{N}({}^t T)$ .

(ii) En vertu de la proposition **15.23**, si  $\lambda \neq 0$  et  $T$  est compact, alors  $T - \lambda$  est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

**Théorème 15.33** Si  $T$  et  $S$  sont deux opérateurs de Fredholm, on a

$$\text{ind } ST = \text{ind } S + \text{ind } T.$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 15.34** Si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs de Fredholm, alors

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(B) = \dim \mathcal{N}(AB) + \dim \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons l'application linéaire  $L : \mathcal{N}(AB) \rightarrow \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)$  définie par  $Lx = Bx$ ,  $\forall x \in \mathcal{N}(AB)$ .

▷ On aura tout d'abord  $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)$  ; d'une part en effet si  $ABx = 0$ , alors  $Bx \in \mathcal{N}(A)$ , d'où  $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}(A)$ , et comme  $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}(B)$ , il en résulte que  $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)$ . Réciproquement si  $y \in \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)$ , on aura  $y = Bz$  et  $0 = Ay = ABz$ , d'où  $z \in \mathcal{N}(AB)$  et  $y = Lz \in \mathcal{R}(L)$ .

▷ On aura également  $\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}(B)$ , car d'une part,  $Lx = 0 \implies Bx = 0$ , soit  $x \in \mathcal{N}(B)$ , et d'autre part si  $Bx = 0$  alors  $x \in \mathcal{N}(AB)$  et  $x \in \mathcal{N}(L)$ . Comme  $\mathcal{N}(AB)$  est de dimension finie, d'après le théorème 10.9, on aura

$$\mathcal{N}(AB) = \mathcal{R}(L) \oplus \mathcal{N}(L) = (\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)) \oplus \mathcal{N}(B),$$

d'où d'après la proposition B.5 (ii),

$$\dim (\mathcal{N}(AB)/\mathcal{N}(B)) = \dim (\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)).$$

▷ On pourra donc écrire

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(B) + \dim \frac{\mathcal{N}(AB)}{\mathcal{N}(B)} + \dim \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)} &= \\ \dim \mathcal{N}(B) + \dim (\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)) + \dim \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)}, \end{aligned}$$

d'où, d'après le lemme 15.36 ci-dessous

$$\dim \mathcal{N}(AB) + \dim (\mathcal{N}(A)/(\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A))) = \dim \mathcal{N}(B) + \dim \mathcal{N}(A).$$

□

**Lemme 15.35** Si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs de Fredholm, alors

$$\text{codim } \mathcal{R}(A) + \text{codim } \mathcal{R}(B) = \text{codim } \mathcal{R}(AB) + \dim \frac{\mathcal{R}(B) + \mathcal{N}(A)}{\mathcal{R}(B)}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $M = \mathcal{R}(B)$ , c'est un sous-espace de  $X$ , de codimension finie, et considérons l'application linéaire  $L : X/M \rightarrow \mathcal{R}(A)/\mathcal{R}(AB)$  définie par  $L\dot{v} = \dot{A}v$ , dont nous allons démontrer qu'elle est bijective.

▷ L'application  $L$  est clairement surjective, et on a  $\mathcal{N}(L) = (\mathcal{N}(A) + M)/M$ , en effet si  $L\dot{v} = 0$ , alors  $Av \in \mathcal{R}(AB)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w \in M$  tel que  $Av = Aw$ , soit  $v - w \in \mathcal{N}(A)$ , ou encore  $v \in \mathcal{N}(A) + M$ . Réciproquement, si  $\dot{v} \in (\mathcal{N}(A) + M)/M$ , soit  $v \in \mathcal{N}(A) + M$ , alors  $Av \in \mathcal{R}(AB)$  c'est-à-dire  $\dot{A}v = 0$ .

▷ Comme  $X/M$  est de dimension finie, en vertu du théorème 10.9, on aura

$$\dim \frac{X}{M} = \dim \mathcal{N}(L) + \dim \mathcal{R}(L) = \dim \frac{\mathcal{N}(A) + M}{M} + \dim \frac{\mathcal{R}(A)}{\mathcal{R}(AB)},$$

soit

$$\dim \frac{X}{\mathcal{R}(B)} = \dim \frac{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(B)}{\mathcal{R}(B)} + \dim \frac{\mathcal{R}(A)}{\mathcal{R}(AB)},$$

qu'on peut encore écrire

$$\dim \frac{X}{\mathcal{R}(A)} + \dim \frac{X}{\mathcal{R}(B)} = \dim \frac{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(B)}{\mathcal{R}(B)} + \dim \frac{\mathcal{R}(A)}{\mathcal{R}(AB)} + \dim \frac{X}{\mathcal{R}(A)}.$$

▷ Notons  $\ddot{x}$  les éléments de  $X/\mathcal{R}(AB)$  et  $\dot{y}$  ceux de  $X/\mathcal{R}(A)$  ; comme  $\mathcal{R}(AB) \subset \mathcal{R}(A)$ , la classe  $\dot{x}$  est la seule contenant  $\ddot{x}$  ; notons  $L$  l'application  $\ddot{x} \rightarrow \dot{x} : X/\mathcal{R}(AB) \rightarrow X/\mathcal{R}(A)$ . Cette application est clairement surjective, déterminons son noyau : dire que  $L\ddot{x} = 0$ , c'est dire qu'il existe  $a \in \mathcal{R}(A)$  tel que  $\ddot{x} = \ddot{a}$ , ou encore que  $\ddot{x} \in \mathcal{R}(A)/\mathcal{R}(AB)$ . Il en résulte que  $\mathcal{N}(L) = \mathcal{R}(A)/\mathcal{R}(AB)$ , d'où par conséquent en vertu du théorème 10.9 et de la remarque 10.10

$$\dim \frac{\mathcal{R}(A)}{\mathcal{R}(AB)} + \dim \frac{X}{\mathcal{R}(A)} = \dim \frac{X}{\mathcal{R}(AB)} ;$$

il en résulte que

$$\dim \frac{X}{\mathcal{R}(A)} + \dim \frac{X}{\mathcal{R}(B)} = \dim \frac{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(B)}{\mathcal{R}(B)} + \dim \frac{X}{\mathcal{R}(AB)}.$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME Nous avons donc montré que  $\dim \mathcal{N}(AB)$  et  $\text{codim } \mathcal{R}(AB)$  sont finies dès que  $A$  et  $B$  sont des opérateurs de Fredholm, c'est-à-dire que  $AB$  est un opérateur de Fredholm. Mais de plus, si  $M$  et  $N$  sont deux sous-espaces de  $X$ , l'application  $L : M \rightarrow (M + N)/N$  définie par  $L(x) = \{x + a \mid a \in N\}$  est surjective et a pour noyau  $\mathcal{N}(L) = M \cap N$  ; il en résulte, toujours selon la remarque 10.10, que  $\dim (M + N)/N = \dim M / (M \cap N)$ , et en particulier

$$\dim \frac{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(B)}{\mathcal{R}(B)} = \dim \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B)}.$$

En vertu des lemmes **15.34** et **15.35**, nous aurons donc

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(B) - \dim \mathcal{N}(AB) &= \dim \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B)} = \dim \frac{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(B)}{\mathcal{R}(B)} \\ &= \text{codim } \mathcal{R}(A) + \text{codim } \mathcal{R}(B) - \text{codim } \mathcal{R}(AB), \end{aligned}$$

soit  $\text{ind } A + \text{ind } B = \text{ind } AB$ .

□

**Lemme 15.36** *Si  $Z$  est un espace de dimension finie, et  $Y$  un sous-espace de  $Z$ , alors  $\dim Y + \text{codim } Y = \dim Z$ .*

DÉMONSTRATION. En effet  $Y$  a un supplémentaire dans  $Z$ , soit  $Y'$ , et on aura  $\dim Z = \dim Y + \dim Y' = \dim Y + \text{codim } Y$ , d'après la proposition **B.5**.

□

**Corollaire 15.37 (stabilité de l'indice)** *Si  $A$  est un opérateur de Fredholm et  $K$  est compact, alors  $\text{ind}(A + K) = \text{ind } A$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le corollaire **15.27** du théorème d'Atkinson, il existe  $B$  borné et  $L$  compact tel que  $AB = I + L$ , on aura alors  $(A + K)B = I + L + KB$ , et comme  $L + KB$  est compact, il en résulte que  $A + K$  est de Fredholm.

▷ D'après le théorème 15.33, on a

$$\text{ind } A + \text{ind } B = \text{ind } AB = \text{ind}(I + L) = 0,$$

en vertu de la remarque **15.32**, et de même

$$\text{ind}(A + K) + \text{ind } B = \text{ind}(A + K)B = \text{ind}(I + L + KB) = 0,$$

d'où  $\text{ind } A = \text{ind}(A + K)$ .

□

**Corollaire 15.38 (continuité de l'indice)** *Si  $A$  est un opérateur de Fredholm et si la suite d'opérateurs bornés  $A_n$  converge en norme vers  $A$ , alors  $\exists n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $A_n$  est un opérateur de Fredholm et  $\text{ind } A_n = \text{ind } A$ .*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire **15.28**,  $\mathcal{I}(X)$  est ouvert, et par conséquent  $A_n \in \mathcal{F}(X)$  pour  $n$  assez grand. D'après le corollaire **15.27**, on aura  $AB = I + K$ , où  $B \in \mathcal{L}(X)$  et  $K \in \mathcal{K}(X)$ ; mais  $A_n = A + T_n$  où  $T_n \rightarrow 0$ , et comme  $\|T_n B\| \leq \|T_n\| \|B\|$ , il en résulte que  $\|T_n B\| < 1$  pour  $n$  assez grand, et par conséquent que  $I + T_n B$  est inversible. On aura alors

$$\text{ind } A_n + \text{ind } B = \text{ind}(A + T_n)B = \text{ind}(I + T_n B + K) = 0,$$

d'après le corollaire **15.37** car  $I + T_n B$  est inversible. Or  $\text{ind } A + \text{ind } B = \text{ind } AB = \text{ind}(I + K) = 0$ , d'où  $\text{ind } A_n = \text{ind } A$ .

□

# Chapitre 16

## Le cas des espaces de Hilbert

Dans le cas des opérateurs compacts normaux sur un espace de Hilbert, on aboutit à un théorème de diagonalisation généralisant celle des matrices hermitiennes. Bien entendu, les résultats de la section précédente, démontrés dans le cadre des espaces de Banach restent valables, en particulier les théorèmes **15.18**, **15.19** et le corollaire **15.21**.

### 16.1 Opérateurs compacts normaux

**Proposition 16.1** *Si  $T$  est un opérateur compact normal, alors ses éléments spectraux non nuls sont des valeurs propres semi-simples*

DÉMONSTRATION. Ce sont tout d'abord des singularités isolées d'après le théorème **15.19**, et les opérateurs quasi-nilpotents associés  $D_\lambda$  sont nuls. En effet  $D_\lambda = f(T)$ , avec  $f(\zeta) = (\zeta - \lambda) e_\lambda(\zeta)$ , d'après la formule (9.17) et  $D_\lambda^* = \tilde{f}(T^*)$ . Comme  $T$  et  $T^*$  commutent, il en est de même de  $(T - \zeta)^{-1}$  et  $(T^* - \zeta)^{-1}$  ; il en résulte que  $D_\lambda$  et  $D_\lambda^*$  commutent c'est à dire que  $D_\lambda$  est normal. Mais alors  $0 = \rho(D_\lambda) = \|D_\lambda\|$ , selon la proposition **13.10** (i), ce qui implique que  $D_\lambda = 0$ , soit d'après la proposition **10.8** que  $\lambda$  est une valeur propre semi-simple.  $\square$

#### 16.1.1 Décomposition spectrale

**Théorème 16.2 (Représentation spectrale des opérateurs normaux)** *Soit  $T$  un opérateur normal compact sur  $H$ . On note  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , l'ensemble de ses valeurs propres non nulles, on pose  $N_0 = \mathcal{N}(T)$ ,  $N_k = \mathcal{N}(T - \lambda_k)$ ,  $k \geq 1$ , et on note  $P_k$ ,  $k \geq 1$  les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres  $\lambda_k$ , alors*

- (i)  $\mathcal{N}(T - \lambda_k) = \mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda_k})$
- (ii) Les sous-espaces  $N_k$ ,  $k \geq 0$  sont mutuellement orthogonaux et  $N_k = P_k(H)$ ,  $k \geq 1$
- (iii)  $H = \overline{\bigoplus_{k \geq 0} N_k}$ , somme directe Hilbertienne du noyau et des sous-espaces propres

(iv) On a  $T = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k$ , où la série converge en norme dans  $\mathcal{L}(H)$ . Une telle réduction est appelée diagonalisation de l'opérateur  $T$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $x_i \in N_i$ , on a

$$TT^*x_i = T^*Tx_i = \lambda_i T^*x_i,$$

et par conséquent  $T^*x_i \in N_i$ . Si de plus  $x'_i \in N_i$ , alors

$$(T^*x_i | x'_i) = (x_i | Tx'_i) = \bar{\lambda}_i (x_i | x'_i),$$

ce qui montre que  $T^*x_i - \bar{\lambda}_i x_i \in N_i \cap N_i^\perp$ , soit  $T^*x_i = \bar{\lambda}_i x_i$ .

▷ Pour  $i \neq j$ , on aura

$$\lambda_i (x_i | x_j) = (Tx_i | x_j) = (x_i | T^*x_j) = \lambda_j (x_i | x_j),$$

et par conséquent  $(x_i | x_j) = 0$

▷ Selon la proposition **16.1**, les  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$  sont des valeurs propres semi-simples, et par conséquent  $\mathcal{R}(P_k) = N_k$ , en vertu de la proposition **10.8**

▷ Notons maintenant  $E = \overline{\bigoplus_{k \geq 1} N_k}$  la somme directe Hilbertienne des  $N_k$ ,  $k \geq 1$  c'est à dire la fermeture de la somme algébrique des  $N_k$ . Comme, selon le lemme **13.4**,  $T$  et  $T^*$  commutent avec la résolvante de  $T$ , et donc avec les  $P_k$ , les  $N_k$  sont stables par  $T$  et  $T^*$ , et par continuité on aura  $T(E) \subset E$  et  $T^*(E) \subset E$ . On aura  $(Tx | y) = (x | T^*y) = 0$ ,  $\forall x \in E^\perp$ ,  $\forall y \in E$ , d'où il résulte que  $T(E^\perp) \subset E^\perp$ , et on aura de même  $T^*(E^\perp) \subset E^\perp$ . On peut donc considérer les restrictions de  $T$  et  $T^*$  à  $E^\perp$ , elles commutent entre elles et par conséquent  $T|_{E^\perp}$  est un opérateur normal.

▷ Supposons que  $\Sigma(T|_{E^\perp}) = \{0\}$ , alors  $\rho(T|_{E^\perp}) = 0$  et d'après la proposition **13.10**  $\|T|_{E^\perp}\| = 0$ . Il en résulte que si  $T|_{E^\perp} \neq 0$ , il possède un élément spectral, et donc une valeur propre, non nul. Cette valeur propre serait alors une valeur propre  $\lambda_k$  de  $T$ , ce qui constitue une contradiction, puisqu'on aurait alors  $N_k \cap E^\perp \neq \{0\}$ . Il en résulte que  $E^\perp \subset N_0$ , soit donc en fait  $E^\perp = N_0$ , puisque  $N_0$  est orthogonal à tous les  $N_k$ ,  $k \geq 1$ , et par conséquent  $H = \bigoplus_{k \geq 0} N_k$ , d'après le lemme **14.4**.

▷ Supposons que  $\Sigma(T)$  ne soit pas fini, et posons  $T_n = \sum_{i=1, n} \lambda_i P_i$ ; en vertu de l'orthogonalité mutuelle des  $N_i$ , on aura

$$\|T_{n+m}x - T_nx\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} \lambda_i P_i x \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+m} |\lambda_i|^2 \|P_i x\|^2$$

et

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \|P_i x\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|P_i x\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} P_i x \right\|^2 = \|x\|^2.$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , comme selon le théorème **15.19**, 0 est le seul point d'accumulation des  $\lambda_i$ ,  $\exists n_0$  tel que  $|\lambda_i| \leq \varepsilon$ ,  $\forall i \geq n_0$ . par conséquent  $\|T_{n+m}x - T_nx\| \leq \varepsilon \|x\|$ ,  $\forall x$ , soit  $\|T_{n+m} - T_n\| \leq \varepsilon$ . C'est dire que la suite  $T_n$  converge dans  $\mathcal{L}(H)$ , soit vers  $S$ . Mais pour  $n \geq p$ , et  $x \in N_p$ , on aura  $T_nx = \sum_{i=1, n} \lambda_i P_i x = \lambda_p x$ , et par conséquent  $Sx = \lambda_p x = T_nx$ , ce qui montre que  $S$  et  $T$  coïncident sur chaque  $N_p$ ,  $p \geq 0$ . Il en résulte que  $S = T$ .

□

**Corollaire 16.3** *Sur un espace de Hilbert, un opérateur compact peut être approché par une suite d'opérateurs de rang fini.*

DÉMONSTRATION. Considérons les opérateurs  $S = (T + T^*)/2$  et  $D = (T - T^*)/2i$ , ce sont des opérateurs compacts auto-adjoints. On peut donc leur appliquer le théorème de représentation spectrale, qui nous montre que chacun d'entre eux est la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, d'où le résultat, puisque  $T = S + iD$ . □

Notons qu'en général, ce résultat est faux dans un espace de Banach.

Une démonstration aisée de la compacité de l'opérateur adjoint est alors disponible :

**Corollaire 16.4 (Schauder)** *Si  $T$  est compact, alors il en est de même de  $T^*$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que si  $S$  est de rang fini, alors  $\mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(S^*S)$ , en effet  $\mathcal{R}(S)$  est alors fermé, et par conséquent, selon la proposition 14.5 et le lemme 14.4,  $H = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{N}(S^*)$ . Il en résulte que  $\mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(S^*S)$ , ce qui implique que  $\mathcal{R}(S^*)$  est de dimension finie.

▷ Soit  $T_n$  une suite d'opérateurs de rang fini tendant vers  $T$ , on aura  $\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\|$ , en vertu de la proposition 14.2, et comme les  $T_n^*$  sont de rang fini d'après l'item précédent, il en résulte d'après le théorème 15.7 que  $T^*$  est compact en tant que limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. □

Nous verrons dans la suite une autre démonstration de ce résultat à l'aide de la décomposition polaire des opérateurs.

**Proposition 16.5** *Si  $T$  est diagonalisable, alors  $S$  et  $T$  commutent si et seulement si les  $N_k$  réduisent  $S$*

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que  $S$  et  $T$  commutent, alors

$$\lambda_k SP_k = STP_k = TSP_k,$$

soit  $(T - \lambda_k)SP_k = 0$ , ce qui montre que  $N_k = \mathcal{R}(P_k)$  est stable par  $S$ . Mais  $\overline{\bigoplus_{j \geq 0, j \neq k} N_j} = N_k^\perp$  sera également invariant par  $S$ , ce qui montre que  $N_k$  réduit  $S$ . Réciproquement si  $S$  est réduit par chaque  $N_k$ , alors,  $SP_k = P_kS$ , et par conséquent

$$ST = \sum_{k \geq 1} \lambda_k SP_k = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k S = TS.$$

□



### 16.1.2 Calcul fonctionnel

**Proposition 16.6** *Si  $\varphi$  est holomorphe au voisinage de  $\Sigma(T)$ , où  $T$  est supposé normal compact, alors*

$$\varphi(T) = \sum_{k \geq 1} \varphi(\lambda_k) P_k + \varphi(0) P_0,$$

où  $P_0 = I - \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k$  est la projection sur l'éventuel noyau de  $T$ . Comme le spectre est compact,  $\varphi$  est bornée sur  $\Sigma(T)$ , et par conséquent la série ci-dessus converge en norme.

DÉMONSTRATION. Si  $e_k$  est une fonction égale à 1 au voisinage de  $\lambda_k$  et nulle au voisinage des autres valeurs propres, avec  $\psi(z) = \varphi(z) - \varphi(0)$ , on aura  $\psi \circ \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k = \sum_{k \geq 1} \psi(\lambda_k) e_k$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \psi(T) + \varphi(0) \mathbf{1}(T) = \left( \psi \circ \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k \right) (T) + \varphi(0) I \\ &= \sum_{k \geq 1} \psi(\lambda_k) e_k(T) + \varphi(0) I = \sum_{k \geq 1} \psi(\lambda_k) P_k + \varphi(0) I \\ &= \sum_{k \geq 1} \varphi(\lambda_k) P_k - \varphi(0) \sum_{k \geq 1} P_k + \varphi(0) I = \sum_{k \geq 1} \varphi(\lambda_k) P_k + \varphi(0) P_0. \end{aligned}$$

□

## 16.2 Opérateurs compacts auto-adjoints

### 16.2.1 L'alternative de Fredholm

Il est possible dans ce cadre restrictif de proposer une démonstration particulièrement simple du théorème de l'alternative de Fredholm. On a en effet démontré au théorème 14.14 (iv) que  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ , et par conséquent, si  $\lambda \notin \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}(T - \lambda) = H$  et  $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$ , d'où  $\mathcal{R}(T - \lambda) = (\mathcal{N}(T - \lambda))^\perp$ . Mais on a également démontré au théorème 15.13 (i) que pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathcal{R}(T - \lambda)$  est fermé, et par conséquent pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , selon la proposition 14.5 (ii) on aura également

$$\mathcal{R}(T - \lambda) = (\mathcal{N}(T - \lambda))^\perp,$$

soit d'après le lemme 14.4 (i)

$$H = \mathcal{R}(T - \lambda) \oplus \mathcal{N}(T - \lambda), \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Il est alors clair qu'il y a équivalence pour  $T - \lambda$  entre injectivité et surjectivité, et que  $T - \lambda = f$  admet une solution si et seulement si  $(f | x) = 0, \forall x \in \mathcal{N}(T - \lambda)$ .

### 16.2.2 Le quotient de Rayleigh

Les formules suivantes sont particulièrement utiles pour la détermination des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint compact :

**Définition 16.7** On appelle quotient de Rayleigh la quantité suivante :

$$\mathcal{R}(x) = \frac{(Tx | x)}{\|x\|^2}. \quad (16.1)$$

**Proposition 16.8** Supposons que les valeurs propres  $\lambda_k$  de  $T$  sont rangées dans l'ordre décroissant et sont associées aux vecteurs propres  $e_k$ , notons  $\mathcal{W}_k$  le sous-espace engendré par les  $e_i$ ,  $i = 1, k$  et  $\mathbb{W}_k$  l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$  de  $H$ . Alors les éléments propres  $(\lambda_k, e_k)$  de  $T$  admettent les caractérisations suivantes :

$$\lambda_k = \max_{W \in \mathbb{W}_k} \min_{x \in W} \mathcal{R}(x) \quad (16.2)$$

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathbb{W}_{k-1}} \max_{x \in W^\perp} \mathcal{R}(x) \quad (16.3)$$

DÉMONSTRATION.

▷ On a de façon évidente

$$\mathcal{R}(e_k) = \lambda_k \quad (16.4)$$

▷ Si  $x \in \mathcal{W}_k$  alors  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$ , d'où il résulte que  $Tx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i e_i$  et

$$\mathcal{R}(x) = \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \right) \geq \lambda_k ;$$

par conséquent, en vertu de (16.4)

$$\lambda_k = \min_{x \in \mathcal{W}_k} \mathcal{R}(x), \quad (16.5)$$

▷ Si  $x \in \mathcal{W}_{k-1}^\perp$ , on peut écrire  $x = \sum_{i=k}^\infty \alpha_i e_i + y$ , où  $y \in N_0$  et on en déduit que

$$\mathcal{R}(x) = \left( \sum_{i=k}^\infty \lambda_i |\alpha_i|^2 \right) / \left( \sum_{i=k}^\infty |\alpha_i|^2 + \|y\|^2 \right) \leq \left( \sum_{i=k}^\infty \lambda_i |\alpha_i|^2 \right) / \left( \sum_{i=k}^\infty |\alpha_i|^2 \right) \leq \lambda_k,$$

et comme précédemment

$$\lambda_k = \max_{x \in \mathcal{W}_{k-1}^\perp} \mathcal{R}(x). \quad (16.6)$$

▷ On déduit tout d'abord de (16.5) que

$$\max_{W \in \mathbb{W}_k} \min_{x \in W} \mathcal{R}(x) \geq \lambda_k ;$$

mais réciproquement si on choisit  $W \in \mathbb{W}_k$ , on ne peut avoir  $W \subset \mathcal{W}_{k-1}$  et par conséquent,  $\exists x \neq 0, \in W \cap \mathcal{W}_{k-1}^\perp$ . De (16.6) on déduit alors que  $\lambda_k \geq \mathcal{R}(x)$ , d'où il résulte que  $\lambda_k \geq \min_{w \in W} \mathcal{R}(w)$ ,  $\forall W \in \mathbb{W}_k$ , soit

$$\lambda_k \geq \max_{W \in \mathbb{W}_k} \min_{w \in W} \mathcal{R}(w),$$

et par conséquent la formule (16.2).

▷ On opère de même, et on choisit  $W \in \mathbb{W}_{k-1}$  et  $0 \neq x \in W^\perp \cap \mathcal{W}_k$  ; on aura en vertu de (16.5)  $\lambda_k \leq \mathcal{R}(x)$  ; il en résulte que

$$\lambda_k \leq \min_{W \in \mathbb{W}_{k-1}} \max_{w \in W^\perp} \mathcal{R}(w),$$

l'inégalité inverse découle alors de (16.6).

□

# Chapitre 17

## Problèmes variationnels spectraux

L'objet de ce paragraphe est l'étude de problèmes du type

$$\begin{aligned} -\Delta u - \mu u &= f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{17.1}$$

où  $\mu$  est positif, ce qui empêche la forme bilinéaire associée d'être coercive. *Dans tout ce paragraphe nous supposons l'ouvert  $\mathcal{O}$  borné.* Nous verrons que l'utilisation de la théorie spectrale précédemment développée conduit à des résultats de qualité comparable à celui fourni par le théorème de Lax-Milgram. La formulation variationnelle de (17.1) est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H_0^1(\mathcal{O}), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \mu \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v} d\gamma. \end{aligned} \tag{17.2}$$

### 17.1 Formulation générale

Il est facile de voir que le problème qui précède entre dans le cadre suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, \\ a(u, v) - \mu (u|v)_H = q(v), \text{ où} \end{aligned} \tag{17.3}$$

◇  $V$  et  $H$  sont deux espaces de Hilbert tels que

$$V \underset{c}{\subset} H$$

(dans le cas du problème (17.2) on a  $V = H_0^1(\mathcal{O})$  et  $H = L^2(\mathcal{O})$ , l'injection étant compacte en vertu du théorème de Rellich )

◇  $a$  et  $q$  sont respectivement une forme sesquilinéaire continue coercive sur  $V$ , et une forme antilinéaire continue sur  $V$ .

### 17.1.1 Cadre fonctionnel

Commençons par préciser quelque peu l'étude du problème variationnel

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, \\ a(u, v) = (f | v)_H, \text{ où } f \in H. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Notons  $\mathcal{M}$  l'application

$$H \xrightarrow{\mathcal{M}} V' : f \mapsto \ell \text{ où } \ell(\cdot) = (f | \cdot)_H, \quad (17.5)$$

le théorème de Lax-Milgram nous montre que la solution  $u$  de (17.4) est de la forme  $u = \mathcal{S}(\ell)$  où  $\mathcal{S}$  est continue  $V' \rightarrow V$ . Nous poserons alors

$$\mathcal{G} = \mathcal{S} \circ \mathcal{M} : H \rightarrow V, \quad (17.6)$$

et nous pourrions écrire

$$a(\mathcal{G}f, v) = (f | v)_H, \quad \forall v \in V. \quad (17.7)$$

Notons également  $\mathcal{J}$  l'injection canonique  $V \rightarrow H$ , supposée compacte ; nous poserons

$$\mathcal{G}_V = \mathcal{G} \circ \mathcal{J} : V \rightarrow V, \quad (17.8)$$

et

$$\mathcal{G}_H = \mathcal{J} \circ \mathcal{G} : H \rightarrow H, \quad (17.9)$$

ces deux applications étant compactes d'après la proposition 15.8 (ii). Le diagramme suivant résume ces définitions :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathcal{G}_H} & H \\ \mathcal{J} \uparrow & \mathcal{G} \searrow & \uparrow \mathcal{J} \\ V & \xrightarrow{\mathcal{G}_V} & V \end{array}$$

### 17.1.2 Problèmes aux valeurs propres

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le problème homogène (17.3), soit en fait le *problème variationnel de valeurs propres* :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mu \in \mathbb{C} \text{ et } u \neq 0 \in V, \text{ tel que } \forall v \in V \\ a(u, v) = \mu (u | v)_H. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Compte tenu de (17.7) et (17.8), le problème (17.10) peut s'exprimer sous la forme  $u = \mathcal{G}_V(\mu u)$ , soit

$$\mathcal{G}_V u = \frac{1}{\mu} u, \quad u \in V. \quad (17.11)$$

#### Proposition 17.1

(i) Les valeurs propres  $\mu_n$  de (17.10) sont en quantité dénombrable, ne peuvent s'accumuler qu'à l'infini et sont situées à l'extérieur d'un disque de rayon strictement positif.

(ii) Les sous-espaces propres associés aux valeurs finies de  $\mu_n$  sont de dimension finie.

(iii) Si  $V$  est dense dans  $H$ , alors 0 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{G}_V$ , c'est-à-dire  $\mu = \infty$  n'est pas valeur propre de (17.10).

DÉMONSTRATION.

▷ Il s'agit essentiellement d'appliquer les Théorèmes 15.11 et 15.19, avec  $T = \mathcal{G}_V$  et  $\lambda = 1/\mu$ .

▷ Comme  $\mathcal{S}$  est un isomorphisme, 0 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{G}_V$  si et seulement si  $\mathcal{N} \circ \mathcal{J}$  est injective; c'est à dire si l'équation  $(\mathcal{J}u|v)_H = 0, \forall v \in V$  n'a que la solution nulle, ou encore  $(\overline{V}^H)^\perp = \{0\}$ . □

**Proposition 17.2** *Le problème de valeurs propres (17.10) peut s'exprimer sous la forme équivalente*

$$\mathcal{G}_H \tilde{u} = \frac{1}{\mu} \tilde{u}, \tilde{u} \in H, \tag{17.12}$$

où  $\tilde{u} = \mathcal{J}u, (\mu, u)$  étant solution de (17.11).

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $(\mu, u)$  est solution de (17.11) alors, en multipliant à gauche (17.11) par  $\mathcal{J}$  on voit que  $(\mu, \tilde{u})$  est solution de (17.12),  $\tilde{u}$  n'étant pas nul puisque  $\mathcal{J}$  est injectif.

▷ Réciproquement si  $(\mu, \tilde{u})$  est solution de (17.12) alors  $\tilde{u} = \mathcal{J}(\mu \mathcal{G} \tilde{u})$ , ce qui en fait un élément de  $V$ . Multipliant (17.12) par  $\mathcal{G}$ , on constate que  $(\mu, \mathcal{G} \tilde{u})$  vérifie (17.11). Il en résulte que (17.12) est équivalent à (17.11). □

### 17.1.3 Alternative de Fredholm

Revenons à la résolution du problème (17.3), il peut être mis sous la forme

$$u = \mathcal{G}_V(\mu u) + \mathcal{S}q,$$

soit

$$\left( \frac{1}{\mu} I - \mathcal{G}_V \right) u = \frac{1}{\mu} \mathcal{S}q, u \in V. \tag{17.13}$$

**Proposition 17.3** *Le problème (17.3) admet une solution et une seule dépendant continûment de  $q$ , si et seulement si  $\mu$  n'est pas valeur propre de (17.10)*

DÉMONSTRATION. Il ne s'agit là que d'une application du Corollaire 15.21 à la formulation (17.13). □

## 17.2 Formes hermitiennes

Considérons maintenant le cas particulier où  $a$  est hermitienne, c'est-à-dire

$$a(u, v) = \overline{a(v, u)}.$$

**Proposition 17.4** *Si  $a$  est une forme hermitienne coercive, les opérateurs  $\mathcal{G}_V$  et  $\mathcal{G}_H$  sont auto-adjoints, respectivement pour les produits scalaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot | \cdot)_H$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Notons d'abord que  $a$  étant continue, hermitienne et coercive, elle constitue un produit scalaire sur  $V$ , définissant une norme équivalente à la norme initiale.

▷ On aura,  $\forall u, v \in V$ ,

$$a(\mathcal{G}_V u, v) = (\mathcal{J}u | \mathcal{J}v)_H = \overline{(\mathcal{J}v | \mathcal{J}u)_H} = \overline{a(\mathcal{G}_V v, u)}.$$

▷ De même,  $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in H$ ,

$$(\mathcal{G}_H \tilde{u} | \tilde{v})_H = \overline{(\tilde{v} | \mathcal{G}_H \tilde{u})_H} = \overline{a(\mathcal{G} \tilde{v}, \mathcal{G} \tilde{u})} = a(\mathcal{G} \tilde{u}, \mathcal{G} \tilde{v}) = (\tilde{u} | \mathcal{G}_H \tilde{v})_H$$

□

### 17.2.1 Quotients de Rayleigh

Si nous appliquons à la formulation (17.11) les résultats relatifs aux quotients de Rayleigh (voir la formule (16.1)), nous sommes amenés à poser

$$\mathcal{R}_V(v) = \frac{a(\mathcal{G}_V v, v)}{a(v, v)},$$

soit encore

$$\mathcal{R}_V(v) = \frac{1}{\mathcal{Q}(v)} \text{ avec } \mathcal{Q}(v) = \frac{a(v, v)}{\|v\|_H^2} \quad (17.14)$$

**Proposition 17.5** *Supposons que les valeurs propres  $\mu_k$  de (17.10) sont rangées dans par ordre croissant et sont associées aux vecteurs propres  $y_k$ , notons  $\mathcal{W}_k$  le sous-espace de  $V$  engendré par les  $y_i$ ,  $i = 1, k$  et  $\mathbb{W}_k$  l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$  de  $V$ . Alors les éléments propres  $(\mu_k, e_k)$  de (17.10) admettent les caractérisations suivantes :*

$$\mu_k = \min_{W \in \mathbb{W}_k} \max_{v \in W} \mathcal{Q}(v) \quad (17.15)$$

$$\mu_k = \max_{W \in \mathbb{W}_{k-1}} \min_{v \in W^\perp} \mathcal{Q}(v) \quad (17.16)$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit simplement d'appliquer les résultats de la proposition 16.8 en notant que les valeurs propres  $\lambda_k$  de  $\mathcal{G}_V$  sont les inverses de celles  $\mu_k$  de (17.10), et que de même  $\mathcal{R}_V$  est l'inverse de  $\mathcal{Q}$ .

□

### 17.2.2 Bases hilbertiennes

Nous noterons désormais  $(\mu_k, e_k)$  les éléments propres du problème (17.10).

**Proposition 17.6** *Si  $a$  est une forme hermitienne*

- (i) *Les  $\mu_k$  sont des nombres réels.*
- (ii) *Les  $e_k$  peuvent être choisis de sorte qu'ils forment une base orthonormale de  $V$  pour le produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$*
- (iii) *Si  $V$  est dense dans  $H$ , alors les  $\mu_k$  forment une suite tendant vers l'infini.*

DÉMONSTRATION.

▷ Le caractère réel des  $\mu_k$  est une conséquence de la Proposition 13.10 (ii) appliquée à la formulation (17.11)

▷ D'après le Théorème 16.2 (iii) appliqué à l'opérateur  $\mathcal{G}_V$ ,  $V$  est somme directe hilbertienne de ses sous-espaces propres ; les vecteurs propres en composant les bases pouvant alors être choisis orthogonaux et normés, c'est-à-dire vérifiant  $a(e_k, e_k) = 1$ .

▷ Nous avons vu à la Proposition 17.1 que si  $V$  est dense dans  $H$ , alors 0 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{G}_V$  ;  $V$  de dimension infinie est donc somme hilbertienne de sous-espaces propres tous de dimension finie, ils sont donc en nombre infini. D'autre part on sait que le seul point d'accumulation des  $1/\mu_k$  est 0, il en résulte que  $\mu_k$  tend vers l'infini.

□

Afin de profiter pleinement du caractère auto-adjoint des opérateurs sous-jacents nous serons amenés à renforcer l'hypothèse de coercivité en supposant  $a$  positive, c'est-à-dire :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V. \quad (17.17)$$

**Proposition 17.7** *Si  $a$  est une forme hermitienne positive*

- (i) *Les  $\mu_k$  sont des réels positifs.*
- (ii) *Les*

$$y_k = \mu_k^{1/2} e_k \quad (17.18)$$

*forment une base orthonormale de  $H$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ On a  $\alpha \|e_k\|_V^2 \leq a(e_k, e_k) = \mu_k^2 \|e_k\|_H^2$ , d'où le caractère positif des  $\mu_k$ .

▷ D'après le Théorème 16.2 (iii) appliqué à l'opérateur  $\mathcal{G}_H$ ,  $H$  est également somme directe de ces mêmes sous-espaces propres ; comme  $a(e_k, e_m) = \mu_k (e_k | e_m)_H$ , les  $e_k$  forment une base de  $H$  composée de vecteurs mutuellement orthogonaux, et comme  $a(e_k, e_k) = \mu_k (e_k | e_k)_H = (y_k | y_k)_H$ , les  $y_k$  forment une base orthonormale de  $H$ .

□



**Proposition 17.8** Les vecteurs propres de (17.10) permettent d'obtenir les caractérisations suivantes :

$$H = \left\{ f = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k \left| \|f\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 < +\infty \right. \right\} \quad (17.19)$$

$$V = \left\{ v = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k \left| a(v, v) = \sum_{k \geq 1} \mu_k |\alpha_k|^2 < +\infty \right. \right\} \quad (17.20)$$

$$V' = \left\{ q = \sum_{k \geq 1} \alpha_k (y_k | \cdot)_H \left| \|q\|_{V'}^2 = \sum_{k \geq 1} \mu_k^{-1} |\alpha_k|^2 < +\infty \right. \right\} \quad (17.21)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Le théorème de représentation **16.2** nous montre que tout élément  $f$  de  $H$  est de la forme

$$f = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k, \quad (17.22)$$

où la série converge normalement dans  $H$ . Réciproquement, si on pose  $f_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$ , où les  $\alpha_k$  vérifient  $\sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 < +\infty$ , alors la suite  $f_k$  vérifie  $\|f_m - f_k\| = \sum_{i=k+1}^m |\alpha_i|^2$  ; il en résulte que  $f_k$  est de Cauchy, et converge par conséquent dans  $H$ .

▷ Le même raisonnement s'applique dans  $V$ , muni du produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$  et prouve que

$$V = \left\{ v = \sum_{k \geq 1} \beta_k e_k \left| a(v, v) = \sum_{k \geq 1} |\beta_k|^2 < +\infty \right. \right\}.$$

La caractérisation annoncée découle alors simplement de la relation  $y_k = \mu_k^{1/2} e_k$ .

▷ Si  $q \in V'$ , alors  $\langle q, v \rangle = a(\mathcal{S}q, v)$ ,  $\forall v \in V$ , et comme  $\mathcal{S}q \in V$ , d'après (17.20) on aura

$$\mathcal{S}q = \sum_{k \geq 1} \alpha'_k y_k \text{ avec } \sum_{k \geq 1} \mu_k |\alpha'_k|^2 < +\infty;$$

il en résulte que

$$a(\mathcal{S}q, v) = \sum_{k \geq 1} \alpha'_k a(y_k, v) = \sum_{k \geq 1} \alpha'_k \mu_k (y_k | v)_H,$$

et par conséquent

$$q = \sum_{k \geq 1} \alpha_k (y_k | \cdot)_H, \text{ avec } \alpha_k = \alpha'_k \mu_k \text{ et } \sum_{k \geq 1} \mu_k^{-1} |\alpha_k|^2 = \sum_{k \geq 1} \mu_k^2 |\alpha'_k|^2 < +\infty.$$

▷ Réciproquement si  $q = \sum_{k \geq 1} \alpha_k (y_k | \cdot)_H$ , avec  $\sum_{k \geq 1} \mu_k^{-1} |\alpha_k|^2 < +\infty$ , alors

$$\begin{aligned} \|q\|_{V'} &= \sup_{v \in V} \frac{\sum_{k \geq 1} \alpha_k (y_k | \cdot)_H}{a(v, v)} \\ &= \sup_{\{\beta_k | \sum_{k \geq 1} \mu_k |\beta_k|^2 < +\infty\}} \frac{\sum_{k \geq 1} \alpha_k \bar{\beta}_k}{\sum_{k \geq 1} \mu_k^2 |\beta_k|} \\ &= \sup_{\{\beta_k | \sum_{k \geq 1} \mu_k |\beta_k|^2 < +\infty\}} \frac{\sum_{k \geq 1} \mu_k^{-1/2} \alpha_k \mu_k^{1/2} \bar{\beta}_k}{\sum_{k \geq 1} \mu_k \text{ mod } \beta_k^2} \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu_k^{-1} |\alpha_k|^2 < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $q \in V'$ .

□

**Remarque 17.9** *Un prolongement naturel de ces résultats est la définition d'espaces intermédiaires entre  $H$  et  $V$ , appelés espaces d'interpolation. Pour  $\theta \in [0, 1]$ , on pose*

$$[H, V]_\theta = \left\{ u = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k \left| \sum_{k \geq 1} \mu_k^\theta \text{ mod } \alpha_k^2 < +\infty \right. \right\}.$$

On montre aisément que la norme naturelle en fait bien des espaces de Hilbert, que  $[H, V]_0 = H$ ,  $[H, V]_1 = V$  et que  $[H, V]_{\theta_1} \subset [H, V]_\theta \subset [H, V]_{\theta_2}$  pour  $\theta_1 > \theta > \theta_2$ . On peut également montrer [?] que cette construction est intrinsèque, au sens où les espaces d'interpolation ne dépendent pas de la forme hermitienne coercive  $a$  ayant servi à leur détermination. Dans le cas où  $H = L^2(\Omega)$  et  $V = H^m(\Omega)$ , il s'agit là d'une façon de définir les espaces de Sobolev d'indice non entier, on montre en effet que

$$[L^2(\Omega), H^m(\Omega)]_\theta = H^{m\theta}(\Omega).$$

### 17.2.3 Alternative de Fredholm

Dans le cas particulier des formes hermitiennes positives, on peut préciser le résultat de la Proposition 17.3 relative à l'alternative de Fredholm, c'est-à-dire à la résolution du problème (17.3).

**Proposition 17.10**

(i) *Si  $\mu$  n'est pas valeur propre de (17.10), alors (17.3) est bien posé et sa solution peut se mettre sous la forme suivante :*

$$u = \sum_{k \geq 1} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k, \tag{17.23}$$

où la série converge dans  $V$ .

(ii) Si  $\mu$  est l'une des valeurs propres de (17.10), soit  $\mu = \mu_i$ , alors (17.3) admet une solution si et seulement si

$$q(y) = 0, \quad \forall y \in S_i, \quad (17.24)$$

où  $S_i$  est le sous-espace propre associé à  $\mu_i$ . Dans ces conditions, les solutions de (17.3) sont de la forme

$$u = y + \sum_{k \neq i} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k, \quad (17.25)$$

où  $y$  est un élément quelconque de  $S_i$ .

DÉMONSTRATION. Si  $u \in V$ , on a vu à la Proposition 17.8 que  $u = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k$  avec  $\sum_{k \geq 1} \mu_k \text{ mod } \alpha_k^2 < +\infty$ . Le fait pour  $u$  d'être solution de (17.3) implique alors

$$(\mu_i - \mu)\alpha_i = q(y_i), \quad \forall i \geq 1.$$

▷ Si  $\mu \neq \mu_i$ ,  $\forall i \geq 1$ , alors on en déduit la valeur de  $\alpha_i \forall i$ , et par conséquent l'expression (17.23).

▷ Si par contre  $\mu$  est l'une des valeurs propres de (17.10) alors d'après le Théorème 15.21 (ii), selon la formule (15.4), le problème (17.13) équivalent à (17.3), admet des solutions si et seulement si  $a(\mathcal{S}q, y) = 0 \forall y \in S_i$ , soit  $q(y) = 0 \forall y \in S_i$ .

▷ De plus il est clair que la formule

$$u = \sum_{k \neq i} \frac{q(y_i)}{\mu_k - \mu} y_k \quad (17.26)$$

fait de  $u$  une solution de (17.3), et que les autres en diffèrent d'une solution du problème homogène, soit exactement d'un élément de  $S_i$ .

□

**Remarque 17.11** Ce résultat constitue une généralisation du Théorème de Lax-Milgram, au sens où la forme sesquilinéaire  $a(u, v) - \mu(u|v)_H$  est coercive positive s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\mu \leq \inf_{v \in V} \left\{ \frac{a(v, v)}{\|v\|_H^2} - \alpha \frac{\|v\|_V^2}{\|v\|_H^2} \right\}, \quad (17.27)$$

alors qu'en fait nous avons montré que (17.3) est bien posé dès que  $\mu \notin \mathcal{V}(\mathcal{G}_V)$ . Ce résultat est beaucoup plus précis car les valeurs autorisées de  $\mu$  ne sont pas confinées à un disque comme pourrait le laisser penser le Théorème de Lax-Milgram. Mais de plus, en vertu de (17.16), le problème (17.3) est bien posé dès que

$$\mu < \mu_1 = \min_{v \in V} \frac{a(v, v)}{\|v\|_H^2},$$

ce qui constitue une amélioration de la condition (17.27).

## 17.3 Le problème de Dirichlet

Il ne nous reste plus qu'à traduire les résultats obtenus dans le cas d'un problème pratique tel (17.1); ils s'appliquent sans aucune modification si on choisit de poser

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\mathcal{O}), \quad H = L^2(\mathcal{O}), \\ a(u, v) &= \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v}, \quad \text{et} \\ q(v) &= \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}. \end{aligned}$$

## 17.4 Le problème de Neumann

Le cas du problème de Neumann est plus instructif, soit en effet à étudier

$$\begin{aligned} -\Delta u - \mu u &= f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{17.28}$$

posant  $\mu = \tau - 1$ , on en donnera la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H^1(\mathcal{O}), \text{ tel que } \forall v \in H^1(\mathcal{O}), \\ \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} - \tau \int_{\mathcal{O}} u \bar{v} = \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}. \end{aligned} \tag{17.29}$$

On prendra donc, d'une façon qui a priori peut sembler un peu artificielle, mais qui a le mérite de rendre  $a$  coercive positive

$$\begin{aligned} V &= H^1(\mathcal{O}), \quad H = L^2(\mathcal{O}), \quad \tau = \mu + 1 \\ a(u, v) &= \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \int_{\mathcal{O}} u \bar{v}, \quad \text{et} \\ q(v) &= \int_{\mathcal{O}} f \bar{v}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\mu = 0$  (ou  $\tau = 1$ ) est valeur propre de (17.29), avec pour sous-espace propre les fonctions constantes sur  $\mathcal{O}$ . D'après (17.24), la condition pour que (17.28) ait une solution lorsque  $\mu = 0$  est la suivante :

$$\int_{\mathcal{O}} f = 0,$$

ce qui corrobore la condition (7.62).



# Chapitre 18

## Oscillations d'un liquide dans un réservoir

Il s'agit de l'étude des oscillations forcées d'un liquide dans un réservoir. Nous supposons le fluide parfait, l'écoulement irrotationnel et dans l'hypothèse des faibles mouvements. Nous notons  $\Omega$  le domaine fluide,  $SL$  la position moyenne de la surface libre,  $\varphi$  le potentiel des vitesses,  $\pi$  la pression à la surface libre et  $f$  le déplacement normal imposé de la paroi du réservoir. Au premier ordre, en éliminant la hauteur de la surface libre entre les équations cinématiques et dynamiques linéarisées, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ dans } \Omega \text{ borné,} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= \nu\varphi + \pi \text{ sur } SL, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= f \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \setminus SL.\end{aligned}\tag{18.1}$$

### 18.1 Formulation variationnelle

A l'aide de la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } \varphi \in V, \forall \psi \in V, \\ a(\varphi, \psi) - (\nu + 1) (\varphi | \psi)_H = q(\psi).\end{aligned}\tag{18.2}$$

avec  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(SL)$  et

$$\begin{aligned}a(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} + \int_{SL} \varphi \bar{\psi} d\gamma \\ q(\psi) &= \int_{SL} \pi \bar{\psi} d\gamma + \int_{\Gamma} f \bar{\psi} d\gamma.\end{aligned}$$

**Proposition 18.1** *La forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $V$ .*

DÉMONSTRATION. En effet

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= |\varphi|_{1,\Omega}^2 + \int_{SL} |\varphi|^2 d\gamma \\ &\geq |\varphi|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{|SL|} \left( \int_{SL} \varphi d\gamma \right)^2 \\ &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|SL|} \right) [\varphi]^2 \end{aligned}$$

avec

$$[\varphi]^2 = |\varphi|_{1,\Omega}^2 + \left( \int_{SL} \varphi d\gamma \right)^2,$$

soit

$$a(\varphi, \varphi) \geq K \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

□

On note

(i)  $\mathcal{M}$  l'application

$$L^2(SL) \xrightarrow{\mathcal{M}} V' : \theta \mapsto q, \text{ où } q(\cdot) = (\theta | \cdot)_{L^2(SL)}. \quad (18.3)$$

(ii)  $\mathcal{S}$  l'application

$$V' \xrightarrow{\mathcal{S}} V : q \mapsto u \quad (18.4)$$

où  $u$  est solution de

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, \\ a(u, v) = q(v), \text{ avec } q \in V'. \end{aligned} \quad (18.5)$$

(iii) ainsi que

$$\mathcal{G} = \mathcal{S} \circ \mathcal{M} : L^2(SL) \longrightarrow V, \quad (18.6)$$

et

$$\mathcal{G}_V = \mathcal{G} \circ \gamma, \text{ et } \mathcal{G}_H = \gamma \circ \mathcal{G}. \quad (18.7)$$

où  $\gamma$  est la trace :  $V \longrightarrow L^2(SL)$ .

Le diagramme suivant résume ces définitions :

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\mathcal{G}_H} & H & & \\ \gamma \uparrow & \mathcal{G} \searrow & \uparrow \gamma & & \\ V & \xrightarrow{\mathcal{G}_V} & V & & \end{array}$$

**Lemme 18.2**

- (i)  $\mathcal{M}$  est continue et injective.
- (ii)  $\mathcal{S}$  est un isomorphisme.
- (iii)  $\mathcal{G}_V$  et  $\mathcal{G}_H$  sont compactes et auto-adjointes, respectivement par rapport à la forme  $a$  et par rapport au produit scalaire naturel sur  $H$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On aura

$$\|q\|_{V'} = \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} \frac{(\theta | \psi)_{L^2(\Sigma)}}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \leq C \|\theta\|_{L^2(\Sigma)},$$

$\mathcal{M}$  est donc continue, c'est une injection car l'ensemble des traces sur  $SL$  des fonctions de  $H^1(\Omega)$  est dense dans  $L^2(SL)$ .

▷ C'est une conséquence du Théorème de Lax-Milgram.

▷ La compacité de  $\mathcal{G}_V$  et  $\mathcal{G}_H$  découle de la continuité de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  et de la compacité de  $\gamma$ .  
On aura

$$a(\mathcal{G}g, \psi) = (g | \gamma\psi)_{L^2(SL)}, \quad \forall g \in L^2(SL), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (18.8)$$

De plus  $a$  étant continue, hermitienne et coercitive, elle constitue un produit scalaire sur  $V$ , définissant une norme équivalente à la norme initiale ; le caractère auto-adjoint de  $\mathcal{G}_V$  et  $\mathcal{G}_H$  en découle ; on aura en effet  $\forall \varphi, \psi \in V$ ,

$$a(\mathcal{G}_V \varphi, \psi) = (\gamma\varphi | \gamma\psi)_H = \overline{(\gamma\psi | \gamma\varphi)_H} = \overline{a(\mathcal{G}_V \psi, \varphi)}. \quad (18.9)$$

De même,  $\forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in H$ ,

$$\left( \mathcal{G}_H \tilde{\varphi} \middle| \tilde{\psi} \right)_H = \overline{\left( \mathcal{G}_H \tilde{\psi} \middle| \tilde{\varphi} \right)_H} = \overline{a(\mathcal{G}_H \tilde{\psi}, \tilde{\varphi})} = a(\mathcal{G}_H \tilde{\varphi}, \mathcal{G}_H \tilde{\psi}) = \left( \tilde{\varphi} \middle| \mathcal{G}_H \tilde{\psi} \right)_H \quad (18.10)$$

□

## 18.2 Problèmes aux valeurs propres

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le problème homogène, soit en fait le problème variationnel aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \varphi \in V, \quad \forall \psi \in V, \\ a(\varphi, \psi) = \mu (\varphi | \psi)_H. \end{aligned} \quad (18.11)$$

avec  $\mu = \nu + 1$ .



**Proposition 18.3** *Le problème (18.11) peut s'exprimer sous les formes équivalentes suivantes :*

$$\mathcal{G}_V \varphi = \frac{1}{\mu} \varphi, \quad \varphi \in V, \quad (18.12)$$

et

$$\mathcal{G}_H \tilde{\varphi} = \frac{1}{\mu} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} \in H, \quad (18.13)$$

où  $\tilde{\varphi} = \gamma\varphi$ ,  $(\mu, \varphi)$  étant solution de (18.11).

DÉMONSTRATION.

▷ Le problème (18.11) a pour expression

$$\varphi = \mathcal{S}(\mu \mathcal{M} \circ \gamma \varphi),$$

soit encore  $\varphi = \mathcal{G}_V(\mu\varphi) = \mu \mathcal{G}_V \varphi$ .

▷ On peut présenter autrement ce raisonnement : compte tenu de (18.9), on a

$$(\varphi | \psi)_H = (\gamma\varphi | \gamma\psi)_H = a(\mathcal{G}_V \varphi, \psi);$$

le problème (18.11) peut donc s'exprimer sous la forme

$$a(\varphi, \psi) = \mu a(\mathcal{G}_V \varphi, \psi) \quad \forall \psi \in V,$$

soit par coercivité de  $a$ ,  $\varphi = \mathcal{G}_V(\mu\varphi)$ , ou encore (18.12).

▷ Si  $(\mu, \varphi)$  est solution de (18.12) alors, en multipliant à gauche (18.12) par  $\gamma$  on voit que  $(\mu, \tilde{\varphi})$  est solution de (18.13),  $\tilde{\varphi}$  n'étant pas nul puisque  $\varphi = \mu \mathcal{G}_V \tilde{\varphi}$ .

▷ Réciproquement si  $(\mu, \tilde{\varphi})$  est solution de (18.13), on constate que

$$\tilde{\varphi} = \gamma(\mu \mathcal{G}_V \tilde{\varphi}),$$

et multipliant par  $\mathcal{G}$ , que  $(\mu, \mathcal{G}\tilde{\varphi})$  vérifie (18.12). Il en résulte que (18.13) est équivalent à (18.12). □

Nous noterons désormais  $(\mu_k, e_k)$  les éléments propres du problème (18.11), choisis de telle sorte que  $a(e_k, e_k) = 1$ , avec  $\mu_k = \nu_k + 1$ , et nous remarquons que  $a$  est positive. On posera également  $y_k = \mu_k^{1/2} e_k$ .

### **Théorème 18.4**

(i) *Les  $\mu_k$  sont des nombres réels strictement positifs, et les  $e_k$  peuvent être choisis de façon à former un système orthonormal de  $V$  pour le produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ .*

(ii) *0 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{G}_H$ , les  $\mu_k$  forment une suite tendant vers l'infini et les  $\gamma y_k$  forment une base orthonormale de  $L^2(SL)$ .*

(iii) 0 est valeur propre de  $\mathcal{G}_V$ , le sous-espace propre associé  $W$  n'est autre que

$$W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{SL} = 0\}.$$

et son orthogonal

$$W^\perp = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0 \right\}$$

(iv)  $W$  et  $W^\perp$  sont stables sous l'action de  $\mathcal{G}_V$  et une base de  $H^1(\Omega)$  est formée de l'union des  $e_k$  et d'une base de  $W$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Le caractère réel des  $\mu_k$  est une conséquence du fait que  $\mathcal{G}_V$  est auto-adjoint. De plus on a  $\alpha \|e_k\|_V^2 \leq a(e_k, e_k) = \mu_k^2 \|e_k\|_H$ , d'où le caractère positif des  $\mu_k$ . D'après le Théorème de représentation spectrale appliqué à l'opérateur  $\mathcal{G}_V$ ,  $V$  est somme directe hilbertienne de ses sous-espaces propres; les vecteurs propres en composant les bases pouvant alors être choisis orthogonaux et normés, c'est-à-dire vérifiant  $a(e_k, e_k) = 1$ .

▷ Si  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{G}_H)$ , on a  $(\mathcal{G}\tilde{\varphi})|_{SL} = 0$ , mais comme d'après (18.8),

$$a(\mathcal{G}\tilde{\varphi}, \psi) = (\tilde{\varphi} | \gamma\psi)_{L^2(SL)},$$

on a  $\Delta(\mathcal{G}\tilde{\varphi}) = 0$  dans  $\Omega$ , et  $\partial(\mathcal{G}\tilde{\varphi})/\partial n = 0$  sur  $\Gamma$ ; comme de plus, par hypothèse  $\mathcal{G}\tilde{\varphi}|_{SL} = 0$ , il en résulte que  $\mathcal{G}\tilde{\varphi} = 0$ . Par conséquent  $\mathcal{M}\tilde{\varphi} = 0$  et donc  $\tilde{\varphi} = 0$ . Mais par ailleurs, il est clair que si  $\tilde{\varphi}$  est vecteur propre de  $\mathcal{G}_H$  associé à la valeur propre  $\theta$ , nécessairement non nulle, alors

$$\tilde{\varphi} = \gamma \left( \frac{1}{\theta} \mathcal{G}\tilde{\varphi} \right) \implies \mathcal{G}\tilde{\varphi} = \mathcal{G}_V \left( \frac{1}{\theta} \mathcal{G}\tilde{\varphi} \right),$$

et par conséquent  $(\theta, \mathcal{G}\tilde{\varphi})$  est élément propre de  $\mathcal{G}_V$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{G}\tilde{\varphi}$  est l'un des  $e_k$ , à une constante multiplicative près. Comme  $\theta\tilde{\varphi} = \gamma\mathcal{G}\tilde{\varphi}$ , on en déduit que les traces sur  $SL$  des  $e_k$  forment une base orthogonale dans  $L^2(SL)$ .  $H$  de dimension infinie est donc somme Hilbertienne de sous-espaces propres tous de dimension finie, ils sont donc en nombre infini. D'autre part on sait que le seul point d'accumulation des  $1/\mu_k$  est 0, il en résulte que  $\mu_k$  tend vers l'infini. De plus comme

$$a(e_k, e_k) = \mu_k (e_k | e_k)_H = (\gamma y_k | \gamma y_k)_H,$$

les  $\gamma y_k$  forment une base orthonormale de  $H$ .

▷ Les éléments de  $W$  sont les fonctions  $\varphi \neq 0$  de  $\mathcal{N}(\mathcal{G}_V)$ , c'est-à-dire les fonctions  $\varphi$  qui vérifient  $a(\mathcal{G}_V\varphi, \psi) = 0$ ,  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$ , soit d'après (18.8)  $(\gamma\varphi | \gamma\psi)_{L^2(SL)} = 0 \forall \psi \in H^1(\Omega)$ . C'est exactement dire que  $\varphi|_{SL} = 0$ , par densité de  $H^{1/2}(SL)$  dans  $L^2(SL)$ . On aura donc

$$W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{SL} = 0\}.$$

L'orthogonal de  $W$  est formé des fonctions  $\varphi$  telles que  $a(\varphi, \psi) = 0 \forall \psi \in H^1(\Omega)$ ,  $\psi|_{SL} = 0$ , soit les fonctions  $\varphi$  qui vérifient

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} = 0 \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi|_{SL} = 0,$$

ou encore  $\Delta \varphi = 0$  dans  $\Omega$  et  $\partial \varphi / \partial n = 0$  sur  $\Gamma$ . On aura donc

$$W^\perp = \left\{ u \in H^1(\Omega) \left| \Delta u = 0, \frac{\partial u}{\partial n|_{\Gamma}} = 0 \right. \right\}.$$

▷ On a bien entendu  $(\mathcal{G}_V)^2 \varphi = 0$  si  $\varphi \in W$  et par conséquent  $\mathcal{G}_V \varphi \in W$ . De plus si  $\psi|_{SL} = 0$ ,  $a(\mathcal{G}_V \varphi, \psi) = (\gamma \varphi | \gamma \psi)_{L^2(SL)} = 0$ , soit  $\mathcal{G}_V \varphi \in W^\perp$ . On pourra donc constituer une base de  $H^1(\Omega)$ , orthogonale pour  $a$  en ajoutant aux vecteurs propres de (18.11) une base de  $W$ , soit par exemple les vecteurs propres  $\hat{e}_\ell$  du problème suivant :

Trouver  $\varphi \in W$ , tel que  $\forall \psi \in W$ , (18.14)

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} = \lambda \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi}.$$

□

Nous normaliserons les  $\hat{e}_\ell$  de telle sorte que  $|\hat{e}_\ell|_{1,\Omega}^2 = 1$ , et nous poserons  $\hat{y}_\ell = \lambda_\ell^{1/2} \hat{e}_\ell$ . La base des  $\hat{y}_k$ , est alors orthogonale dans  $W$  pour  $a$ , orthonormale dans  $L^2(\Omega)$ , et on aura  $a(\hat{y}_k, \hat{y}_j) = \lambda_k \delta_{ij}$

### 18.3 L'alternative de Fredholm

Nous pouvons maintenant en revenir à l'étude du problème 18.1

**Proposition 18.5** *Le problème (18.1) peut se mettre sous les formes équivalentes suivantes :*

(i)

$$\varphi = \mathcal{G}_V(\mu \varphi) + \mathcal{S}q,$$

(ii) soit

$$\left( \frac{1}{\mu} I - \mathcal{G}_V \right) \varphi = \frac{1}{\mu} \mathcal{S}q, \quad \varphi \in V. \quad (18.15)$$

(iii) ou encore

$$\left( \frac{1}{\mu} I - \mathcal{G}_H \right) \tilde{\varphi} = \frac{1}{\mu} \gamma \circ \mathcal{S}q, \quad \tilde{\varphi} \in H. \quad (18.16)$$

**Proposition 18.6** *Les caractérisations suivantes sont valables :*

(i)

$$H = \left\{ h = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k|_{SL} \left| \|h\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 < +\infty \right. \right\} \quad (18.17)$$

(ii)

$$V = \left\{ \varphi = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k + \sum_{\ell \geq 1} \hat{\alpha}_\ell \hat{y}_\ell \mid a(\varphi, \varphi) = \sum_{k \geq 1} \mu_k^2 |\alpha_k|^2 + \sum_{\ell \geq 1} \lambda_\ell |\hat{\alpha}_\ell|^2 < +\infty \right\} \quad (18.18)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Le théorème de représentation nous montre que tout élément  $h$  de  $H$  est de la forme

$$h = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k,$$

où la série converge normalement dans  $H$ . Réciproquement, si on pose  $h_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$ , où les  $\alpha_k$  vérifient  $\sum_{k \geq 1} \alpha_k^2 \leq +\infty$ , alors la suite  $h_k$  vérifie  $\|h_m - h_k\|_H^2 = \sum_{i=k+1}^m \alpha_i^2$ ; il en résulte que  $h_k$  est de Cauchy et par conséquent converge dans  $H$ .

▷ Le même raisonnement s'applique dans  $V$ , muni du produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$  et prouve que

$$V = \left\{ \varphi = \sum_{k \geq 1} \beta_k e_k + \sum_{\ell \geq 1} \hat{\beta}_\ell \hat{e}_\ell \mid a(\varphi, \varphi) = \sum_{k \geq 1} |\beta_k|^2 + \sum_{\ell \geq 1} |\hat{\beta}_\ell|^2 < +\infty \right\}.$$

La caractérisation annoncée découle alors simplement des relations  $y_k = \mu_k^{1/2} e_k$  et  $\hat{y}_\ell = \lambda_\ell^{1/2} \hat{e}_\ell$ . □

**Théorème 18.7**

(i) Si  $\mu$  n'est pas valeur propre de (18.11), alors (18.1) est bien posé et sa solution peut se mettre sous la forme suivante :

$$\varphi = \sum_{k \geq 1} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k + \sum_{\ell \geq 1} \frac{q(\hat{y}_\ell)}{\lambda_\ell} \hat{y}_\ell, \quad (18.19)$$

où les séries convergent respectivement dans  $V$  et dans  $\{w \in H^1(\Omega) \mid w|_{SL} = 0\}$ .

(ii) Si  $\mu$  est l'une des valeurs propres de (18.11), soit  $\mu = \mu_i$ , alors (18.1) admet une solution si et seulement si

$$q(y) = 0, \quad \forall y \in S_i, \quad (18.20)$$

où  $S_i$  est le sous-espace propre associé à  $\mu_i$ , et les solutions de (18.1) sont de la forme

$$\varphi = y + \sum_{k \neq i} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k + \sum_{\ell \geq 1} \frac{q(\hat{y}_\ell)}{\lambda_\ell} \hat{y}_\ell \quad (18.21)$$

où  $y$  est un élément quelconque de  $S_i$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En vertu du Théorème de l'alternative de Fredholm, appliqué à la formulation (18.15), le problème (18.1) est bien posé si et seulement si  $\mu$  n'est pas valeur propre de (18.11). Si  $\varphi \in V$ , on a vu précédemment que  $\varphi = \sum_{k \geq 1} \alpha_k y_k + \sum_{\ell \geq 1} \hat{\alpha}_\ell \hat{y}_\ell$  avec  $\sum_{k \geq 1} \mu_k |\alpha_k|^2 + \sum_{\ell \geq 1} \lambda_\ell |\hat{\alpha}_\ell|^2 < +\infty$ . Le fait pour  $\varphi$  d'être solution de (18.1) implique alors  $(\mu_k - \mu)\alpha_k = q(y_k)$ ,  $\forall k \geq 1$  et  $\lambda_\ell \hat{\alpha}_\ell = q(\hat{y}_\ell)$   $\forall \ell \geq 1$ . Si  $\mu \neq \mu_i$ ,  $\forall i \geq 1$ , alors on en déduit les valeurs de  $\alpha_k$   $\forall k$ , et de  $\hat{\alpha}_\ell$   $\forall \ell$ , et par conséquent l'expression (18.19).

▷ Si par contre  $\mu$  est l'une des valeurs propres de (18.11) alors le problème (18.15) équivalent à (18.1), admet des solutions si et seulement si  $\mathcal{S}q$  appartient à l'orthogonal de  $S_i$  pour le produit scalaire défini par  $a$ , soit  $a(\mathcal{S}q, y) = 0$   $\forall y \in S_i$ , soit encore  $q(y) = 0$   $\forall y \in S_i$ . De plus il est clair que la formule

$$\varphi = \sum_{k \neq i} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k + \sum_{\ell \geq 1} \frac{q(\hat{y}_\ell)}{\lambda_\ell} \hat{y}_\ell$$

fait de  $\varphi$  une solution de (18.1), et que les autres en diffèrent d'une solution du problème homogène, soit exactement d'un élément de  $S_i$ .

□

**Sixième partie**

**La transformée de Gelfand**



# Chapitre 19

## Le spectre de Gelfand

### 19.1 Caractères

**Définition 19.1** On dit que  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  est un caractère de  $\mathcal{A}$  si c'est un homomorphisme complexe non nul, soit une forme linéaire vérifiant

$$\chi(ST) = \chi(S) \chi(T).$$

Il existe une étroite relation entre les caractères d'une algèbre de Banach et le spectre de ses éléments, et c'est ce qui explique que l'ensemble des caractères de  $\mathcal{A}$ , noté  $\text{Sp}(\mathcal{A})$  s'appelle le *spectre de Gelfand* de  $\mathcal{A}$ .

Constatons tout d'abord qu'il existe une relation entre les caractères et la théorie spectrale.

**Proposition 19.2** Si  $\chi$  est un caractère, alors

- (i)  $\chi(I) = 1$
- (ii)  $\chi(T) \in \Sigma(T)$
- (iii)  $\chi$  est une forme linéaire continue de norme 1.

DÉMONSTRATION.

- ▷ Soit  $s$  tel que  $\chi(s) \neq 0$ , on aura  $\chi(s) = \chi(sI) = \chi(s) \chi(I)$ , et par conséquent  $\chi(I) = 1$ .
- ▷ Si  $\chi(T) \notin \Sigma(T)$ , alors  $\exists s$  qui vérifie  $(T - \chi(T)I)s = I$ , et nous aurons  $\chi(T - \chi(T)I) \chi(s) = 1$ , ce qui est impossible car  $\chi(T - \chi(T)I) = 0$ .
- ▷ Il en résulte que  $|\chi(T)| \leq \rho(T) \leq \|T\|$ , ce qui prouve que  $\chi$  est continue et  $\|\chi\| = 1$ , puisque  $\chi(I) = 1$ .

□



Notons la caractérisation suivante, quelque peu surprenante :

**Proposition 19.3** Une forme linéaire  $\xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  est un caractère si et seulement si  $\xi(1) = 1$  et  $\xi(T) \neq 0$  pour tout  $T$  inversible.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $p(\lambda) = \xi((T - \lambda)^n)$ , on aura donc d'une part

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \xi(T^k),$$

mais d'autre part

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

où les  $\lambda_i$  sont les racines du polynôme  $p$ . Il en résulte que

$$-\binom{n}{1} \lambda^{n-1} \xi(T) = -\lambda^{n-1} \sum_{i=0}^n \lambda_i \text{ et } \binom{n}{2} \lambda^{n-2} \xi(T^2) = \lambda^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j,$$

soit

$$n\xi(T) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \text{ et } \frac{n(n-1)}{2} \xi(T^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j.$$

Par conséquent

$$n^2 (\xi(T))^2 = (n\xi(T))^2 = \left( \sum_{i=0}^n \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 + n(n-1) \xi(T^2),$$

soit

$$n^2 \left( (\xi(T))^2 - \xi(T^2) \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 - n\xi(T^2). \quad (19.1)$$

▷ Mais par ailleurs  $\lambda_i \in \Sigma(T)$ . Supposons en effet que  $\lambda \in \Pi(T)$ , alors  $(T - \lambda)$  est inversible et par conséquent  $(T - \lambda)^n$ , d'où par hypothèse

$$p(\lambda) = \xi((T - \lambda)^n) \neq 0,$$

ce qui prouve que  $\lambda$  n'est pas une racine de  $p$ . Il en résulte que  $|\lambda_i| \leq \rho(T)$ , et par conséquent d'après (19.1)

$$n \left( (\xi(T))^2 - \xi(T^2) \right) \leq (\rho(T))^2 - \xi(T^2), \quad \forall n.$$

On en déduit que

$$(\xi(T))^2 = \xi(T^2). \quad (19.2)$$

▷ Pour  $P$  et  $Q \in \mathcal{A}$ , on pourra alors écrire  $(\xi(P+Q))^2 = \xi((P+Q)^2)$ , soit

$$(\xi(P))^2 + (\xi(Q))^2 + 2\xi(P)\xi(Q) = \xi(P^2) + \xi(Q^2) + \xi(PQ + QP),$$

et par conséquent

$$2\xi(P)\xi(Q) = \xi(PQ + QP). \tag{19.3}$$

On pourra donc écrire

$$4(\xi(P))^2(\xi(Q))^2 = \xi((PQ + QP)^2) = \xi(2(PQPQ + QPQP) - (PQ - QP)^2),$$

soit

$$\xi((PQ - QP)^2) + 4(\xi(P))^2(\xi(Q))^2 = 2\xi(P(QPQ) + (QPQ)P) = 4\xi(P)\xi(QPQ), \tag{19.4}$$

d'après (19.3).

▷ Posons alors  $P = T - \xi(T)I$  et  $Q = S$ , on aura  $\xi(P) = 0$ , et par conséquent, d'après (19.4),  $0 = \xi((PQ - QP)^2)$ , d'où  $\xi(TS - ST) = \xi(PQ - QP) = 0$ . Or  $\xi(TS + ST) = 2\xi(T)\xi(S)$ , d'après (19.3); il en résulte que  $\xi(TS) = \xi(T)\xi(S)$ .

□

En particulier une forme linéaire  $\xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  est un caractère si et seulement si  $\xi(T) \in \Sigma(T)$ ,  $\forall T \in \mathcal{A}$ ; en effet, d'une part  $0 \notin \Sigma(T)$  si  $T$  est inversible, et d'autre part  $\xi(I) \in \Sigma(I) = \{1\}$ , d'où  $\xi(I) = 1$ . Il en résulte plus généralement que les conditions à remplir pour prétendre au statut de caractère sont peu contraignantes, ce qui laisse un espoir de décrire le spectre des éléments de  $\mathcal{A}$  à l'aide des caractères. L'avantage déterminant réside dans le fait que le même ensemble d'objets, les caractères, permet d'accéder conjointement au spectre de tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

## 19.2 Idéaux et quotients

La notion d'idéal apparaît de façon inéluctable lorsqu'on cherche à conserver son caractère d'algèbre au quotient d'une algèbre de Banach par un sous-espace. C'est en fait une notion familière, puisque les opérateurs compacts constituent un idéal bilatère au sein des opérateurs bornés et, ce qui nous concerne plus directement ici, que le noyau d'un caractère est également un idéal bilatère de l'algèbre de Banach.

**Définition 19.4** Soit  $\mathcal{I}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}$ , c'est un idéal

- (i) à gauche si  $\forall T \in \mathcal{A}, \forall S \in \mathcal{I}, TS \in \mathcal{I}$ ,
- (ii) à droite si  $\forall T \in \mathcal{A}, \forall S \in \mathcal{I}, ST \in \mathcal{I}$ ,
- (iii) bilatère si  $\forall T \in \mathcal{A}, \forall S \in \mathcal{I}, ST$  et  $TS \in \mathcal{I}$ .

De façon générale on omet le qualificatif bilatère et on parle alors simplement d'un idéal.

**Définition 19.5** Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{A}$ , (resp. à gauche, à droite)

- (i) c'est un idéal (resp. à gauche, à droite) propre s'il est différent de  $\mathcal{A}$ .
- (ii) c'est un idéal (resp. à gauche, à droite) maximal s'il n'est contenu dans aucun autre idéal (resp. à gauche, à droite) propre.

**Proposition 19.6**

- (i) Un idéal (resp. à gauche, à droite) propre ne contient pas d'élément inversible (resp. à gauche, à droite).
- (ii) Si  $\mathcal{I}$  est un idéal (resp. à gauche, à droite) propre, alors  $\|I + s\| \geq 1, \forall s \in \mathcal{I}$ .
- (iii) L'adhérence d'un idéal (resp. à gauche, à droite) propre est un idéal (resp. à gauche, à droite) propre.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons en effet par exemple que  $s \in \mathcal{I}$ , idéal à droite, soit inversible à droite, alors  $\exists p$  tel que  $sp = I \in \mathcal{I}$ , et par conséquent,  $\forall t \in \mathcal{A}, t = spt \in \mathcal{I}$ , soit  $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ .

▷ Posons  $t = I + s$ , et supposons que  $\|t\| < 1$ , alors  $-s = I - t$  est inversible en vertu de la proposition 8.5, ce qui constitue une contradiction.

▷ Soit par exemple  $s \in \overline{\mathcal{I}}$ , où  $\mathcal{I}$  est un idéal à droite, on aura  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , où  $s_n \in \mathcal{I}$ , et si  $t \in \mathcal{A}, s_n t \rightarrow st$ , où  $s_n t \in \mathcal{I}$ , puisque la multiplication est continue en vertu de l'inégalité (8.1). Il en résulte que  $st \in \overline{\mathcal{I}}$ , ce qui prouve que  $\overline{\mathcal{I}}$  est un idéal à droite. Mais de plus, nous venons de voir que  $\|I + s_n\| \geq 1$ , d'où  $\|I + s\| \geq 1$ , et ceci  $\forall s \in \overline{\mathcal{I}}$ , et par conséquent  $-I \notin \overline{\mathcal{I}}$ , ce qui prouve que  $\overline{\mathcal{I}}$  est propre. □

**Proposition 19.7** Si  $\mathcal{I}$  est un idéal propre fermé de  $\mathcal{A}$ ,

- (i)  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est une algèbre de Banach unitaire.
- (ii) La projection canonique  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , soit  $\pi(t) = \dot{t}$ , est un homomorphisme d'algèbres continu de norme 1.

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $\dot{t}$  et  $\dot{p} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , il est loisible de poser  $\dot{t}\dot{p} = \dot{t}p$ , en effet, si  $s_1$  et  $s_2 \in \mathcal{I}$ , on a  $(t + s_1)(p + s_2) = tp + q$ , où  $q = s_1p + ts_2 + s_1s_2 \in \mathcal{I}$ . De plus

$$\begin{aligned} \|\dot{t}\dot{p}\| &= \|\dot{t}p\| = \inf_{q \in \mathcal{I}} \|tp + q\| \leq \inf_{s_1, s_2 \in \mathcal{I}} \|(t + s_1)(p + s_2)\| \\ &\leq \inf_{s_1 \in \mathcal{I}} \|t + s_1\| \inf_{s_2 \in \mathcal{I}} \|p + s_2\| = \|\dot{t}\| \|\dot{p}\|, \end{aligned}$$

ce qui fait de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  une algèbre de Banach, puisque  $\mathcal{I}$  est fermé. Cette algèbre a pour unité  $\dot{1}$ , et d'après 19.6 (ii), on aura  $\|\dot{1}\| = \inf_{q \in \mathcal{I}} \|I + q\|$ , avec  $1 \leq \inf_{q \in \mathcal{I}} \|I + q\| \leq \|I\| = 1$ .

▷ On aura  $\|\pi\| = \sup_{T \in \mathcal{A}} \left( \left\| \dot{T} \right\| / \|T\| \right)$ , où

$$1 = \left\| \dot{I} \right\| / \|I\| \leq \sup_{T \in \mathcal{A}} \left( \left\| \dot{T} \right\| / \|T\| \right) \leq 1.$$

□

**Proposition 19.8** Soit  $\omega$  un homomorphisme d'algèbres de Banach borné :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

(i)  $\mathcal{N}(\omega)$  est un idéal fermé de  $\mathcal{A}$

(ii)  $\omega$  se factorise de façon unique sous la forme  $\omega = \dot{\omega} \circ \pi$ , où  $\dot{\omega}$  est un homomorphisme injectif isométrique :  $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega) \rightarrow \mathcal{B}$  et  $\pi$  est la projection canonique :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Il est bien clair que si  $s \in \mathcal{N}(\omega)$ , alors  $\omega(sT) = \omega(s)\omega(T) = 0 = \omega(Ts)$ , soit  $sT$  et  $Ts \in \mathcal{N}(\omega)$ .

▷ Soit  $\dot{T} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega)$ , on définit sans ambiguïté  $\dot{\omega}$  par la formule  $\dot{\omega}(\dot{T}) = \omega(T)$ , ce qui fait de  $\dot{\omega}$  une injection, et on aura

$$\dot{\omega}(\dot{TP}) = \dot{\omega}(\dot{TP}) = \omega(TP) = \omega(T)\omega(P) = \dot{\omega}(\dot{T})\dot{\omega}(\dot{P}).$$

▷ On aura d'une part  $\|\omega\| = \left\| \dot{\omega} \circ \pi \right\| \leq \left\| \dot{\omega} \right\| \|\pi\| = \left\| \dot{\omega} \right\|$ , et d'autre part,  $\forall s \in \mathcal{N}(\omega)$ ,

$$\left\| \dot{\omega}(\dot{T}) \right\| = \|\omega(T)\| = \|\omega(T+s)\| \leq \|\omega\| \|T+s\| \leq \|\omega\| \left\| \dot{T} \right\|,$$

soit  $\left\| \dot{\omega} \right\| \leq \|\omega\|$ .

□

**Théorème 19.9**

(i) Tout idéal (resp. à gauche, à droite) maximal est fermé

(ii) Tout idéal (resp. à gauche, à droite) est contenu dans un idéal (resp. à gauche, à droite) maximal

DÉMONSTRATION.

▷ Soit par exemple  $\mathcal{M}$  un idéal maximal, d'après la proposition 19.6 (iii),  $\overline{\mathcal{M}}$  est propre, et par conséquent que  $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ , puisque  $\mathcal{M}$  est maximal.

▷ Soit  $\mathcal{I}$  un idéal propre, et  $\mathfrak{P}$  l'ensemble des idéaux propres contenant  $\mathcal{I}$ ; c'est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion, et il est inductivement ordonné, car si  $\mathfrak{J}$  en est un sous-ensemble totalement ordonné,  $\cup_{\mathcal{J} \in \mathfrak{J}} \mathcal{J}$  est un idéal qui majore  $\mathfrak{J}$ ; il est propre car  $I$  n'appartient à aucun des  $\mathcal{J}$ . Le lemme de Zorn 1.4 permet de conclure à l'existence d'un élément maximal dans  $\mathfrak{P}$ .

□

### 19.3 Permanence spectrale

Nous démontrerons par la suite que c'est la considération des algèbres de Banach commutatives qui conduit à la situation la plus satisfaisante : celle où les caractères sont assez nombreux pour décrire l'ensemble du spectre de chaque élément de l'algèbre. Il reste que l'algèbre qui nous intéresse au premier chef, soit  $\mathcal{L}(X)$  est décidément non commutative, ce qui nous conduira à considérer des sous-algèbres commutatives fermées de  $\mathcal{L}(X)$ , qui seront donc elles-mêmes des espaces de Banach pour la topologie induite, on parlera de sous-algèbres de Banach. La question qui se pose alors est celle de la relation entre le spectre d'un élément dans l'algèbre initiale et celui dans la sous-algèbre. La notion de connexité est à cet égard essentielle ; commençons par rappeler quelques notions topologiques élémentaires.

**Définition 19.10** Si  $S \subset E$ , espace topologique, on pose

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{S^c} = \left( \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{S^c} \right)^c,$$

c'est le bord de  $S$ . On aura alors

$$E = \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{S^c} \cup \partial S,$$

où l'union est disjointe.

**Définition 19.11**

- (i) On dit qu'un espace topologique  $E$  est connexe s'il ne peut être décomposé en l'union de deux ouverts disjoints non vides
- (ii) On dit que deux points sont connectés s'ils appartiennent à un même sous-ensemble de  $E$ , connexe pour la topologie induite.
- (iii) On appelle composantes connexes de  $E$  les classes d'équivalence du quotient de  $E$  par la relation d'équivalence de connexion.
- (iv) On dit qu'un espace topologique  $E$  est localement connexe s'il possède un système fondamental de voisinages connexes.

Une notion plus concrète est celle de connexité par arcs

**Définition 19.12**

- (i) On dit qu'un espace topologique  $E$  est connexe par arcs si deux points quelconques de  $E$  peuvent être joints par un chemin continu.
- (ii) On dit qu'un espace topologique  $E$  est localement connexe par arcs s'il possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

**Proposition 19.13**

- (i) Un espace connexe par arcs est connexe
- (ii) Les composantes connexes sont des sous-ensembles connexes maximaux
- (iii) Un espace topologique est l'union disjointe des ses composantes connexes
- (iv) Un espace connexe, localement connexe par arcs, est connexe par arcs
- (v) Dans un espace localement connexe, une composante connexe est à la fois ouverte et fermée.

**Lemme 19.14** Si  $\mathcal{B}$  est une algèbre de Banach, si  $G(\mathcal{B})$  note le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{B}$  et si  $T \in \partial G(\mathcal{B})$ , et  $T_n \in G(\mathcal{B}) \rightarrow T$ , alors  $\|T_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que la conclusion soit fausse, alors il existe un nombre  $M$  et une sous-suite  $T_{n'}$  extraite, tels que  $\|T_{n'}^{-1}\| < M$ . Pour  $n'$  assez grand, on aura de plus  $\|T_{n'} - T\| < 1/M$ , et par conséquent

$$\|I - T_{n'}^{-1}T\| = \|T_{n'}^{-1}(T_{n'} - T)\| < 1,$$

ce qui prouve, en vertu de **8.5** (i) que  $T_{n'}^{-1}T$  est inversible. Mais comme  $T = T_{n'}(T_{n'}^{-1}T)$ , il en résulte que  $T \in G(\mathcal{B})$ , ce qui est impossible, puisque  $G(\mathcal{B})$  est ouvert, selon le théorème **8.13**.  $\square$

**Lemme 19.15** Si  $V$  et  $W$  sont des ouverts de l'espace topologique  $E$ , tels que  $V \subset W$  et  $\partial V \cap W = \emptyset$ , alors  $V$  est une union de composantes connexes de  $W$ .

DÉMONSTRATION. Notons  $\Omega$  une composante connexe de  $W$ , telle que  $\Omega \cap V \neq \emptyset$ , on aura

$$\Omega = \Omega \cap (\overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{V}^c \cup \partial V) = (\Omega \cap \overset{\circ}{V}) \cup (\Omega \cap \overset{\circ}{V}^c) \cup (\Omega \cap \partial V) = (\Omega \cap \overset{\circ}{V}) \cup (\Omega \cap \overset{\circ}{V}^c) ;$$

comme  $\overset{\circ}{V}$  et  $\overset{\circ}{V}^c$  sont disjoints, par connexité, il en résulte que  $(\Omega \cap V) = (\Omega \cap \overset{\circ}{V}) = \Omega$ , soit  $\Omega \subset V$ .  $\square$

**Proposition 19.16** Si  $\mathcal{B}$  est une sous-algèbre de Banach de  $\mathcal{A}$  contenant l'unité, alors

- (i)  $G(\mathcal{B}) \subset G(\mathcal{A})$
- (ii)  $G(\mathcal{B})$  est une union de composantes connexes de  $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair tout d'abord que si  $T \in \mathcal{B}$  possède un inverse  $S$  dans  $\mathcal{B}$ , alors il est inversible dans  $\mathcal{A}$ .

▷ Montrons que  $\partial G(\mathcal{B}) \cap G(\mathcal{A}) = \emptyset$  ; soit donc  $P \in \partial G(\mathcal{B})$ , c'est la limite d'une suite  $P_n$  d'éléments de  $G(\mathcal{B})$ . Supposons que  $P \in G(\mathcal{A})$ , alors selon le théorème **8.13**, par continuité de l'inverse, on aura  $P_n^{-1} \rightarrow P^{-1}$  ; mais par ailleurs d'après le lemme **19.14**, on aura  $\|P_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ , ce qui constitue une contradiction. L'application du lemme **19.15** avec  $E = \mathcal{B}$ ,  $V = G(\mathcal{B})$  et  $W = G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$  permet alors de conclure.  $\square$

Nous appellerons *trous* dans  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  les composantes connexes bornées de  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ .

**Proposition 19.17** *Si  $\mathcal{B}$  est une sous-algèbre de Banach de  $\mathcal{A}$  contenant l'unité, alors  $\forall \mathbb{T} \in \mathcal{B}$*

- (i)  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$ .
- (ii)  $\partial\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$
- (iii)  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  est l'union de  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  et de certains (éventuellement aucun) des trous de  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On a vu que  $G(\mathcal{B}) \subset G(\mathcal{A})$ , et par conséquent  $\Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ , soit  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$ .

▷ Montrons que  $\partial\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  et supposons à cet effet que  $\lambda \in \Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  ; alors  $\mathbb{T} - \lambda$  est inversible dans  $\mathcal{A}$ , soit  $P$  cet inverse. Si on suppose que de plus  $\lambda \in \partial\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \overline{\Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})}$ , alors  $\exists \lambda_n \rightarrow \lambda$ , telle que  $\lambda_n \in \Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$ . Comme  $\mathbb{T} - \lambda_n$  est inversible dans  $\mathcal{B}$ , il l'est dans  $\mathcal{A}$ , soit  $P_n$  cet inverse ; en vertu du théorème 8.13, on aura  $P_n \rightarrow P$ , ce qui implique que  $P \in \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ , et par conséquent que  $\lambda \in \Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$ . Il s'agit là d'une contradiction, puisque  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  étant fermé,  $\partial\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$ .

▷ Nous venons de montrer que

$$\partial\Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) = \partial\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \subset \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) = (\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}))^c,$$

soit en fait  $\partial\Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \cap \Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) = \emptyset$  ; d'après le lemme 19.15, il en résulte que  $\Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  également une union de composantes connexes de  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  et donc que  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) \setminus \Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  est une union de composantes connexes de  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ . Comme  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}) \setminus \Pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) = \Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) \setminus \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ , il en résulte que  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  est l'union de  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  et de composantes connexes de  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ , ces dernières étant nécessairement bornées, puisque  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  l'est. □

Si par exemple  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  est un cercle,  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T})$  ne peut être que  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  lui même ou le disque dont  $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  est le bord.

**Corollaire 19.18** *Si  $\Pi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$  est connexe, alors  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}) = \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{T})$ .*

## 19.4 Algèbres de Banach commutatives

Il est permis de se poser la question de l'existence de caractères, en fait le théorème suivant montre que dans le cas d'une algèbre commutative, il y en a assez pour que l'ensemble des caractères suffise à décrire le spectre de tous ses éléments.

**Théorème 19.19 (Gelfand)** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach commutative,*

- (i) *L'application  $\chi \rightarrow \mathcal{N}(\chi)$  est une bijection de l'ensemble des caractères dans celui des idéaux maximaux de  $\mathcal{A}$ .*
- (ii) *Pour que  $\mathbb{T} \in \mathcal{A}$  soit inversible, il faut et il suffit qu'il n'appartienne à aucun idéal propre de  $\mathcal{A}$ .*

(iii) Pour que  $T \in \mathcal{A}$  soit inversible, il faut et il suffit qu'il n'appartienne au noyau d'aucun caractère.

(iv)  $\forall T \in \mathcal{A}$ , on a

$$\Sigma(T) = \{\chi(T) \mid \chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})\}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\chi$  un caractère, il est clair tout d'abord que  $\mathcal{N}(\chi)$  est un idéal; comme selon la proposition **B.5** (iii),  $\mathcal{N}(\chi)$  est de codimension 1, d'après **15.2** il a un supplémentaire topologique, dont la dimension est égale à 1 d'après **B.5** (ii).  $\mathcal{N}(\chi)$  ne peut donc être strictement contenu dans aucun sous-espace strict de  $\mathcal{A}$ , c'est dire que  $\mathcal{N}(\chi)$  est maximal.

▷ Réciproquement, si  $\mathcal{I}$  est un idéal maximal, alors il est fermé en vertu du théorème **19.9**, et  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est une algèbre de Banach d'après la proposition **19.7**, trivialement commutative. Choisissons  $T \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ , et posons  $\mathcal{J} = \{PT + S \mid P \in \mathcal{A}, S \in \mathcal{I}\}$ ; c'est un idéal, qui contient strictement  $\mathcal{I}$ , puisque  $T \notin \mathcal{I}$ ; d'où il résulte que  $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ , et par conséquent qu'il existe  $P \in \mathcal{A}$  et  $S \in \mathcal{I}$  tels que  $PT + S = I$ . Si  $\pi$  est l'homomorphisme canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , on aura donc  $\pi(P)\pi(T) + \pi(S) = \pi(I)$ , soit  $P\pi(T) = I$ . Il en résulte que tous les éléments non nuls de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  sont inversibles, et par conséquent d'après le théorème **8.19**, que  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est isométriquement isomorphe à  $\mathbb{C}$ ; notons  $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ , cet isomorphisme. L'application  $\chi = \theta \circ \pi$  est alors un caractère, dont le noyau n'est autre que  $\mathcal{I}$ . Comme  $\theta$  et  $\pi$  sont isométriques, on retrouve bien le fait que  $\|\chi\| = 1$ .

▷ On sait déjà d'après la proposition **19.6** qu'aucun élément inversible n'appartient à un idéal propre; réciproquement si  $T$  n'est pas inversible, alors  $I \notin \mathcal{A}_T$  qui est par conséquent un idéal propre. En vertu du théorème **19.9**, il en résulte que  $\mathcal{A}_T$  est contenu dans un idéal maximal; c'est dire en particulier que  $T$  appartient à un idéal maximal, c'est-à-dire au noyau d'un caractère.

▷ Si  $\chi$  est un caractère, on a déjà vu à la proposition **19.2** (ii) que  $\chi(T) \in \Sigma(T)$ , et par conséquent un élément inversible ne peut appartenir au noyau d'un caractère. Réciproquement, si  $T$  n'est pas inversible, nous venons de voir qu'il appartient à un idéal maximal et donc d'après (??) au noyau d'un caractère.

▷ Enfin, nous venons de rappeler que  $\{\chi(T) \mid \chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})\} \subset \Sigma(T)$ . Réciproquement, si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , alors  $T - \lambda$  n'est pas inversible, d'après l'item (iii) il appartient donc au noyau d'un caractère, soit  $\chi$ , et on aura

$$\chi(T) - \lambda = \chi(T - \lambda) = 0.$$

□

On ne doit pas perdre de vue le fait que c'est l'hypothèse de commutativité qui nous a permis de démontrer l'inversibilité des éléments non nuls de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , et par conséquent de mettre en œuvre le théorème **8.19**.

### 19.4.1 La transformation de Gelfand

#### Définition 19.20



(i) La transformée de Gelfand de  $\mathcal{T}$  est l'application  $\widehat{\mathcal{T}} : \text{Sp}(\mathcal{A}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{T}) \subset \mathbb{C}$  définie par

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = \chi(\mathcal{T}).$$

(ii) L'application  $\Gamma : \mathcal{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{T}}$  s'appelle la transformation de Gelfand. On note

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{R}(\Gamma).$$

### Définition 19.21

(i) On appelle radical de l'algèbre de Banach commutative  $\mathcal{A}$ , et on note  $\text{Rad } \mathcal{A}$ , l'intersection de ses idéaux maximaux.

(ii) On dit que  $\mathcal{A}$  est simple si le seul idéal propre qu'elle contient est  $\{0\}$ .

(iii) On dit que  $\mathcal{A}$  est semi-simple si  $\text{Rad } \mathcal{A} = \{0\}$ .

### Théorème 19.22

(i) Si on munit  $\text{Sp}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}'$  de la topologie induite par celle du dual fort  $\mathcal{A}'$ , les  $\widehat{\mathcal{T}}$  sont des applications continues et  $\widehat{\mathcal{A}}$  est une sous-algèbre unitaire de  $\mathcal{C}^0(\text{Sp}(\mathcal{A}))$  qui sépare les points.

(ii)  $\Sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\widehat{\mathcal{T}})$ , et  $\|\widehat{\mathcal{T}}\|_\infty = \rho(\mathcal{T})$ , où  $\|\widehat{\mathcal{T}}\|_\infty = \sup_{\chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})} |\chi(\mathcal{T})|$ .

(iii) La transformation de Gelfand est un homomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur  $\widehat{\mathcal{A}}$ , et on a

$$\mathcal{N}(\Gamma) = \text{Rad } \mathcal{A}.$$

(iv) Le radical de  $\mathcal{A}$  est formé de ses éléments quasi-nilpotents.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura

$$|\widehat{\mathcal{T}}(\chi_1) - \widehat{\mathcal{T}}(\chi_2)| = |\chi_1(\mathcal{T}) - \chi_2(\mathcal{T})| = |(\chi_1 - \chi_2)(\mathcal{T})| \leq \|(\chi_1 - \chi_2)\| \|\mathcal{T}\|,$$

ce qui montre que la transformée de Gelfand d'un élément de  $\mathcal{A}$  est continue, soit  $\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}^0(\text{Sp}(\mathcal{A}))$

▷ Notons que  $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$ , puisque  $\chi(\mathbf{1}) = 1, \forall \chi$ , ce qui montre que  $\widehat{\mathcal{A}}$  est unifère. De plus  $\widehat{\mathcal{A}}$  sépare les points, en effet dire que  $\chi_1 \neq \chi_2$ , c'est dire qu'il existe  $\mathcal{T}$  tel que  $\chi_1(\mathcal{T}) \neq \chi_2(\mathcal{T})$ , soit  $\widehat{\mathcal{T}}(\chi_1) \neq \widehat{\mathcal{T}}(\chi_2)$ .

▷ En vertu du théorème 19.19, il est clair que  $\Sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\widehat{\mathcal{T}})$ , et on aura de plus  $\|\widehat{\mathcal{T}}\|_\infty = \sup_{\chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})} |\widehat{\mathcal{T}}(\chi)|$ , et par conséquent  $\|\widehat{\mathcal{T}}\|_\infty = \rho(\mathcal{T})$ .

▷ La transformation de Gelfand est un homomorphisme, en effet

$$\widehat{\lambda\mathcal{T}}(\chi) = \chi(\lambda\mathcal{T}) = \lambda\chi(\mathcal{T}) = \lambda\widehat{\mathcal{T}}(\chi),$$

et de même

$$\widehat{\mathcal{P} + \mathcal{T}}(\chi) = \chi(\mathcal{P} + \mathcal{T}) = \chi(\mathcal{P}) + \chi(\mathcal{T}) = \widehat{\mathcal{P}}(\chi) + \widehat{\mathcal{T}}(\chi) = (\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{T}})(\chi),$$

et

$$\widehat{\mathcal{P}\mathcal{T}}(\chi) = \chi(\mathcal{P}\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{P})\chi(\mathcal{T}) = \widehat{\mathcal{P}}(\chi)\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = (\widehat{\mathcal{P}\mathcal{T}})(\chi).$$

▷ On aura

$$\mathcal{N}(\Gamma) = \{T \mid \chi(T) = 0, \forall \chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})\} = \bigcap_{\chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})} \mathcal{N}(\chi) = \text{Rad } \mathcal{A},$$

d'après le théorème 19.19 (i). Il en résulte que  $T \in \text{Rad } \mathcal{A}$  si et seulement si  $\widehat{T} = 0$ , soit  $\rho(T) = 0$ , d'après (ii).

□

De façon générale, on munira  $\text{Sp}(\mathcal{A})$  de la *topologie de Gelfand*  $\sigma(\text{Sp}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ , soit en fait *la moins fine rendant les  $\widehat{T}$  continues*, c'est la restriction à  $\text{Sp}(\mathcal{A})$  de la topologie \*-faible de  $\mathcal{A}'$ .

**Théorème 19.23** *Muni de la topologie de Gelfand,  $\text{Sp}(\mathcal{A})$  est compact.*

DÉMONSTRATION.

▷ Le théorème de Banach-Alaoglu nous montre que la boule unité fermée  $B$  du dual fort  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$ , est \*-faiblement compacte (Schwartz p.299, Rudin p.66, Brézis p.42). D'après la proposition 19.2 (iii), on a  $\text{Sp}(\mathcal{A}) \subset B$ ; il nous suffira donc de démontrer que  $\text{Sp}(\mathcal{A})$  est \*-faiblement fermée dans  $\mathcal{A}'$ , c'est encore dire que si  $\Lambda_0$  appartient à l'adhérence \*-faible de  $\text{Sp}(\mathcal{A})$ , alors  $\Lambda_0$  est un caractère, soit en fait que  $\Lambda_0(TP) = \Lambda_0(T)\Lambda_0(P)$  et  $\Lambda_0 \neq 0$ .

▷ Choisissons  $P$  et  $T \in \mathcal{A}$ , notons  $Q_1 = I, Q_2 = P, Q_3 = T, Q_4 = PT$ , et posons

$$W = \{ \Lambda \in \mathcal{A}' \mid |\Lambda(Q_i) - \Lambda_0(Q_i)| \leq \varepsilon, \forall i = 1, 4 \}.$$

C'est un voisinage \*-faible de  $\Lambda_0$ , il contient donc un caractère, soit  $\chi$ . On aura alors

$$|1 - \Lambda_0(I)| = |\chi(I) - \Lambda_0(I)| = |\chi(Q_1) - \Lambda_0(Q_1)| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que  $\Lambda_0 \neq 0$  dès que  $\varepsilon$  est assez petit. Pour tout  $\varepsilon$ , on aura également

$$\begin{aligned} \Lambda_0(TP) - \Lambda_0(T)\Lambda_0(P) &= \Lambda_0(TP) - \chi(TP) + \chi(T)\chi(P) - \Lambda_0(T)\Lambda_0(P) \\ &= \Lambda_0(TP) - \chi(TP) + (\chi(P) - \Lambda_0(P))\chi(T) + (\chi(T) - \Lambda_0(T))\Lambda_0(P), \\ &= \Lambda_0(Q_4) - \chi(Q_4) + (\chi(Q_2) - \Lambda_0(Q_2))\chi(T) + (\chi(Q_3) - \Lambda_0(Q_3))\Lambda_0(P) \end{aligned}$$

d'où

$$|\Lambda_0(TP) - \Lambda_0(T)\Lambda_0(P)| \leq (1 + |\chi(T)| + |\Lambda_0(P)|)\varepsilon \leq (1 + \|T\| + |\Lambda_0(P)|)\varepsilon,$$

et le résultat.

□

Il semble donc que la théorie des algèbres commutatives semi-simples se réduise à celle des algèbres de fonctions continues; la réalité est plus complexe, car la caractérisation de  $\widehat{\mathcal{A}}$  peut être particulièrement difficile. Nous allons en voir ci-dessous quelques exemples simples, mais commençons par établir deux corollaires faciles et tout d'abord la généralisation de l'item (iii) de la proposition 19.2 :

**Corollaire 19.24** Soit  $\Theta$  un homomorphisme :  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , où  $\mathcal{B}$  est une algèbre de Banach commutative semi-simple et  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach commutative, alors  $\Theta$  est continu.

DÉMONSTRATION. Choisissons  $\tau_n \rightarrow 0$  telle que  $\Theta(\tau_n)$  converge, soit vers  $\tau$ . Si  $\xi \in \text{Sp}(\mathcal{B})$ , alors  $\chi = \xi \circ \Theta \in \text{Sp}(\mathcal{A})$ , et par conséquent,  $\chi$  est continu. Il en résulte que

$$\xi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\Theta(\tau_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\tau_n) = 0,$$

$\forall \xi \in \text{Sp}(\mathcal{B})$  ; c'est dire que  $\tau$  appartient au noyau de la transformation de Gelfand, soit  $\tau \in \text{Rad } \mathcal{B} = \{0\}$ . Le théorème du graphe fermé **3.17** nous montre alors que  $\Theta$  est continu.  $\square$

On a donc démontré que, *dans le cas commutatif*, la transformée de Gelfand d'un élément capture l'ensemble de son spectre, par contre *deux éléments qui diffèrent d'un quasi-nilpotent ont même transformée de Gelfand*, ce qui ne permet pas de caractériser les éléments de l'algèbre par leur transformée de Gelfand.

**Proposition 19.25** Dans une algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  commutative semi-simple, toute involution est continue.

DÉMONSTRATION. Soit  $\chi$  un caractère, alors  $\xi$  défini par  $\xi(\tau) = \overline{\chi(\tau^*)}$  est également un caractère, et par conséquent est continu. Soit alors  $\tau_n \rightarrow \tau$ , si  $\tau_n^*$  converge, soit vers  $\rho$ , on aura

$$\overline{\chi(\rho)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\chi(\tau_n^*)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\tau_n) = \xi(\tau) = \overline{\chi(\tau^*)},$$

soit  $\chi(\rho) = \chi(\tau^*)$ , soit encore  $\widehat{\rho} = \widehat{\tau^*}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est semi-simple, la transformation de Gelfand est injective, et par conséquent  $\rho = \tau^*$ . La continuité de l'involution en résulte d'après le théorème du graphe fermé **3.17**.  $\square$

## 19.4.2 Les fonctions continues sur un compact

Considérons l'algèbre de Banach commutative  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0(K)$ , où  $K$  est un espace compact. Si on pose  $\chi_t(f) = f(t)$ , il est clair que  $\chi_t$  est un caractère; nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autres, soit en fait que si  $\xi$  est un caractère  $\exists t$ , tel que  $\forall f$ ,  $\xi(f) = f(t)$ , ou encore que

$$\bigcap_{f \in \mathcal{C}^0(K)} K_f \neq \emptyset, \text{ où } K_f = \{t \in K \mid \xi(f) = f(t)\}.$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors comme les  $K_f$  sont fermés et donc compacts, il existe un sous-ensemble fini de fonctions soient  $f_i, i = 1, n$ , telles que  $\bigcap_{i=1, n} K_{f_i} = \emptyset$ . Posons

$$g(t) = \sum_{i=1}^n |\xi(f) - f_i(t)|^2,$$

c'est une fonction positive continue sur le compact  $K$ , qui par hypothèse ne s'annule pas, et par conséquent  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $g(t) - \varepsilon \geq 0$ . D'après le lemme **19.26** (i) ci-dessous, il en résulte que  $\xi(g - \varepsilon \mathbf{1}) \geq 0$ , soit  $\xi(g) \geq \varepsilon \xi(\mathbf{1}) = \varepsilon > 0$ . Mais d'après le lemme **19.26** (ii), on aura également

$$\xi(|\xi(f_i)\mathbf{1} - f_i|^2) = \xi(\xi(f_i)\mathbf{1} - f_i) \xi(\overline{\xi(f_i)\mathbf{1} - f_i}) = |\xi(\xi(f_i)\mathbf{1} - f_i)|^2 = 0,$$

et par conséquent  $\xi(g) = 0$ , ce qui constitue une contradiction.

On a donc montré que  $t \rightarrow \chi_t$  constitue une bijection  $K \rightarrow \text{Sp } \mathcal{A}$  ; elle est continue pour la topologie  $*$ -faible, et comme  $K$  est compact, c'est en fait un homéomorphisme d'après le lemme **19.27** ci-dessous. Comme  $\widehat{f}(\chi_t) = \chi_t(f) = f(t)$ , on aura  $\Sigma(f) = \{f(t) \mid t \in K\} = \mathcal{R}(f)$ . Quant à la transformation de Gelfand, qui transforme  $f$  en  $\widehat{f}$ , à l'isomorphisme près  $t \rightarrow \chi_t$ , ce n'est rien d'autre que l'identité de  $\mathcal{C}^0(K)$ . On ne peut pas affirmer qu'il s'agisse là d'un résultat extraordinaire, mais il a au moins le mérite de la simplicité.

**Lemme 19.26** *Soit  $K$  compact, on pose  $\mathcal{R}(f) = \{f(t) \mid t \in K, f \in \mathcal{C}^0(K)\}$ , si  $\xi$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{C}^0(K)$  qui vérifie  $\|\xi\| = \xi(\mathbf{1}) = 1$ , alors*

- (i)  $\xi(f)$  appartient à l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{R}(f)$ .
- (ii)  $\mathcal{R}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{R}(f)}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{R}(f)$  est incluse dans l'intersection des disques fermés contenant  $\mathcal{R}(f)$ . Comme  $\mathcal{R}(f)$  est bornée, son enveloppe convexe fermée est un compact, qui peut être strictement séparé par une droite d'un point  $t$  qui lui est extérieur, en vertu du théorème **5.28**. Il en résulte que l'on peut trouver un disque fermé contenant  $\mathcal{R}(f)$  et ne contenant pas  $t$ , et par conséquent que l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{R}(f)$  est l'intersection des disques fermés contenant  $\mathcal{R}(f)$ .

▷ Soit  $f \in \mathcal{C}^0(K)$ , il nous faut donc montrer que tout disque fermé  $D_R(z)$  contenant  $\mathcal{R}(f)$  contient également  $\xi(f)$ . Supposons donc que  $\mathcal{R}(f) \subset D_R(z)$ , on aura alors  $|f(t) - z| \leq R$ ,  $\forall t \in K$ , soit  $\|f - z\mathbf{1}\| \leq R$ , et par conséquent

$$|\xi(f) - z| = |\xi(f - z\mathbf{1})| \leq \|\xi\| \|f - z\mathbf{1}\| \leq R,$$

soit  $\xi(f) \in D_R(z)$ .

▷ Si  $f \in \mathcal{C}^0(K)$ , on peut toujours la décomposer sous la forme  $f = g + ih$ , où  $g$  et  $h$  sont continues sur  $K$ , à valeurs réelles. De l'item (i), il résulte que  $\xi(g)$  et  $\xi(h)$  sont réels, et par conséquent

$$\xi(\overline{f}) = \xi(g - ih) = \xi(g) - i\xi(h) = \overline{\xi(g) + i\xi(h)} = \overline{\xi(f)},$$

d'où le résultat. □

**Lemme 19.27** *Si  $f$  est une fonction continue et bijective :  $K \rightarrow Y$ , où  $K$  est un espace compact et  $Y$  un espace séparé, alors  $f^{-1}$  est continue.*

DÉMONSTRATION. Si  $F$  est fermé dans  $K$ , c'est un compact, et par conséquent  $f(F)$  est compact et en particulier fermé. Il en résulte que  $f^{-1}$  est continue, l'image réciproque par  $f^{-1}$  d'un fermé étant fermée. □

### 19.4.3 L'algèbre de Wiener

Notons  $\mathcal{W}$  l'ensemble des fonctions continues sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ , dont la série de Fourier converge absolument, soit l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n, \text{ avec } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty.$$

Nous allons démontrer que si  $f \in \mathcal{W}$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{T}$ , alors  $1/f \in \mathcal{W}$ . Il s'agit d'un résultat considéré comme difficile, du moins jusqu'à la mise au point par Gelfand de la démonstration qui suit.

Considérons l'algèbre de Banach commutative  $\mathcal{A} = \ell^1(\mathbb{Z})$  munie du produit de convolution

$$(P = S * Q) \iff p_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_{k-n} q_n.$$

L'unité  $I$  est égale à la suite  $(e_n)$  dont tous les éléments sont nuls hormis  $e_0 = 1$ . Si  $t \in \mathbb{T}$ , et  $s = (s_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , on pose

$$\widehat{S}(\chi_t) = \chi_t(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n t^n = f_s(t).$$

On aura  $\chi_t(I) = 1$ , et on vérifie que  $\chi_t(S * Q) = \chi_t(S)\chi_t(Q)$  ; les  $\chi_t$  sont donc des caractères de  $\ell^1(\mathbb{Z})$ , démontrons que ce sont les seuls.

Si  $\xi \in \text{Sp } \mathcal{A}$ , on pose  $\lambda = \xi(R)$ , avec  $R = (r_n)$  où les  $r_n$  sont nuls sauf  $r_1 = 1$ . On aura  $\|R\| = 1$ , et par conséquent  $|\lambda| = |\xi(R)| \leq 1$ , puisqu'un caractère est de norme 1. De plus  $R$  est inversible, d'inverse  $\widetilde{R} = (\widetilde{r}_n)$ , où les  $\widetilde{r}_n$  sont nuls sauf  $\widetilde{r}_{-1} = 1$  ; comme  $\|\widetilde{R}\| = 1$ , on en déduit que  $|1/\lambda| = |1/\xi(R)| = |\xi(\widetilde{R})| \leq 1$ , et par conséquent  $|\lambda| = 1$ , ce qui permet de considérer le caractère  $\chi_\lambda$ .

Comme  $\chi_\lambda(R) = \lambda$ , on aura  $\xi(R^k) = \lambda^k = \chi_\lambda(R^k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ; comme les  $R^k = (r_{n-k+1})$  forment une base de  $\ell^1(\mathbb{Z})$ , il en résulte que  $\xi(s) = \chi_\lambda(s)$ ,  $\forall s \in \ell^1(\mathbb{Z})$ .

L'application  $t \rightarrow \chi_t$  est donc une bijection  $\mathbb{T} \rightarrow \text{Sp } \mathcal{A}$ , et par conséquent

$$\Sigma(s) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \theta, \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n e^{in\theta} = \lambda \right\}.$$

Si  $f_s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n t^n$  ne s'annule pas, alors  $0 \notin \Sigma(s)$ , et par conséquent  $s$  est inversible, soit  $\tilde{s}$  cet inverse; on aura  $\widehat{\tilde{s}} \widehat{s} = \mathbf{1}$ , soit  $f_{\tilde{s}} = 1/f_s \in \mathcal{W}$ .

#### 19.4.4 La transformation de Fourier

On considère l'algèbre de Banach commutative  $L^1(\mathbb{R})$ , pour le produit de convolution. Comme elle ne possède pas d'unité, on lui en adjoint une, que l'on nomme usuellement  $\delta$ , de la façon décrite à la remarque 8.3. On aura alors  $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ , avec

$$(f, \alpha) * (g, \beta) = (f * g + \alpha g + \beta f, \alpha\beta)$$

et  $\delta = (0, 1)$ , soit encore

$$(f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) = f * g + \alpha g + \beta f + \alpha\beta\delta,$$

ce qui permet encore d'écrire  $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R}) + \mathbb{C}\delta$ .

On pose  $\langle \chi_t, f + \alpha\delta \rangle = \mathcal{F}(f)(t) + \alpha$ , où  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  note la transformée de Fourier de  $f$ , ainsi que  $\langle \chi_\infty, f + \alpha\delta \rangle = \alpha$ . Les  $\chi_t$ , où  $t \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  sont des caractères de  $\mathcal{A}$ , car

$$\begin{aligned} \langle \chi_t, (f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) \rangle &= \mathcal{F}(f * g + \alpha g + \beta f)(t) + \alpha\beta \\ &= \mathcal{F}(f * g)(t) + \alpha\mathcal{F}(g)(t) + \beta\mathcal{F}(f)(t) + \alpha\beta \\ &= (\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))(t) + \alpha\mathcal{F}(g)(t) + \beta\mathcal{F}(f)(t) + \alpha\beta \\ &= (\mathcal{F}(f)(t) + \alpha)(\mathcal{F}(g)(t) + \beta). \end{aligned}$$

L'application  $t \rightarrow \chi_t$  est injective :  $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{A})$ ; montrons qu'elle est surjective. Soit donc  $\xi \in \text{Sp}(\mathcal{A})$ ,  $\xi \neq \chi_\infty$ ; comme  $\xi$  est continu sur  $L^1(\mathbb{R})$ , c'est un élément de  $L^\infty(\mathbb{R})$ , au sens où  $\exists h \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$\langle \xi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x) dx;$$

comme de plus  $\|\xi\| = 1$ , on aura d'une part  $1 = \sup |\langle \xi, f \rangle| / \|f\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^\infty}$ , et d'autre part  $\left| \int_a^b h(x) dx \right| \leq |b - a|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Il en résulte que  $\|h\|_{L^\infty} = 1$ . Posons  $f^y(x) = f(x - y)$ ; pour  $f$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , d'après le théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi, f^y \rangle g(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy = \langle \xi, f * g \rangle \\ &= \langle \xi, f \rangle \langle \xi, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi, f \rangle h(y)g(y) dy, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\langle \xi, f^y \rangle = \langle \xi, f \rangle h(y) \text{ pp. } y.$$

Comme l'application  $y \rightarrow f^y$  est continue :  $\mathbb{R} \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $h$  peut être choisie continue. On aura de même

$$\langle \xi, f \rangle h(y+z) = \langle \xi, f^{y+z} \rangle = \langle \xi, (f^z)^y \rangle = \langle \xi, f^z \rangle h(y) = \langle \xi, f \rangle h(z)h(y),$$

et par conséquent

$$h(y+z) = h(z)h(y).$$

Comme  $\|h\|_{L^\infty} = 1$ , il en résulte qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$ , tel que  $h(x) = e^{-itx}$ , soit  $\langle \xi, f \rangle = \mathcal{F}(f)(t)$ , ou encore  $\xi = \chi_t$ .

Comme  $\mathcal{F}(f)$  est continue, l'application  $t \rightarrow \chi_t : \mathbb{R} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{A})$  est continue pour la topologie  $*$ -faible. Si  $t_n \rightarrow \infty$ , à condition de munir  $\overline{\mathbb{R}}$  de la topologie de la droite achevée, soit celle de compactifié d'Alexandroff, alors  $\chi_{t_n} \rightarrow \chi_\infty$ , puisque  $\mathcal{F}(f)(t_n) \rightarrow 0$ , en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue. Il résulte alors du lemme **19.27** que  $t \rightarrow \chi_t$  est un homéomorphisme  $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{A})$ , puisque  $\overline{\mathbb{R}}$  est compact. Si on convient alors de poser  $\mathcal{F}(\delta) = \mathbf{1}$ , on aura

$$\widehat{f + \alpha\delta}(\chi_t) = \langle \chi_t, f + \alpha\delta \rangle = \mathcal{F}(f)(t) + \alpha = \mathcal{F}(f + \alpha\delta)(t),$$

ce qui permet de considérer la transformée de Gelfand de  $\varphi \in \mathcal{A}$  comme l'application  $t \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)(t)$  ; c'est dire que la transformée de Gelfand n'est rien d'autre que la transformée de Fourier. Notons que

$$\Sigma(f) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R}, \exists t, \lambda = \mathcal{F}(f)(t)\},$$

ce qui n'a rien de très étonnant, car

$$(\lambda \in \Pi(f)) \iff \exists g \text{ telle que } (\mathcal{F}(f) - \lambda)\mathcal{F}(g) = \mathbf{1}.$$

## 19.5 Les $C^*$ -algèbres

La difficulté qui subsiste est de même nature que dans le cas de la dimension finie ou des opérateurs compacts : c'est l'existence d'opérateurs quasi-nilpotents (en fait nilpotents en dimension finie) qui rend la diagonalisation de certains opérateurs impossible. Nous allons donc développer un cadre similaire à celui des matrices normales, dans lequel les opérateurs quasi-nilpotents sont nuls. C'est là encore la considération de l'adjoint, soit en fait ici de  $C^*$ -algèbres qui, de même qu'à la proposition **16.1**, permettra de conclure.

Notons déjà cette propriété valable dans toute algèbre de Banach involutive :

**Proposition 19.28** *Si  $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ , algèbre de Banach involutive, alors  $\mathcal{T} \in \text{Rad } \mathcal{A}$  si et seulement si  $\mathcal{T}^* \in \text{Rad } \mathcal{A}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $P \in \text{Rad } \mathcal{A}$ , d'après la proposition **C.13**,  $P$  est quasi-nilpotent, ainsi donc que  $TP$  et  $PT \ \forall T \in \mathcal{A}$ , puisque selon la proposition **C.9**,  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est un idéal. On aura donc

$$\rho(TP^*) = \rho(T^{**}P^*) = \rho((PT^*)^*) = \rho(PT^*) = 0, \ \forall T \in \mathcal{A}.$$

Il en résulte que  $TP^* - I$  est inversible  $\forall T \in \mathcal{A}$ , et par conséquent d'après le corollaire **C.11**, que  $P^* \in \text{Rad } \mathcal{A}$ . □

**Remarque 19.29** Dans le cas commutatif, il s'agit d'une trivialité, puisque selon **19.22** (iv),  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est l'ensemble des éléments quasi-nilpotents et que d'après **13.3** (v),  $\rho(T^*) = \rho(T)$ .

### 19.5.1 Sous-algèbres

**Proposition 19.30** Si  $\mathcal{B}$  est une  $C^*$ -sous-algèbre de Banach de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , contenant l'unité, alors  $\Sigma_{\mathcal{B}}(T) = \Sigma_{\mathcal{A}}(T)$ ,  $\forall T \in \mathcal{B}$ .

DÉMONSTRATION. Il est déjà clair que  $\Sigma_{\mathcal{A}}(T) \subset \Sigma_{\mathcal{B}}(T)$ . Soit alors réciproquement  $P \in \mathcal{B}$ , ayant  $P^{-1}$  pour inverse dans  $\mathcal{A}$ , nous montrerons que  $P^{-1} \in \mathcal{B}$ . Comme  $S = P^*P \in \mathcal{B}$  est auto-adjoint, en vertu de la proposition **13.10** (ii) on aura  $\Sigma_{\mathcal{B}}(S) \subset \mathbb{R}$ . Il en résulte que  $\Sigma_{\mathcal{B}}(S) = \partial\Sigma_{\mathcal{B}}(S) \subset \Sigma_{\mathcal{A}}(S)$ , d'après la proposition **19.17**. De plus  $S$  est inversible dans  $\mathcal{A}$  d'après la proposition **13.3** (iv) et par conséquent  $0 \notin \Sigma_{\mathcal{A}}(S) \supset \Sigma_{\mathcal{B}}(S)$ , ce qui prouve que  $S$  est inversible dans  $\mathcal{B}$ . Soit  $S^{-1} \in \mathcal{B}$  cet inverse, considérons alors  $Q = S^{-1}P^*$ , c'est un inverse à gauche de  $P$ , et par conséquent  $P^{-1} = Q \in \mathcal{B}$ . □

Il est donc possible de se restreindre à une  $C^*$ -sous-algèbre sans que soit modifiée la notion de spectre.

### 19.5.2 $C^*$ -algèbres commutatives

**Théorème 19.31 (Gelfand, Naimark)** Si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre commutative, alors la transformation de Gelfand  $\Gamma$  est un  $*$ -isomorphisme isométrique de  $\mathcal{A}$  sur  $C^0(\text{Sp}(\mathcal{A}))$ ; c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\widehat{T^*} = \overline{\widehat{T}} \text{ et } \|\widehat{T}\|_{\infty} = \|T\|,$$

ce qui s'écrit encore

$$\Gamma(T^*) = \overline{\Gamma(T)} \text{ et } \|\Gamma(T)\|_{\infty} = \|T\|.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit tout d'abord  $S \in \mathcal{A}$ , auto-adjoint, et  $\chi \in \text{Sp}(\mathcal{A})$ , montrons que  $\chi(S) \in \mathbb{R}$ . Nous poserons  $\chi(S) = \alpha + i\beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $P = S + itI$ , et  $t \in \mathbb{R}$ ; on aura  $PP^* = S^2 + t^2I$ ,  $\chi(P) = \alpha + i(\beta + t)$ , d'où

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\chi(P)|^2 \leq \|P\|^2 = \|PP^*\| \leq \|S\|^2 + t^2,$$

et par conséquent  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|S\|^2$ ; il en résulte que  $\beta = 0$ .



▷ Soit alors  $T$  quelconque dans  $\mathcal{A}$  ; en vertu de la proposition **13.3** (iii) nous aurons  $T = P + iS$ , où  $P$  et  $S$  sont auto-adjoints, d'où  $\widehat{\Phi}(T)$

$$\chi(T^*) = \chi(P - iS) = \chi(P) - i\chi(S) = \overline{\chi(T)},$$

c'est-à-dire  $\widehat{T^*} = \overline{\widehat{T}}$ .

▷ Soit  $T \in \mathcal{A}$ , posons  $P = TT^*$ , on aura  $\|T\|^2 = \rho(P)$ , d'après la proposition **13.9** (ii). Comme de plus  $\widehat{T^*} = \overline{\widehat{T}}$ , on aura  $\widehat{P}(\chi) = \widehat{TT^*}(\chi) = \widehat{T}(\chi)\widehat{T^*}(\chi) = |\widehat{T}(\chi)|^2$ , et par conséquent selon le théorème **19.22** (ii)  $\|\widehat{T}\|_\infty^2 = \|\widehat{P}\|_\infty = \rho(P) = \|T\|^2$ .

▷ Enfin, selon le théorème de Stone-Weierstraß **4.7**, comme  $\widehat{\mathcal{A}}$  est une algèbre de fonctions continues qui sépare les points dont nous venons de démontrer à l'item précédent le caractère auto-adjoint, elle est dense dans  $\mathcal{C}^0(\text{Sp}(\mathcal{A}))$  ; mais de plus elle est fermée puisque la transformation de Gelfand est une isométrie, et par conséquent  $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^0(\text{Sp}(\mathcal{A}))$ . □

Nous sommes maintenant en position de démontrer le résultat espéré : une  $C^*$ -algèbre commutative ne contient pas d'éléments quasi-nilpotents non nuls.

**Corollaire 19.32** *Une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  commutative est semi-simple.*

DÉMONSTRATION. En effet la transformation de Gelfand étant bijective, son noyau  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est réduit à  $\{0\}$ . □

Une question essentielle n'a pas encore été abordée : une algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  et un élément  $T \in \mathcal{A}$  étant donnés, peut-on construire une  $C^*$ -sous-algèbre commutative  $\mathcal{B}$  qui le contienne et permette d'en étudier le spectre ? Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre et  $T \in \mathcal{A}$  est normal on montre aisément que l'adhérence de l'algèbre des polynômes de  $T$  et  $T^*$  constitue une  $C^*$ -algèbre commutative  $\mathcal{B}$ , stable par l'involution, qui est dite *engendrée par  $T$*  ; bien entendu, les éléments de  $\mathcal{B}$  sont normaux. Nous savons que la transformation de Gelfand est inversible, nous allons voir qu'alors son inverse induit, pour chaque élément de  $\mathcal{B}$ , un prolongement du calcul holomorphe aux fonctions continues sur le spectre.

**Théorème 19.33 (calcul fonctionnel continu)** *Soient  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et  $T \in \mathcal{A}$ , normal ; si  $\mathcal{B}$  est la  $C^*$ -sous-algèbre engendrée par  $T$ , alors*

(i) *La transformée de Gelfand  $\widehat{T}$  de  $T$  est un homéomorphisme :  $\text{Sp}(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma(T)$ .*

(ii) *La formule*

$$\widehat{\Phi(f)} = f \circ \widehat{T} \text{ soit encore } \Phi(f) = \Gamma^{-1}(f \circ \widehat{T})$$

*définit l'unique  $*$ -homomorphisme d'algèbres  $\Phi : \mathcal{C}^0(\Sigma(T)) \rightarrow \mathcal{B}$  tel que*

$$\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \text{ et } \Phi(\zeta) = T. \tag{19.5}$$

(iii)  $\Phi$  est une isométrie :  $\mathcal{C}^0(\Sigma(\mathcal{T})) \rightarrow \mathcal{B}$  qui vérifie

$$\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*.$$

et prolonge le calcul holomorphe.

On notera

$$f(\mathcal{T}) = \Phi(f).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord, qu'en vertu de la proposition **19.30**, on aura  $\Sigma_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}) = \Sigma(\mathcal{T})$ .

▷ Supposons que  $\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = 0, \forall \chi \in \text{Sp}(\mathcal{B})$ , soit  $\chi(\mathcal{T}) = 0$ . On aura alors  $\chi(\mathcal{T}^*) = \overline{\chi(\mathcal{T})} = 0$ , et par conséquent  $\chi(P(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)) = 0$ , pour tout polynôme  $P$  de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}^*$ . Par densité, il en résulte que  $\chi(P) = 0, \forall P \in \mathcal{B}$ , soit en fait  $\chi = 0$ . Nous avons donc montré que la transformée de Gelfand  $\widehat{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$  est injective, et par conséquent d'après le théorème **19.19** (iv), qu'elle est bijective  $\text{Sp}(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{T})$ . Mais pour la topologie de Gelfand  $\text{Sp}(\mathcal{B})$  est compact et  $\widehat{\mathcal{T}}$  continu, et par conséquent d'après le lemme **19.27**, l'inverse de  $\widehat{\mathcal{T}}$  est également continu; c'est dire que  $\widehat{\mathcal{T}}$  est un homéomorphisme :  $\text{Sp}(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{T})$ .

▷ L'application  $\mathcal{T} : f \rightarrow f \circ \widehat{\mathcal{T}} : \mathcal{C}^0(\Sigma(\mathcal{T})) \rightarrow \mathcal{C}^0(\text{Sp}(\mathcal{B}))$  est surjective car comme  $\widehat{\mathcal{T}}$  est continûment inversible, on aura  $f = (f \circ \widehat{\mathcal{T}}) \circ \widehat{\mathcal{T}}^{-1}$ . C'est également une isométrie car comme  $\widehat{\mathcal{T}}$  est surjective, on a

$$\sup_{\lambda \in \Sigma(\mathcal{T})} |f(\lambda)| = \sup_{\chi \in \text{Sp}(\mathcal{B})} |f \circ \widehat{\mathcal{T}}(\chi)|,$$

Il résulte alors du théorème de Gelfand-Naimark **19.31** que  $\Phi = \Gamma^{-1} \circ \mathcal{T}$  est également isométrique et surjective, et par conséquent que c'est un isomorphisme  $\mathcal{C}^0(\Sigma(\mathcal{T})) \rightarrow \mathcal{B}$ .

▷ On aura

$$\widehat{\Phi(fg)} = (fg) \circ \widehat{\mathcal{T}} = (f \circ \widehat{\mathcal{T}})(g \circ \widehat{\mathcal{T}}) = \widehat{\Phi(f)} \widehat{\Phi(g)},$$

d'où  $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ , ce qui montre que  $\Phi$  est un homomorphisme d'algèbres.

▷ On aura de plus  $\widehat{\Phi(\mathbf{1})} = \mathbf{1} \circ \widehat{\mathcal{T}} = \mathbf{1}$ , soit  $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  puisque  $\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = \chi(\mathbf{1}) = 1 \forall \chi$ , et  $\widehat{\Phi(\zeta)} = \widehat{\mathcal{T}}$ , d'où  $\Phi(\zeta) = \mathcal{T}$ . Enfin  $\widehat{\Phi(\bar{f})} = \bar{f} \circ \widehat{\mathcal{T}} = \overline{f \circ \widehat{\mathcal{T}}}$ , d'où  $\widehat{\Phi(\bar{f})}^* = f \circ \widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\Phi(f)}$ , soit  $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$ .

▷ L'unicité qui résulte de la proposition **9.5** nous prouve que  $\Phi$  constitue un prolongement du calcul holomorphe, démontrons son unicité. Supposons donc que  $\Theta$  soit également un \*-homomorphisme vérifiant (19.5); il est continu d'après le corollaire **19.24**. Choisissons alors  $f \in \mathcal{C}^0(\Sigma(\mathcal{T}))$ , il existe une suite de polynômes  $P_n(z, \bar{z})$  tendant uniformément vers  $f$  sur  $\Sigma(\mathcal{T})$ , d'où il résulte que  $\Theta(P_n) \rightarrow \Theta(f)$  et  $\Phi(P_n) \rightarrow \Phi(f)$ . Mais par ailleurs

$$\Theta(P_n) = P_n(\Theta(\zeta), \Theta(\bar{\zeta})) = P_n(\Theta(\zeta), (\Theta(\zeta))^*) = P_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \Phi(P_n)$$

d'où le résultat. □

Dans ce cadre, le théorème de transformation spectrale reste valable :

**Corollaire 19.34** Soient  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre,  $T \in \mathcal{A}$ , normal et  $f \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , alors  $f(\Sigma(T)) = \Sigma(f(T))$

DÉMONSTRATION. En effet,  $\forall \lambda \in \Pi(f(T))$ ,  $f(T) - \lambda I = (f - \lambda \mathbf{1})(T)$  est inversible ; c'est dire en fait d'après le théorème 19.33 que  $f - \lambda \mathbf{1}$  est inversible dans  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , ou encore que  $f(\mu) \neq \lambda, \forall \mu \in \Sigma(T)$ . Il en résulte que  $f(\Sigma(T)) \subset \Sigma(f(T))$ . Réciproquement si  $\lambda \in \Sigma(f(T))$ , alors  $f - \lambda \mathbf{1}$  n'est pas inversible dans  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , soit  $\exists \mu \in \Sigma(T)$  tel que  $f(\mu) = \lambda$ , et par conséquent  $f(\Sigma(T)) \supset \Sigma(f(T))$ . □

Du théorème 19.33 il résulte immédiatement que pour  $T$  normal

**Remarque 19.35**

(i) si  $f \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$  est à valeurs réelles, alors  $f(T)$  est auto-adjoint, puisqu'alors  $\Phi(f) = (\Phi(f))^*$ .

(ii) si  $|f| = 1$ , alors  $f(T)$  est unitaire ; en effet  $f\bar{f} = \mathbf{1}$ , et par conséquent  $I = \Phi(f\bar{f}) = \Phi(f)\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)\Phi(f)^*$ .

En fait, on a mieux :

**Corollaire 19.36** Soient  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et  $T \in \mathcal{A}$ , normal, alors il est

- (i) auto-adjoint si et seulement si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .
- (ii) unitaire si et seulement si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{T}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{B}$  la sous- $C^*$ -algèbre engendrée par  $T$ , d'après le théorème 19.33,  $\widehat{T}$  est un isomorphisme  $\text{Sp}(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma(T)$ , et selon le théorème 19.31  $\widehat{T^*} = \overline{\widehat{T}}$ , soit  $\widehat{T^*}(\chi) = \overline{\widehat{T}(\chi)}$ ,  $\forall \chi \in \text{Sp}(\mathcal{B})$  ; il en résulte que si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ , alors  $\widehat{T^*}(\chi) = \widehat{T}(\chi)$ ,  $\forall \chi \in \text{Sp}(\mathcal{B})$ , et par conséquent  $\widehat{T^*} = \widehat{T}$ , d'où finalement  $T^* = T$ . De même, si  $\Sigma(T) \subset \mathbb{T}$ , alors

$$\widehat{T^*T}(\chi) = \widehat{T^*}(\chi)\widehat{T}(\chi) = |\widehat{T}(\chi)|^2 = 1,$$

et comme  $\widehat{T}(\chi) = \chi(I) = 1$ , il en résulte que  $\widehat{T^*T} = \widehat{I}$ , soit  $T^*T = I$ . □

# Chapitre 20

## Le théorème spectral

### 20.1 Le calcul fonctionnel continu

Considérons désormais l'algèbre  $\mathcal{L}(H)$  des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert  $H$ . Nous avons montré que c'est une  $C^*$ -algèbre. Dans ce cadre, le théorème **19.33** prend la forme suivante :

**Théorème 20.1 (Calcul continu des opérateurs normaux)** *Soit  $T$  un opérateur normal dans  $\mathcal{L}(H)$ , et  $\mathcal{B}$  la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $T$ , le calcul holomorphe de la proposition 9.5 se prolonge de façon unique en un  $*$ -homomorphisme d'algèbres isométrique  $\Phi : \mathcal{C}^0(\Sigma(T)) \rightarrow \mathcal{B}$  vérifiant  $\Phi(\mathbf{1}) = I$  et  $\Phi(\zeta) = T$ .*

On dit alors que  $\Phi$  constitue une *représentation* de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$  des fonctions continues sur  $\Sigma(T)$ , dans la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(H)$  des opérateurs bornés de  $H$ . La découverte et la classification des diverses représentations d'une  $C^*$ -algèbre donnée constitue une question difficile. Dans le cas où on se limite à la considération d'un opérateur auto-adjoint, ce calcul continu peut être établi de façon plus élémentaire, à partir du calcul fonctionnel des polynômes et du théorème de Stone-Weierstraß, en vertu du caractère réel du spectre. (voir Lévy-Bruhl p. 46).

**Corollaire 20.2** *Si  $T$  un opérateur normal dans  $\mathcal{L}(H)$ , et  $\lambda \in \Sigma(T)$ , alors*

- (i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in H$ , tel que  $\|x\| = 1$  et  $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon$ .
- (ii) *Si  $\lambda$  est un point isolé dans  $\Sigma(T)$ , c'est une valeur propre.*

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que si  $S$  est normal, alors  $\|Sx\| = \|S^*x\|$ , en effet

$$\|Sx\|^2 = (Sx|Sx) = (S^*Sx|x) = (SS^*x|x) = (S^*x|S^*x) = \|S^*x\|^2$$

▷ Si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , alors  $T - \lambda I$  n'est pas inversible et par conséquent, d'après le corollaire **14.7**,  $\exists x_n$  telle que  $\|x_n\| = 1$  et, soit  $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ , soit  $\|T^*x_n - \bar{\lambda}x_n\| \rightarrow 0$ . Mais comme  $T - \lambda I$  est normal, d'après l'item précédent, on aura  $\|T^*x_n - \bar{\lambda}x_n\| = \|Tx_n - \lambda x_n\|$ , d'où le résultat annoncé.

▷ Nous pouvons définir une fonction  $f$  continue sur le spectre en posant  $f(\lambda) = 1$  et  $f(\mu) = 0, \forall \mu \in \Sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ . D'après le théorème **20.1**, on aura  $\|(\lambda I - T) f(T)\| = \|(\lambda - \zeta) f\|_\infty = 0$ , ainsi que  $\|f(T)\| = \|f\|_\infty = 1$  ; par conséquent  $\exists x$  tel que  $y = f(T)x \neq 0$ , et on aura

$$(\lambda I - T)y = (\lambda I - T)f(T)x = 0,$$

ce qui prouve que  $\lambda$  est une valeur propre. □

### 20.1.1 Opérateurs auto-adjoints positifs

On a vu à la proposition **14.11** (ii) que  $T$  est auto-adjoint si et seulement si  $(Tx|x) \in \mathbb{R}, \forall x \in H$ . Dans ce paragraphe, nous considérons une catégorie particulière d'opérateurs auto-adjoints : les opérateurs positifs.

**Définition 20.3** On dit que l'opérateur auto-adjoint  $T$  est positif si  $(Tx|x) \in \mathbb{R}^+, \forall x \in H$

Notons que les valeurs propres de  $T$  sont alors des réels vérifiant  $(Tx_k|x_k) = \lambda_k \|x_k\|^2$ , et sont par conséquent positives.

**Proposition 20.4** Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i)  $T$  est auto adjoint et  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$
- (ii)  $\exists S$  auto adjoint tel que  $S^2 = T$
- (iii)  $\exists S$  tel que  $T = S^*S$
- (iv)  $T$  est positif

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $T$  est auto adjoint et  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ , nous pouvons alors poser  $f(x) = \sqrt{x}$ , et nous aurons  $f(T)^2 = f^2(T) = T$ . Si nous posons  $S = f(T)$ , nous aurons  $T = S^2$  et

$$S^* = f(T)^* = \bar{f}(T) = f(T) = S.$$

- ▷ Si nous supposons que  $T = S^2$ , où  $S$  est auto adjoint, nous aurons bien entendu  $T = S^*S$
- ▷ Dans ces conditions on aura

$$(Tx|x) = (S^*Sx|x) = \|Sx\|^2 \geq 0$$

▷ Admettons que  $T$  est positif, alors, selon la proposition **14.11**,  $T$  est auto adjoint et par conséquent, d'après le théorème **14.14** (iv),  $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ . Soit alors  $t > 0$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \|(T+t)x\| \|x\| &\geq ((T+t)x|x) \\ &= (Tx|x) + t\|x\|^2 \geq t\|x\|^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\|(T+t)x\| \geq t\|x\|$ , et par conséquent, d'après le lemme **10.2**, que  $T+t$  est injective, d'image fermée. C'est dire que  $-t \notin \Sigma_p(T) \cup \Sigma_c(T) = \Sigma(T)$ , puisqu'en vertu du corollaire **14.9**, un opérateur auto adjoint n'a pas de spectre résiduel. □

**Corollaire 20.5** Si  $T$  est positif,  $\sqrt{T}$  est l'unique opérateur positif qui vérifie  $S^2 = T$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En effet si  $T$  est positif, nous venons de voir que  $(\sqrt{T})^2 = T$ . De plus  $\Sigma(\sqrt{T}) = \sqrt{\Sigma(T)} \subset \mathbb{R}^+$ , et par conséquent  $\sqrt{T}$  est positif

▷ L'unicité est une conséquence du calcul fonctionnel qui montre que si  $S^2 = T$ , alors  $S = (S^2)^{1/2} = \sqrt{T}$ .

□

Il est clair que  $T^*T$  est positif en vertu de la proposition qui précède, on est donc fondé à poser

$$|T| = \sqrt{T^*T};$$

c'est l'unique opérateur positif qui vérifie  $S^2 = T^*T$ .

### 20.1.2 Décomposition polaire

Le théorème qui suit est d'une grande importance, il permet souvent de ramener une question relative à un opérateur borné dans un espace de Hilbert à une question relative à un opérateur positif.

**Théorème 20.6 (de décomposition polaire)** Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors il existe une unique isométrie partielle  $U$  qui vérifie  $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(T)$  et  $T = U|T|$ .  $|T|$  est le module de  $T$  et  $U$  sa phase

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord

$$\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (T^*Tx|x) = (|T|^2x|x) = (|T|x||T|x) = \||T|x\|^2,$$

et par conséquent  $\mathcal{N}(|T|) = \mathcal{N}(T)$ . C'est dire que si  $x$  et  $x' \in H$  et  $|T|x = |T|x'$ , alors  $Tx = Tx'$ . Pour  $y = |T|x \in \mathcal{R}(|T|)$ , on est donc fondé à poser  $Uy = Tx$ , et nous aurons

$$\|Uy\|^2 = \|Tx\|^2 = \||T|x\|^2 = \|y\|^2.$$

L'application  $U$  ainsi définie constitue donc une isométrie  $\mathcal{R}(|T|) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ , que nous pouvons prolonger par continuité  $\overline{\mathcal{R}(|T|)} \rightarrow \overline{\mathcal{R}(T)}$ , où

$$\overline{\mathcal{R}(|T|)} = \mathcal{N}(|T|)^\perp = \mathcal{N}(T)^\perp.$$

Comme  $H = \overline{\mathcal{R}(|T|)} \oplus \mathcal{N}(|T|)$ , si on pose  $U(y') = 0$  pour  $y' \in \mathcal{N}(|T|) = \mathcal{N}(T)$ , on obtient  $U|T| = T$ .

▷ De plus  $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(T)$ , d'une part en effet, par construction,  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(|T|) \subset \mathcal{N}(U)$ . Réciproquement si  $z \in H$ , alors  $z = y + y'$ , où  $y \in \overline{\mathcal{R}(|T|)}$  et  $y' \in \mathcal{N}(T)$ ; par conséquent, si  $0 = Uz$ , alors  $0 = Uy$ , et par conséquent  $y = 0$ , puisque  $U$  est une isométrie de  $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ ; c'est dire que  $z = y' \in \mathcal{N}(T)$ .

▷ Enfin, si  $U$  et  $U'$  ont pour noyau  $\mathcal{N}(T)$  et vérifient  $(U' - U)|T| = 0$ , alors  $U$  et  $U'$  coïncident sur  $\mathcal{R}(|T|)$  et par continuité sur  $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ , et comme  $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(U') = \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(|T|) = \left(\overline{\mathcal{R}(|T|)}\right)^\perp$ , il en résulte que  $U = U'$ , d'où l'unicité.  $\square$

**Proposition 20.7** Si  $T = U|T|$  est la décomposition polaire de  $T$ , alors

- (i)  $U^*T = |T| = T^*U$
- (ii)  $U^*U$  et  $UU^*$  sont les projections respectives sur  $\mathcal{N}(T)^\perp$  et  $\overline{\mathcal{R}(T)}$
- (iii)  $UT^* = TU^*$  est le module de  $T^*$  et  $U^*$  sa phase.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $z_1 \in \mathcal{N}(T)$ ,  $\forall x, y$  on a

$$\begin{aligned} (U^*Tx \mid |T|y + z_1) &= (Tx \mid U(|T|y + z_1)) = (Tx \mid Ty) \\ &= (|T|x \mid |T|y) = (|T|x \mid |T|y + z_1), \end{aligned}$$

d'après le théorème 20.6. Mais  $\mathcal{R}(|T|) + \mathcal{N}(T)$  est dense dans  $H$ , puisque  $\overline{\mathcal{R}(|T|)} = \mathcal{N}(T)^\perp$ ; il en résulte que  $U^*Tx = |T|x$ ,  $\forall x$ , soit  $U^*T = |T|$ .

▷ On aura  $U^*U|T| = U^*T = |T|$ , et par conséquent  $U^*U$  laisse  $\mathcal{R}(|T|)$  et donc  $\overline{\mathcal{R}(|T|)} = \mathcal{N}(T)^\perp$  invariant; comme de plus  $U^*U$  s'annule sur  $\mathcal{N}(T)$ , il en résulte que  $U^*U$  coïncide avec la projection sur  $\mathcal{N}(T)^\perp$ .

▷ De même, on aura  $UU^*T = U|T| = T$ , et comme

$$\mathcal{N}(U^*) = \mathcal{R}(U)^\perp = \mathcal{R}(T)^\perp,$$

$UU^*$  s'annule sur  $\mathcal{R}(T)^\perp$ . Il en résulte que  $UU^*$  coïncide avec la projection sur  $\overline{\mathcal{R}(T)}$ .

▷ Comme  $|T|$  est auto adjoint positif, on aura  $|T| = S^*S$ , où  $S = \sqrt{|T|}$ , et par conséquent

$$TU^* = U|T|U^* = (SU^*)^* SU^*.$$

Il en résulte que  $TU^*$  est positif et vérifie

$$TU^* = (TU^*)^* = UT^*$$

et

$$(TU^*)^2 = UT^*TU^* = U|T|^2U^* = U|T||T|^*U^* = TT^*.$$

Par conséquent, on aura  $TU^* = |T^*|$ .

▷ On aura

$$U^*|T^*| = U^*UT^* = T^*,$$

puisque  $U^*U$  laisse  $\mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)^\perp$  invariant. De plus on a vu que

$$\mathcal{N}(U^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$$

$\square$

**Corollaire 20.8** Si  $T$  est normal, alors sa phase  $U$  et son module  $|T|$  commutent.

DÉMONSTRATION. En effet, on a tout d'abord

$$|T| = \sqrt{T^*T} = \sqrt{TT^*} = |T^*|,$$

et par conséquent

$$TU^* = |T^*| = |T| = U^*T.$$

□

**Remarque 20.9** D'après la proposition 20.7, dans le cas où  $T$  est inversible, alors  $U^*U$  et  $UU^*$  sont égaux à l'identité, et par conséquent  $U$  est unitaire. Dans la suite (Rudin p.315) nous montrerons que dans le cas d'un opérateur normal  $T$ , l'isométrie partielle  $U$  peut être prolongée à  $H$  tout entier selon un opérateur unitaire, mais alors bien entendu, on n'a plus  $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(T)$ .

**Corollaire 20.10** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $T$  est compact
- (ii)  $|T|$  est compact
- (iii)  $T^*$  est compact

DÉMONSTRATION. On aura tout d'abord  $|T| = U^*T$ , d'après la proposition 20.7, d'où la compacité de  $|T|$ . Mais de plus  $T = U|T|$ , et par conséquent  $T^* = |T|U^*$ , d'où la compacité de  $T^*$ .

□

## 20.2 Le calcul fonctionnel borélien

**Lemme 20.11** Si  $T$  est normal, alors  $\forall x \in H$ , la forme linéaire

$$\mu_x(f) = (f(T)x | x)$$

est une intégrale de Radon positive bornée sur  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ .

DÉMONSTRATION. Considérons donc  $\mu_x$ , c'est une forme linéaire positive, en effet si  $f$  est réelle positive, on a

$$(f(T)x | x) = \left( \sqrt{f}(T) \circ \sqrt{f}(T)x | x \right) = \left\| \sqrt{f}(T)x \right\|^2$$

d'après le théorème 20.1 et la remarque 19.35. Nous avons donc démontré que  $\mu_x$  est une forme linéaire positive et par conséquent une intégrale de Radon; de plus  $\mu_x(\mathbf{1}) = (Ix | x) = \|x\|^2$ , et par conséquent  $\mu_x$  est bornée.

□



### 20.2.1 Les fonctions boréliennes

Si nous voulons rassembler en une fonctionnelle unique ces diverses intégrales de Radon  $\mu_x$ , nous devons nous limiter aux fonctions intégrables par rapport à chacune d'entre elles, et dans un premier temps déjà aux fonctions *universellement mesurables*, c'est-à-dire mesurables pour toutes les intégrales de Radon. Il s'agit en fait des *fonctions boréliennes*, c'est-à-dire mesurables pour la tribu de Borel, soit la plus petite contenant les ouverts, puisque la tribu engendrée par une intégrale de Radon contient elle-même les ouverts.

De plus, si  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  note l'ensemble des fonctions boréliennes bornées, on a

$$\mathfrak{B}_b(\Sigma(T)) \subset L^1(\mu_x)$$

en vertu du théorème de convergence dominée, puisque  $\mu_x$  est bornée. Il en résulte que,  $\forall x \in H$  l'intégrale de Radon  $f \rightarrow (f(T)x|x)$  se prolonge à  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ . Ce prolongement est classiquement noté

$$\langle \mu_x, f \rangle = \int_{\Sigma(T)} f(\lambda) d\mu_x(\lambda).$$

On dispose (Pedersen p. 231) d'une caractérisation commode des fonctions boréliennes bornées :

**Lemme 20.12**  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est l'adhérence monotone séquentielle de  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$  au sein des fonctions bornées

Cette phrase un peu sybilline doit se comprendre de la façon suivante :  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est le plus petit ensemble de fonctions bornées stable par limite monotone qui contienne  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ .

Plus concrètement, il est possible d'exhiber une classe intéressante d'éléments de  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ . Rappelons qu'une fonction  $f$  est semi-continue inférieurement (sci.) si son épigraphe est fermé, soit encore si  $f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$  est ouvert  $\forall \alpha$ . On sait que l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues est sci, mais également qu'une fonction sci. bornée est limite croissante d'une suite de fonctions continues. (Dieudonné II p. 26). Il en résulte que les fonctions sci. (et scs.!) bornées appartiennent à  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  (Dieudonné II p. 133).

### 20.2.2 Bicommutant et algèbres de Von Neumann

Nous savons que pour un opérateur normal  $T$ , le calcul continu génère la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $T$ . Lors de l'extension aux fonctions boréliennes bornées du calcul continu se pose alors la question de décrire l'ensemble des opérateurs ainsi générés. Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre unitaire involutive de  $\mathcal{L}(H)$ , soit en fait une sous  $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(H)$ . Elle est naturellement munie de trois topologies :

- (i) La topologie de la norme des opérateurs, soit  $T_n \rightarrow T$  si  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
- (ii) La topologie forte des opérateurs, soit celle découlant des seminormes  $x \rightarrow \|Tx\|$ , où  $x \in H$ . On aura  $T_n \xrightarrow{s} T$  si  $\|(T_n - T)x\| \rightarrow 0, \forall x \in H$ .
- (iii) La topologie faible des opérateurs, soit celle découlant des seminormes  $x \rightarrow |(Tx|y)|$ , où  $x, y \in H$ . On aura  $T_n \xrightarrow{w} T$  si  $((T_n - T)x|y) \rightarrow 0, \forall x, y \in H$ .

Nous noterons  $\overline{\mathcal{A}}^s$ , l'adhérence de  $\mathcal{A}$  pour la topologie forte et  $\overline{\mathcal{A}}^w$  celle pour la topologie faible. Bien entendu la topologie forte est plus forte que la topologie faible, et on aura

$$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w.$$

On notera également  $\mathcal{A}'$  le commutant de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs bornés qui commutent avec  $\mathcal{A}$ , ainsi que  $\mathcal{A}''$  le bicommutant, soit en fait l'ensemble des opérateurs bornés qui commutent avec  $\mathcal{A}'$ . Il est clair que  $\mathcal{A}'$  est une sous-algèbre involutive de  $\mathcal{A}$ , puisque si  $S \in \mathcal{A}'$ , alors  $\forall T \in \mathcal{A}$

$$S^*T = (T^*S)^* = (ST^*)^* = TS^*,$$

selon le même raisonnement, il en est alors de même de  $\mathcal{A}''$  ; on aura également trivialement  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ , mais de plus

**Lemme 20.13**

- (i)  $\overline{\mathcal{A}}^w \subset \mathcal{A}''$
- (ii)  $\mathcal{A}'$  est fermé pour la topologie faible

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $T \in \overline{\mathcal{A}}^w$  et  $S \in \mathcal{A}'$ , nous cherchons à montrer que  $TS = ST$ , soit en fait que  $\forall x, y \in H, ((TS - ST)x|y) = 0$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ , comme  $T \in \overline{\mathcal{A}}^w, \exists U \in \mathcal{A}$ , tel que  $|((T - U)Sx|y)| < \varepsilon$  et  $|((T - U)x|S^*y)| < \varepsilon$ , d'où

$$\begin{aligned} ((TS - ST)x|y) &= ((T - U)Sx|y) + ((US - SU)x|y) - (S(T - U)|y) \\ &= ((T - U)Sx|y) - ((T - U)x|S^*y) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et la conclusion.

On montre de même si  $T \in \overline{\mathcal{A}}^w$  et  $S \in \mathcal{A}$ , que  $TS = ST$ , soit en fait que  $T \in \mathcal{A}'$ . □

**Théorème 20.14 (du bicommutant (Von Neumann))** On a  $\overline{\mathcal{A}}^s = \overline{\mathcal{A}}^w = \mathcal{A}''$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On a tout d'abord

$$\overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w \subset \mathcal{A}''$$

en vertu du lemme 20.13 (i)

▷ Réciproquement, nous démontrerons que si  $T \in \mathcal{A}''$ , tout voisinage fort de  $U$  contient un élément de  $\mathcal{A}$ , ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n, \forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in H, \exists U \in \mathcal{A}, \text{ tel que } \sum_{k=1, n} \|(U - T)\xi_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Il en résultera alors que  $\mathcal{A}'' \subset \overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w$ , soit le résultat en vertu du lemme **20.13** (i) Nous commencerons par traiter le cas  $n = 1$ .

▷ Notons  $M$  l'adhérence de l'espace engendré par les  $S\xi_1$  où  $S \in \mathcal{A}$ , et  $P$  la projection orthogonale sur  $M$ . et montrons que  $P \in \mathcal{A}'$ ; d'après les propositions **A.3** (i) et **14.4** (i) il suffira à cet effet de montrer que  $M$  est stable par  $\mathcal{A}$ . Si  $y \in M$ , on aura  $y = \lim_k V_k \xi_1$ , où  $V_k \in \mathcal{A}$ , d'où  $\forall S \in \mathcal{A}$ ,

$$Sy = \lim_k SV_k \xi_1 \in M.$$

C'est dire que  $M$  est stable par  $S$ .

▷ Il en résulte que  $T$  commute avec  $P$ , et par conséquent, selon **A.3** (ii), il laisse  $M$  invariant. Comme  $\xi_1 \in M$ , puisque  $\mathcal{A}$  est unifère, on aura  $T\xi_1 \in M$ , d'où l'existence de  $V_k \in \mathcal{A}$  tels que  $T\xi_1 = \lim_k V_k \xi_1$ , c'est dire que  $T \in \overline{\mathcal{A}}^s$ .

▷ Si  $n \geq 2$ , on note  $H^{(n)} = \bigoplus_{k=1, n} H$  et  $\eta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , ainsi que  $\mathcal{A}^{(n)}$  la  $C^*$ -algèbre des opérateurs de la forme

$$D_S^{(n)} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

où  $S \in \mathcal{A}$ . Si  $R^{(n)} \in \mathcal{L}(H^{(n)})$ , on a  $R^{(n)} = (R_{ij})$ , où  $R_{ij} \in \mathcal{L}(H)$  et

$$\left( R^{(n)} D_S^{(n)} - D_S^{(n)} R^{(n)} \right)_{ij} = R_{ij} S - S R_{ij}.$$

Il en résulte que  $R^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})'$  si et seulement si les  $R_{ij} \in \mathcal{A}'$ .

▷ Considérons maintenant les

$$\Delta_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où le seul élément non nul se trouve à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. En vertu du l'item précédent, on aura  $\Delta_{ij}^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})'$  et

$$\left( T^{(n)} \Delta_{ij}^{(n)} - \Delta_{ij}^{(n)} T^{(n)} \right)_{k\ell} = T_{ks} \delta_{is} \delta_{j\ell} - \delta_{ik} \delta_{js} T_{s\ell} = T_{ki} \delta_{j\ell} - \delta_{ik} T_{j\ell}.$$

Supposons que  $T^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})''$ , alors nécessairement  $T_{ki} = 0$ , pour  $k \neq i$ , et  $T_{ii} \delta_{j\ell} = T_{j\ell}$ , d'où  $T_{ii} = T_{jj}$ , soit  $T^{(n)} = D_{T_{11}}^{(n)}$ ; réciproquement, si  $T^{(n)} = D_T^{(n)}$  alors de même qu'à l'item précédent, pour  $R^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})'$  on aura

$$\left( R^{(n)} D_T^{(n)} - D_T^{(n)} R^{(n)} \right)_{ij} = R_{ij} T - T R_{ij},$$

et par conséquent, comme les  $R_{ij} \in \mathcal{A}'$ , on aura  $T^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})''$  si et seulement  $T^{(n)} = D_T^{(n)}$  où  $T \in \mathcal{A}''$ .

▷ On peut alors appliquer dans ce contexte le résultat obtenu pour  $n = 1$ , en remplaçant le vecteur  $\xi_1$  par le vecteur  $\eta \in H^{(n)}$  et en déduire que  $\forall T \in \mathcal{A}''$ ,  $D_T^{(n)}\eta \in \overline{\mathcal{A}^{(n)}\eta^s}$ , soit  $\forall \varepsilon > 0$  l'existence de  $U \in \mathcal{A}$ , tel que  $\|D_T^{(n)}\eta - D_U^{(n)}\eta\| < \varepsilon$ , c'est-à-dire  $\sum_{k=1,n} \|(U - T)\xi_k\|^2 < \varepsilon^2$ . □

Si  $\mathcal{A}$  est fermée pour la topologie faible, on a  $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ , et on dit que  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Von Neumann.

**Corollaire 20.15** *On aura*

- (i)  $\mathcal{A}''' = \mathcal{A}'$
- (ii) Si  $\mathcal{A}$  est commutative, alors  $\mathcal{A}''$  est commutative et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$
- (iii) Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont commutatives, alors  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le lemme **20.13** (ii),  $\mathcal{A}'$  est fermé pour la topologie faible, et par conséquent  $\mathcal{A}' = \overline{\mathcal{A}'^w} = \mathcal{A}'''$ , d'après le théorème **20.14**.

▷ Soient  $A, B \in \mathcal{A}''$ , comme  $A$  et  $B \in \overline{\mathcal{A}^s}$ ,  $\forall x \in H$ ,  $\forall n$ ,  $\exists A_n$  et  $B_n \in \mathcal{A}$ , tels que

$$\|(A_n - A)x\| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|(B_n - B)x\| \leq \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème de la borne uniforme **3.8**, il en résulte que les suites  $\|A_n\|$  et  $\|B_n\|$  sont bornées, soit par  $C$ . On aura alors

$$\begin{aligned} \|(AB - BA)x\| &= \|((A - A_n)B + A_n(B - B_n) - (B - B_n)A - B_n(A - A_n) + (A_nB_n - B_nA_n))x\| \\ &= \|((A - A_n)B + A_n(B - B_n) - (B - B_n)A - B_n(A - A_n))x\| \\ &\leq \|(A - A_n)Bx\| + \|A_n(B - B_n)x\| + \|(B - B_n)Ax\| + \|B_n(A - A_n)x\| \\ &\leq C \{ \|(A - A_n)x\| + \|(B - B_n)x\| + \|(B - B_n)x\| + \|(A - A_n)x\| \} \\ &\leq 4C/n. \end{aligned}$$

On en déduit que  $AB = BA$ , soit que  $\mathcal{A}''$  est commutative, et il en résulte que  $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}''' = \mathcal{A}'$ .

▷ Si de plus  $\mathcal{A}'$  est commutative, on aura donc  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}''$ , et par conséquent  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$ . □

Nous noterons  $W^*(T)$  le bicommutant de la  $C^*$ -algèbre commutative  $\mathcal{B}$  engendrée par l'opérateur normal  $T$ , en vertu des résultats qui précèdent, c'est une  $C^*$ -algèbre commutative contenant  $\mathcal{B}$ .

### 20.2.3 Le calcul fonctionnel

**Théorème 20.16 (Calcul Borélien des opérateurs normaux)** *Si  $T$  est un opérateur normal, alors l'application  $\Phi : C^0(\Sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  du théorème **20.1** se prolonge à  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  en un unique  $*$ -homomorphisme d'algèbres  $\Theta : \mathfrak{B}_b(\Sigma(T)) \rightarrow W^*(T)$ , qui vérifie*

(i)  $\Theta(\mathbf{1}) = I$  et  $\Theta(\zeta) = T$ .

(ii) si  $g_n \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est une suite croissante bornée de fonctions à valeurs réelles et  $g = \sup g_n$ , alors  $\Theta(g_n)$  est une suite croissante d'opérateurs auto-adjoints qui converge fortement vers  $\Theta(g)$ .

DÉMONSTRATION. Dans un premier temps, nous nous restreindrons à ne considérer que des fonctions à valeurs réelles

▷ Imitant l'égalité de polarisation, nous poserons

$$\langle \mu_{xy}, f \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0,3} i^k \langle \mu_{x+i^k y}, f \rangle, \quad (20.1)$$

où les mesures positives  $\mu_z$  ont été définies au lemme **20.11**. Notons  $\mathfrak{B}_1$ , le sous-ensemble des fonctions de  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  telles que  $(x, y) \rightarrow \langle \mu_{xy}, f \rangle$  soit une forme hermitienne continue sur  $H$ . Tout d'abord si  $g \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , selon la remarque **19.35**, comme  $g$  est à valeurs réelles,  $g(T)$  est auto-adjoint, et

$$\langle \mu_{xy}, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0,3} i^k \left( g(T) \left( x + i^k y \right) \middle| x + i^k y \right) = (g(T)x | y) = (x | g(T)y) = \overline{(g(T)y | x)} = \overline{\langle \mu_{yx}, g \rangle}. \quad (20.2)$$

Il en résulte que

$$|\langle \mu_{xy}, g \rangle| \leq \|g(T)\| \|x\| \|y\| = \|g\|_{L^\infty} \|x\| \|y\|, \quad (20.3)$$

d'après le théorème **20.1**; et par conséquent que  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T)) \subset \mathfrak{B}_1$ .

▷ Soient alors  $f_n \in \mathfrak{B}_1$  et  $f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  tels que  $f_n \uparrow f$ ; en vertu du théorème de convergence monotone, on aura tout d'abord  $\langle \mu_z, f \rangle = \lim_n \uparrow \langle \mu_z, f_n \rangle$ , d'où tout d'abord à l'aide de (20.1)

$$\langle \mu_{xy}, f \rangle = \lim_n \langle \mu_{xy}, f_n \rangle = \lim_n \overline{\langle \mu_{yx}, f_n \rangle} = \overline{\langle \mu_{yx}, f \rangle}. \quad (20.4)$$

Posons alors  $(M_n x | y) = \langle \mu_{xy}, f_n \rangle$ ; on vient de voir que  $\langle \mu_{xy}, f_n \rangle \rightarrow \langle \mu_{xy}, f \rangle$ , et par conséquent,  $\forall x$  et  $y$  fixés, la famille des  $|(M_n x | y)|$  est bornée. En vertu du théorème de la borne uniforme **3.8**, il en résulte dans un premier temps que la famille des  $\|M_n x\|$  est bornée, puis dans un second temps celle des  $\|M_n\|$ , soit par  $C$ . C'est dire que

$$|\langle \mu_{xy}, f_n \rangle| \leq C \|x\| \|y\|,$$

d'où

$$|\langle \mu_{xy}, f \rangle| \leq C \|x\| \|y\|,$$

et par conséquent  $f \in \mathfrak{B}_1$ . Nous avons donc démontré que  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est stable par limite monotone, d'où  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T)) = \mathfrak{B}_1$  selon le lemme **20.12**.

▷ En vertu du théorème de représentation de Riesz, nous pouvons donc conclure que, pour  $f$  à valeurs réelles,

$$\forall f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T)), \exists \Theta(f), \text{ borné auto-adjoint, tel que } \langle \mu_{xy}, f \rangle = (\Theta(f)x | y);$$

l'application  $\Theta$  est clairement linéaire, et elle prolonge  $\Phi$ , car pour  $f \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ ,

$$(\Theta(f)x | x) = \langle \mu_x, f \rangle = (f(T)x | x),$$

d'où il résulte d'après l'égalité de polarisation (14.1) que

$$(\Theta(f)x | y) = (f(T)x | y), \quad \forall x, y.$$

▷ De plus, si  $f_n \uparrow f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  où  $f_n \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ , alors

$$(\Theta(f)x | y) = \langle \mu_{xy}, f \rangle = \lim_n \langle \mu_{xy}, f_n \rangle = \lim_n (\Theta(f_n)x | y).$$

Comme  $\mu_x$  est une mesure positive, et  $f_n$  une suite croissante, la suite des opérateurs auto-adjoints  $\Theta(f_n)$  est croissante, et par conséquent, selon le lemme **20.17** ci-dessous,  $\Theta(f) = \sup_n \Theta(f_n)$ , avec

$$\|(\Theta(f) - \Theta(f_n))x\| \rightarrow 0, \quad \forall x. \tag{20.5}$$

▷ Montrons maintenant que  $\Theta(f^2) = \Theta(f) \circ \Theta(f)$ , et notons à cet effet  $\mathfrak{B}_2$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  tel que cette relation soit vérifiée. Supposons tout d'abord qu'il existe une suite  $f_n$  de fonctions *positives* de  $\mathfrak{B}_2$  telle que  $f_n \uparrow f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ . Nous aurons  $f^2 = \lim \uparrow f_n^2$ , et par conséquent, d'après (20.5)

$$\begin{aligned} (\Theta(f^2)x | x) &= \lim_n (\Theta(f_n^2)x | x) = \lim_n (\Theta(f_n) \circ \Theta(f_n)x | x) \\ &= \lim_n (\Theta(f_n)x | \Theta(f_n)x) = \lim_n \|\Theta(f_n)x\|^2 = \|\Theta(f)x\|^2 = (\Theta(f) \circ \Theta(f)x | x), \end{aligned}$$

toujours en vertu de (20.5). Il en résulte par polarisation que  $\Theta(f^2) = \Theta(f) \circ \Theta(f)$ , soit  $f \in \mathfrak{B}_2$ .

▷ Dans le cas où  $f_n$  est une suite *quelconque* de fonctions de  $\mathfrak{B}_2$  telle que  $f_n \uparrow f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ , il existe  $\tau \in \mathbb{R}$ , tel que  $g_n = f_n + \tau \geq 0$ , et on aura  $g_n \in \mathfrak{B}_2$ , et  $g_n \uparrow g = f + \tau$ ; or nous venons de démontrer que  $f + \tau$  et par conséquent  $f$  appartient à  $\mathfrak{B}_2$ . Il en résulte que  $\mathfrak{B}_2$  est stable par suites monotones et par conséquent que  $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ .

▷ Mais alors  $\forall f, g \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$

$$\begin{aligned} \Theta(fg) &= \Theta\left(\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)/2\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta\left((f+g)^2\right) - \Theta(f^2) - \Theta(g^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\Theta(f+g) \circ \Theta(f+g) - \Theta(f) \circ \Theta(f) - \Theta(g) \circ \Theta(g)\right) = \Theta(f) \circ \Theta(g). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\Theta$  est un homomorphisme d'algèbres.

▷ Notons maintenant  $\mathfrak{B}_3$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  tel que  $\Theta(f) \in W^*(T)$ . En vertu du calcul continu du théorème **20.1**, on aura  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T)) \subset \mathfrak{B}_3$ , puisque  $\mathcal{B} \subset W^*(T)$ . Si  $f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est la limite monotone d'une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathfrak{B}_3$ , selon (20.5) on aura  $\|(\Theta(f) - \Theta(f_n))x\| \rightarrow 0, \forall x$ . Mais  $\Theta(f_n) \in W^*(T)$ , fortement fermé, d'où  $\Theta(f) \in W^*(T)$ . Il en résulte que  $\mathfrak{B}_3$  est stable par suites monotones et par conséquent que  $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ .

▷ Il ne reste plus qu'à prolonger  $\Theta$  aux fonctions à valeurs complexes, on posera à cet effet

$$\Theta(f) = \Theta(\Re f) + i\Theta(\Im f).$$

▷ On aura alors  $\Theta^*(g) = \Theta(\bar{g})$  en effet cette relation est vérifiée par  $\Phi$ , et comme  $g \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est limite croissante d'une suite  $g_n \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , on aura

$$\begin{aligned} (\Theta(g)^*x | y) &= (x | \Theta(g)y) = \lim_n (x | \Theta(g_n)y) \\ &= \lim_n (x | \Phi(g_n)y) = \lim_n (\Phi^*(g_n)x | y) = \lim_n (\Phi(\bar{g}_n)x | y) \\ &= \lim_n (\Theta(\bar{g}_n)x | y) = (\Theta(\bar{g})x | y). \end{aligned}$$

▷ L'unicité découle de celle de  $\Phi$ , de (ii) et du lemme **20.12**.

□

Notons que cette extension du calcul continu a été obtenue au prix de la perte de l'isomorphisme isométrique du théorème **20.1**.

**Lemme 20.17** *Si  $T_n$  est une suite d'opérateurs auto-adjoints*

- (i) *croissante, c'est-à-dire telle que  $\forall n, T_n - T_{n-1}$  soit positif*
- (ii) *bornée, c'est-à-dire telle que  $\exists c > 0$ , avec  $T_n \leq cI, \forall n$*

alors

(i) *il existe un plus petit opérateur auto-adjoint  $T$ , noté  $\sup T_n$ , qui majore tous les  $T_n$*

(ii) *la suite  $T_n$  converge fortement vers  $T$ , c'est-à-dire  $\|(T - T_n)x\| \rightarrow 0, \forall x \in H$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $x \in H$ , la suite  $(T_n x | x)$  est croissante et bornée par  $c \|x\|^2$ , elle converge par conséquent, soit vers  $b(x, x)$ , qui est réel puisque  $(T_n x | x) = (x | T_n x) = \overline{(T_n x | x)}$ . De plus,  $\forall \sigma \in \mathbb{C}$ , on aura  $b(\sigma x, \sigma x) = |\sigma|^2 b(x, x)$ , et par conséquent, d'après l'égalité de polarisation (14.1) :

$$b(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0,3} i^k b(x + i^k y, x + i^k y),$$

$b$  est une forme hermitienne bornée, d'où il résulte par le théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un opérateur borné auto-adjoint  $T$  tel que  $b(x, y) = (Tx | y)$ . Enfin on aura  $(Tx | x) = b(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n x | x) \forall x \in H$ , et par conséquent  $T = \limsup T_n$ .

▷ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la forme bilinéaire symétrique positive  $((T - T_n)x | y)$ , on aura

$$|((T - T_n)x | y)| \leq ((T - T_n)x | x)^{1/2} ((T - T_n)y | y)^{1/2},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} |((T - T_n)x | y)|^2 \leq ((T - T_n)x | x) \sup_{\|y\|=1} ((T - T_n)y | y) \\ &\leq ((T - T_n)x | x) \sup_{\|y\|=1} ((T - T_0)y | y) \leq ((T - T_n)x | x) \|T - T_0\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\|(T - T_n)x\| \rightarrow 0 \forall x$ .

□

## 20.3 La mesure spectrale

Nous allons voir dans ce paragraphe que le calcul fonctionnel des fonctions boréliennes bornées découle en fait aisément du calcul fonctionnel des seules fonctions caractéristiques des boréliens. Cette nouvelle expression du calcul borélien conduit en fait à une généralisation du théorème 16.2 et en particulier de la formule

$$T = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k \quad (20.6)$$

au cas d'opérateurs normaux non nécessairement compacts.

### 20.3.1 Projections orthogonales

Commençons par rappeler quelques propriétés élémentaires des projections orthogonales : on dit que  $P$  linéaire idempotente est une projection orthogonale si

$$(x - Px | Py) = 0, \forall x, y \in H. \quad (20.7)$$

#### Proposition 20.18

(i) Une projection orthogonale est un opérateur continu auto-adjoint positif de norme inférieure ou égale à 1.

(ii) On a  $\|x - Px\| \leq \|x - Py\|$ ,  $\forall x, y \in H$ .

(iii) Si  $P$  et  $Q$  sont deux projections orthogonales alors  $P \leq Q$ , si et seulement si  $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(Q)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ En effet, on aura tout d'abord  $\|Px\|^2 = (x | Px) \leq \|x\| \|Px\|$ , d'où  $\|Px\| \leq \|x\|$ . On aura également  $(x | Py) = (Px | Py)$ , et par conséquent

$$(y | P^*x) = \overline{(P^*x | y)} = \overline{(x | Py)} = (Py | Px) = (y | Px),$$

soit  $P = P^*$ .

▷ On aura en effet

$$\|x - Py\|^2 = \|x - Px + P(x - y)\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|P(x - y)\|^2,$$

puisque  $x - Px$  est orthogonal à  $P(x - y)$ .

▷ On aura

$$\|Qx\|^2 + \|x - Qx\|^2 = \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2,$$

soit

$$(x | Qx) + d(x, \mathcal{R}(Q))^2 = (x | Px) + d(x, \mathcal{R}(P))^2,$$

ce qui prouve que  $d(x, \mathcal{R}(P)) \geq d(x, \mathcal{R}(Q)) \forall x$ , soit  $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(Q)$ , si et seulement si  $P \leq Q$ .

□



**Proposition 20.19** Soit  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -algèbre des boréliens d'un espace topologique  $X$ ,  $\mathcal{P}(H)$  l'ensemble des projections orthogonales de  $H$ , et  $P$  une application :  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ , telle que

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ , et  $P(X) = I$
- (ii)  $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$  si  $E \cap F = \emptyset$

alors elle vérifie les propriétés suivantes

- (i) Si  $E \subset F$ , alors  $P(E) \leq P(F)$
- (ii) Si  $E \cap F = \emptyset$ , alors  $P(E) \perp P(F)$ , ce qui signifie en fait que  $\mathcal{R}(P(E))$  et  $\mathcal{R}(P(F))$  sont des sous-espaces orthogonaux
- (iii)  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ , d'où il résulte que  $P(E)$  et  $P(F)$  commutent.
- (iv) Pour toute suite  $E_i$  de boréliens disjoints la série  $\sum_{i=1, \infty} P(E_i)$  converge au sens de convergence forte des opérateurs.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $E \subset F$  on a  $F = E \cup (F \setminus E)$ , et par conséquent

$$P(F) = P(E) + P(F \setminus E) \geq P(E),$$

d'après **20.18** (i).

▷ On aura  $I = P(E \cup (\mathbb{C} \setminus E)) = P(E) + P(\mathbb{C} \setminus E)$ , or  $F \subset \mathbb{C} \setminus E$ , et par conséquent  $P(F) \leq P(\mathbb{C} \setminus E) = I - P(E)$ . Mais  $I - P(E)$  est une projection orthogonale, dont l'image est l'orthogonal de  $\mathcal{R}(P(E))$ , et on aura donc  $\mathcal{R}(P(F)) \subset \mathcal{R}(P(E))^\perp$  d'après **20.18** (iii), soit  $P(E) \perp P(F)$ .

▷ On aura  $E = (E \cap F) \cup (E \setminus F)$ , ensembles disjoints, et par conséquent

$$P(F)P(E) = P(F)P(E \cap F) + P(F)P(E \setminus F),$$

mais d'une part  $P(E \cap F) \leq P(F)$ , et par conséquent, selon **20.18** (iii)  $\mathcal{R}(P(E \cap F)) \subset \mathcal{R}(P(F))$ ; d'autre part selon l'item (ii)  $P(F) \perp P(E \setminus F)$ , d'où  $P(F)P(E \setminus F) = 0$ . Il en résulte que  $P(F)P(E) = P(E \cap F)$ .

▷ Comme les  $E_i$  sont disjoints, on aura  $P\left(\bigcup_{i=1, n} E_i\right) = \sum_{i=1, n} P(E_i)$ , où les  $P(E_i)$  sont deux à deux orthogonaux. De plus  $P\left(\bigcup_{i=1, n} E_i\right) \leq I$ , et par conséquent,  $\forall x \in H$ ,

$$\|x\|^2 \geq \left\| \sum_{i=1, n} P(E_i) x \right\|^2 = \sum_{i=1, n} \|P(E_i) x\|^2;$$

la convergence de la série en résulte.

□

### 20.3.2 Mesures spectrales

**Définition 20.20** On dit qu'une application  $P : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}(H)$  est une mesure spectrale si elle vérifie

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ , et  $P(X) = I$
- (ii) Pour toute suite  $E_i$  de boréliens disjoints,

$$P\left(\bigcup_{i=1,\infty} E_i\right) = \sum_{i=1,\infty} P(E_i).$$

On en déduit une famille de mesures classiques sur les boréliens par la formule suivante :

$$\nu_{\xi,\eta}(E) = (P(E)\xi | \eta), \quad \forall \xi, \eta \in H,$$

chacune étant bornée par  $\|\xi\| \|\eta\|$ , et si  $f$  est une fonction borélienne bornée,  $(\xi, \eta) \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f d\nu_{\xi,\eta}$  est une forme sesquilinéaire bornée dont la norme est inférieure ou égale à  $\|f\|_{\infty} \|\xi\| \|\eta\|$ . Il en résulte par le théorème de Riesz qu'il existe  $\pi(f) \in \mathcal{L}(H)$ , tel que

$$(\pi(f)\xi | \eta) = \int_{\mathcal{X}} f d\nu_{\xi,\eta}.$$

On a donc défini  $\pi$  en tant que opérateur linéaire  $\mathfrak{B}_b(X) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , et on aura

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{\infty}.$$

**Proposition 20.21** L'opérateur  $\pi$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\pi(\mathbf{1}) = I$  et  $\pi(\bar{g}) = \pi(g)^*$ ,  $\forall g \in \mathfrak{B}_b(X)$
- (ii)  $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ ,  $\forall g, h \in \mathfrak{B}_b(X)$

(iii) Si  $f_n$  est une suite croissante bornée de fonctions boréliennes convergeant vers  $f$ , alors  $\pi(f) = \sup \pi(f_n)$

DÉMONSTRATION.

▷ On aura tout d'abord  $\pi(\mathbf{1}) = P(X) = I$ . Soit maintenant  $g$  une fonction borélienne étagée, on aura  $g = \sum_n \alpha_n \chi_{Y_n}$ , où les  $Y_n$  sont des boréliens, et  $\pi(g) = \sum_n \alpha_n P(Y_n)$ . On aura également  $\bar{g} = \sum_n \bar{\alpha}_n \chi_{Y_n}$  et par conséquent

$$\pi(\bar{g}) = \sum_n \bar{\alpha}_n P(Y_n) = \sum_n (\alpha_n P(Y_n))^* = \pi(g)^*.$$

La conclusion découle de la densité des fonctions étagées dans  $\mathfrak{B}_b(X)$

▷ De même si  $h = \sum_m \beta_m \chi_{Z_m}$ , on aura  $\pi(h) = \sum_m \beta_m P(Z_m)$ , d'où

$$\pi(g)\pi(h) = \left( \sum_n \alpha_n P(Y_n) \right) \left( \sum_m \beta_m P(Z_m) \right) = \sum_{n,m} \alpha_n \beta_m P(Y_n) P(Z_m) = \sum_{n,m} \alpha_n \beta_m P(Y_n \cap Z_m) ;$$

il en résulte que  $\pi(g)\pi(h) = \pi(gh)$ , puisque

$$gh = \sum_{n,m} \alpha_n \beta_m \chi_{Y_n} \chi_{Z_m} = \sum_{n,m} \alpha_n \beta_m \chi_{Y_n \cap Z_m},$$

et la conclusion par densité.

▷ En vertu du théorème de convergence monotone, on aura en effet  $(\pi(f)\xi | \xi) = \lim (\pi(f_n)\xi | \xi)$ , □

On note classiquement

$$\pi(f) = \int_{\mathcal{X}} f dP,$$

ce qui constitue en fait une intégrale faible, mais il faut bien voir que l'intégrale associée à une mesure spectrale possède des propriétés très particulières; on a en effet

$$\left( \int_{\mathcal{X}} g dP \right) \left( \int_{\mathcal{X}} h dP \right) = \int_{\mathcal{X}} gh dP,$$

puisque  $\pi(g)\pi(h) = \pi(gh)$ .

Nous nous intéresserons par la suite tout particulièrement à la mesure spectrale suivante :

**Définition 20.22** *La mesure spectrale associée à l'opérateur normal  $T$  est donnée par*

$$P(E) = \chi_E(T),$$

où  $\chi_E$  est la fonction caractéristique du borélien  $E \subset \mathcal{A}(T)$ .

Vérifions qu'il s'agit bien d'une mesure spectrale. On prendra pour  $X$  l'espace topologique  $\Sigma(T)$ , et on aura

- (i)  $(P(E))^2 = (\chi_E(T))^2 = (\chi_E)^2(T) = \chi_E(T) = P(E)$
- (ii)  $P(\emptyset) = \chi_{\emptyset}(T) = \mathbf{0}(T) = \mathbf{0}$
- (iii)  $P(X) = \chi_{\Sigma(T)}(T) = \mathbf{1}(T) = I$
- (iv)  $P\left(\bigcup_{i=1,\infty} E_i\right) = \chi_{\bigcup_{i=1,\infty} E_i}(T) = \sum_{i=1,\infty} \chi_{E_i}(T) = \sum_{i=1,\infty} P(E_i)$

**Proposition 20.23** *Soit  $T$  un opérateur normal, si on prend pour mesure spectrale celle associée à  $T$ , on a  $\pi = \Theta$ .*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que si  $g$  est une fonction étagée sur  $\Sigma(T)$ , alors  $\pi(g) = g(T)$ . On aura en effet  $g = \sum_n \alpha_n \chi_{Y_n}$ , et par conséquent

$$(\pi(g)\xi | \eta) = \sum_n \alpha_n (\pi(\chi_{Y_n})\xi | \eta) = \sum_n \alpha_n (P(Y_n)\xi | \eta) = \sum_n \alpha_n (\chi_{Y_n}(T)\xi | \eta) = (g(T)\xi | \eta).$$

Comme toute fonction  $f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est limite croissante d'une suite de fonctions étagées, d'après le théorème de convergence monotone et le théorème 20.16 (ii), il en résulte que  $\pi(f) = f(T)$ , soit encore

$$f(T) = \int_{\Sigma(T)} f dP. \tag{20.8}$$

□

On aura en particulier

$$T = \int_{\Sigma(T)} \lambda dP(\lambda), \tag{20.9}$$

formule qui généralise (20.6) au cas d'un opérateur normal non compact et

$$\|f(T)\| = \|\pi(f)\| \leq \|f\|_{L^\infty(\Sigma(T))} \tag{20.10}$$

.

La mesure spectrale constitue un outil fin d'analyse du spectre qui permet entre autres d'en distinguer le spectre ponctuel.

**Proposition 20.24** *Soit  $T$  un opérateur normal de mesure spectrale associée  $P$ , et  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\Sigma(T)$ , alors*

- (i)  $\lambda \in \Sigma(f(T))$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, P(Q_\varepsilon) \neq 0$ , où  $Q_\varepsilon = f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$ .
- (ii)  $\lambda \in \Sigma_p(f(T))$  si et seulement si  $P(Q_0) \neq 0$ , où  $Q_0 = f^{-1}(\{\lambda\})$ ; auquel cas  $P(Q_0)$  est la projection  $P_\lambda$  sur le sous-espace propre de  $f(T)$  associé à  $\lambda$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $P(Q_\varepsilon) = 0$ , on aura  $\chi_{Q_\varepsilon}(\mu) = 1$  dès que  $|\lambda - f(\mu)| \leq \varepsilon$ , et  $\chi_{Q_\varepsilon}(\mu) = 0$  sinon, d'où il résulte que la fonction  $g(\mu) = (1 - \chi_{Q_\varepsilon}(\mu)) / (\lambda - f(\mu))$  vérifie  $\|g\|_\infty \leq 1/\varepsilon$ . On aura donc

$$g(T)(\lambda I - f(T)) = \int_{\Sigma(T)} g(\mu)(\lambda - f(\mu)) dP(\mu) = \int_{\Sigma(T) \setminus Q_\varepsilon} dP = P(\Sigma(T)) - P(Q_\varepsilon) = I,$$

d'où  $\lambda \in \Pi(f(T))$ .

▷ Réciproquement si  $P(Q_\varepsilon) \neq 0$ , on peut choisir  $x_\varepsilon \in \mathcal{R}(P(Q_\varepsilon))$  tel que  $\|x_\varepsilon\| = 1$ ; alors si  $y_\varepsilon = (\lambda I - f(T))x_\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon\| &= \|(\lambda I - f(T))P(Q_\varepsilon)x_\varepsilon\| \leq \|(\lambda I - f(T))P(Q_\varepsilon)\| \\ &\leq \|(\lambda I - f(T))\chi(Q_\varepsilon)(T)\| = \|(\chi(Q_\varepsilon)(\lambda - f))(T)\| \leq \|\chi(Q_\varepsilon)(\lambda - f)\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\lambda \in \Pi(f(T))$ , on aura  $x_\varepsilon = (\lambda I - f(T))^{-1}y_\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui constitue une contradiction.

▷ Si  $P(Q_0) \neq 0$ , alors

$$f(T)P(Q_0) = \int_{\Sigma(T)} f(\mu)\chi_{Q_0}(\mu)dP(\mu) = \int_{Q_0} f dP = \lambda P(Q_0),$$

et par conséquent  $\mathcal{R}(P(Q_0)) \subset \mathcal{N}(f(T) - \lambda) = \mathcal{R}(P_\lambda)$ , ce qui prouve que  $\mathcal{N}(f(T) - \lambda) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f(T)$ . Selon la proposition **20.18** (iii) on pourra également écrire  $P(Q_0) \leq P_\lambda$ .

▷ Réciproquement, supposons  $\lambda$  soit une valeur propre de  $f(T)$ , et considérons la suite de Boréliens  $Y_n = \{\mu \in \Sigma(T) \mid 1/(n+1) < |\lambda - f(\mu)| \leq 1/n\}$ ; on aura  $\Sigma(T) = Q_0 \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} Y_n\right)$ , et par conséquent  $I = P(Q_0) + \sum_{n \geq 0} P(Y_n)$ . Posons alors  $g_n(\mu) = \chi_{Y_n}(\mu) (1/(f(\mu) - \lambda))$ , on aura  $n < |g_n(\mu)| < n+1$  et

$$g_n(T)(f(T) - \lambda I) = (g_n(f - \lambda))(T) = \chi_{Y_n}(T) = P(Y_n);$$

par conséquent si  $x \in \mathcal{N}(f(T) - \lambda)$ ,  $P(Y_n)x = 0$  d'où  $P(Q_0)x = x$ . Il en résulte que  $\mathcal{N}(f(T) - \lambda) \subset \mathcal{R}(P(Q_0))$ , ce qui prouve que  $P(Q_0) \neq 0$ , et peut encore s'exprimer sous la forme  $P(Q_0) \geq P_\lambda$

▷ On a donc finalement démontré que  $P_\lambda \neq 0$ , soit que  $\lambda$  est valeur propre de  $f(T)$ , si et seulement si  $P(Q_0) \neq 0$ , auquel cas  $P(Q_0) = P_\lambda$ . □

### Corollaire 20.25

- (i) Si  $f$  est une fonction borélienne bornée, alors  $\Sigma(f(T)) \subset \overline{f(\Sigma(T))}$  (adhérence!)  
(ii) Si  $\lambda \in \Sigma(T)$ , on a  $P(\{\lambda\}) = 0$ , sauf si  $\lambda$  est une valeur propre, auquel cas  $P(\{\lambda\})$  est la projection sur le sous-espace propre associé.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors  $\exists \lambda \in \Sigma(f(T))$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $B_\varepsilon(\lambda) \subset f(\Sigma(T))^c$ , soit  $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda)) \subset (\Sigma(T))^c$ . On aura donc  $P(f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))) = \chi_{f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))}(T) = 0$ , ce qui constitue une contradiction en vertu de la proposition **20.24** (i).

▷ Il suffit d'appliquer le résultat de **20.24** (ii) avec  $f = \zeta$ . □

Considérons maintenant le cas particulier d'un opérateur  $T$  de la forme

$$T = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k,$$

où les  $P_k$  sont des projections sur des sous-espaces orthogonaux, et où la série converge au sens de la convergence forte des opérateurs; c'est en particulier le cas d'un opérateur compact normal, d'après le théorème **16.2**. Notons  $P_0$  la projection sur le supplémentaire orthogonal de la somme hilbertienne des  $\mathcal{R}(P_k)$ , nous aurons  $I = \sum_{k \geq 0} P_k$ , d'où il résulte que

$$T - \mu I = -\mu P_0 + \sum_{k \geq 1} (\lambda_k - \mu) P_k,$$

soit

$$(T - \mu)x = -\mu P_0x + \sum_{k \geq 1} (\lambda_k - \mu) P_kx.$$

Il en résulte que  $\mu \neq 0$  est valeur propre si et seulement si  $P_0x = 0$  et  $(\lambda_k - \mu) P_kx = 0$ ,  $k \geq 1$ , les  $P_kx$ ,  $k \geq 0$  n'étant pas tous nuls, c'est donc que  $\exists m \geq 1$  tel que  $\mu = \lambda_m$ . C'est dire que les  $\lambda_k$  forment l'ensemble des valeurs propres non nulles de  $T$ . Considérons alors la valeur propre  $\lambda_m$ ,  $m \geq 1$ , on aura

$$(T - \lambda_m)x = -\lambda_m P_0x + \sum_{k \geq 1, k \neq m} (\lambda_k - \lambda_m) P_kx,$$

ce qui prouve que  $x$  est un vecteur propre si et seulement si  $P_kx = 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $k \neq m$ , soit

$$x = \sum_{k \geq 0} P_kx = P_mx,$$

c'est-à-dire  $x \in \mathcal{R}(P_m)$ . Nous avons donc démontré que les  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , sont les valeurs propres non nulles de  $T$ , et que les sous-espaces propres associés sont les  $\mathcal{R}(P_k)$ . D'après **20.24** (ii), il en résulte que

$$T = \sum_{\lambda \in \Sigma_d(T)} \lambda P(\{\lambda\}), \tag{20.11}$$

qui se compare favorablement à (20.9).

Soit alors  $\mu \notin \overline{\Sigma_d(T)}$  et  $Y = B_\varepsilon(\mu)$  une boule qui ne rencontre pas  $\Sigma_d(T)$ , si  $\chi_k$  est la fonction caractéristique de  $\lambda_k$ , nous aurons  $\chi_Y \sum_{k \geq 1} \lambda_k \chi_k = 0$ , soit  $T \chi_Y(T) = 0$ . Si  $0$  n'est pas valeur propre, il en résulte que  $\chi_Y(T) = 0$ , et par conséquent selon **20.24** (i) que  $\mu \notin \Sigma(T)$ . Dans le cas où  $0$  est valeur propre, pour que  $x \in \mathcal{N}(T)$ , il faut et il suffit que  $\sum_{k \geq 1} P_kx = 0$ , soit  $x \in \mathcal{R}(P_0)$  ; c'est dire que  $P_0 = \chi_0(T)$ , d'où

$$\chi_Y(T) = \chi_Y(T) \sum_{k \geq 0} P_k = \chi_Y(T) \sum_{k \geq 0} \chi_k(T) = \left( \chi_Y \sum_{k \geq 0} \chi_k \right) (T) = 0.$$

Nous avons donc démontré que  $\Sigma(T) \subset \overline{\Sigma_d(T)}$ , soit en fait  $\Sigma(T) = \overline{\Sigma_d(T)}$ . La mesure spectrale est alors totalement concentrée sur  $\Sigma_d(T)$ , et on pourra écrire

$$f(T) = \sum_{\lambda \in \Sigma_d(T)} f(\lambda) P(\{\lambda\}), \tag{20.12}$$

### 20.3.3 La formule de Stone

La définition de la mesure spectrale reste malgré tout bien abstraite; dans le cas des opérateurs auto-adjoints il est facile d'en donner une expression plus concrète à l'aide de la résolvante.

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint ; si on choisit  $\varepsilon > 0$ , alors  $\forall \lambda$  réel les fonctions  $\mu \rightarrow (\mu \pm \varepsilon i - \lambda)^{-1}$  sont régulières sur  $\mathbb{R}$ . Si  $]a, b[$  est alors un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $\delta > 0$  est choisi de telle façon que  $a + \delta < b - \delta$ , on pose

$$f_{\delta, \varepsilon}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[ \frac{1}{\mu - \varepsilon i - \lambda} - \frac{1}{\mu + \varepsilon i - \lambda} \right] d\mu.$$

On a en fait

$$f_{\delta, \varepsilon}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ \text{Arc tg } \frac{b - \delta - \lambda}{\varepsilon} - \text{Arc tg } \frac{a + \delta - \lambda}{\varepsilon} \right],$$

et par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\delta, \varepsilon}(\lambda) = \begin{cases} \pi & \text{si } \lambda \in ]a + \delta, b - \delta[ \\ 0 & \text{si } \lambda \notin [a + \delta, b - \delta], \end{cases}$$

d'où  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\delta, \varepsilon}(\lambda) = \chi_{]a, b[}(\lambda)$ .

Mais par ailleurs, comme le spectre de  $T$  est réel, et que l'intégrale est la limite des sommes de Riemann associées, on aura

$$f_{\delta, \varepsilon}(T) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} [\mathcal{R}(\varepsilon i - \mu) - \mathcal{R}(-\varepsilon i - \mu)] d\mu.$$

; La formule de Stone en découle :

$$P(]a, b[) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} [\mathcal{R}(\varepsilon i - \mu) - \mathcal{R}(-\varepsilon i - \mu)] d\mu. \quad (20.13)$$

Notons également que, si  $a < c < b$ , on aura  $]a, b[ = ]a, c[ \cup \{c\} \cup ]c, b[$ , d'où

$$P(\{c\}) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-\delta}^{c+\delta} [\mathcal{R}(\varepsilon i - \mu) - \mathcal{R}(-\varepsilon i - \mu)] d\mu. \quad (20.14)$$

## 20.4 Diagonalisation

Commençons par généraliser quelque peu la notion d'opérateur unitaire :

**Définition 20.26** Soit  $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

(i) On appelle adjoint de  $U$  et on note  $U^*$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(H_2, H_1)$  qui vérifie  $(Ux | y)_2 = (x | U^*y)_1$ ,  $\forall (x, y) \in H_1 \times H_2$ .

(ii) On dit que  $U$  est unitaire si  $U^* = U^{-1}$ .

A l'aide de l'égalité de polarisation, selon la même démonstration que celle de la proposition 14.11 on montre aisément qu'un opérateur isométrique surjectif est unitaire.

Considérons maintenant le cas d'un opérateur  $T$  compact normal ; d'après le théorème 16.2, on a  $H = \bigoplus_{k \geq 0} P_k(H)$  et  $T = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k$ , ce qui prouve que le choix d'une base orthonormale dans chaque  $P_k(H)$  permet la construction d'une base hilbertienne  $e_k$  qui

diagonalise  $T$ , soit telle que  $Te_k = \lambda_k e_k$ . Une telle description est inadéquate dans le cas où le spectre n'est pas purement ponctuel, nous allons donc en donner une formulation plus aisée à généraliser.

En fait la formule  $U(\alpha) = \sum_k \alpha_k e_k$ , où  $\alpha = (\alpha_k) \in \ell^2$ , définit un opérateur  $U$  unitaire :  $\ell^2 \rightarrow H$ , et l'application qui à  $(e_k)$  fait correspondre  $U$  constitue une bijection entre les bases hilbertiennes de  $H$  et les opérateurs unitaires  $U : \ell^2 \rightarrow H$ . En effet, si  $U$  est unitaire, on posera  $f_k = U(\delta_k)$ , où

$$\delta_k = \underbrace{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots)}_{k^{\text{ième}} \text{ position}}$$

et on aura  $U(\alpha) = U(\sum_k \alpha_k \delta_k) = \sum_k \alpha_k U(\delta_k)$ , et comme  $U$  est unitaire,

$$(U(\delta_i) | U(\delta_j))_H = (\delta_i | U^* U(\delta_j))_{\ell^2} = (\delta_i | U^* U(\delta_j))_{\ell^2} = (\delta_i | \delta_j)_{\ell^2} = \delta_{ij}.$$

Considérons alors l'opérateur

$$B = U^{-1} T U : \ell^2 \rightarrow \ell^2.$$

On aura

$$B(\alpha) = U^{-1} \sum_k \alpha_k T e_k = U^{-1} \sum_j e_j \sum_k \alpha_k (T e_k | e_j) = \sum_k \alpha_k (T e_k | e_j),$$

qui sera un opérateur de multiplication  $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ , si et seulement si  $(T e_k | e_j) = 0$  pour  $k \neq j$ , soit en fait  $Te_k = \lambda_k e_k$ . On aura alors  $B(\alpha) = \alpha \lambda$ , où  $\lambda = (\lambda_k) \in \ell^\infty$ . C'est dire qu'un opérateur compact est diagonalisé par le choix d'une base orthonormale  $(e_k)$  si et seulement si l'opérateur  $B$  correspondant est un opérateur de multiplication dans  $\ell^2$ .

Dans le cas d'un opérateur non compact, nous remplacerons l'espace discret  $\ell^2$  par un espace mesuré  $L^2(X, \mu)$  et la multiplication par  $\lambda \in \ell^\infty$  par la multiplication par  $f \in L^\infty(X, \mu)$ , et nous serons conduits à la définition suivante :

**Définition 20.27** *Un opérateur  $T$  sur un espace de Hilbert séparable  $H$  est dit diagonalisable si il existe un espace mesuré  $\sigma$ -fini  $(X, \mu)$ , où  $\mu$  est une mesure positive, une fonction  $g \in L^\infty(X, \mu)$ , et un opérateur unitaire  $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ , tels que  $U M_g = T U$ , où  $M_g : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$  est l'opérateur de multiplication par  $g$  :*

$$M_g \xi(x) = g(x) \xi(x), x \in X, \xi \in L^2(X, \mu).$$



### 20.4.1 Les opérateurs de multiplication

**Théorème 20.28** Si  $\mu$  est une mesure positive et  $g \in L^\infty(X, \mu)$ , l'opérateur  $M_g$  est borné dans  $H = L^2(X, \mu)$ ; l'application  $g \rightarrow M_g$  est un  $*$ -isomorphisme isométrique :  $L^\infty(X, \mu) \rightarrow \mathcal{M}$ , où  $\mathcal{M}$  est une  $C^*$ -algèbre commutative d'opérateurs incluse dans  $\mathcal{L}(H)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair que  $M : g \rightarrow M_g$  est un  $*$ -homomorphisme d'algèbres.

▷ On aura tout d'abord  $|gf(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|$  presque partout, et par conséquent  $\|gf\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2$ , d'où il résulte que  $\|M_g\| \leq 1$ . Réciproquement, Supposons que  $g \neq 0$  et choisissons  $c$  tel que  $0 < c < \|g\|_\infty$ , comme  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, et que  $\mu(\{x | g(x) > c\})$  est strictement positif,  $\exists E \subset \{x | g(x) > c\}$  de mesure bornée, strictement positive. On aura donc  $\chi_E \in L^2(X, \mu)$ , et  $\|M_g \chi_E\|_2 \geq c \|\chi_E\|_2$ , d'où  $\|M_g\| \geq c, \forall c < \|g\|_\infty$ ; il en résulte que  $\|M_g\| \geq \|g\|_\infty$ .

▷ Comme  $M$  est une isométrie,  $\mathcal{M}$  est complet, et donc fermé, puisque  $L^\infty(X, \mu)$  est un espace de Banach.

□

Déterminons maintenant le spectre de  $M_g$ .

**Définition 20.29** On appelle image essentielle de  $g$  l'ensemble suivant :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} | \forall \varepsilon > 0, \mu(G_\lambda(\varepsilon)) \neq 0\}, \quad (20.15)$$

où

$$G_\lambda(\varepsilon) = \{x \in X | |g(x) - \lambda| < \varepsilon\}. \quad (20.16)$$

L'image essentielle de  $g$  est en fait le support de la mesure  $\mu_g$  définie par  $\mu_g(E) = \mu(g^{-1}(E))$ . (Arveson p.44)

**Proposition 20.30**  $\Sigma(M_f)$  est l'image essentielle de  $f$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $G_\lambda(\varepsilon)$  soit négligeable, et posons  $h(x) = 1/(g(x) - \lambda)$  si  $g(x) \neq \lambda$ , et 0 sinon. On aura donc  $\mu$ -presque partout  $|h(x)| < 1/\varepsilon$  et  $h(x)(g(x) - \lambda) = 1$ . On en déduit que  $h(x) \in L^\infty$  et  $M_h(M_g - \lambda) = (M_g - \lambda)M_h = I$ , et par conséquent  $\lambda \notin \Sigma(M_g)$ .

▷ Réciproquement si  $\lambda$  appartient à l'image essentielle de  $g$ ,  $\forall n$  on aura  $\mu(G_\lambda(1/n)) > 0$ , et comme  $\mu$  est  $\sigma$ -finie,  $\exists E_n \subset G_\lambda(1/n)$ , telle que  $0 < \mu(E_n) < +\infty$ . Posons alors  $\xi_n = (\mu(E_n))^{-1/2} \chi_{E_n}$ , on aura  $\|\xi_n\|_{L^2(X, \mu)} = 1$  et  $|(g(x) - \lambda)\xi_n(x)| \leq n^{-1} |\xi_n(x)|$ , d'où il résulte que  $\|(g(x) - \lambda)\xi_n(x)\|_{L^2(X, \mu)} \leq 1/n$ ; c'est dire que  $\lambda \in \Sigma(M_g)$ , d'après le corollaire 14.8.

□

Il est clair qu'un opérateur de multiplication est normal, puisque  $(M_g)^* = M_{\bar{g}}$ , d'où il résulte qu'un opérateur diagonalisable est normal ; en effet

$$TT^* = U^*M_gUU^*(M_g)^*U = U^*M_g(M_g)^*U = U^*(M_g)^*M_gU = T^*T.$$

### 20.4.2 Opérateurs simples

#### Définition 20.31

(i) On dit qu'un vecteur  $e$  est cyclique (ou totalisateur) pour la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{B}$  si  $H = \overline{\mathcal{B}e}$ .

(ii) On dit qu'un opérateur  $T$  est simple si la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $T$  possède un vecteur cyclique.

Considérons par exemple le cas d'un opérateur normal compact ; si  $f$  est continue sur  $\Sigma(T)$ , de même qu'à la proposition 16.6, on aura

$$f(T) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k)P_k + f(0)P_0,$$

où les  $P_k$ ,  $k \geq 1$  sont les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres non nulles et  $P_0$  la projection sur le noyau. Selon le théorème 20.1, on a  $\mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{B}$ , ce qui revient à dire que  $\mathcal{B} = \{f(T) \mid f \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))\}$ . Dire que  $e \in H$  est cyclique revient donc à dire que  $\forall x \in H$ , il existe une suite  $f_n \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$  telle que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} f_n(\lambda_k)P_k e + f_n(0)P_0 e.$$

On aura  $x = \sum_{k \geq 0} P_k x$ , et par conséquent  $e$  est cyclique si et seulement si  $\forall x, \exists \mu_k$ , tels que  $\mu_k P_k e = P_k x$  ; c'est dire en fait que  $\text{rg } P_k = 1, \forall k \geq 0$ . Les opérateurs normaux compacts simples ont donc des valeurs propres simples.

**Proposition 20.32** Soit  $T$  un opérateur normal simple, alors il existe une mesure positive  $\mu$  sur  $\Sigma(T)$  et un opérateur unitaire  $U : L^2(\Sigma(T), \mu) \rightarrow H$  tels que

$$UM_f = f(T)U, \forall f \text{ borélienne bornée.}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $e$  un vecteur cyclique pour  $\mathcal{B}$ , et posons

$$\mu_e(E) = (\chi_E(T)e \mid e) ;$$

Si  $h$  est une fonction borélienne bornée sur  $\Sigma(T)$ , nous aurons

$$\|h(T)e\|^2 = (h(T)e \mid h(T)e) = \left( |h|^2(T)e \mid e \right) = \int_{\Sigma(T)} |h|^2(\lambda) d\mu_e = \|h\|_{L^2(\mu_e)}^2,$$

soit le caractère isométrique de l'application  $V : h \rightarrow h(T)e : \mathfrak{B}_b(\Sigma(T)) \subset L^2(\Sigma(T), \mu_e) \rightarrow H$ . Comme  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T)) \subset \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$  est dense dans  $L^2(\mu_e)$ ,  $V$  se prolonge en une isométrie  $U : L^2(\Sigma(T), \mu_e) \rightarrow \overline{\mathcal{R}(V)}$ , soit en fait  $L^2(\Sigma(T), \mu_e) \rightarrow H$  puisque  $e$  est cyclique et  $\mathcal{R}(V) = \mathcal{B}e$ . Il en résulte d'après la proposition 14.11 (i) que  $U$  est unitaire  $L^2(\mu_e) \rightarrow H$ .

▷  $\forall f, h \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T))$ , on aura alors

$$UM_f U^{-1}(h(T)e) = UM_f h = Ufh = (fh)(T)e = f(T)h(T)e,$$

d'où  $UM_f U^{-1} = f(T)$  sur  $\mathcal{R}(V)$ , dense dans  $H$ , et par conséquent  $U^{-1}TU = M_\zeta$ .

□

On voit donc qu'un opérateur simple est diagonalisable, avec  $X = \Sigma(T)$ ,  $\mu = \mu_e$ , et  $g = \zeta$ .

### 20.4.3 Opérateurs normaux

**Lemme 20.33** *Si  $T$  est un opérateur borné sur un espace de Hilbert séparable  $H$ , et  $\mathcal{B}$  l'algèbre engendrée par  $T, T^*$  et  $I$ , alors il existe une suite de sous-espaces fermés  $H_i$  de  $H$ , stables par  $\mathcal{B}$ , où chaque  $H_i$  contient un vecteur cyclique (relativement à  $\mathcal{B}|_{H_i}$ ), et tels que  $H = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i}$ , somme directe Hilbertienne des  $H_i$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathfrak{P}$  l'ensemble des familles  $(H_i)$ ,  $i \in I$  de sous-espaces fermés de  $H$  stables par  $\mathcal{B}$ , mutuellement orthogonaux, et contenant un vecteur cyclique. L'ensemble  $\mathfrak{P}$  est inductivement ordonné, et le lemme de Zorn nous apprend alors qu'il contient un élément maximal.

▷ Soit  $\mathcal{P} = \{H_i, i \in I\}$  un tel élément maximal, comme  $H$  est séparable et les  $H_i$  orthogonaux,  $I$  est au plus dénombrable. Posons  $B = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i}$ ; si  $B \neq H$ , il possède un supplémentaire orthogonal, soit  $K \neq \{0\}$ . Le sous-espace  $K$  est stable par  $\mathcal{B}$ , car si  $y \in K$ , et  $Q \in \mathcal{B}$ ,  $\forall x \in B$  on aura  $(Qy|x) = (y|Q^*x) = 0$ , puisque  $Q^* \in \mathcal{B}$  et que les  $H_i$  et donc  $B$  sont stables par  $\mathcal{B}$ . Soit alors  $\xi \in K$ , on aura  $K_0 = \mathcal{B}\xi \subset K$ , ce qui prouve que  $K_0$  peut être adjoint à la famille des  $H_i$ , contredisant ainsi le caractère maximal de  $\mathcal{P}$ .

□

**Théorème 20.34** *Si  $T$  est un opérateur normal sur un espace de Hilbert séparable  $H$ , il existe une suite  $P_n$  de projections mutuellement orthogonales telles que*

$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n,$$

une suite de mesures de Radon  $\mu_n$ , et une suite d'opérateurs unitaires  $U_n : L^2(\Sigma(T), \mu_n) \rightarrow H_n = \mathcal{R}(P_n)$ , tels que

$$f(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n M_f U_n^* P_n, \quad \forall f \in \mathfrak{B}_b(\Sigma(T)). \quad (20.17)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Notons  $P_n$  les projections sur les sous-espaces  $H_n$  du lemme 20.33, et  $e_n$  un vecteur cyclique dans  $H_n$ . Selon la démonstration de la proposition 20.32 on pose  $\mu_n(E) = (\chi_E(T)e_n|e_n)$ , et il en découle un opérateur unitaire  $U_n : L^2(\mu_n) \rightarrow H_n$  telle que  $U_n M_f U_n^{-1} = f(T)$  sur  $H_n$ , soit  $U_n M_f U_n^* P_n = f(T)P_n$ .

▷ Remarquons maintenant que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n M_f U_n^* P_n$  converge fortement. En effet si  $x \in H$ ,

$$\sum_{n \leq N} U_n M_f U_n^* P_n x = \sum_{n \leq N} U_n M_f U_n^* x_n,$$

où  $x_n = P_n x$ , d'où

$$\left\| \sum_{n \leq N} U_n M_f U_n^* P_n x \right\|^2 = \sum_{n \leq N} \|U_n M_f U_n^* x_n\|^2 \leq \|M_f\|^2 \sum_{n \leq N} \|x_n\|^2 \leq \|M_f\|^2 \|x\|^2.$$

▷ Il en résulte que

$$f(T) = f(T) \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(T) P_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n M_f U_n^* P_n$$

□

**Corollaire 20.35** *Tout opérateur normal d'un espace de Hilbert séparable est diagonalisable.*

DÉMONSTRATION. Posons  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Sigma(T) \times \{n\})$ , soit l'union disjointe d'une quantité dénombrable de copies de  $\Sigma(T)$ , encore notée  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , avec  $X_n = \Sigma(T)$ . La collection des sous-ensembles  $E$  de  $X$  tels que  $\forall n, E \cap X_n$  soit un borélien, constitue une  $\sigma$ -algèbre, et  $\mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(E \cap X_n)$  une mesure  $\sigma$ -finie sur cette  $\sigma$ -algèbre. On aura

$$\int_X h d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma(T)} h|_{X_n} d\mu_n,$$

d'où il résulte que  $h \in L^2(X, \mu)$  si et seulement si  $h|_{X_n} \in L^2(\Sigma(T), \mu_n)$ , et

$$\|h\|_{L^2(X, \mu)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|h|_{X_n}\|_{L^2(\Sigma(T), \mu_n)}^2.$$

Si on pose alors  $(V^*x)|_{X_n} = U_n^* P_n x$ , alors  $V$  est unitaire  $H \rightarrow L^2(X, \mu)$  et

$$f(T)x = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n M_f U_n^* P_n x = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n M_f (V^*x)|_{X_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n (M_f V^*x)|_{X_n} = V M_f V^* x,$$

soit

$$f(T) = V M_f V^*. \tag{20.18}$$

En effet

$$\begin{aligned} (x | Vg)_H &= (V^*x | g)_{L^2(X, \mu)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( (V^*x)|_{X_n} | g|_{X_n} \right)_{L^2(\Sigma(T), \mu_n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (U_n^* P_n x | g|_{X_n})_{L^2(\Sigma(T), \mu_n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x | P_n U_n (g|_{X_n}))_H \end{aligned}$$

d'où

$$Vg = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n U_n (g|_{X_n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n (g|_{X_n}).$$

□

Notons que, réciproquement, les opérateurs diagonalisables sont normaux, puisque les opérateurs de multiplication sont eux-mêmes normaux, et que

$$\Sigma(f(T)) = \Sigma(M_f), \quad (20.19)$$

puisque  $V$  est unitaire.

#### 20.4.4 Les opérateurs normaux compacts

La décomposition spectrale des opérateurs normaux compacts sur un espace de Hilbert que nous avons obtenue précédemment à partir du théorème portant sur les opérateurs compacts, peut également se déduire du théorème spectral relatif aux opérateurs normaux.

**Proposition 20.36** *Si  $T$  est un opérateur normal sur l'espace de Hilbert  $H$  séparable de dimension infinie, et si  $\lambda \in \Sigma(T)$  est un point d'accumulation, alors il existe une suite orthonormée  $(x_i)$  dans  $H$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0.$$

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le théorème spectral, on aura

$$f(T) = VM_fV^*$$

et par conséquent

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| = \|V^*(T - \lambda)Vx_n\| = \|(M_\zeta - \lambda)\xi_n\|,$$

où  $\xi_n = V^*x_n$ .

▷ Choisissons alors une suite  $\lambda_n \in \Sigma(T) = \Sigma(M_\zeta)$  qui converge vers  $\lambda$ , et une suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle que les disques  $B_n = B_{\varepsilon_n}(\lambda_n)$  soient disjoints. Selon la proposition 20.30,  $\Sigma(M_\zeta)$  est l'image essentielle de  $\zeta$ , et par conséquent  $\mu(B_n) \neq 0$ . Comme  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, on peut choisir dans chaque  $B_n$  un sous-ensemble  $E_n$  de mesure finie non nulle.

▷ Les  $E_n$  étant disjoints, les fonctions  $\chi_{E_n}$  sont mutuellement orthogonales dans  $L^2(X, \mu)$ . De plus

$$|\zeta - \lambda \mathbf{1}| \chi_{E_n} \leq (|\zeta - \lambda_n \mathbf{1}| + |\lambda_n - \lambda|) \chi_{E_n} \leq (\varepsilon_n + |\lambda_n - \lambda|) \chi_{E_n}$$

d'où

$$\|(M_\zeta - \lambda) \chi_{E_n}\| \leq (\varepsilon_n + |\lambda_n - \lambda|) \|\chi_{E_n}\| = (\varepsilon_n + |\lambda_n - \lambda|) (\mu(\chi_{E_n}))^{1/2},$$

d'où le résultat, avec  $\xi_n = (\mu(\chi_{E_n}))^{-1/2} \chi_{E_n}$  et  $x_n = V\xi_n$ .

□

**Théorème 20.37** Si  $T$  est un opérateur normal compact sur un espace de hilbert séparable  $H$ , alors

(i)  $0 \in \Sigma(T)$  et  $\Sigma(T) \setminus \{0\}$  est formé d'une suite bornée  $(\lambda_n)$ ,  $n = 1, \infty$  ayant pour seul (éventuel) point d'accumulation 0.

(ii) Les  $\lambda_n$  sont des valeurs propres, associées à des sous-espaces propres  $H_n$  de dimension finie.

(iii) on a

$$T = \sum_{n=1, \infty} \lambda_n P_n,$$

où les  $P_n$  sont les projections sur les  $H_n$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Ainsi qu'on l'a noté à la proposition 15.10 un opérateur compact n'est pas inversible, et 0 appartient donc à son spectre.

▷ Soit  $\lambda \neq 0$  un point d'accumulation de  $\Sigma(T)$ , selon la proposition 20.36, il existe une suite orthonormale  $(x_n)$  telle que  $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Comme  $T$  est compact il existe une sous-suite  $x_{n'}$  extraite telle que  $Tx_{n'}$  converge, soit vers  $v$ , d'où il résulte que  $x_{n'}$  converge vers  $v/\lambda$ . On aura alors  $0 = \lambda^2 (x_{m'} | x_{n'}) \rightarrow \|v\|^2$ , ce qui constitue une contradiction et prouve par conséquent que le seul point d'accumulation possible de  $\Sigma(T)$  est 0.

▷ Supposons (par exemple) que la suite  $(\lambda_n)$  ne soit pas finie, alors  $\lambda_n \rightarrow 0$ , et comme  $\forall n \chi_{\{\lambda_n\}} \in \mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ , on aura

$$\zeta = \sum_{n=1, \infty} \lambda_n \chi_{\{\lambda_n\}},$$

où la série converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0(\Sigma(T))$ . Il en résulte que

$$T = \zeta(T) = \sum_{n=1, \infty} \lambda_n \chi_{\{\lambda_n\}}(T) = \sum_{n=1, \infty} \lambda_n P_n,$$

où  $P_n$  est la projection sur le  $\mathcal{R}(\chi_{\{\lambda_n\}}(T))$ , qui n'est pas réduit à 0, puisque  $\chi_{\{\lambda_n\}} \neq 0$ .

▷ De plus

$$(T - \lambda_n) \chi_{\{\lambda_n\}}(T) = ((\zeta - \lambda_n \mathbf{1}) \chi_{\{\lambda_n\}})(T) = 0$$

ce qui prouve que  $\mathcal{R}(\chi_{\{\lambda_n\}}(T)) \subset H_n$ , et par conséquent que les  $\lambda_n$  sont des valeurs propres. Réciproquement, si  $(T - \lambda_k)x = 0$ , alors

$$\lambda_k x = Tx = \sum_{n=1, \infty} \lambda_n P_n x$$

et par conséquent

$$(\lambda_k x | P_\ell x) = \left( \sum_{n=1, \infty} \lambda_n P_n x | P_\ell x \right) = (\lambda_\ell P_\ell x | P_\ell x) = \lambda_\ell (P_\ell x | P_\ell x) = \lambda_\ell (x | P_\ell x),$$

d'où  $(x | P_\ell x) = 0$  si  $k \neq \ell$ , et  $0 = \lambda_\ell \|P_\ell x\|^2$ . Il en résulte que  $x = P_k x$ , soit  $H_n \subset \mathcal{R}(\chi_{\{\lambda_n\}}(T))$ . On a donc montré que les  $H_n = \mathcal{R}(\chi_{\{\lambda_n\}}(T))$ , et que les  $P_n$  sont les projections sur les sous-espaces propres.

▷ Notons également que  $H_n$  est stable par  $T$  et que  $T|_{H_n} = \lambda_n I$ , c'est donc un opérateur compact inversible, ce qui prouve que  $H_n$  est de dimension finie.

□

Il reste bien entendu de nombreux aspects qui ont été omis ou à peine effleurés, au nombre desquels

(i) La décomposition du spectre découlant de la décomposition de Lebesgue des mesures, ainsi que la notion de spectre essentiel. (Dieudonné T2 P.188, Reed&Simon p.236, Conway p. 358, Levy-Bruhl p.24, Schechter)

(ii) La décomposition des opérateurs découlant de la notion de multiplicité (Conway p. 293, Arveson)

(iii) Les algèbres commutatives maximales (Pedersen p.180-188, Conway p. 274-289, Arveson)

(iv) Les opérateurs à trace et de Hilbert-Schmidt (Dunford&Schwartz, Schechter, Levy-Bruhl p.77 .. )

# Appendice C

## Le radical

Notre hâte à nous tourner vers les algèbres de Banach commutatives n'était pas innocente. L'annexe qui suit, de nature essentiellement algébrique, peut donner un avant-goût des difficultés qui découlent de l'abandon de cette hypothèse.

### Définition C.1

(i) On appelle radical de  $\mathcal{A}$ , et on note  $\text{Rad } \mathcal{A}$ , l'intersection de ses idéaux maximaux à gauche, c'est bien entendu un idéal à gauche.

(ii) On dit que  $\mathcal{A}$  est simple si le seul idéal propre qu'elle contient est  $\{0\}$ .

(iii) On dit que  $\mathcal{A}$  est semi-simple si  $\text{Rad } \mathcal{A} = \{0\}$ .

Si  $\mathcal{I}$  est un idéal propre à gauche de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est un  $\mathcal{A}$ -module; il suffit à cet effet de poser  $P\dot{T} = P\dot{T}$ , où  $\dot{T} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , et  $P \in \mathcal{A}$ , ce qui est loisible car, si  $Q \in \mathcal{I}$ ,  $P(T + Q) = PT + S$ , où  $S = PQ \in \mathcal{I}$ .

Une part importante de notre travail va consister à restaurer la symétrie de cette définition et à montrer que le radical est également l'intersection des idéaux maximaux à droite.

**Définition C.2** *Un module est simple si son seul sous-module propre est  $\{0\}$ .*

**Lemme C.3** *Si  $\mathcal{I}$  est un idéal à gauche, pour qu'il soit maximal, il faut et il suffit que  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  soit un  $\mathcal{A}$ -module simple.*

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons  $\mathcal{I}$  maximal, notons  $\dot{D}$  un sous-module propre de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , et  $\dot{T}$  un élément de  $\dot{D}$ . Supposons que  $T \notin \mathcal{I}$  et considérons  $\mathcal{A}T + \mathcal{I}$ , c'est un idéal à gauche, qui contient strictement  $\mathcal{I}$ , et par conséquent, comme  $\mathcal{I}$  est maximal,  $\mathcal{A}T + \mathcal{I} = \mathcal{A}$ . Il en résulte que  $\dot{D} \supset \mathcal{A}\dot{T} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , d'où  $\dot{D} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , ce qui constitue une contradiction et implique par conséquent  $T \in \mathcal{I}$ . Il en résulte alors que  $T \in \mathcal{I}$  et par conséquent  $\dot{T} = 0$ , d'où  $\dot{D} = \{0\}$ .



▷ Supposons réciproquement que  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est un  $\mathcal{A}$ -module simple, et  $\mathcal{M}$  un idéal à gauche contenant  $\mathcal{I}$ . Notons  $\ddot{\mathcal{T}}$  les éléments de  $\mathcal{A}/\mathcal{M}$  ; comme  $\ddot{s} = \ddot{q} \forall s, q \in \dot{\mathcal{T}}$ , on peut définir une application surjective  $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$  par  $\theta(\dot{\mathcal{T}}) = \ddot{\mathcal{T}}$ . Soit alors  $\ddot{\mathcal{P}} \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ , posons  $V = \theta^{-1}(\ddot{\mathcal{P}})$ , c'est un sous-module de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , car si  $\dot{s}$  et  $\dot{q}$  appartiennent à  $V$ , soit  $\theta(\dot{s}) = \theta(\dot{q}) = \ddot{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} + \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \in \mathcal{M}\}$ , alors il existe  $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{J}$ , et  $\mathcal{J}' \in \mathcal{I}$ , tels que  $\mathcal{T} + \mathcal{M} = \mathcal{S} + \mathcal{J}$  et  $\mathcal{T} + \mathcal{M}' = \mathcal{Q} + \mathcal{J}'$ , et par conséquent  $\theta(\dot{s} + \dot{q}) = \ddot{\mathcal{T}}$ . Comme  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est simple, il en résulte que soit  $V = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , soit  $V = \{0\}$ , et par conséquent que  $\mathcal{A}/\mathcal{M}$  est réduit à un seul élément, c'est-à-dire que  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ .  $\square$

**Définition C.4** Soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module, on appelle annihilateur de  $V$  et on note

$$\text{Ann}(V) = \{\mathcal{T} \in \mathcal{A} \mid \mathcal{T}V = 0\}.$$

### Lemme C.5

- (i) L'annihilateur d'un module est un idéal
- (ii) Si  $\mathcal{I}$  est un idéal maximal dans  $\mathcal{A}$ , c'est l'annihilateur de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soit en effet  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module et  $\text{Ann}(V)$  son annihilateur, si  $q \in \text{Ann}(V)$ , on aura  $qv = 0 \forall v \in V$ . Soit alors  $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ , on aura  $(\mathcal{T}q)v = \mathcal{T}(qv) = 0 \forall v \in V$  ainsi que  $(q\mathcal{T})v = q(\mathcal{T}v) = 0$ , puisque  $\mathcal{T}v \in V$ .

▷ En effet, comme  $\mathcal{I}$  est un idéal, alors  $\forall p \in \mathcal{I}, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{A}$ , on a  $p\mathcal{T} \in \mathcal{I}$ , soit  $p\mathcal{T} = 0$ , c'est dire que  $\mathcal{I} \subset \text{Ann}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ . D'après l'item (??),  $\text{Ann}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$  est un idéal ; comme  $\mathcal{I}$  est propre,  $\mathcal{A} \neq \text{Ann}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ , si tel n'était pas le cas, on aurait en effet  $\mathcal{T} = \mathcal{I}\mathcal{T} = 0 \forall \mathcal{T}$ , d'où  $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ . Il en résulte que  $\mathcal{I} = \text{Ann}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ .  $\square$

**Définition C.6** On dit qu'un idéal est primitif si c'est l'annihilateur d'un  $\mathcal{A}$ -module simple.

**Lemme C.7** Un idéal maximal est primitif

DÉMONSTRATION. En effet, si  $\mathcal{I}$  est un idéal maximal, c'est d'après le lemme C.5 l'annihilateur de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , qui est lui-même un module simple, d'après le lemme C.3  $\square$

Le contraire est faux : les idéaux primitifs ne sont pas tous maximaux.

### Proposition C.8

- (i) Tout idéal maximal à gauche contient un idéal primitif
- (ii) Tout idéal primitif est l'intersection des idéaux maximaux à gauche qui le contiennent

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\mathcal{I}$  un idéal maximal à gauche, d'après le lemme **C.3**,  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est un  $\mathcal{A}$ -module simple, c'est dire que l'annihilateur de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  est un idéal primitif. Il est contenu dans  $\mathcal{I}$  car dire que  $T \in \text{Ann}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ , c'est dire que  $T\dot{P} = 0$ ,  $\forall \dot{P} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ , ou encore que  $T\dot{P} \in \mathcal{I}$ ,  $\forall \dot{P} \in \mathcal{A}$  ; il en résulte en particulier que  $T \in \mathcal{I}$ .

▷ Réciproquement, si  $\mathcal{I}$  est un idéal primitif de  $\mathcal{A}$ , c'est l'annihilateur d'un  $\mathcal{A}$ -module simple, soit  $V$ . On aura donc  $\mathcal{I} = \bigcap_{v \in V, v \neq 0} \mathcal{M}_v$ , où  $\mathcal{M}_v = \{P \in \mathcal{A} \mid Pv = 0\}$ . Il est clair que  $\mathcal{M}_v$  est un idéal à gauche, et que si  $v \in V$ ,  $\mathcal{A}v$  est un sous-module de  $V$  ; comme  $V$  est simple, on aura  $V = \mathcal{A}v$ . Si  $\dot{T}$  et  $\dot{P} \in \mathcal{A}/\mathcal{M}_v$ , alors  $\dot{T} = \dot{P}$  dès que  $Tv = Pv$ , et on peut définir une application  $\theta$  linéaire :  $\mathcal{A}v \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}_v$  par la formule  $\dot{T} = \theta(w)$ , où  $w = Tv$ . Mais de plus si  $\dot{T} = 0$ , alors  $T \in \mathcal{M}_v$  et par conséquent  $w = 0$  ; il en résulte que  $\theta$  est un isomorphisme soit  $V \simeq \mathcal{A}/\mathcal{M}_v$ . Comme de plus  $V$  est simple, d'après le lemme **C.3**,  $\mathcal{M}_v$  est un idéal maximal à gauche.

□

**Proposition C.9** *Le radical est un idéal, il est inclus dans l'intersection des idéaux maximaux.*

DÉMONSTRATION.

▷ En vertu de la proposition **C.8** (i), comme  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est un idéal à gauche, il contient un idéal primitif. Mais d'autre part selon **C.8** (ii) tout idéal primitif est une intersection d'idéaux maximaux à gauche, et contient donc  $\text{Rad } \mathcal{A}$ . Il en résulte que  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est l'intersection des idéaux primitifs, et par conséquent un idéal.

▷ Comme selon le lemme **C.7**, un idéal maximal est primitif, il en résulte que  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est inclus dans l'intersection des idéaux maximaux.

□

**Proposition C.10** *Soit  $\mathcal{I}$  un idéal à gauche, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\mathcal{I} \subset \text{Rad } \mathcal{A}$
- (ii)  $I - P$  est inversible à gauche  $\forall P \in \mathcal{I}$
- (iii)  $I - P$  est inversible  $\forall P \in \mathcal{I}$

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que  $\mathcal{I} \subset \text{Rad } \mathcal{A}$ , si  $P \in \mathcal{I}$ , alors il appartient à tous les idéaux maximaux à gauche, et comme d'après la proposition **19.6**,  $I$  n'appartient à aucun idéal à gauche, il en résulte que  $I - P$  n'appartient à aucun idéal maximal à gauche. Mais  $\mathcal{A}(I - P)$  est un idéal à gauche, auquel appartient  $I - P$ , et par conséquent  $\mathcal{A}(I - P) = \mathcal{A}$ , ce qui implique que  $I - P$  soit inversible à gauche.

▷ Supposons que  $I - P$  est inversible à gauche  $\forall P \in \mathcal{I}$  et choisissons  $T \in \mathcal{I}$ , alors il existe  $P' \in \mathcal{A}$  tel que  $P'(I - P) = I$ . Mais  $-P'P \in \mathcal{I}$ , et par conséquent  $I + P'P = P'$  est inversible à gauche ; c'est dire en fait que  $P'$  est inversible à gauche et à droite et donc inversible, d'inverse  $I - P$ , et par conséquent que  $I - P$  est inversible.

▷ Supposons que  $I-P$  est inversible  $\forall P \in \mathcal{I}$ , et qu'il existe un idéal maximal à gauche  $\mathcal{M}$  qui ne contienne pas  $\mathcal{I}$ ; alors  $\mathcal{I} + \mathcal{M} = \mathcal{A}$ , puisque  $\mathcal{I} + \mathcal{M}$  est un idéal, ce qui implique l'existence de  $P \in \mathcal{I}$  et  $Q \in \mathcal{M}$  tels que  $I = P + Q$ . Par conséquent  $Q = I - P$  est inversible ce qui implique  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$  d'après la proposition **19.6**, soit une contradiction.  $\square$

**Corollaire C.11** *Les ensembles suivants sont identiques*

- (i)  $\text{Rad } \mathcal{A} = \cap \text{idéaux maximaux à gauche de } \mathcal{A}.$
- (ii)  $\mathcal{D}' = \cap \text{idéaux maximaux à droite de } \mathcal{A}.$
- (iii)  $\mathcal{G} = \{P \in \mathcal{A} \mid TP - I \text{ est inversible } \forall T \in \mathcal{A}\}$
- (iv)  $\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{A} \mid PT - I \text{ est inversible } \forall T \in \mathcal{A}\};$

DÉMONSTRATION.

▷ Si on considère l'algèbre  $\mathcal{A}'$  formée des éléments de  $\mathcal{A}$  mais dans laquelle le produit est défini par  $P * T = TP$ , alors d'après la proposition **C.9**  $\text{Rad } \mathcal{A}' = \mathcal{D}'$  est un idéal de  $\mathcal{A}'$  et donc de  $\mathcal{A}$ , et d'après la proposition **C.10**, les éléments de la forme  $I - P$  sont inversibles dans  $\mathcal{A}'$  et donc dans  $\mathcal{A}$ ,  $\forall P \in \mathcal{D}'$ . Il en résulte que  $\mathcal{D}' \subset \text{Rad } \mathcal{A}$ , et on démontrerait de même que  $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \mathcal{D}'$ , soit  $\mathcal{D}' = \text{Rad } \mathcal{A}$ .

▷ Comme  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est un idéal, d'après la proposition **C.10**,  $I - P$  est inversible  $\forall P \in \text{Rad } \mathcal{A}$ , et par conséquent  $I - TP$  est inversible  $\forall P \in \text{Rad } \mathcal{A}$ ,  $\forall T \in \mathcal{A}$ , soit  $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ . Réciproquement si  $P \in \mathcal{G}$ , et  $P \notin \text{Rad } \mathcal{A}$ , alors il existe un idéal maximal à gauche  $\mathcal{M}$  auquel  $P$  n'appartient pas, et comme  $\mathcal{A}P$  est un idéal à gauche, il en résulte que  $\mathcal{M} + \mathcal{A}P = \mathcal{A}$ . C'est dire qu'il existe  $Q$  tel que  $I - QP \in \mathcal{M}$ , et par conséquent  $I \in \mathcal{M}$ , ce qui constitue une contradiction.  $\square$

**Remarque C.12** *Il est facile de démontrer directement que si  $\lambda \neq 0$ ,  $TP - \lambda$  est inversible si et seulement si  $PT - \lambda$  l'est. Il en résulte que*

$$\Sigma(TP) \cup \{0\} = \Sigma(PT) \cup \{0\},$$

et par conséquent que  $\rho(TP) = \rho(PT)$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que  $TP - \lambda$  a pour inverse  $Q$ , d'où  $TPQ = QTP = I + \lambda Q$ , on aura alors

$$\begin{aligned} (PT - \lambda)(PQT - I) &= PTPQT - PT - \lambda PQT + \lambda I \\ &= P(I + \lambda Q)T - PT - \lambda PQT + \lambda I = \lambda I, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (PQT - I)(PT - \lambda) &= PQTPT - PT - \lambda PQT + \lambda I \\ &= P(I + \lambda Q)T - PT - \lambda PQT + \lambda I = \lambda I. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition C.13**

- (i)  $\text{Rad } \mathcal{A}$  est inclus dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de  $\mathcal{A}$ .  
(ii)  $\mathcal{L}(X)$  est semi-simple.

DÉMONSTRATION.

▷ D'après le corollaire **C.11**,  $\text{Rad } \mathcal{A} = \mathcal{G}$  ; nous montrerons que  $\mathcal{G}$  est contenu dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents. En effet si  $P \in \mathcal{G}$ , alors  $\mu P - I$  est inversible  $\forall \mu$ , et par conséquent  $P - \lambda I$  est inversible  $\forall \lambda \neq 0$  ; il en résulte que  $\Sigma(P) = \{0\}$ , soit  $\rho(P) = 0$ .

▷ Soit  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ , posons  $\mathcal{J}_x = \{T \in \mathcal{L}(X) \mid Tx = 0\}$  ; c'est un idéal à gauche de  $\mathcal{L}(X)$ , dont nous allons montrer qu'il est maximal.

▷ Supposons à cet effet que  $\mathcal{J}_x$  est strictement inclus dans un idéal à gauche propre, soit  $\mathcal{U}$ . Alors  $\mathcal{U}x = \{Tx \mid T \in \mathcal{U}\}$  est un sous-espace de  $X$ , invariant par tout  $S \in \mathcal{L}(X)$  et n'est pas réduit à  $\{0\}$ , puisque  $\mathcal{U}$  contient un élément n'appartenant pas à  $\mathcal{J}_x$ .

▷ Supposons alors que  $\mathcal{U}x \neq X$ , et choisissons  $y \in \mathcal{U}x$ ,  $y \neq 0$ , ainsi que  $z \notin \mathcal{U}x$ . D'après le corollaire **5.5** du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $X$  qui vérifie  $f(y) = \|y\|$ , et par conséquent l'application  $S \in \mathcal{L}(X)$  définie par  $Sx = zf(x)/\|y\|$  vérifie  $Sy = z$ , ce qui constitue une contradiction, puisque  $\mathcal{U}x$  est invariant par  $S$ . Il en résulte que  $\mathcal{U}x = X$ .

▷ Par conséquent il existe  $U \in \mathcal{U}$  tel que  $Ux = x$  ; pour tout  $S \in \mathcal{L}(X)$ , on aura alors  $SUx = Sx$ , soit  $SU - S \in \mathcal{J}_x$ , d'où  $S \in \mathcal{J}_x + \mathcal{U} \subset \mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ , et par conséquent  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{U}$ . Il en résulte que  $\mathcal{U}$  n'est pas un idéal propre et par conséquent que  $\mathcal{J}_x$  est maximal. On aura donc  $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \bigcap_{x \neq 0} \mathcal{J}_x = \{0\}$ .

□