



HAL
open science

Géométrie du triangle à l'aide des coordonnées aréolaires

Marc Renaud

► **To cite this version:**

| Marc Renaud. Géométrie du triangle à l'aide des coordonnées aréolaires. 2023. hal-04074181

HAL Id: hal-04074181

<https://hal.science/hal-04074181>

Preprint submitted on 10 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Géométrie du triangle à l'aide des coordonnées aréolaires

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

1 Introduction

Ce rapport présente la géométrie du triangle et, notamment, la position de quelques uns de ses points particuliers (centre du cercle inscrit, centre de gravité ou barycentre, centre du cercle circonscrit, orthocentre, etc).

En fait le nombre de points particuliers est considérable et on peut toujours en créer de nouveaux. C. Kimberling, dans son encyclopédie des centres de triangles [6] en dénombre 39474 au 01/09/20. Tous les points sont repérés par des coordonnées. On peut utiliser deux coordonnées (par exemple cartésiennes) dans un repère plan orthonormé particulier, mais ce choix détruit une certaine symétrie et dépend trop du repère considéré. Il est préférable d'utiliser, comme l'a suggéré J. Plücker (1801-1868) en 1835, trois coordonnées redondantes (il utilise, en fait, les coordonnées trilinéaires). Par exemple les coordonnées trilinéaires, les coordonnées trilinéaires normalisées (dont la somme est égale à un), les coordonnées barycentriques, les coordonnées barycentriques normalisées appelées aréolaires (dont la somme est égale à un), les coordonnées tripolaires, les coordonnées tripolaires normalisées (dont la somme est égale à un), les coordonnées orthocentriques [8]¹, etc.

Ces divers types de coordonnées sont présentés par la suite, mais notre choix s'est porté sur les trois coordonnées aréolaires.

1. p. 128

2 Notations générales

ssi signifie : si et seulement si.

\triangleq signifie : égal par définition.

$[L]$ représente une longueur, $[L]^2$ une surface, $[L]^3$ un volume, ...

Les lettres latines majuscules penchées, éventuellement munies d'indices inférieurs, (et les lettres grecques majuscules, éventuellement munies d'indices supérieurs, Ω, Ω', \dots) représentent les points quelconques ou particuliers du triangle; par exemple $P, Q, A, B, C, \dots, \Omega, \Omega', \Omega''$.

Les lettres latines majuscules droites et la lettre grecque majuscule Δ représentent des grandeurs de dimensions $[L]^k$ pour k entier quelconque; par exemple D, J, S, \dots

Les lettres latines minuscules, éventuellement munies d'indices inférieurs, représentent les distances entre points quelconques ou particuliers du triangle, de dimensions $[L]$; par exemple, a, m_1, h_a, \dots ou des grandeurs de dimensions $[L]^k$ pour k entier quelconque; par exemple q_1, \dots

Les lettres grecques minuscules (sauf λ), éventuellement munies d'indices inférieurs, représentent des angles; par exemple α, ω, \dots

La lettre grecque minuscule λ représente une constante quelconque sans dimension.

Les bi-points ou vecteurs sont représentés surmontés d'une flèche, par exemple $\overrightarrow{PQ}, \vec{V}$, etc.

(\vec{V}, \vec{W}) représente l'angle des vecteurs \vec{V} et \vec{W} .

$\|\vec{V}\|$ représente la norme euclidienne, i.e. la longueur, du vecteur \vec{V} .

(PQ) représente la droite passant par les points P et Q .

$[PQ]$ représente le segment de droite compris entre les points P et Q .

3 Définitions et premières relations

Soient A, B, C les sommets du triangle ABC et a, b, c les cotés de ce triangle, de dimensions $[L]$, respectivement opposés à ces sommets et α, β, γ les angles aux sommets A, B, C , donc tels que :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}), \gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), \text{ sans dimension. On a :}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

On pose :

$$s \triangleq \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ semi-périmètre du triangle } ABC, \text{ de dimension } [L].$$

$$a' \triangleq \frac{1}{2}(-a + b + c), b' \triangleq \frac{1}{2}(a - b + c), c' \triangleq \frac{1}{2}(a + b - c), \text{ de dimensions } [L].$$

$$q_1 \triangleq -a^2 + b^2 + c^2, q_2 \triangleq -b^2 + c^2 + a^2, q_3 \triangleq -c^2 + a^2 + b^2, \text{ de dimensions } [L]^2 [3]^2.$$

Soit Δ l'aire du triangle ABC .

3.1 Définitions relatives aux points quelconques ou particuliers du triangle

Pour tout point quelconque P du triangle soient :

- P_a, P_b, P_c les projections orthogonales du point P respectivement sur les cotés $(BC), (CA), (AB)$,

- P_A, P_B, P_C les intersections respectives des droites (AP) et $(BC), (BP)$ et $(CA), (CP)$ et (AB) ,

- P_{CA} et P_{BA}, P_{AB} et P_{CB}, P_{BC} et P_{AC} les intersections respectives des parallèles menées par le point P au coté (BC) avec les cotés (CA) et (BA) , au coté (CA) avec les cotés (AB) et (CB) , au coté (AB) avec les cotés (BC) et (AC) .

$\Delta_a(P)$ l'aire du triangle PBC , $\Delta_b(P)$ l'aire du triangle PCA , Δ_c l'aire du triangle PAB . On a :

$$\Delta_a(A) = \Delta_b(B) = \Delta_c(C) = \Delta \text{ et}$$
$$\Delta_a(P) + \Delta_b(P) + \Delta_c(P) = \Delta.$$

2. p. 70 et p. 84

Soient $\omega_1(P) \triangleq (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$, $\omega_2(P) \triangleq (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA})$, $\omega_3(P) \triangleq (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$.
On a :

$$\omega_1(P) + \omega_2(P) + \omega_3(P) = 2\pi.$$

On pose les mêmes définitions pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.2 Diverses coordonnées des points quelconques ou particuliers du triangle et définitions associées

Pour tout point quelconque P du triangle soient :

• $p_a \triangleq \|\overrightarrow{PP_a}\|$, $p_b \triangleq \|\overrightarrow{PP_b}\|$, $p_c \triangleq \|\overrightarrow{PP_c}\|$ sont les trois coordonnées trilinéaires du point P . On a :

$$\Delta_a(P) = \frac{1}{2} a p_a, \Delta_b(P) = \frac{1}{2} b p_b, \Delta_c(P) = \frac{1}{2} c p_c.$$

• $\lambda a p_a = 2\lambda \Delta_a(P)$, $\lambda b p_b = 2\lambda \Delta_b(P)$, $\lambda c p_c = 2\lambda \Delta_c(P)$; $\forall \lambda$ sont les trois coordonnées barycentriques du point P .

• $x_1(P) \triangleq \frac{\Delta_a(P)}{\Delta}$, $x_2(P) \triangleq \frac{\Delta_b(P)}{\Delta}$, $x_3(P) \triangleq \frac{\Delta_c(P)}{\Delta}$ sont les trois coordonnées aréolaires du point P ; il s'agit des coordonnées barycentriques qui correspondent à $\lambda = \frac{1}{2\Delta}$. On a :

$$x_1(P) + x_2(P) + x_3(P) = 1 \text{ et on note } P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}.$$

Alors le *conjugué isogonal* du point P est, par définition, le point de coordonnées aréolaires

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2 x_2(P) x_3(P)}{a^2 x_2(P) x_3(P) + b^2 x_3(P) x_1(P) + c^2 x_1(P) x_2(P)} \\ \frac{b^2 x_3(P) x_1(P)}{a^2 x_2(P) x_3(P) + b^2 x_3(P) x_1(P) + c^2 x_1(P) x_2(P)} \\ \frac{c^2 x_1(P) x_2(P)}{a^2 x_2(P) x_3(P) + b^2 x_3(P) x_1(P) + c^2 x_1(P) x_2(P)} \end{pmatrix}.$$

• $p_A \triangleq \|\overrightarrow{PA}\|$, $p_B \triangleq \|\overrightarrow{PB}\|$, $p_C \triangleq \|\overrightarrow{PC}\|$ sont les trois coordonnées tripolaires du point P .

On pose les mêmes définitions pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.3 Coordonnées aréolaires de certains points associés aux points quelconques ou particuliers du triangle

Pour tout point quelconque P du triangle et étant donné que $P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}$

on montre que :

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_2}{2a^2} x_2(P) + \frac{q_3}{2a^2} [1 - x_3(P)] \\ \frac{q_2}{2a^2} [1 - x_2(P)] + \frac{q_3}{2a^2} x_3(P) \end{pmatrix}, P_b = \begin{pmatrix} \frac{q_3}{2b^2} [1 - x_3(P)] + \frac{q_1}{2b^2} x_1(P) \\ 0 \\ \frac{q_3}{2b^2} x_3(P) + \frac{q_1}{2b^2} [1 - x_1(P)] \end{pmatrix},$$

$$P_c = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{2c^2} x_1(P) + \frac{q_2}{2c^2} [1 - x_2(P)] \\ \frac{q_1}{2c^2} [1 - x_1(P)] + \frac{q_2}{2c^2} x_2(P) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2(P)}{1-x_1(P)} \\ \frac{x_3(P)}{1-x_1(P)} \end{pmatrix}, P_B = \begin{pmatrix} \frac{x_1(P)}{1-x_2(P)} \\ 0 \\ \frac{x_3(P)}{1-x_2(P)} \end{pmatrix}, P_C = \begin{pmatrix} \frac{x_1(P)}{1-x_3(P)} \\ \frac{x_2(P)}{1-x_3(P)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{CA} = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ 0 \\ 1 - x_1(P) \end{pmatrix}, P_{AB} = \begin{pmatrix} 1 - x_2(P) \\ x_2(P) \\ 0 \end{pmatrix}, P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - x_3(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}.$$

$$P_{BA} = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ 1 - x_1(P) \\ 0 \end{pmatrix}, P_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(P) \\ 1 - x_2(P) \end{pmatrix}, P_{AC} = \begin{pmatrix} 1 - x_3(P) \\ 0 \\ x_3(P) \end{pmatrix}.$$

On fait de même, bien entendu, pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.4 Autres définitions et relations

3.4.1 Définitions

I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC . On constate que I_a est le point du segment $[BC]$ situé à la distance b' du point B et à la distance c' du point C , que I_b est le point du segment $[CA]$ situé à la distance c' du point C et à la distance a' du point A , que I_c est le point du segment $[AB]$ situé à la distance a' du point A et à la distance b' du point B .

$I_a I_b I_c$ est le *triangle de contact*.

r rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC , de dimension [L].

J_1, J_2, J_3 centres des cercles exinscrits au triangle ABC , opposés aux sommets A, B, C .

r_1, r_2, r_3 rayons des cercles exinscrits au triangle ABC , de dimensions [L].
 $J_1 J_2 J_3$ est le *triangle excentral*.

r_T rayon du cercle inscrit dans le triangle tangent extérieurement aux trois cercles exinscrits.

G centre de gravité ou barycentre du triangle ABC .

O centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

R rayon du cercle circonscrit au triangle ABC , de dimension [L].

$\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ triangle anticomplémentaire au triangle ABC i.e. le triangle dont les cotés $(\tilde{B}\tilde{C})$, $(\tilde{C}\tilde{A})$, $(\tilde{A}\tilde{B})$ sont respectivement parallèles aux cotés (BC) , (CA) , (AB) et tel que $A \in (\tilde{B}\tilde{C})$, $B \in (\tilde{C}\tilde{A})$, $C \in (\tilde{A}\tilde{B})$.

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ triangle tangentiel au triangle ABC ; il est tangent en A, B, C au cercle circonscrit au triangle ABC et soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ les cotés respectifs de ce triangle, opposés aux sommets $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ points tels que les triangles $B\hat{A}C, C\hat{B}A, A\hat{C}B$ sont équilatéraux directs. $\check{A}, \check{B}, \check{C}$ points tels que les triangles $B\check{A}C, C\check{B}A, A\check{C}B$ sont équilatéraux inverses.

ω angle de Brocard (défini ci-après).

3.4.2 Définitions et relations

$$J \triangleq \frac{\sqrt{(a^6+b^6+c^6)-(b^4c^2+c^4a^2+a^4b^2)-(b^2c^4+c^2a^4+a^2b^4)+3a^2b^2c^2}}{abc}, \text{ sans dimension.}$$

$D \triangleq (b-c)(c-a)(a-b) = -(b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2)$, de dimension [L]³

$$\begin{aligned} S &\triangleq a^2q_1 + b^2q_2 + c^2q_3 \triangleq q_2q_3 + q_3q_1 + q_1q_2 \\ &\triangleq -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ &= (a+b+c)[-(a^3+b^3+c^3) + (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2abc] \\ &= 2s[(2a')(2b')(2c')], \text{ de dimension [L]}^4. \end{aligned}$$

$\cot(\omega) \triangleq \cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)$. Cet angle a été utilisé par K. F. A. Jacobi en 1886 [1]³.

3.4.3 Les polynômes symétriques en a, b, c

Ces polynômes, de degré i , sont notés $d_{i,j}$, ils sont classés selon les puissances décroissantes de a et sont indiqués en Annexe A pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16$ seuls utiles pour la suite. Sont également indiqués en Annexe A leurs valeurs en fonction de s, r, R pour $i \leq 9$ seules utiles pour la suite.

3. p. 94 "Brocard Henri 1845-1922"

4 Formules classiques du triangle

4.1 Lois des cosinus

4.1.1 Première loi des cosinus

$$a = b \cos(\gamma) + c \cos(\beta), \quad b = c \cos(\alpha) + a \cos(\gamma), \quad c = a \cos(\beta) + b \cos(\alpha).$$

4.1.2 Seconde loi des cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha), \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Alors les lois des cosinus s'écrivent :

$$\cos(\alpha) = \frac{q_1}{2bc}, \quad \cos(\beta) = \frac{q_2}{2ca}, \quad \cos(\gamma) = \frac{q_3}{2ab}.$$

4.2 Lois des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$

4.3 Lois des tangentes ou règle de Napier

En fait ces lois sont dues à Viète.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan(\frac{\beta+\gamma}{2})}{\tan(\frac{\beta-\gamma}{2})}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan(\frac{\gamma+\alpha}{2})}{\tan(\frac{\gamma-\alpha}{2})}.$$

4.4 Lois des cotangentes

$$\cot(\frac{\alpha}{2}) = \frac{a'}{r}, \quad \cot(\frac{\beta}{2}) = \frac{b'}{r}, \quad \cot(\frac{\gamma}{2}) = \frac{c'}{r}.$$

4.5 Valeurs des lignes trigonométriques

$$\cos(\alpha) = \frac{q_1}{2bc}, \quad \cos(\beta) = \frac{q_2}{2ca}, \quad \cos(\gamma) = \frac{q_3}{2ab}.$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{2R}, \quad \sin(\beta) = \frac{b}{2R}, \quad \sin(\gamma) = \frac{c}{2R}.$$

$$\sec(\alpha) = \frac{2bc}{q_1}, \quad \sec(\beta) = \frac{2ca}{q_2}, \quad \sec(\gamma) = \frac{2ab}{q_3}.$$

$$\csc(\alpha) = \frac{2R}{a}, \quad \csc(\beta) = \frac{2R}{b}, \quad \csc(\gamma) = \frac{2R}{c}.$$

$\tan(\alpha) = \frac{4\Delta}{q_1}$, $\tan(\beta) = \frac{4\Delta}{q_2}$, $\tan(\gamma) = \frac{4\Delta}{q_3}$ (la valeur de Δ est indiquée ci-après).

$\cot(\alpha) = \frac{q_1}{4\Delta}$, $\cot(\beta) = \frac{q_2}{4\Delta}$, $\cot(\gamma) = \frac{q_3}{4\Delta}$ (la valeur de Δ est indiquée ci-après).

$$\cos(\beta - \gamma) = \frac{S - a^2 q_1}{2a^2 b c}, \quad \cos(\gamma - \alpha) = \frac{S - b^2 q_2}{2b^2 c a}, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{S - c^2 q_3}{2c^2 a b}.$$

4.6 Autres relations

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s a' b' c'}$ (formule de Héron).
i.e. $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

$$S = (4\Delta)^2 = 2s[(2a')(2b')(2c')].$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}},$$

$$r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{\Delta}{a'}, \quad r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\Delta}{b'}, \quad r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{\Delta}{c'}.$$

$$R = \frac{abc}{4\Delta} [8]^4, \quad \text{donc : } rR = \frac{abc}{4s} \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{S}.$$

$$R = \frac{1}{4}(-r + r_1 + r_2 + r_3)$$

$$r_T = r + 2R = \frac{1}{2}(r + r_1 + r_2 + r_3).$$

$$\|\vec{OI}\|^2 = R(-2r + R) \quad \text{Formule du triangle d'Euler [8]}^5.$$

$$\|\vec{OI}\|^2 + \|\vec{OJ}_1\|^2 + \|\vec{OJ}_2\|^2 + \|\vec{OJ}_3\|^2 = 12R^2 [8]^6.$$

4.7 Relations faisant intervenir l'angle de Brocard ω

Avec les notations d_i définies ci-après :

$$\cos(\omega) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}} = \frac{d_6}{2\sqrt{d_{39}}},$$

$$\sin(\omega) = \frac{2\sqrt{s a' b' c'}}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}} = \frac{2\Delta}{\sqrt{d_{39}}},$$

$$\tan(\omega) = \frac{4\sqrt{s a' b' c'}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4\Delta}{d_6},$$

$$\cot(\omega) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{s a' b' c'}} = \frac{d_6}{4\Delta},$$

$$\sec(\omega) = \frac{2\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2\sqrt{d_{39}}}{d_6},$$

$$\csc(\omega) = \frac{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}}{2\sqrt{s a' b' c'}} = \frac{\sqrt{d_{39}}}{2\Delta}. \quad \text{Donc :}$$

4. p. 259 et p. 1835 éq. (12)

5. p. 587 "Euler Triangle Formula"

6. p. 591

$$\begin{aligned}
& \cot(\omega) \triangleq \cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma) \\
= & \frac{1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)} = \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}{2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)} = \frac{s^2 - r(r + 4R)}{2sr}. \\
& \csc^2(\omega) = \csc^2(\alpha) + \csc^2(\beta) + \csc^2(\gamma). \\
& \tan(\omega) = \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)} = \frac{2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)}{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}. \\
& \sin^3(\omega) = \sin(\alpha - \omega) \sin(\beta - \omega) \sin(\gamma - \omega). \\
& \|\overrightarrow{O\Omega}\| = \|\overrightarrow{O\Omega'}\| = R \sqrt{1 - 4 \sin^2(\omega)} \quad [8]^7. \\
& \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| = 2R \sin(\omega) \sqrt{1 - 4 \sin^2(\omega)} \quad [8]^8.
\end{aligned}$$

4.8 Quelques distances particulières du triangle, de dimensions [L]

4.8.1 Longueurs des bissectrices intérieures

On pourra consulter [7]⁹

$$f_1 \triangleq \|\overrightarrow{AI_A}\| = \frac{2\sqrt{sa'bc}}{b+c}, \quad f_2 \triangleq \|\overrightarrow{BI_B}\| = \frac{2\sqrt{sb'ca}}{c+a}, \quad f_3 \triangleq \|\overrightarrow{CI_C}\| = \frac{2\sqrt{sc'ab}}{a+b}.$$

$$\text{On a } f_1 f_2 f_3 = \frac{8s^2 r a b c}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

4.8.2 Longueurs des médianes

On pourra consulter [7]¹⁰ [8]¹¹.

$$m_1 \triangleq \|\overrightarrow{AG_A}\| = \|\overrightarrow{AO_a}\| = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2} \quad [8]^{12},$$

$$m_2 \triangleq \|\overrightarrow{BG_B}\| = \|\overrightarrow{BO_b}\| = \frac{\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}}{2},$$

$$m_3 \triangleq \|\overrightarrow{CG_C}\| = \|\overrightarrow{CO_c}\| = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

$$\text{On a } m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad [8]^{13}.$$

Soit $s_m \triangleq \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$ [8]¹⁴ alors :

$$\Delta = \frac{4}{3} \sqrt{s_m (s_m - m_1) (s_m - m_2) (s_m - m_3)} \quad [8]^{15}$$

7. p. 175 éq. (1)

8. p. 175 éq. (2)

9. p. 1724

10. p. 1724

11. p. 1155 "Median(Triangle)"

12. p. 1155 éq. (1) "Median(Triangle)"

13. p. 1155 éq. (2) "Median(Triangle)"

14. p. 1155 éq. (4) "Median(Triangle)"

15. p. 1155 éq. (3) "Median(Triangle)"

4.8.3 Distances du point O aux cotés

Rappel $o_a \triangleq \|\overrightarrow{OO_a}\|$, $o_b \triangleq \|\overrightarrow{OO_b}\|$, $o_c \triangleq \|\overrightarrow{OO_c}\|$. On a :

$$o_a = \frac{aq_1}{8\Delta}, o_b = \frac{bq_2}{8\Delta}, o_c = \frac{cq_3}{8\Delta}.$$

4.8.4 Hauteurs (i.e. longueurs des hauteurs)

Rappel $a_a \triangleq \|\overrightarrow{AA_a}\|$ (et $a_b = a_c = 0$), $b_b \triangleq \|\overrightarrow{BB_b}\|$ (et $b_c = b_a = 0$), $c_c \triangleq \|\overrightarrow{CC_c}\|$ (et $c_a = c_b = 0$). On a :

$$a_a = \frac{2\Delta}{a}, b_b = \frac{2\Delta}{b}, c_c = \frac{2\Delta}{c}.$$

On a $\frac{1}{r} = \frac{1}{a_a} + \frac{1}{b_b} + \frac{1}{c_c} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$, relation due à Johnson en 1929¹⁶ [7]¹⁷.

4.8.5 Distances du point H aux cotés

Rappel :

$$h_a \triangleq \|\overrightarrow{HH_a}\| \triangleq \|\overrightarrow{HA_a}\|, h_b \triangleq \|\overrightarrow{HH_b}\| \triangleq \|\overrightarrow{HB_b}\|, h_c \triangleq \|\overrightarrow{HH_c}\| \triangleq \|\overrightarrow{HC_c}\|.$$

On a :

$$h_a = \frac{q_2 q_3}{8a\Delta}, h_b = \frac{q_3 q_1}{8b\Delta}, h_c = \frac{q_1 q_2}{8c\Delta}.$$

16. p. 189

17. p. 1724

5 Coordonnées aréolaires de quelques points particuliers du triangle

Pour tout couple (P, Q) de points soient :

$$\text{Cross}(P, Q) \triangleq \left(\begin{array}{c} \frac{x_1(P)x_1(Q)[x_2(P)x_3(Q)+x_3(P)x_2(Q)]}{d_{\text{Cross}}} \\ \frac{x_2(P)x_2(Q)[x_3(P)x_1(Q)+x_1(P)x_3(Q)]}{d_{\text{Cross}}} \\ \frac{x_3(P)x_3(Q)[x_1(P)x_2(Q)+x_2(P)x_1(Q)]}{d_{\text{Cross}}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{\text{Cross}} &= x_1(P)x_1(Q)[x_2(P)x_3(Q)+x_3(P)x_2(Q)] \\ &+ x_2(P)x_2(Q)[x_3(P)x_1(Q)+x_1(P)x_3(Q)] \\ &+ x_3(P)x_3(Q)[x_1(P)x_2(Q)+x_2(P)x_1(Q)]. \end{aligned}$$

$$\text{Ceva}(P, Q) \triangleq \left(\begin{array}{c} \frac{[x_1(P)x_2(Q)+x_2(P)x_1(Q)][x_1(P)x_3(Q)+x_3(P)x_1(Q)]}{d_{\text{Ceva}}} \\ \frac{[x_2(P)x_3(Q)+x_3(P)x_2(Q)][x_2(P)x_1(Q)+x_1(P)x_2(Q)]}{d_{\text{Ceva}}} \\ \frac{[x_3(P)x_1(Q)+x_1(P)x_3(Q)][x_3(P)x_2(Q)+x_2(P)x_3(Q)]}{d_{\text{Ceva}}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{\text{Ceva}} &= [x_1(P)x_2(Q)+x_2(P)x_1(Q)][x_1(P)x_3(Q)+x_3(P)x_1(Q)] \\ &+ [x_2(P)x_3(Q)+x_3(P)x_2(Q)][x_2(P)x_1(Q)+x_1(P)x_2(Q)] \\ &+ [x_3(P)x_1(Q)+x_1(P)x_3(Q)][x_3(P)x_2(Q)+x_2(P)x_3(Q)]. \end{aligned}$$

5.1 Points qui ne sont pas des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{q_1} \\ \frac{b^2}{q_1} \\ \frac{c^2}{q_1} \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{q_2} \\ -\frac{b^2}{q_2} \\ \frac{c^2}{q_2} \end{pmatrix}, \bar{C} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{q_3} \\ \frac{b^2}{q_3} \\ -\frac{c^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta} \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_3}{4\Delta}) \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_2}{4\Delta}) \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_3}{4\Delta}) \\ -\frac{\sqrt{3}b^2}{4\Delta} \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_1}{4\Delta}) \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_2}{4\Delta}) \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}q_1}{4\Delta}) \\ -\frac{\sqrt{3}c^2}{4\Delta} \end{pmatrix}.$$

$$\check{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_3}{4\Delta}\right) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_2}{4\Delta}\right) \end{pmatrix}, \check{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_3}{4\Delta}\right) \\ \frac{\sqrt{3}b^2}{4\Delta} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_1}{4\Delta}\right) \end{pmatrix}, \check{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_2}{4\Delta}\right) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}q_1}{4\Delta}\right) \\ \frac{\sqrt{3}c^2}{4\Delta} \end{pmatrix}.$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_3}{2a^2} \\ \frac{q_2}{2a^2} \end{pmatrix}, B_b = \begin{pmatrix} \frac{q_3}{2b^2} \\ 0 \\ \frac{q_1}{2b^2} \end{pmatrix}, C_c = \begin{pmatrix} \frac{q_2}{2c^2} \\ \frac{q_1}{2c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.1 Premier et deuxième points de Brocard Ω et Ω'

On pourra consulter [3]¹⁸ [1]¹⁹ et [8]²⁰.

Les points de Brocard ont été trouvés par Grelle en 1884.

On a $\omega_1(\Omega) = \pi - \gamma$, $\omega_2(\Omega) = \pi - \alpha$, $\omega_3(\Omega) = \pi - \beta$ et $\omega_1(\Omega') = \pi - \beta$, $\omega_2(\Omega') = \pi - \gamma$, $\omega_3(\Omega') = \pi - \alpha$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{c^2 a^2}{d_\Omega} \\ \frac{d_\Omega}{a^2 b^2} \\ \frac{d_\Omega}{b^2 c^2} \\ \frac{d_\Omega}{a^2 b^2} \end{pmatrix}, \text{ avec } d_\Omega = (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \text{ et :}$$

$$\Omega' = \begin{pmatrix} \frac{d_{\Omega'}}{a^2 b^2} \\ \frac{b^2 c^2}{d_{\Omega'}} \\ \frac{d_{\Omega'}}{c^2 a^2} \\ \frac{d_{\Omega'}}{a^2 b^2} \end{pmatrix}, \text{ avec } d_{\Omega'} = (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_\Omega.$$

5.2 Les 101 premiers points qui sont des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

Ils sont notés X_i , $i = 1, 2, \dots$ et les dénominateurs de leurs coordonnées aréolaires sont notés d_i , $i = 1, 2, \dots$. Les expressions de ces dénominateurs d_i en fonction de a , b , c et leurs valeurs en fonction des polynômes $d_{i,j}$ sont résumées en Annexe B. Les expressions de ces dénominateurs d_i en fonction de s , r , R sont résumées en Annexe C.

18. pp. 133-137 §14 “Les points, les triangles et le cercle de Brocard” où ces deux points sont notés Q et Q'

19. p. 94 où ces deux points sont notés Q et Q'

20. p. 175 “Brocard Points”

5.2.1 $X_1 \equiv I$ centre du cercle inscrit et points associés

On pourra consulter [5]²¹ [8]²².

$$X_1 \equiv I = \begin{pmatrix} \frac{a}{d_1} \\ \frac{b}{d_1} \\ \frac{c}{d_1} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_1 = (a + b + c) = d_{1,1}.$$

$$I_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c'}{a} \\ \frac{b'}{a} \end{pmatrix}, I_b = \begin{pmatrix} \frac{c'}{b} \\ 0 \\ \frac{a'}{b} \end{pmatrix}, I_c = \begin{pmatrix} \frac{b'}{c} \\ \frac{c'}{c} \\ \frac{a'}{c} \end{pmatrix}.$$

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{b+c} \\ \frac{c}{b+c} \end{pmatrix}, I_B = \begin{pmatrix} \frac{a}{c+a} \\ 0 \\ \frac{c}{c+a} \end{pmatrix}, I_C = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2a'} \\ \frac{b}{2a'} \\ \frac{c}{2a'} \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2b'} \\ -\frac{b}{2b'} \\ \frac{c}{2b'} \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2c'} \\ \frac{b}{2c'} \\ -\frac{c}{2c'} \end{pmatrix}.$$

$$J_{1a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b'}{a} \\ \frac{c'}{a} \end{pmatrix}, J_{1b} = \begin{pmatrix} -\frac{b'}{b} \\ 0 \\ \frac{c'}{b} \end{pmatrix}, J_{1c} = \begin{pmatrix} -\frac{c'}{c} \\ \frac{a'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_{2a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a'}{a} \\ \frac{c'}{a} \end{pmatrix}, J_{2b} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{b} \\ 0 \\ \frac{c'}{b} \end{pmatrix}, J_{2c} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{c} \\ -\frac{c'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_{3a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a'}{a} \\ -\frac{c'}{a} \end{pmatrix}, J_{3b} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{b} \\ 0 \\ -\frac{c'}{b} \end{pmatrix}, J_{3c} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{c} \\ \frac{b'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_{2A} \equiv J_{3A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{b-c} \\ -\frac{c}{b-c} \end{pmatrix}, J_{3B} \equiv J_{1B} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c-a} \\ 0 \\ \frac{c}{c-a} \end{pmatrix}, J_{1C} \equiv J_{2C} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Centres des cercles d'Apollonius (cf. ci-après) :

$$\frac{I_A + J_{2A}}{2} \equiv \frac{I_A + J_{3A}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{b^2 - c^2} \\ -\frac{c^2}{b^2 - c^2} \end{pmatrix}, \frac{I_B + J_{3B}}{2} \equiv \frac{I_B + J_{1B}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{c^2 - a^2} \\ 0 \\ \frac{c^2}{c^2 - a^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{I_C + J_{1C}}{2} \equiv \frac{I_C + J_{2C}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2 - b^2} \\ -\frac{b^2}{a^2 - b^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

21. p. 172

22. pp. 893-894 "Incenter"

$X_1 = \text{Ceva}(X_6, X_{55}) = \text{Ceva}(X_{65}, X_{73})$ (cf. $X_6, X_{55}, X_{65}, X_{73}$ ci-après).

5.2.2 $X_2 \equiv G$ centre de gravité ou barycentre et points associés

On pourra consulter [5]²³ [8]²⁴.

$$X_2 \equiv G \triangleq \frac{A+B+C}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_2} \\ \frac{1}{d_2} \\ \frac{1}{d_2} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_2 = 3.$$

$$G_A \triangleq \frac{B+C}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, G_B \triangleq \frac{C+A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, G_C \triangleq \frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$G_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3a^2+b^2-c^2}{6a^2} \\ \frac{3a^2-b^2+c^2}{6a^2} \end{pmatrix}, G_b = \begin{pmatrix} \frac{3b^2-c^2+a^2}{6b^2} \\ 0 \\ \frac{3b^2+c^2-c^2}{6b^2} \end{pmatrix}, G_c = \begin{pmatrix} \frac{3c^2+a^2-b^2}{6c^2} \\ \frac{3c^2-a^2+b^2}{6c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$X_2 = \text{Ceva}(X_1, X_9) = \text{Ceva}(X_3, X_6) = \text{Ceva}(X_{10}, X_{37})$
(cf. $X_3, X_6, X_9, X_{10}, X_{37}$ ci-après).

Si P et Q sont colinéaires avec $X_2 \equiv G$ on dit que P est le *complément* de Q ssi $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PG}$ et on dit que P est l'*anticomplément* de Q ssi $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$.

5.2.3 $X_3 \equiv O$ centre du cercle circonscrit et points associés

On pourra consulter [5]²⁵ [8]²⁶.

$$X_3 \equiv O = \begin{pmatrix} \frac{a^2 q_1}{d_3} \\ \frac{b^2 q_2}{d_3} \\ \frac{c^2 q_3}{d_3} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_3 = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = S = d_1 d'_3 = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$
et $d'_3 = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2abc$
 $= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3} = (2a')(2b')(2c')$.

$$O_a \equiv G_A, O_b \equiv G_B, O_c \equiv G_C.$$

On remarque que $\omega_1(O) = 2\alpha$, $\omega_2(O) = 2\beta$, $\omega_3(O) = 2\gamma$.

23. p. 172

24. pp. 221-222 "Centroid (Triangle)"

25. p. 172

26. p. 259 "Circumcenter"

5.2.4 $X_4 \equiv H$ orthocentre et points associés

On pourra consulter [5]²⁷ [8]²⁸.

$$X_4 \equiv H = \begin{pmatrix} \frac{q_2 q_3}{d_4} \\ \frac{q_3 q_1}{d_4} \\ \frac{q_1 q_2}{d_4} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_4 \text{ et} \\ d'_4 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\ &= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}. \end{aligned}$$

$$H_a \equiv A_a, H_b \equiv B_b, H_c \equiv C_c.$$

$$\begin{aligned} E_1 \triangleq \frac{A+H}{2} &= \begin{pmatrix} \frac{S+q_2 q_3}{2S} \\ \frac{q_3 q_1}{2S} \\ \frac{q_1 q_2}{2S} \end{pmatrix}, \quad E_2 \triangleq \frac{B+H}{2} = \begin{pmatrix} \frac{q_2 q_3}{2S} \\ \frac{S+q_3 q_1}{2S} \\ \frac{q_1 q_2}{2S} \end{pmatrix}, \\ E_3 \triangleq \frac{C+H}{2} &= \begin{pmatrix} \frac{q_2 q_3}{2S} \\ \frac{q_3 q_1}{2S} \\ \frac{S+q_1 q_2}{2S} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$X_4 = \text{Ceva}(X_1, X_{46}) = \text{Ceva}(X_5, X_{52}) = \text{Ceva}(X_6, X_{25}) = \text{Ceva}(X_{19}, X_{33})$
 $= \text{Ceva}(X_{51}, X_{53})$ (cf. $X_5, X_6, X_{19}, X_{25}, X_{33}, X_{46}, X_{51}, X_{53}$ ci-après).

Relation avec les points précédents

$$X_4 = 3 X_2 - 2 X_3.$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_4}{16 s^2 r^2} = \frac{d_3}{16 s^2 r^2}.$$

Donc $X_4 \in (X_2 X_3)$ (on verra qu'il s'agit de la droite d'Euler).

Le triangle $H_a H_b H_c \equiv A_a B_b C_c$ est le triangle orthique [8]²⁹.

Le triangle $E_1 E_2 E_3$ est le triangle d'Euler [3]³⁰.

5.2.5 $X_5 \equiv N$ centre du cercle d'Euler et points associés

On pourra consulter [5]³¹ [8]³².

Le cercle d'Euler est présenté ci-après.

27. pp. 172-173

28. pp. 1285-1286 "Orthocenter"

29. pp. 1285-1286 "Orthic Triangle"

30. p. 123

31. p. 173

32. p. 1235 "Nine-Point Center"

$$X_5 \equiv N = \begin{pmatrix} \frac{S-a^2 q_1}{2 d_5} \\ \frac{S-b^2 q_2}{2 d_5} \\ \frac{S-c^2 q_3}{2 d_5} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$d_5 = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_5 \text{ et} \\ d'_5 = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\ = d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}.$$

$$N_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2+q_3}{4 a^2} \\ \frac{a^2+q_2}{4 a^2} \end{pmatrix}, N_b = \begin{pmatrix} \frac{b^2+q_3}{4 b^2} \\ 0 \\ \frac{b^2+q_1}{4 b^2} \end{pmatrix}, N_c = \begin{pmatrix} \frac{c^2+q_2}{4 c^2} \\ \frac{c^2+q_1}{4 c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_5 = \frac{3X_2 - X_3}{2} = \frac{3X_2 + X_4}{4} = \frac{X_3 + X_4}{2}.$$

$$\text{On a } 2 = \frac{d_5}{8 s^2 r^2} = \frac{d_3}{8 s^2 r^2}.$$

Donc $X_5 \in (X_2 X_3) = (X_2 X_4)$, $X_5 \in (X_3 X_4)$.

5.2.6 $X_6 \equiv K$ point symédian ou point de Lemoine ou point de Grebe ou premier point puissance et points associés

On pourra consulter [5]³³ [8]³⁴.

$$X_6 \equiv K = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ \frac{b^2}{d_6} \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_6 = (a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,1}.$$

$$K_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2+b^2}{d_6} \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{CA} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{b^2+c^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{c^2+a^2}{d_6} \\ \frac{b^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le triangle $K_{AB}K_{BC}K_{CA}$ est directement semblable au triangle ABC [3]³⁵.

$$K_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{d_6} \\ \frac{c^2+a^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{AC} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{BA} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ \frac{b^2+c^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le triangle $K_{AC}K_{BA}K_{CB}$ est directement semblable au triangle ABC [3]³⁶.

33. p. 173

34. pp. 1067-1068 "Lemoine Point"

35. p. 129

36. p. 127

$$\text{Soient } K_{CB}^* \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_3}{d_6} \\ \frac{2c^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{AC}^* \triangleq \begin{pmatrix} \frac{2a^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{q_1}{d_6} \end{pmatrix}, K_{BA}^* \triangleq \begin{pmatrix} \frac{q_2}{d_6} \\ \frac{2b^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le triangle $K_{BA}^*K_{CB}^*K_{AC}^*$ est directement semblable au triangle ABC [3]³⁷.

On vérifie que $\overrightarrow{K_{AC}^*K_{CB}^*} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{K_{BA}^*K_{AC}^*} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{K_{CB}^*K_{BA}^*} \perp \overrightarrow{AB}$ (cf. ci-après).

$$\text{Soient } K_{BC}^* \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2b^2}{d_6} \\ \frac{q_2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{CA}^* \triangleq \begin{pmatrix} \frac{q_3}{d_6} \\ 0 \\ \frac{2c^2}{d_6} \end{pmatrix}, K_{AB}^* \triangleq \begin{pmatrix} \frac{2a^2}{d_6} \\ \frac{q_1}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le triangle $K_{CA}^*K_{AB}^*K_{BC}^*$ est directement semblable au triangle ABC .

On vérifie que $\overrightarrow{K_{AB}^*K_{BC}^*} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{K_{BC}^*K_{CA}^*} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{K_{CA}^*K_{AB}^*} \perp \overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{K_{AB}^*K_{BC}^*} = \overrightarrow{K_{AC}^*K_{CB}^*}$, $\overrightarrow{K_{BC}^*K_{CA}^*} = \overrightarrow{K_{BA}^*K_{AC}^*}$, $\overrightarrow{K_{CA}^*K_{AB}^*} = \overrightarrow{K_{CB}^*K_{BA}^*}$.

$$X_6 = \text{Ceva}(X_1, X_{43}) = \text{Ceva}(X_{31}, X_{41}) \text{ (cf. } X_{31}, X_{41}, X_{43} \text{ ci-après)}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_6 = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1 - 6rRX_2 - 2r^2X_3}{s^2 - r(r+4R)}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+4R) = \frac{1}{2}d_6.$$

5.2.7 $X_7 \equiv Ge$ point de Gergonne et points associés

On pourra consulter [5]³⁸ [8]³⁹.

$$X_7 \equiv Ge = \begin{pmatrix} \frac{(2b')(2c')}{d_7} \\ \frac{(2c')(2a')}{d_7} \\ \frac{(2a')(2b')}{d_7} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$d_7 = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) = -d_{2,1} + 2d_{2,2}.$$

$$Ge_A \equiv I_a, Ge_B \equiv I_b, Ge_C \equiv I_c.$$

$$X_7 = \text{Ceva}(X_1, X_{57}) \text{ (cf. } X_{57} \text{ ci-après)}.$$

Relation avec les points précédents

37. p. 132

38. p. 173

39. p. 735 "Gergonne Point"

$$X_7 = \frac{2(r+2R)X_1+3rX_2-4rX_3}{r+4R}.$$

$$\text{On a } r+4R = \frac{d_7}{4r}.$$

5.2.8 $X_8 \equiv Na$ point de Nagel et points associés

On pourra consulter [5]⁴⁰ [8]⁴¹.

$$X_8 \equiv Na = \left(\begin{array}{c} \frac{2a'}{d_8} \\ \frac{2b'}{d_8} \\ \frac{2c'}{d_8} \end{array} \right), \text{ avec : } d_8 = (a+b+c) = d_1 = d_{1,1}.$$

$$Na_A \equiv J_{1a}, Na_B \equiv J_{2b}, Na_C \equiv J_{3c}.$$

$$X_8 = \text{Ceva}(X_1, X_{40}) = \text{Ceva}(X_{10}, X_{72}) \text{ (cf. } X_{10}, X_{40}, X_{72} \text{ ci-après)}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_8 = -2X_1 + 3X_2.$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_8}{2s}.$$

$$\text{Donc } X_8 \in (X_1X_2).$$

5.2.9 $X_9 \equiv M$ “Mittenpunkt”

On pourra consulter [5]⁴² [8]⁴³.

$$X_9 \equiv M = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2a')}{d_9} \\ \frac{b(2b')}{d_9} \\ \frac{c(2c')}{d_9} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_9 = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) = d_7 = -d_{2,1} + 2d_{2,2}.$$

$$X_9 = \text{Ceva}(X_{37}, X_{71}) \text{ (cf. } X_{37}, X_{71} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_9 = \frac{-(r+2R)X_1+6RX_2+2rX_3}{r+4R} = \frac{s^2X_1+[-s^2+r(r+4R)]X_6}{r(r+4R)} = \frac{3X_2-X_7}{2}.$$

$$\text{On a } r+4R = \frac{d_9}{4r}.$$

$$\text{Donc } X_9 \in (X_1X_6), X_9 \in (X_2X_7).$$

40. p. 173

41. pp. 1213-1214 “Nagel Point”

42. p. 173

43. p. 1178 “Mittenpunkt”

5.2.10 $X_{10} \equiv Sp$ point ou centre de Spieker

On pourra consulter [5]⁴⁴ [8]⁴⁵.

$$X_{10} \equiv Sp = \left(\begin{array}{c} \frac{b+c}{2d_{10}} \\ \frac{c+a}{2d_{10}} \\ \frac{a+b}{2d_{10}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{10} = (a+b+c) = d_1 = d_{1,1}.$$

$X_{10} = \text{Ceva}(X_{42}, X_{71})$ (cf. X_{42}, X_{71} ci-après).

Relations avec les points précédents

$$X_{10} = \frac{-X_1+3X_2}{2} = \frac{3X_2+X_8}{4} = \frac{rX_4+(r+4R)X_9}{2(r+2R)}.$$

On a $2 = \frac{d_{10}}{s}$.

Donc $X_{10} \in (X_1X_2), X_{10} \in (X_2X_8), X_{10} \in (X_4X_9)$.

5.2.11 $X_{11} \equiv F$ point de Feuerbach

On pourra consulter [5]⁴⁶ [8]⁴⁷.

$$X_{11} \equiv F = \left(\begin{array}{c} \frac{(2a')(b-c)^2}{2d_{11}} \\ \frac{(2b')(c-a)^2}{2d_{11}} \\ \frac{(2c')(a-b)^2}{2d_{11}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{11} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 3abc \\ = d_{3,1} - d_{3,2} + 3d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{11} = \frac{RX_1-3rX_2+rX_3}{-2r+R} = \frac{RX_1-2rX_5}{-2r+R}.$$

On a $-2r + R = \frac{d_{11}}{4sr}$.

Donc $X_{11} \in (X_1X_5)$.

5.2.12 X_{12}

On pourra consulter [5]⁴⁸.

44. p. 173

45. p. 1702 "Spieker Center"

46. p. 174

47. p. 627 "Feuerbach Point"

48. p. 174

$$X_{12} = \left(\begin{array}{c} \frac{(2b')(2c')(b+c)^2}{2d_{12}} \\ \frac{(2c')(2a')(c+a)^2}{2d_{12}} \\ \frac{(2a')(2b')(a+b)^2}{2d_{12}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + abc(a+b+c) = d_1 d'_{12} \\ &= -d_{4,1} + 2d_{4,3} + d_{4,4} \text{ et } d'_{12} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2c + c^2a + a^2b) \\ &+ (bc^2 + ca^2 + ab^2) - abc = -d_{3,1} + d_{3,2} - d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{12} = \frac{R X_1 + 3r X_2 - r X_3}{2r + R} = \frac{R X_1 + 2r X_5}{2r + R}.$$

$$\text{On a } 2r + R = \frac{d_{12}}{8s^2r} = \frac{d'_{12}}{4sr}.$$

$$\text{Donc } X_{12} \in (X_1 X_5).$$

5.2.13 $X_{13} \equiv X$ point de Fermat ou premier point de Fermat ou point de Torricelli ou premier centre isogone

On pourra consulter [5]⁴⁹ [8]⁵⁰.

La notion de centre isogone a été utilisée par A. Gérardin en 1916 [4] alors que A. Bouvier et M. George parlent de figures isogones, i.e. ayant les mêmes angles [1]⁵¹.

$$X_{13} \equiv X = \left(\begin{array}{c} \frac{2S-3a^2 q_1+4\sqrt{3}a^2 \Delta}{d_{13}} \\ \frac{2S-3b^2 q_2+4\sqrt{3}b^2 \Delta}{d_{13}} \\ \frac{2S-3c^2 q_3+4\sqrt{3}c^2 \Delta}{d_{13}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{13} = 3d_3 + 4\sqrt{3}d_6 \Delta = 3(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 4\sqrt{3}d_{2,1} \Delta.$$

$$X_{13} = \text{Ceva}(X_{15}, X_{62}) \text{ (cf. } X_{15}, X_{62} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{13} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1+2r(2\sqrt{3}s-3R)X_2-2r(\sqrt{3}s+r)X_3}{s^2+r[2\sqrt{3}s-(r+4R)]}.$$

$$\text{On a } s^2 + r[2\sqrt{3}s - (r + 4R)] = \frac{\sqrt{3}d_{13}}{24sr}.$$

49. p. 174

50. pp. 623-624 "Fermat Point" et p.932 "Isogonic Centers"

51. p. 411 "Isogones"

5.2.14 $X_{14} \equiv X'$ second point de Fermat ou second centre isogone

On pourra consulter [5]⁵² [8]⁵³.

$$X_{14} \equiv X' = \left(\begin{array}{c} \frac{2S-3a^2q_1-4\sqrt{3}a^2\Delta}{d_{14}} \\ \frac{2S-3b^2q_2-4\sqrt{3}b^2\Delta}{d_{14}} \\ \frac{2S-3c^2q_3-4\sqrt{3}c^2\Delta}{d_{14}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{14} = 3d_3 - 4\sqrt{3}d_6\Delta = 3(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) - 4\sqrt{3}d_{2,1}\Delta.$$

$X_{14} = \text{Ceva}(X_{16}, X_{61})$ (cf. X_{16}, X_{61} ci-après).

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{14} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-2r(2\sqrt{3}s+3R)X_2+2r(\sqrt{3}s-r)X_3}{s^2-r[2\sqrt{3}s+(r+4R)]} \\ &= \frac{2\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]X_6-\{\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]+6sr\}X_{13}}{\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]-6sr}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r[2\sqrt{3}s + (r + 4R)] = -\frac{\sqrt{3}d_{14}}{24sr}.$$

Donc $X_{14} \in (X_6X_{13})$.

5.2.15 $X_{15} \equiv S$ premier point isodynamique

On pourra consulter [5]⁵⁴ [8]⁵⁵.

$$X_{15} \equiv S = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(\sqrt{3}q_1+4\Delta)}{d_{15}} \\ \frac{b^2(\sqrt{3}q_2+4\Delta)}{d_{15}} \\ \frac{c^2(\sqrt{3}q_3+4\Delta)}{d_{15}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{15} = \sqrt{3}d_3 + 4d_6\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3}d_{13} = \sqrt{3}(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 4d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{15} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6rRX_2+2r(\sqrt{3}s-r)X_3}{s^2+r[2\sqrt{3}s-(r+4R)]} = \frac{4\sqrt{3}srX_2+\{s^2-r[2\sqrt{3}s+(r+4R)]\}X_{14}}{s^2+r[2\sqrt{3}s-(r+4R)]} \\ &= \frac{2\sqrt{3}srX_3+[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2+[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + r[2\sqrt{3}s - (r + 4R)] = \frac{d_{15}}{8sr}.$$

Donc $X_{15} \in (X_2X_{14}), X_{15} \in (X_3X_6)$.

52. p. 174

53. p.932 "Isogonic Centers"

54. p. 174

55. pp. 930-931 "Isodynamic Points"

5.2.16 $X_{16} \equiv S'$ second point isodynamique

On pourra consulter [5]⁵⁶ [8]⁵⁷.

$$X_{16} \equiv S' = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(-\sqrt{3}q_1+4\Delta)}{d_{16}} \\ \frac{b^2(-\sqrt{3}q_2+4\Delta)}{d_{16}} \\ \frac{c^2(-\sqrt{3}q_3+4\Delta)}{d_{16}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{16} = -\sqrt{3}d_3 + 4d_6\Delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}d_{14} = -\sqrt{3}(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 4d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{16} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6rRX_2-2r(\sqrt{3}s+r)X_3}{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r} = \frac{-4\sqrt{3}srX_2+\{s^2+r[2\sqrt{3}s-(r+4R)]\}X_{13}}{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}srX_3+[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r[2\sqrt{3}s + (r + 4R)] = \frac{d_{16}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{16} \in (X_2X_{13}), X_{16} \in (X_3X_6).$$

5.2.17 X_{17} premier point de Napoléon ou point de Napoléon extérieur

On pourra consulter [5]⁵⁸ [8]⁵⁹.

$$X_{17} = \left(\begin{array}{c} \frac{2S-a^2q_1+4\sqrt{3}a^2\Delta}{d_{17}} \\ \frac{2S-b^2q_2+4\sqrt{3}b^2\Delta}{d_{17}} \\ \frac{2S-c^2q_3+4\sqrt{3}c^2\Delta}{d_{17}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{17} = 5d_3 + 4\sqrt{3}d_6\Delta = 5(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 4\sqrt{3}d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{17} &= \frac{\sqrt{3}[s^2+r(r+2R)]X_1+6(2s-\sqrt{3}R)rX_2-2(s+\sqrt{3}r)rX_3}{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{4srX_3+\sqrt{3}\{s^2+[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r\}X_{13}}{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{4srX_4+\sqrt{3}\{s^2+[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r\}X_{15}}{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{16srX_5+\sqrt{3}\{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r\}X_{14}}{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \sqrt{3}s^2 + [10s - \sqrt{3}(r + 4R)]r = \frac{d_{17}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{17} \in (X_3X_{13}), X_{17} \in (X_4X_{15}), X_{17} \in (X_5X_{14}).$$

56. p. 174

57. pp. 930-931 "Isodynamic Points"

58. pp. 174-175

59. pp. 1214-1215 "Napoleon Points"

5.2.18 X_{18} second point de Napoléon ou point de Napoléon intérieur

On pourra consulter [5]⁶⁰ [8]⁶¹.

$$X_{18} = \left(\begin{array}{c} \frac{2S-a^2 q_1-4\sqrt{3}a^2 \Delta}{d_{18}} \\ \frac{2S-b^2 q_2-4\sqrt{3}b^2 \Delta}{d_{18}} \\ \frac{2S-c^2 q_3-4\sqrt{3}c^2 \Delta}{d_{18}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{18} = 5d_3 - 4\sqrt{3}d_6 \Delta = 5(-d_{4,1} + 2d_{4,3}) - 4\sqrt{3}d_{2,1} \Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{18} &= \frac{\sqrt{3}[s^2+r(r+2R)]X_1-6(2s+\sqrt{3}R)rX_2+2(s-\sqrt{3}r)rX_3}{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{-4srX_3+\sqrt{3}\{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r\}X_{14}}{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{-4srX_4+\sqrt{3}\{s^2-[2\sqrt{3}s+(r+4R)]r\}X_{16}}{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{-16srX_5+\sqrt{3}\{s^2+[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r\}X_{13}}{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{2\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]X_6-\{\sqrt{3}s^2-[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{17}}{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \sqrt{3}s^2 - [10s + \sqrt{3}(r + 4R)]r = -\frac{d_{18}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{18} \in (X_3X_{14}), X_{18} \in (X_4X_{16}), X_{18} \in (X_5X_{13}), X_{18} \in (X_6X_{17}).$$

5.2.19 $X_{19} \equiv Cl$ point de Clawson ou point crucial

On pourra consulter [5]⁶².

$$X_{19} \equiv Cl = \left(\begin{array}{c} \frac{a q_2 q_3}{d_{19}} \\ \frac{b q_3 q_1}{d_{19}} \\ \frac{c q_1 q_2}{d_{19}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{19} = (a^5 + b^5 + c^5) - (b^4c + c^4a + a^4b) - (bc^4 + ca^4 + ab^4) + 2abc(bc + ca + ab) = d_{5,1} - d_{5,2} + 2d_{5,5}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{19} &= \frac{-[s^2-(r+2R)^2]X_1-6(r+2R)RX_2+2[s^2-r(r+2R)]X_3}{s^2-r(r+6R)-8R^2} \\ &= \frac{-2s^2RX_4+[s^2-(r+2R)^2](r+4R)X_9}{[s^2-r(r+6R)-8R^2](r+2R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r(r + 6R) - 8R^2 = -\frac{d_{19}}{16sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{19} \in (X_4X_9).$$

60. p. 175

61. pp. 1214-1215 "Napoleon Points"

62. p. 175

5.2.20 $X_{20} \equiv L$ point de de Longchamp

On pourra consulter [5]⁶³ [8]⁶⁴.

$$X_{20} \equiv L = \left(\begin{array}{c} \frac{4a^2 q_1 - S}{d_{20}} \\ \frac{4b^2 q_2 - S}{d_{20}} \\ \frac{4c^2 q_3 - S}{d_{20}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{20} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{20} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{20} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c$$

$$= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{20} = \frac{2(r+2R)X_1 - (r+4R)X_7}{r} = -3X_2 + 4X_3 = 2X_3 - X_4.$$

$$\text{On a } r = \frac{d_{20}}{16s^2r} = \frac{d'_{20}}{8sr}.$$

Donc $X_{20} \in (X_1 X_7)$, $X_{20} \in (X_2 X_3)$, $X_{20} \in (X_3 X_4)$.

5.2.21 $X_{21} \equiv Sc$ point de Schiffler

On pourra consulter [5]⁶⁵ [8]⁶⁶.

$$X_{21} \equiv Sc = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2a')(c+a)(a+b)}{d_{21}} \\ \frac{b(2b')(a+b)(b+c)}{d_{21}} \\ \frac{c(2c')(b+c)(c+a)}{d_{21}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{21} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3 a b c (a + b + c) = d_1 d'_{21}$$

$$= -d_{4,1} + 2d_{4,3} + 3d_{4,4} \text{ et } d'_{21} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b)$$

$$+ (b c^2 + c a^2 + a b^2) + a b c = -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3}.$$

$X_{21} = \text{Ceva}(X_1, X_3) = \text{Ceva}(X_9, X_{55})$ (cf. X_{55} ci-après).

Relation avec les points précédents

$$X_{21} = \frac{3R X_2 + 2r X_3}{2r + 3R}.$$

$$\text{On a } 2r + 3R = \frac{d_{21}}{8s^2r} = \frac{d'_{21}}{4sr}.$$

Donc $X_{21} \in (X_2 X_3)$.

63. p. 175

64. p. 402 “de Longchamp Point”

65. p. 175

66. p. 1597 “Schiffler Point” noté S

5.2.22 $X_{22} \equiv Ex$ point d'Exeter

On pourra consulter [5]⁶⁷ [8]⁶⁸.

$$X_{22} \equiv Ex = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (b^4 + c^4 - a^4)}{b^2 (c^4 + a^4 - b^4)} \\ \frac{d_{22}}{c^2 (a^4 + b^4 - c^4)} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{22} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) \\ = -d_{6,1} + d_{6,3}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{22} = \frac{-3R^2 X_2 + [s^2 - r(r+4R)] X_3}{s^2 - r(r+4R) - 3R^2}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+4R) - 3R^2 = \frac{d_{22}}{32s^2r^2}.$$

Donc $X_{22} \in (X_2X_3)$.

5.2.23 X_{23} point distant

On pourra consulter [5]⁶⁹ [8]⁷⁰.

$$X_{23} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (-a^4 + b^4 - b^2 c^2 + c^4)}{b^2 (-b^4 + c^4 - c^2 a^2 + a^4)} \\ \frac{d_{23}}{c^2 (-c^4 + a^4 - a^2 b^2 + b^4)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (d_6 q_1 - 3b^2 c^2)}{b^2 (d_6 q_2 - 3c^2 a^2)} \\ \frac{d_{23}}{c^2 (d_6 q_3 - 3a^2 b^2)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (b^2 c^2 - q_2 q_3)}{b^2 (c^2 a^2 - q_3 q_1)} \\ \frac{d_{23}}{c^2 (a^2 b^2 - q_1 q_2)} \end{array} \right),$$

avec :

$$d_{23} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 3a^2 b^2 c^2 \\ = -d_{6,1} + d_{6,3} - 3d_{6,7} = -J^2 a^2 b^2 c^2.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{23} = \frac{-9R^2 X_2 + 2[s^2 - r(r+4R)] X_3}{2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2}.$$

$$\text{On } 2[s^2 - r(r+4R)] - 9R^2 = \frac{d_{23}}{16s^2r^2}.$$

Donc $X_{23} \in (X_2X_3)$.

5.2.24 X_{24}

On pourra consulter [5]⁷¹.

67. p. 175

68. p. 593 "Exeter Point"

69. p. 175

70. p. 610 "Far-Out Point"

71. p. 176

$$X_{24} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (S-2a^2 q_1) (q_1^2-S)}{2 d_{24}} \\ \frac{b^2 (S-2b^2 q_2) (q_2^2-S)}{2 d_{24}} \\ \frac{c^2 (S-2c^2 q_3) (q_3^2-S)}{2 d_{24}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 q_2 q_3 (q_1^2-S)}{2 d_{24} q_1 (q_2^2-S)} \\ \frac{b^2 q_3 q_1 (q_2^2-S)}{2 d_{24} q_2 (q_3^2-S)} \\ \frac{c^2 q_1 q_2 (q_3^2-S)}{2 d_{24} q_3 (q_1^2-S)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 q_2 q_3 (2b^2 c^2-S)}{d_{24}} \\ \frac{b^2 q_3 q_1 (2c^2 a^2-S)}{d_{24}} \\ \frac{c^2 q_1 q_2 (2a^2 b^2-S)}{d_{24}} \end{array} \right),$$

avec :

$$\begin{aligned} d_{24} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\ &+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 6a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\ &- 6a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{24} \\ &= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 6d_{10,9} - 6d_{10,13} \text{ et} \\ \delta_{24} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) - 4a^2 b^2 c^2 \\ &= -d_{6,1} + d_{6,3} - 4d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relation avec les points précédents

$$X_{24} = \frac{-3R^2 X_2 + [s^2 - r(r+4R) - 2R^2] X_3}{s^2 - r(r+4R) - 5R^2}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+4R) - 5R^2 = \frac{d_{24}}{512 s^4 r^4} = \frac{\delta_{24}}{32 s^2 r^2}.$$

Donc $X_{24} \in (X_2 X_3)$.

5.2.25 X_{25}

On pourra consulter [5]⁷².

$$X_{25} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 q_2 q_3}{d_{25}} \\ \frac{b^2 q_3 q_1}{d_{25}} \\ \frac{c^2 q_1 q_2}{d_{25}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{25} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) + 6a^2 b^2 c^2 \\ &= d_{6,1} - d_{6,3} + 6d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relation avec les points précédents

$$X_{25} = \frac{-6R^2 X_2 + [s^2 - r(r+4R)] X_3}{s^2 - r(r+4R) - 6R^2}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+4R) - 6R^2 = -\frac{d_{25}}{32 s^2 r^2}.$$

Donc $X_{25} \in (X_2 X_3)$.

5.2.26 X_{26} centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel

On pourra consulter [5]⁷³.

72. p. 176

73. p. 176

$$X_{26} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^4 q_1 (S-q_1^2)}{2 d_{26}} \\ \frac{b^4 q_2 (S-q_2^2)}{2 d_{26}} \\ \frac{c^4 q_3 (S-q_3^2)}{2 d_{26}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{26} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\ &+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 4a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\ &- 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{26} \\ &= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 4d_{10,9} - 2d_{10,13} \text{ et} \\ \delta_{26} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 2a^2 b^2 c^2 \\ &= q_1 q_2 q_3 = -d_{6,1} + d_{6,3} - 2d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{26} &= \frac{-3R^2 X_2 + [s^2 - r(r+4R) - R^2] X_3}{s^2 - (r+2R)^2} = \frac{3[s^2 - r(r+4R) - 3R^2] X_2 - [s^2 - r(r+4R) - R^2] X_4}{2[s^2 - (r+2R)^2]} \\ &= \frac{[s^2 - r(r+4R) - 3R^2] X_3 - R^2 X_4}{s^2 - (r+2R)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - (r+2R)^2 = \frac{d_{26}}{512 s^4 r^4} = \frac{\delta_{26}}{32 s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{26} \in (X_2 X_3) = (X_2 X_4), X_{26} \in (X_3 X_4).$$

5.2.27 X_{27}

On pourra consulter [5] ⁷⁴.

$$X_{27} = \left(\begin{array}{c} \frac{(c+a)(a+b) q_2 q_3}{d_{27}} \\ \frac{(a+b)(b+c) q_3 q_1}{d_{27}} \\ \frac{(b+c)(c+a) q_1 q_2}{d_{27}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{27} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\ &- a b c (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 2(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) \\ &+ 2a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 6a^2 b^2 c^2 \\ &= d_{6,1} - d_{6,2} - d_{6,3} - d_{6,4} + 2d_{6,5} + 2d_{6,6} + 6d_{6,7}. \end{aligned}$$

$$X_{27} = \text{Ceva}(X_4, X_{19}).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{27} = \frac{-3[s^2 + (r+2R)^2] X_2 + 4s^2 X_3}{s^2 - 3(r+2R)^2} = \frac{-3[s^2 - (r+2R)^2] X_2 - 2s^2 X_4}{s^2 - 3(r+2R)^2}.$$

$$\text{On } s^2 - 3(r+2R)^2 = -\frac{d_{27}}{16 s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{27} \in (X_2 X_3) = (X_2 X_4).$$

74. p. 176

5.2.28 X_{28}

On pourra consulter [5] ⁷⁵.

$$X_{28} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(c+a)(a+b)q_2q_3}{d_{28}} \\ \frac{b(a+b)(b+c)q_3q_1}{d_{28}} \\ \frac{c(b+c)(c+a)q_1q_2}{d_{28}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{28} &= (a^7+b^7+c^7)+(b^6c+c^6a+a^6b)+(bc^6+c^6a+ab^6)-(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) \\ &- abc(a^4+b^4+c^4) - (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) - (b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &- abc(b^3c+c^3a+a^3b) - abc(bc^3+c^3a^3+ab^3) - (b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &+ 2abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 6a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1d'_{28} \\ &= d_{7,1} + d_{7,2} - d_{7,3} - d_{7,4} - d_{7,5} - d_{7,6} + 2d_{7,7} + 6d_{7,8} \text{ et} \\ d'_{28} &= (a^6+b^6+c^6) - (b^4c^2+c^4a^2+a^4b^2) - abc(a^3+b^3+c^3) \\ &- (b^2c^4+c^4a^2+a^2b^4) + abc(b^2c+c^2a+a^2b) + abc(bc^2+ca^2+ab^2) \\ &+ 4a^2b^2c^2 = d_{6,1} - d_{6,3} - d_{6,4} + d_{6,6} + 4d_{6,7}. \end{aligned}$$

$$X_{28} = \text{Ceva}(X_{19}, X_{25}) = \text{Ceva}(X_{34}, X_{56}) \text{ (cf. } X_{34}, X_{56} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{28} &= \frac{[s^2-(r+2R)^2]X_1+[s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{19}}{2[s^2-r(r+5R)-6R^2]} = \frac{-3(r+2R)RX_2+[s^2-r(r+2R)]X_3}{s^2-r(r+5R)-6R^2} \\ &= \frac{-rRX_4+[s^2-r(r+4R)-6R^2]X_{25}}{s^2-r(r+5R)-6R^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r(r + 5R) - 6R^2 = -\frac{d_{28}}{64s^3r^2} = -\frac{d'_{28}}{32s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{28} \in (X_1X_{19}), X_{28} \in (X_2X_3), X_{28} \in (X_4X_{25}).$$

5.2.29 X_{29}

On pourra consulter [5] ⁷⁶.

$$X_{29} = \left(\begin{array}{c} \frac{(2a')(c+a)(a+b)q_2q_3}{d_{29}} \\ \frac{(2b')(a+b)(b+c)q_3q_1}{d_{29}} \\ \frac{(2c')(b+c)(c+a)q_1q_2}{d_{29}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

75. p. 176

76. p. 176

$$\begin{aligned}
d_{29} &= -(a^7 + b^7 + c^7) - 2(b^6 c + c^6 a + a^6 b) - 2(bc^6 + c a^6 + a b^6) \\
&- a b c (a^4 + b^4 + c^4) + 3(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + 2 a b c (b^3 c + c^3 a + a^3 b) \\
&+ 2 a b c (b c^3 + c a^3 + a b^3) + 3(b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) + 2 a b c (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
&- 2 a^2 b^2 c^2 (a + b + c) = d_1 d'_{29} = -d_{7,1} - 2 d_{7,2} - d_{7,4} + 3 d_{7,5} + 2 d_{7,6} - 2 d_{7,8} \\
\text{et } d'_{29} &= -(a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) \\
&+ (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + a b c (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) \\
&+ 2(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - 2 a^2 b^2 c^2 = -d_{6,1} - d_{6,2} + d_{6,3} + d_{6,4} + 2 d_{6,5} - 2 d_{6,7}.
\end{aligned}$$

$$X_{29} = \text{Ceva}(X_1, X_4).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{29} &= \frac{3(s^2+r^2-4R^2)X_2-4r(r+2R)X_3}{3s^2-r(r+8R)-12R^2} \\
&= \frac{-[s^2-3r(r+4R)-12R^2]X_{27}+4[s^2-r(r+5R)-6R^2]X_{28}}{3s^2-r(r+8R)-12R^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } 3s^2 - r(r + 8R) - 12R^2 = \frac{d_{29}}{32s^3r^2} = \frac{d'_{29}}{16s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{29} \in (X_2X_3), X_{29} \in (X_{27}X_{28}).$$

5.2.30 X_{30} point à l'infini d'Euler

On pourra consulter [5] ⁷⁷.

Attention : ce point n'étant pas à distance fini est tel que la somme de ses coordonnées aréolaires n'est pas égale à un mais à zéro.

$$X_{30} = \begin{pmatrix} S - 3a^2q_1 \\ S - 3b^2q_2 \\ S - 3c^2q_3 \end{pmatrix} \text{ et } d_{30} = 0.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{30} &= X_2 - X_3 = \frac{\sqrt{3}\{s^2+r[2\sqrt{3}s-(r+4R)]\}}{12sr} (X_{13} - X_{15}) \\
&= -\frac{\sqrt{3}\{s^2-r[2\sqrt{3}s+(r+4R)]\}}{12sr} (X_{14} - X_{16}).
\end{aligned}$$

$$\text{On a } 0 = d_{30}.$$

$$\text{Donc } X_{30} \in (X_2X_3), X_{30} \in (X_{13}X_{15}), X_{30} \in (X_{14}X_{16}).$$

5.2.31 X_{31} deuxième point puissance

On pourra consulter [5] ⁷⁸.

77. p. 176

78. p. 176

$$X_{31} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^3}{d_{31}} \\ \frac{b^3}{d_{31}} \\ \frac{c^3}{d_{31}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{31} = (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{31} = \frac{(s^2+r^2)X_1-6rR X_2-4r^2 X_3}{s^2-3r(r+2R)} = \frac{(s^2+r^2)X_1-2r(2r+3R)X_{21}}{s^2-3r(r+2R)}.$$

$$\text{On a } s^2 - 3r(r+2R) = \frac{d_{31}}{2s}.$$

Donc $X_{31} \in (X_1 X_{21})$.

5.2.32 X_{32} troisième point puissance

On pourra consulter [5]⁷⁹.

$$X_{32} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^4}{d_{32}} \\ \frac{b^4}{d_{32}} \\ \frac{c^4}{d_{32}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{32} = (a^4 + b^4 + c^4) = d_{4,1}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{32} = \frac{[s^2-r(r+4R)][s^2+r(r+2R)]X_1-6[s^2-r(r+4R)]rR X_2-2[3s^2-r(r+4R)]r^2 X_3}{s^4-2s^2r(3r+4R)+r^2(r+4R)^2}$$

$$= \frac{-4s^2r^2 X_3+[s^2-r(r+4R)]^2 X_6}{s^4-2s^2r(3r+4R)+r^2(r+4R)^2}.$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2r(3r+4R) + r^2(r+4R)^2 = \frac{d_{32}}{2}.$$

Donc $X_{32} \in (X_3 X_6)$.

5.2.33 X_{33}

On pourra consulter [5]⁸⁰.

$$X_{33} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2a')q_2q_3}{d_{33}} \\ \frac{b(2b')q_3q_1}{d_{33}} \\ \frac{c(2c')q_1q_2}{d_{33}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{33} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) - 2abc(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$+ (b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) + 2abc(b^2c + c^2a + a^2b) + 2abc(bc^2 + ca^2 + ab^2)$$

$$- 6a^2b^2c^2 = -d_{6,1} + d_{6,3} - 2d_{6,4} + 2d_{6,6} - 6d_{6,7}.$$

79. p. 176

80. p. 176

Relations avec les points précédents

$$X_{33} = \frac{[s^2-(r+2R)^2]X_1+6rRX_2-4rRX_3}{s^2-r(r+2R)-4R^2} = \frac{[s^2-(r+2R)^2]X_1+2rRX_4}{s^2-r(r+2R)-4R^2}$$

$$= \frac{-[s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{19}+2[s^2-r(r+4R)-6R^2]X_{25}}{s^2-r(r+2R)-4R^2}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r + 2R) - 4R^2 = \frac{d_{33}}{32s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{33} \in (X_1X_4), X_{33} \in (X_{19}X_{25}).$$

5.2.34 X_{34}

On pourra consulter [5]⁸¹.

$$X_{34} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2b')(2c')q_2q_3}{d_{34}} \\ \frac{b(2c')(2a')q_3q_1}{d_{34}} \\ \frac{c(2a')(2b')q_1q_2}{d_{34}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{34} = (a^7 + b^7 + c^7) + (b^6c + c^6a + a^6b) + (bc^6 + ca^6 + ab^6)$$

$$- (b^5c^2 + c^5a^2 + a^5b^2) - 2abc(a^4 + b^4 + c^4) - (b^2c^5 + c^2a^5 + a^2b^5)$$

$$- (b^4c^3 + c^4a^3 + a^4b^3) - abc(b^3c + c^3a + a^3b) - abc(bc^3 + ca^3 + ab^3)$$

$$- (b^3c^4 + c^3a^4 + a^3b^4) + 4abc(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + 2a^2b^2c^2(a + b + c)$$

$$= d_1d'_{34} = d_{7,1} + d_{7,2} - d_{7,3} - 2d_{7,4} - d_{7,5} - d_{7,6} + 4d_{7,7} + 2d_{7,8} \text{ et}$$

$$d'_{34} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) - 2abc(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$- (b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) + 2abc(b^2c + c^2a + a^2b) + 2abc(bc^2 + ca^2 + ab^2)$$

$$- 2a^2b^2c^2 = d_{6,1} - d_{6,3} - 2d_{6,4} + 2d_{6,6} - 2d_{6,7}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{34} = \frac{[s^2-(r+2R)^2]X_1-6rRX_2+4rRX_3}{s^2-r(r+6R)-4R^2} = \frac{[s^2-(r+2R)^2]X_1-2rRX_4}{s^2-r(r+6R)-4R^2}$$

$$= \frac{[s^2-(r+2R)^2][s^2-r(r+4R)]X_6+r(r+2R)[s^2-r(r+6R)-4R^2]X_{19}}{s^2[s^2-r(r+6R)-8R^2]}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r + 6R) - 4R^2 = -\frac{d_{34}}{64s^3r^2} = -\frac{d'_{34}}{32s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{34} \in (X_1X_4), X_{34} \in (X_6X_{19}).$$

5.2.35 X_{35}

On pourra consulter [5]⁸².

81. p. 176

82. p. 176

$$X_{35} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 (q_1 + bc)}{d_{35}} \\ \frac{b^2 (q_2 + ca)}{d_{35}} \\ \frac{c^2 (q_3 + ab)}{d_{35}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 [(2s)(2a') - bc]}{d_{35}} \\ \frac{b^2 [(2s)(2b') - ca]}{d_{35}} \\ \frac{c^2 [(2s)(2c') - ab]}{d_{35}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{35} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a + b + c) = d_{12} = d_1 d'_{35} \\ &= -d_{4,1} + 2d_{4,3} + d_{4,4} \text{ et } d'_{35} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) \\ &+ (bc^2 + ca^2 + ab^2) - abc = d'_{12} = -d_{3,1} + d_{3,2} - d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{35} &= \frac{R X_1 + 2r X_3}{2r + R} = -\frac{[2R X_{10} - (2r + 3R) X_{21}]}{2r + R} \\ &= \frac{2[s^2 - r(r + 4R) - 5R^2]r X_{24} + [s^2 - r(r + 2R) - 4R^2]R X_{33}}{[s^2 - (r + 2R)^2](2r + R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2r + R = \frac{d_{35}}{8s^2 r} = \frac{d_{12}}{8s^2 r} = \frac{d'_{35}}{4sr} = \frac{d'_{12}}{4sr}.$$

$$\text{Donc } X_{35} \in (X_1 X_3), X_{35} \in (X_{10} X_{21}), X_{35} \in (X_{24} X_{33}).$$

5.2.36 X_{36}

On pourra consulter [5]⁸³.

$$X_{36} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 (bc - q_1)}{d_{36}} \\ \frac{b^2 (ca - q_2)}{d_{36}} \\ \frac{c^2 (ab - q_3)}{d_{36}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{36} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a + b + c) = d_1 d'_{36} \\ &= d_{4,1} - 2d_{4,3} + d_{4,4} \text{ et } d'_{36} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) \\ &- (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 3abc = d_{11} = d_{3,1} - d_{3,2} + 3d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{36} = \frac{-R X_1 + 2r X_3}{2r - R} = \frac{2[s^2 - r(r + 4R) - 5R^2]r X_{24} - [s^2 - r(r + 6R) - 4R^2]R X_{34}}{[s^2 - (r + 2R)^2](2r - R)}$$

$$\text{On a } 2r - R = -\frac{d_{36}}{8s^2 r} = -\frac{d'_{36}}{4sr} = -\frac{d_{11}}{4sr}.$$

$$\text{Donc } X_{36} \in (X_1 X_3), X_{36} \in (X_{24} X_{34}).$$

5.2.37 X_{37}

On pourra consulter [5]⁸⁴.

83. p. 176

84. p. 176

$$X_{37} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b+c)}{2d_{37}} \\ \frac{b(c+a)}{2d_{37}} \\ \frac{c(a+b)}{2d_{37}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{37} = (bc + ca + ab) = d_{2,2}.$$

$$X_{37} = \text{Cross}(X_1, X_2).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{37} &= \frac{[s^2-r(r+2R)]X_1+6rRX_2+2r^2X_3}{s^2+r(r+4R)} = \frac{2s^2X_1-[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2+r(r+4R)} \\ &= \frac{-[s^2-r(r+2R)][s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{19}+2s^2[s^2-r(r+4R)-6R^2]X_{25}}{[s^2-(r+2R)^2][s^2+r(r+4R)]}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + r(r + 4R) = d_{37}.$$

$$\text{Donc } X_{37} \in (X_1X_6), X_{37} \in (X_{19}X_{25}).$$

5.2.38 X_{38}

On pourra consulter [5]⁸⁵.

$$X_{38} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b^2+c^2)}{d_{38}} \\ \frac{b(c^2+a^2)}{d_{38}} \\ \frac{c(a^2+b^2)}{d_{38}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{38} = (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = d_{3,2}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{38} = \frac{[s^2-r(3r+8R)]X_1+6rRX_2+4r^2X_3}{s^2+r(r-2R)} = \frac{[s^2-r(3r+8R)]X_1+2r(2r+3R)X_{21}}{s^2+r(r-2R)}.$$

$$\text{On a } s^2 + r(r - 2R) = \frac{d_{38}}{2s}.$$

$$\text{Donc } X_{38} \in (X_1X_{21}).$$

5.2.39 $X_{39} \equiv \frac{1}{2}(\Omega + \Omega')$ point de Brocard milieu

On pourra consulter [5]⁸⁶ [8]⁸⁷.

$$X_{39} \equiv \frac{1}{2}(\Omega + \Omega') = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b^2+c^2)}{2d_{39}} \\ \frac{b^2(c^2+a^2)}{2d_{39}} \\ \frac{c^2(a^2+b^2)}{2d_{39}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{39} = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_{\Omega} = d_{\Omega'} = d_{4,3}.$$

85. p. 176

86. p. 177

87. p. 175 "Brocard Midpoint"

Relations avec les points précédents

$$X_{39} = \frac{[s^2-r(r+4R)][s^2+r(r+2R)]X_1-6[s^2-r(r+4R)]rRX_2+2[s^2+r(r+4R)]r^2X_3}{s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2}$$

$$= \frac{4s^2r^2X_3+[s^2-r(r+4R)]^2X_6}{s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2}.$$

$$\text{On a } s^4 + 2s^2r(r-4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{39}.$$

$$\text{Donc } X_{39} \in (X_3X_6).$$

5.2.40 $X_{40} \equiv Be$ point de Bevan : milieu du segment

$$[X_8X_{20}] \equiv [NaL]$$

On pourra consulter [5]⁸⁸.

$$X_{40} \equiv Be = \left(\begin{array}{c} \frac{a(aq_1-bq_2-cq_3+2abc)}{d_{40}} \\ \frac{b(bq_2-cq_3-aq_1+2bca)}{d_{40}} \\ \frac{c(cq_3-aq_1-bq_2+2cab)}{d_{40}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{-a[a^3+a^2(b+c)-a(b+c)^2-(b+c)(b-c)^2]}{d_{40}} \\ \frac{-b[b^3+b^2(c+a)-b(c+a)^2-(c+a)(c-a)^2]}{d_{40}} \\ \frac{-c[c^3+c^2(a+b)-c(a+b)^2-(a+b)(a-b)^2]}{d_{40}} \end{array} \right),$$

avec :

$$d_{40} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1d'_{40} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{40} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc$$

$$= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{40} = -X_1 + 2X_3 = \frac{-2RX_4+(r+4R)X_9}{r+2R} = \frac{X_8+X_{20}}{2}.$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_{40}}{16s^2r^2} = \frac{d'_{40}}{8sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{40} \in (X_1X_3), X_{40} \in (X_4X_9), X_{40} \in (X_8X_{20}).$$

5.2.41 X_{41}

On pourra consulter [5]⁸⁹.

$$X_{41} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^3(2a')}{d_{41}} \\ \frac{b^3(2b')}{d_{41}} \\ \frac{c^3(2c')}{d_{41}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{41} = -(a^4+b^4+c^4) + (b^3c+c^3a+a^3b) + (bc^3+ca^3+ab^3) = -d_{4,1} + d_{4,2}.$$

88. p. 177

89. p. 177

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{41} &= \frac{[s^2+r(r+4R)](r+2R)X_1-6r(r+4R)RX_2+2[s^2-r(r+4R)]rX_3}{s^2(3r+2R)-r(r+4R)^2} \\ &= -\frac{[s^2+r(r+4R)](r+4R)X_9+2s^2(2r+3R)X_{21}}{s^2(3r+2R)-r(r+4R)^2} \\ &= \frac{s^2[s^2-3r(r+2R)]X_{31}+\{4s^2r^2-[s^2-r(r+4R)]^2\}X_{32}}{\{s^2(3r+2R)-r(r+4R)^2\}r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2(3r+2R)-r(r+4R)^2 = \frac{d_{41}}{4r}.$$

$$\text{Donc } X_{41} \in (X_9X_{21}), X_{41} \in (X_{31}X_{32}).$$

5.2.42 X_{42}

On pourra consulter [5]⁹⁰.

$$X_{42} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b+c)}{d_{42}} \\ \frac{b^2(c+a)}{d_{42}} \\ \frac{c^2(a+b)}{d_{42}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{42} = (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = d_{38} = d_{3,2}.$$

$$X_{42} = \text{Cross}(X_1, X_6).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{42} &= \frac{[s^2+r(r+4R)]X_1-6rRX_2}{s^2+r(r-2R)} = \frac{2[s^2-r(r+4R)]X_6-[s^2-3r(r+2R)]X_{31}}{s^2+r(r-2R)} \\ &= -\frac{2[s^2-r(r+4R)-6R^2]rX_{25}-\{s^2(3r+2R)-r(r+4R)^2\}X_{41}}{[s^2+r(r-2R)](r+2R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2+r(r-2R) = \frac{d_{42}}{2s}.$$

$$\text{Donc } X_{42} \in (X_1X_2), X_{42} \in (X_6X_{31}), X_{42} \in (X_{25}X_{41}).$$

5.2.43 X_{43}

On pourra consulter [5]⁹¹.

$$X_{43} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(-bc+ca+ab)}{d_{43}} \\ \frac{b(-ca+ab+bc)}{d_{43}} \\ \frac{c(-ab+bc+ca)}{d_{43}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{43} = (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 3abc = d_{3,2} - 3d_{3,3}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{43} = \frac{[s^2+r(r+4R)]X_1-12rRX_2}{s^2+r(r-8R)}.$$

90. p. 177

91. p. 177

On a $s^2 + r(r - 8R) = \frac{d_{43}}{2s}$.

Donc $X_{43} \in (X_1X_2)$.

5.2.44 X_{44}

On pourra consulter [5]⁹².

$$X_{44} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(-2a+b+c)}{2d_{44}} \\ \frac{b(-2b+c+a)}{2d_{44}} \\ \frac{c(-2c+a+b)}{2d_{44}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{44} = -(a^2 + b^2 + c^2) + (bc + ca + ab) = -d_{2,1} + d_{2,2}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{44} = \frac{[s^2+3r(r+2R)]X_1-18rRX_2-6r^2X_3}{s^2-3r(r+4R)} = \frac{-2s^2X_1+3[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-3r(r+4R)}.$$

On a $s^2 - 3r(r + 4R) = -d_{44}$.

Donc $X_{44} \in (X_1X_6)$.

5.2.45 X_{45}

On pourra consulter [5]⁹³.

$$X_{45} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2b+2c-a)}{d_{45}} \\ \frac{b(2c+2a-b)}{d_{45}} \\ \frac{c(2a+2b-c)}{d_{45}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{45} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 4(bc + ca + ab) = -d_{2,1} + 4d_{2,2}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{45} = \frac{[s^2-3r(r+2R)]X_1+18rRX_2+6r^2X_3}{s^2+3r(r+4R)} = \frac{4s^2X_1-3[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2+3r(r+4R)}.$$

On a $s^2 + 3r(r + 4R) = \frac{d_{45}}{2}$.

Donc $X_{45} \in (X_1X_6)$.

5.2.46 X_{46}

On pourra consulter [5]⁹⁴.

92. p. 177

93. p. 177

94. p. 177

$$X_{46} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(-a q_1 + b q_2 + c q_3)}{d_{46}} \\ \frac{b(-b q_2 + c q_3 + a q_1)}{d_{46}} \\ \frac{c(-c q_3 + a q_1 + b q_2)}{d_{46}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{46} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2 a b c (a + b + c) = d_1 d'_{46} \\ &= d_{4,1} - 2 d_{4,3} + 2 d_{4,4} \text{ et } d'_{46} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) \\ &\quad - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 4 a b c = d_{3,1} - d_{3,2} + 4 d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relation avec les points précédents

$$X_{46} = \frac{(r+R)X_1 - 2rX_3}{-r+R}.$$

$$\text{On a } -r + R = \frac{d_{46}}{16 s^2 r} = \frac{d'_{46}}{8 s r}.$$

$$\text{Donc } X_{46} \in (X_1 X_3).$$

5.2.47 X_{47}

On pourra consulter [5]⁹⁵.

$$\begin{aligned} X_{47} &= \left(\begin{array}{c} \frac{a^3 [(a^4 + b^4 + c^4) - 2 a^2 (b^2 + c^2)]}{d_{47}} \\ \frac{b^3 [(b^4 + c^4 + a^4) - 2 b^2 (c^2 + a^2)]}{d_{47}} \\ \frac{c^3 [(c^4 + a^4 + b^4) - 2 c^2 (a^2 + b^2)]}{d_{47}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^3 (q_1^2 - S)}{2 d_{47}} \\ \frac{b^3 (q_2^2 - S)}{2 d_{47}} \\ \frac{c^3 (q_3^2 - S)}{2 d_{47}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{a^3 (2 b^2 c^2 - S)}{d_{47}} \\ \frac{b^3 (2 c^2 a^2 - S)}{d_{47}} \\ \frac{c^3 (2 a^2 b^2 - S)}{d_{47}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^3 (q_1^2 - 2 b^2 c^2)}{d_{47}} \\ \frac{b^3 (q_2^2 - 2 c^2 a^2)}{d_{47}} \\ \frac{c^3 (q_3^2 - 2 a^2 b^2)}{d_{47}} \end{array} \right), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{47} &= (a^7 + b^7 + c^7) - 2(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + (b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) \\ &\quad + (b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) - 2(b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) = d_1 d'_{47} = d_{7,1} - 2 d_{7,3} + d_{7,5} \\ \text{et } d'_{47} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) \\ &\quad - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + 2 a b c (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ &\quad + 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) \\ &\quad + 2 a^2 b^2 c^2 = d_{6,1} - d_{6,2} - d_{6,3} + 2 d_{6,4} + 2 d_{6,5} - d_{6,6} + 2 d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{47} &= \frac{(s^2 + r^2 - 2R^2)X_1 - 6rR X_2 - 4r^2 X_3}{s^2 - 3r(r+2R) - 2R^2} = \frac{(s^2 + r^2 - 2R^2)X_1 - 2r(2r+3R)X_{21}}{s^2 - 3r(r+2R) - 2R^2} \\ &= \frac{[s^2 - r(r+6R) - 4R^2]X_{34} - 2(r^2 - R^2)X_{46}}{s^2 - 3r(r+2R) - 2R^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - 3r(r+2R) - 2R^2 = -\frac{d_{47}}{32 s^3 r^2} = -\frac{d'_{47}}{16 s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{47} \in (X_1 X_{21}), X_{47} \in (X_{34} X_{46}).$$

95. p. 177

5.2.48 X_{48}

On pourra consulter [5]⁹⁶.

$$X_{48} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^3 q_1}{d_{48}} \\ \frac{b^3 q_2}{d_{48}} \\ \frac{c^3 q_3}{d_{48}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{48} &= -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\ &= -d_{5,1} + d_{5,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{48} &= \frac{[s^2+r(r+4R)+4R^2]X_1-6(r+2R)RX_2+2[s^2-r(r+2R)]X_3}{3s^2-r(r+6R)-8R^2} \\ &= \frac{2s^2X_1+[s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{19}}{3s^2-r(r+6R)-8R^2} \\ &= \frac{-2[s^2-r(r+4R)]RX_6+\{s^2(3r+2R)-r(r+8R)+16R^2\}X_{41}}{[3s^2-r(r+6R)-8R^2]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 3s^2 - r(r+6R) - 8R^2 = \frac{d_{48}}{8sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{48} \in (X_1X_{19}), X_{48} \in (X_6X_{41}).$$

5.2.49 X_{49}

On pourra consulter [5]⁹⁷.

$$X_{49} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^4 q_1 (S-b^2 c^2)}{d_{49}} \\ \frac{b^4 q_2 (S-c^2 a^2)}{d_{49}} \\ \frac{c^4 q_3 (S-a^2 b^2)}{d_{49}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{49} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\ &+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 3a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\ &= d_3 \delta_{49} = d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 3d_{10,9} \text{ et} \\ \delta_{49} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) - a^2 b^2 c^2 \\ &= -d_{6,1} + d_{6,3} - d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{49} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6(r+R)RX_2+[s^2-r(3r+4R)-R^2]X_3}{2s^2-2r(r+4R)-7R^2}.$$

$$\text{On a } 2s^2 - 2r(r+4R) - 7R^2 = \frac{d_{49}}{256s^4r^4} = \frac{\delta_{49}}{16s^2r^2}.$$

96. p. 177

97. p. 177

5.2.50 X_{50}

On pourra consulter [5]⁹⁸.

$$X_{50} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^4 (q_1^2 - b^2 c^2)}{d_{50}} \\ \frac{b^4 (q_2^2 - c^2 a^2)}{d_{50}} \\ \frac{c^4 (q_3^2 - a^2 b^2)}{d_{50}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{50} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 2(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) + 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_{8,1} - 2d_{8,3} + 2d_{8,7} + d_{8,9}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{50} &= \frac{[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+4R)-3R^2]X_1-6[s^2-r(r+4R)-3R^2]rR X_2-2[3s^2-r(r+4R)-3R^2]r^2 X_3}{s^4-s^2[2r(3r+4R)+3R^2]+r[r^2(r+8R)+(19r+12R)R^2]} \\ &= -\frac{4s^2r^2 X_3-[s^2-r(r+4R)][s^2-r(r+4R)-3R^2]X_6}{s^4-s^2[2r(3r+4R)+3R^2]+r[r^2(r+8R)+(19r+12R)R^2]}. \end{aligned}$$

On a

$$s^4 - s^2 [2r(3r + 4R) + 3R^2] + r [r^2 (r + 8R) + (19r + 12R)R^2] = -\frac{d_{50}}{32s^2r^2}.$$

Donc $X_{50} \in (X_3X_6)$.

5.2.51 X_{51}

On pourra consulter [5]⁹⁹.

$$X_{51} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (S-a^2 q_1)}{6d_{51}} \\ \frac{b^2 (S-b^2 q_2)}{6d_{51}} \\ \frac{c^2 (S-c^2 q_3)}{6d_{51}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{51} = a^2 b^2 c^2 = d_{6,7}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{51} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6(r-R)R X_2-[s^2+r(r-4R)]X_3}{6R^2} \\ &= \frac{[s^2-r(r+4R)]X_6-[s^2-r(r+4R)-6R^2]X_{25}}{6R^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 6R^2 = \frac{3d_{51}}{8s^2r^2}.$$

Donc $X_{51} \in (X_6X_{25})$.

5.2.52 X_{52}

On pourra consulter [5]¹⁰⁰.

98. p. 177
99. p. 177
100. p. 177

$$X_{52} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (q_1^2 - S) (S - a^2 q_1)}{4 d_{52}} \\ \frac{b^2 (q_2^2 - S) (S - b^2 q_2)}{4 d_{52}} \\ \frac{c^2 (q_3^2 - S) (S - c^2 q_3)}{4 d_{52}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (q_1^2 - S) (S + q_2 q_3)}{8 d_{52}} \\ \frac{b^2 (q_2^2 - S) (S + q_3 q_1)}{8 d_{52}} \\ \frac{c^2 (q_3^2 - S) (S + q_1 q_2)}{8 d_{52}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{52} = a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) - 2 a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{52}$$

$$= d_{10,9} - 2 d_{10,13} \text{ et } \delta_{52} = -a^2 b^2 c^2 = -d_{51} = -d_{6,7}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{52} = \frac{[s^2 + r(r+2R)] X_1 - 6rR X_2 - [s^2 + r(r-4R) - 2R^2] X_3}{2R^2}$$

$$= -\frac{[s^2 - r(r+4R) - 2R^2] X_3 - [s^2 - r(r+4R)] X_6}{2R^2} = -2 X_5 + 3 X_{51}.$$

$$\text{On a } 2R^2 = -\frac{d_{52}}{128 s^4 r^4} = -\frac{\delta_{52}}{8 s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{52} \in (X_3 X_6), X_{52} \in (X_5 X_{51}).$$

5.2.53 X_{53}

On pourra consulter [5]¹⁰¹.

$$X_{53} = \left(\begin{array}{c} \frac{q_2 q_3 (S - a^2 q_1)}{2 d_{53}} \\ \frac{q_3 q_1 (S - b^2 q_2)}{2 d_{53}} \\ \frac{q_1 q_2 (S - c^2 q_3)}{2 d_{53}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{53} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 2(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6)$$

$$+ 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + 2 a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_{8,1} - 2 d_{8,3} + 2 d_{8,7} + 2 d_{8,9}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{53} = \frac{A_{1,53} X_1 + A_{2,53} X_2 + A_{3,53} X_3}{s^4 - 2s^2 [r(3r+4R) + 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R)}$$

$$= \frac{-4s^2 r^2 X_4 + [s^2 - r(r+4R)] [s^2 - r(r+4R) - 4R^2] X_6}{s^4 - 2s^2 [r(3r+4R) + 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R)}, \text{ avec :}$$

$$A_{1,53} = [s^2 + r(r+2R)] [s^2 - (r+2R)^2],$$

$$A_{2,53} = -6 \{s^2 (2r+R) - (r+2R)^2 R\} r,$$

$$A_{3,53} = 2 [3s^2 + (r+2R)^2] r^2.$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2 [r(3r+4R) + 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R) = -\frac{d_{53}}{32 s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{53} \in (X_4 X_6).$$

5.2.54 X_{54} point de Kosnita

On pourra consulter [5]¹⁰².

101. p. 177

102. p. 177

$$X_{54} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (S-b^2 q_2) (S-c^2 q_3)}{d_{54}} \\ \frac{b^2 (S-c^2 q_3) (S-a^2 q_1)}{d_{54}} \\ \frac{c^2 (S-a^2 q_1) (S-b^2 q_2)}{d_{54}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{54} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\ &+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\ &+ 4a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{54} = d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + d_{10,9} + 4d_{10,13} \\ \text{et } \delta_{54} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) + a^2 b^2 c^2 \\ &= -d_{6,1} + d_{6,3} + d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{54} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1 - 3(2r+R)RX_2 + [s^2-r(3r+4R)-2R^2]X_3}{2s^2-2r(r+4R)-5R^2} \\ &= \frac{2R^2X_5 + [2s^2-2r(r+4R)-7R^2]X_{49}}{2s^2-2r(r+4R)-5R^2} = \frac{[s^2-r(r+4R)]X_6 + [s^2-r(r+4R)-5R^2]X_{24}}{2s^2-2r(r+4R)-5R^2} \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2s^2 - 2r(r+4R) - 5R^2 = \frac{d_{54}}{256s^4r^4} = \frac{\delta_{54}}{16s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{54} \in (X_5X_{49}), X_{54} \in (X_6X_{24}).$$

5.2.55 X_{55}

On pourra consulter [5]¹⁰³.

$$X_{55} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (2a')}{d_{55}} \\ \frac{b^2 (2b')}{d_{55}} \\ \frac{c^2 (2c')}{d_{55}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{55} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + c a^2 + a b^2) = -d_{3,1} + d_{3,2}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{55} &= \frac{RX_1 + rX_3}{r+R} = \frac{3rX_2 - (2r-R)X_{11}}{r+R} = \frac{-rX_4 + (2r+R)X_{12}}{r+R} \\ &= \frac{[s^2-r(r+4R)]X_6 - [s^2-3r(r+2R)]X_{31}}{2r(r+R)} = \frac{-RX_8 + (2r+3R)X_{21}}{2(r+R)} \\ &= \frac{-[s^2-r(r+6R)-8R^2]RX_{19} + (r+2R)[s^2-r(r+4R)-6R^2]X_{25}}{[s^2-(r+2R)^2](r+R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r + R = \frac{d_{55}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{55} \in (X_1X_3), X_{55} \in (X_2X_{11}), X_{55} \in (X_4X_{12}), X_{55} \in (X_6X_{31}), \\ X_{55} \in (X_8X_{21}), X_{55} \in (X_{19}X_{25}).$$

103. pp. 177-178

5.2.56 X_{56}

On pourra consulter [5]¹⁰⁴.

$$X_{56} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2b')(2c')}{d_{56}} \\ \frac{b^2(2c')(2a')}{d_{56}} \\ \frac{c^2(2a')(2b')}{d_{56}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2bc-q_1)}{d_{56}} \\ \frac{b^2(2ca-q_2)}{d_{56}} \\ \frac{c^2(2ab-q_3)}{d_{56}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{56} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + 2abc(a+b+c) = d_{46} = d_1 d'_{56} \\ &= d_{4,1} - 2d_{4,3} + 2d_{4,4} \text{ et } d'_{56} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) \\ &- (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 4abc = d'_{46} = d_{3,1} - d_{3,2} + 4d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{56} &= \frac{-R X_1 + r X_3}{r-R} = \frac{3r X_2 - (2r+R) X_{12}}{r-R} = \frac{-r X_4 + (2r-R) X_{11}}{r-R} \\ &= \frac{-[s^2 - r(r+4R)](r+4R) X_6 + [s^2(3r+2R) - r(r+4R)^2] X_{41}}{2s^2(r-R)} = \frac{-(r+4R)R X_7 + r(2r+3R) X_{21}}{2(r+2R)(r-R)} \\ &= \frac{[s^2 - r(r+4R) - 6R^2]r X_{25} - [s^2 - r(r+6R) - 4R^2]R X_{34}}{[s^2 - (r+2R)^2](r-R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r - R = -\frac{d_{56}}{16s^2r} = -\frac{d'_{56}}{8sr}.$$

Donc $X_{56} \in (X_1X_3)$, $X_{56} \in (X_2X_{12})$, $X_{56} \in (X_4X_{11})$, $X_{56} \in (X_6X_{41})$,
 $X_{56} \in (X_7X_{21})$, $X_{56} \in (X_{25}X_{34})$.

5.2.57 X_{57}

On pourra consulter [5]¹⁰⁵.

$$X_{57} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2b')(2c')}{d_{57}} \\ \frac{b(2c')(2a')}{d_{57}} \\ \frac{c(2a')(2b')}{d_{57}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{57} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 6abc \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} + 6d_{3,3}. \end{aligned}$$

$$X_{57} = \text{Ceva}(X_6, X_{56}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{57} &= -\frac{(r+2R)X_1 - 2rX_3}{r-2R} = \frac{3rX_2 - (r+4R)X_7}{2(r-2R)} \\ &= \frac{2[s^2 - r(r+5R) - 6R^2]r X_{28} - [s^2 - r(r+6R) - 4R^2](r+2R) X_{34}}{[s^2 - (r+2R)^2](r-2R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r - 2R = -\frac{d_{57}}{8sr}.$$

104. p. 178

105. p. 178

Donc $X_{57} \in (X_1X_3)$, $X_{57} \in (X_2X_7)$, $X_{57} \in (X_{28}X_{34})$.

5.2.58 X_{58}

On pourra consulter [5]¹⁰⁶.

$$X_{58} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(c+a)(a+b)}{d_{58}} \\ \frac{b^2(a+b)(b+c)}{d_{58}} \\ \frac{c^2(b+c)(c+a)}{d_{58}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{58} = (a^4 + b^4 + c^4) + (b^3c + c^3a + a^3b) + (bc^3 + ca^3 + ab^3) + abc(a+b+c) \\ = d_1 d'_{58} = d_{4,1} + d_{4,2} + d_{4,4} \text{ et } d'_{58} = (a^3 + b^3 + c^3) + abc = d_{3,1} + d_{3,3}.$$

$$X_{58} = \text{Ceva}(X_6, X_{31}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{58} &= \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6rR.X_2-4r^2X_3}{s^2-r(3r+4R)} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-2r(2r+3R)X_{21}}{s^2-r(3r+4R)} \\ &= \frac{-2r^2X_3+[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-r(3r+4R)} \\ &= \frac{-4[s^2-r(r+5R)-6R^2]r(r+R)X_{28}+[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+6R)-4R^2]X_{34}}{[s^2-(r+2R)^2][s^2-r(3r+4R)]} \\ &= \frac{-2r(2r+R)X_{35}+[s^2+r(r-2R)]X_{42}}{s^2-r(3r+4R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r(3r + 4R) = \frac{d_{58}}{4s^2} = \frac{d'_{58}}{2s}.$$

Donc $X_{58} \in (X_1X_{21})$, $X_{58} \in (X_3X_6)$, $X_{58} \in (X_{28}X_{34})$, $X_{58} \in (X_{35}X_{42})$.

5.2.59 X_{59} conjugué isogonal du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$

On pourra consulter [5]¹⁰⁷.

$$X_{59} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2b')(c-a)^2(2c')(a-b)^2}{d_{59}} \\ \frac{b^2(2c')(a-b)^2(2a')(b-c)^2}{d_{59}} \\ \frac{c^2(2a')(b-c)^2(2b')(c-a)^2}{d_{59}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{59} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^7c + c^7a + a^7b) - 2(bc^7 + ca^7 + ab^7) \\ &+ 6abc(a^5 + b^5 + c^5) + 2(b^5c^3 + c^5a^3 + a^5b^3) - 4abc(b^4c + c^4a + a^4b) \\ &- 4abc(bc^4 + ca^4 + ab^4) + 2(b^3c^5 + c^3a^5 + a^3b^5) \\ &- 2(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4) + 5a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2b^2c^2(bc + ca + ab) \\ &= d_{8,1} - 2d_{8,2} + 6d_{8,4} + 2d_{8,5} - 4d_{8,6} - 2d_{8,7} + 5d_{8,9} - 2d_{8,10}. \end{aligned}$$

On vérifie que X_{59} est le conjugué isogonal de $X_{11} \equiv F$.

106. p. 178

107. p. 178

$X_{59} = \text{Ceva}(X_{55}, X_{101})$ (cf. X_{101} ci-après).

Relations avec les points précédents

$$X_{59} = \frac{A_{1,59} X_1 + A_{2,59} X_2 + A_{3,59} X_3}{s^2 [s^2 - (r+R)(r+4R)] (2r-R)}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} A_{1,59} &= 2s^4 R - s^2 [r^2 (r+R) + 4(r+2R)R^2] \\ &- r \{r [r^2 (r+5R) + 14(r+2R)R^2] + 24^4\} \\ A_{2,59} &= -3s^4 R + 3s^2 (3r+4R)R^2 + 3r [r(3r+10R) + 4(3r+2R)R^2] R \\ A_{3,59} &= 2s^4 r - s^2 r [r(r+8R) + 8R^2] + r^2 [r^2 (r-4R) - 8(2r+R)R^2] \\ \text{On a } s^2 [s^2 - (r+R)(r+4R)] (2r-R) &= \frac{d_{59}}{64r^3}. \end{aligned}$$

5.2.60 X_{60}

On pourra consulter [5]¹⁰⁸.

$$X_{60} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (2a') (c+a)^2 (a+b)^2}{d_{60}} \\ \frac{b^2 (2b') (a+b)^2 (b+c)^2}{d_{60}} \\ \frac{c^2 (2c') (b+c)^2 (c+a)^2}{d_{60}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{60} &= -(a^7 + b^7 + c^7) - (b^6 c + c^6 a + a^6 b) - (bc^6 + ca^6 + ab^6) \\ &+ (b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + (b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) + (b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) \\ &+ 3abc(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + 3abc(bc^3 + ca^3 + ab^3) + (b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) \\ &+ 4abc(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 5a^2 b^2 c^2 (a+b+c) = d_1 d'_{60} \\ &= -d_{7,1} - d_{7,2} + d_{7,3} + d_{7,5} + 3d_{7,6} + 4d_{7,7} + 5d_{7,8} \text{ et} \\ d'_{60} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ &+ 2abc(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2abc(bc^2 + ca^2 + ab^2) + a^2 b^2 c^2 \\ &= -d_{6,1} + d_{6,3} + 2d_{6,6} + d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{60} &= \frac{\{s^2 (r+R) + r[r(r+3R) + 2R^2]\} X_1 - 3r(2r+3R)R X_2 + [s^2 - r(3r+4R)]r X_3}{s^2 (2r+R) - r[r(2r+7R) + 7R^2]} \\ &= \frac{[s^2 + r(r+2R)](2r-R) X_{36} + [s^2 - r(3r+4R)](2r+3R) X_{58}}{2\{s^2 (2r+R) - r[r(2r+7R) + 7R^2]\}} \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 (2r+R) - r[r(2r+7R) + 7R^2] = \frac{d_{60}}{32s^3 r} = \frac{d'_{60}}{16s^2 r}.$$

Donc $X_{60} \in (X_{36} X_{58})$.

5.2.61 X_{61}

On pourra consulter [5]¹⁰⁹.

108. p. 178

109. p. 178

$$X_{61} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (q_1+4\sqrt{3}\Delta)}{d_{61}} \\ \frac{b^2 (q_2+4\sqrt{3}\Delta)}{d_{61}} \\ \frac{c^2 (q_3+4\sqrt{3}\Delta)}{d_{61}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{61} = d_3 + 4\sqrt{3}d_6\Delta = (-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 4\sqrt{3}d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{61} &= \frac{\sqrt{3}[s^2+r(r+2R)]X_1-6\sqrt{3}rRX_2+2(s-\sqrt{3}r)rX_3}{\sqrt{3}s^2+[2s-\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{12srX_2+\{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{18}}{\sqrt{3}s^2+[2s-\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{2srX_3+\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]X_6}{\sqrt{3}s^2+[2s-\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{-4srX_4+\{\sqrt{3}s^2+[6s-\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{13}}{\sqrt{3}s^2+[2s-\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{8srX_5+\{\sqrt{3}s^2-[6s+\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{14}}{\sqrt{3}s^2+[2s-\sqrt{3}(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \sqrt{3}s^2 + [2s - \sqrt{3}(r + 4R)]r = \frac{d_{61}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{61} \in (X_2X_{18}), X_{61} \in (X_3X_6), X_{61} \in (X_4X_{13}), X_{61} \in (X_5X_{14}).$$

5.2.62 X_{62}

On pourra consulter [5]¹¹⁰.

$$X_{62} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (q_1-4\sqrt{3}\Delta)}{d_{62}} \\ \frac{b^2 (q_2-4\sqrt{3}\Delta)}{d_{62}} \\ \frac{c^2 (q_3-4\sqrt{3}\Delta)}{d_{62}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{62} = d_3 - 4\sqrt{3}d_6\Delta = (-d_{4,1} + 2d_{4,3}) - 4\sqrt{3}d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{62} &= \frac{\sqrt{3}[s^2+r(r+2R)]X_1-6\sqrt{3}rRX_2-2(s+\sqrt{3}r)rX_3}{\sqrt{3}s^2-[2s+\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{-12srX_2+\{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{17}}{\sqrt{3}s^2-[2s+\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{-2srX_3+\sqrt{3}[s^2-r(r+4R)]X_6}{\sqrt{3}s^2-[2s+\sqrt{3}(r+4R)]r} \\ &= \frac{4srX_4+\{\sqrt{3}s^2-[6s+\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{14}}{\sqrt{3}s^2-[2s+\sqrt{3}(r+4R)]r} = \frac{-8srX_5+\{\sqrt{3}s^2+[6s-\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{13}}{\sqrt{3}s^2-[2s+\sqrt{3}(r+4R)]r}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \sqrt{3}s^2 - [2s + \sqrt{3}(r + 4R)]r = -\frac{d_{62}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{62} \in (X_2X_{17}), X_{62} \in (X_3X_6), X_{62} \in (X_4X_{14}), X_{62} \in (X_5X_{13}).$$

5.2.63 X_{63}

On pourra consulter [5]¹¹¹.

110. p. 178

111. p. 178

$$X_{63} = \left(\begin{array}{c} \frac{a q_1}{d_{63}} \\ \frac{b q_2}{d_{63}} \\ \frac{c q_3}{d_{63}} \\ d_{63} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{63} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) = d_{55} \\ = -d_{3,1} + d_{3,2}.$$

$$X_{63} = \text{Ceva}(X_9, X_{40}) = \text{Ceva}(X_{71}, X_{72}) \text{ (cf. } X_{71}, X_{72} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{63} = \frac{-(r+2R)X_1+3RX_2+2rX_3}{r+R} = \frac{-(r+2R)X_1+(2r+3R)X_{21}}{r+R} \\ = \frac{3(r+2R)X_2-(r+4R)X_7}{2(r+R)} = \frac{(r+2R)X_8+rX_{20}}{2(r+R)} = \frac{2RX_{10}+(r-R)X_{46}}{r+R} \\ = \frac{[s^2-r(r+6R)-8R^2](r+2R)X_{19}-[s^2-3r(r+4R)-12R^2]RX_{27}}{[s^2-(r+2R)^2](r+R)}.$$

$$\text{On a } r + R = \frac{d_{63}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{63} \in (X_1X_{21}), X_{63} \in (X_2X_7), X_{63} \in (X_8X_{20}), X_{63} \in (X_{10}X_{46}), \\ X_{63} \in (X_{19}X_{27}).$$

5.2.64 X_{64}

On pourra consulter [5]¹¹².

$$X_{64} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(4b^2q_2-S)(4c^2q_3-S)}{d_{64}} \\ \frac{b^2(4c^2q_3-S)(4a^2q_1-S)}{d_{64}} \\ \frac{c^2(4a^2q_1-S)(4b^2q_2-S)}{d_{64}} \\ d_{64} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{64} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8c^2 + c^8a^2 + a^8b^2) - 3(b^2c^8 + c^2a^8 + a^2b^8) \\ + 2(b^6c^4 + c^6a^4 + a^6b^4) + 4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4c^6 + c^4a^6 + a^4b^6) \\ - 2a^2b^2c^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_{26} = d_3\delta_{64} \\ = d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 4d_{10,9} - 2d_{10,13} \text{ et} \\ \delta_{64} = -(a^6+b^6+c^6) + (b^4c^2+c^4a^2+a^4b^2) + (b^2c^4+c^2a^4+a^2b^4) - 2a^2b^2c^2 = \delta_{26} \\ = -d_{6,1} + d_{6,3} - 2d_{6,7}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{64} = \frac{-[s^2+r(r+2R)]X_1+6(r+2R)RX_2+2[s^2-4(r+2R)R]X_3}{s^2-(r+2R)^2}.$$

$$\text{On a } s^2 - (r + 2R)^2 = \frac{d_{64}}{512s^4r^4} = \frac{\delta_{64}}{32s^2r^2}.$$

5.2.65 X_{65}

On pourra consulter [5]¹¹³.

112. p. 179

113. p. 179

$$X_{65} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b+c)(2b')(2c')}{2d_{65}} \\ \frac{b(c+a)(2c')(2a')}{2d_{65}} \\ \frac{c(a+b)(2a')(2b')}{2d_{65}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{65} = abc(a+b+c) = d_1 d'_{65} = d_{4,4} \text{ et } d'_{65} = abc = d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{65} &= \frac{(r+R)X_1 - rX_3}{R} = \frac{[s^2 - r(r+4R)](r+2R)X_6 - [s^2 - r(r+6R) - 8R^2]rX_{19}}{2s^2R} \\ &= \frac{(r+4R)X_7 - rX_8}{4R} = \frac{-2rX_{10} + (2r+R)X_{12}}{R} \\ &= \frac{[s^2 - r(r+2R) - 4R^2](r+2R)X_{33} - [s^2 - (r+2R)^2]rX_{64}}{2[s^2 - 2(r+2R)R]R}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } R = \frac{d_{65}}{8s^2r} = \frac{d'_{65}}{4sr}.$$

Donc $X_{65} \in (X_1X_3)$, $X_{65} \in (X_6X_{19})$, $X_{65} \in (X_7X_8)$, $X_{65} \in (X_{10}X_{12})$, $X_{65} \in (X_{33}X_{64})$.

5.2.66 X_{66} conjugué isogonal du point X_{22}

On pourra consulter [5] ¹¹⁴.

$$X_{66} = \left(\begin{array}{c} \frac{(a^4 - b^4 + c^4)(a^4 + b^4 - c^4)}{d_{66}} \\ \frac{(b^4 - c^4 + a^4)(b^4 + c^4 - a^4)}{d_{66}} \\ \frac{(c^4 - a^4 + b^4)(c^4 + a^4 - b^4)}{d_{66}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{66} = -(a^8 + b^8 + c^8) + 2(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4) = d_6\delta_{26} = -d_{8,1} + 2d_{8,7}.$$

On vérifie que X_{66} est le conjugué isogonal du point X_{22} .

Relations avec les points précédents

$$X_{66} = \frac{A_{1,66}X_1 + A_{2,66}X_2 + A_{3,66}X_3}{[s^2 - r(r+4R)][s^2 - (r+2R)^2]\{-2s^4 + s^2[r(5r+16R)+8R^2] - r[r^2(r+10R)+32(r+R)R^2]\}},$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{1,66} &= [s^2 + r(r+2R)]\|2s^6 - s^4[r(7r+24R) + 12R^2] \\ &+ s^2\{r[2r^2(3r+23R) + 6(19r+16R)R^2] + 16R^4\} \\ &- r\langle r\{r[2r^2(3r+23R) + 6(19r+16R)R^2] + 192R^4\} + 64R^5\rangle\| \\ A_{2,66} &= -3[s^2 - r(r+2R)]\|2s^6 - s^4[r(7r+24R) + 12R^2] \\ &+ s^2\{r[2r^2(3r+23R) + 6(19r+16R)R^2] + 16R^4\} \\ &- r\langle r\{r[2r^2(3r+23R) + 6(19r+16R)R^2] + 192R^4\} + 64R^5\rangle\| \end{aligned}$$

114. p. 179

$$\begin{aligned}
A_{3,66} &= 2s^8 - s^6 [r(13r + 32R) + 8R^2] \\
&+ s^4 r [r^2(27r + 146R) + 8(29r + 12R)R^2] \\
&- s^2 r^2 \{r[r^2(19r + 176R) + 4(147r + 208R)R^2] + 416R^4\} \\
&+ r^3 \langle r \{r[r^2(3r + 46R) + 4(69r + 202R)R^2] + 1152R^4\} + 640R^5 \rangle
\end{aligned}$$

$$\text{On a } 64s^2 [s^2 - r(r + 4R)] [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = d_{66}.$$

5.2.67 X_{67} conjugué isogonal du point X_{23}

On pourra consulter [5] ¹¹⁵.

$$X_{67} = \left(\begin{array}{c} \frac{(c^4 + a^4 - b^4 - c^2 a^2)(a^4 + b^4 - c^4 - a^2 b^2)}{(a^4 + b^4 - c^4 - a^2 b^2) \frac{d_{67}}{(b^4 + c^4 - a^4 - b^2 c^2)}} \\ \frac{(b^4 + c^4 - a^4 - b^2 c^2) \frac{d_{67}}{(c^4 + a^4 - b^4 - c^2 a^2)}}{\frac{d_{67}}{(b^4 + c^4 - a^4 - b^2 c^2)}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{67} &= -(a^8 + b^8 + c^8) + 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) - a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_6 d_{23} \\
&= -d_{8,1} + 2d_{8,7} - d_{8,9}.
\end{aligned}$$

On vérifie que X_{67} est le conjugué isogonal du point X_{23} .

Relations avec les points précédents

$$X_{67} = \frac{A_{1,67} X_1 + A_{2,67} X_2 + A_{3,67} X_3}{2[s^2 - r(r + 4R)] \{2[s^2 - r(r + 4R)] - 9R^2\}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
A_{1,67} &= -6 [s^2 + r(r + 2R)] [s^2 - r(r + 4R) - 3R^2] \\
A_{2,67} &= 6 \{ [s^2 - r(r + 4R)] [2s^2 - 2r(r + R) + 3R^2] - 9 [s^2 - r(r + 2R)] R^2 \} \\
A_{3,67} &= 2 [s^2 - r(r + 4R)] [-s^2 + r(7r + 4R)] - 36r^2 R^2
\end{aligned}$$

$$\text{On a } 2 [s^2 - r(r + 4R)] \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 9R^2\} = \frac{d_{67}}{16s^2 r^2}.$$

5.2.68 X_{68} point de Prasolov

On pourra consulter [5] ¹¹⁶.

$$X_{68} = \left(\begin{array}{c} \frac{q_1 (q_2^2 - S)(q_3^2 - S)}{4d_{68}} \\ \frac{q_2 (q_3^2 - S)(q_1^2 - S)}{4d_{68}} \\ \frac{q_3 (q_1^2 - S)(q_2^2 - S)}{4d_{68}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{q_1 (q_2^2 - 2c^2 a^2)(q_3^2 - 2a^2 b^2)}{d_{68}} \\ \frac{q_2 (q_3^2 - 2a^2 b^2)(q_1^2 - 2b^2 c^2)}{d_{68}} \\ \frac{q_3 (q_1^2 - 2b^2 c^2)(q_2^2 - 2c^2 a^2)}{d_{68}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

115. p. 179

116. p. 179

$$\begin{aligned}
d_{68} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 4a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{26} = d_3 \delta_{68} \\
&= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 4d_{10,9} - 2d_{10,13} \text{ et} \\
\delta_{68} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) - 2a^2 b^2 c^2 = \delta_{26} \\
&= -d_{6,1} + d_{6,3} - 2d_{6,7}.
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{68} &= \frac{-[s^2+r(r+2R)]X_1+3[s^2-r(r+2R)-2R^2]X_2-[s^2-r(3r+4R)-2R^2]X_3}{s^2-(r+2R)^2} \\
&= \frac{3[s^2-r(r+4R)-3R^2]X_2-[2s^2-2r(r+4R)-5R^2]X_{54}}{s^2-(r+2R)^2} = \frac{[s^2-r(r+4R)-2R^2]X_4-2R^2X_{52}}{s^2-(r+2R)^2} \\
&= \frac{2[s^2-r(r+4R)-2R^2]X_5-[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-(r+2R)^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - (r + 2R)^2 = \frac{d_{68}}{512s^4r^4} = \frac{\delta_{68}}{32s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{68} \in (X_2X_{54}), X_{68} \in (X_4X_{52}), X_{68} \in (X_5X_6).$$

5.2.69 X_{69}

On pourra consulter [5]¹¹⁷.

$$X_{69} = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{d_{69}} \\ \frac{q_2}{d_{69}} \\ \frac{q_3}{d_{69}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$d_{69} = a^2 + b^2 + c^2 = d_6 = d_{2,1}.$$

$$X_{69} = \text{Ceva}(X_2, X_{20}) = \text{Ceva}(X_{63}, X_{78}) \text{ (cf. } X_{78} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{69} &= \frac{-2[s^2+r(r+2R)]X_1+3(s^2-r^2)X_2+4r^2X_3}{s^2-r(r+4R)} \\
= 3X_2-2X_6 &= \frac{-r(r+4R)X_7+s^2X_8}{s^2-r(r+4R)} = \frac{-[s^2-r(r+4R)-8R^2]X_{20}+2[s^2-r(r+4R)-4R^2]X_{64}}{s^2-r(r+4R)}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r(r + 4R) = \frac{d_{69}}{2}.$$

$$\text{Donc } X_{69} \in (X_2X_6), X_{69} \in (X_7X_8), X_{69} \in (X_{20}X_{64}).$$

5.2.70 X_{70}

On pourra consulter [5]¹¹⁸.

117. p. 179

118. p. 179

$$X_{70} = \left(\begin{array}{c} \frac{[a^4 (q_1^2 - S) + b^4 (q_2^2 - S) - c^4 (q_3^2 - S)] [a^4 (q_1^2 - S) - b^4 (q_2^2 - S) + c^4 (q_3^2 - S)]}{4 d_{70}} \\ \frac{[b^4 (q_2^2 - S) + c^4 (q_3^2 - S) - a^4 (q_1^2 - S)] [b^4 (q_2^2 - S) - c^4 (q_3^2 - S) + a^4 (q_1^2 - S)]}{4 d_{70}} \\ \frac{[c^4 (q_3^2 - S) + a^4 (q_1^2 - S) - b^4 (q_2^2 - S)] [c^4 (q_3^2 - S) - a^4 (q_1^2 - S) + b^4 (q_2^2 - S)]}{4 d_{70}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{70} &= -(a^{16} + b^{16} + c^{16}) + 4(b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) + 4(b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\ &- 4(b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) - 8a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 4(b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) \\ &- 4(b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) - 4(b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) + 10(b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) \\ &+ 4a^2 b^2 c^2 (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 8a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4) \\ &+ 4a^2 b^2 c^2 (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 8a^4 b^4 c^4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{70} \\ &= -d_{16,1} + 4d_{16,3} - 4d_{16,7} - 8d_{16,9} - 4d_{16,13} + 10d_{16,21} + 4d_{16,23} + 8d_{16,25} \\ &- 8d_{16,29} \text{ et} \\ \delta_{70} &= (a^{12} + b^{12} + c^{12}) - 2(b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) \\ &- 2(b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) - (b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) + 2a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) \\ &- (b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) + 4(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) - 2a^4 b^4 c^4 \\ &= d_{12,1} - 2d_{12,3} - d_{12,7} + 2d_{12,9} + 4d_{12,13} - 2d_{12,19}. \end{aligned}$$

Relation avec les points précédents

$$X_{70} = \frac{A_{1,70} X_1 + A_{2,70} X_2 + A_{3,70} X_3}{s^4 - 2s^2 [r(r+4R) + 3R^2] + r[r^2(r+8R) + 2(11r+12R)R^2] + 7R^4}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} A_{1,70} &= -\{s^2 - [r(r+4R) + 3R^2]\} [s^2 + r(r+2R)], \\ A_{2,70} &= 3\{s^2 - [r(r+4R) + 3R^2]\} \{s^2 - [r(r+2R) + R^2]\}, \\ A_{3,70} &= -\{s^4 - s^2 [4r(r+2R) + 3R^2] \\ &+ r[r^2(3r+16R) + (25r+12R)R^2] + 2R^4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } &s^4 - 2s^2 [r(r+4R) + 3R^2] \\ &+ r[r^2(r+8R) + 2(11r+12R)R^2] + 7R^4 = \frac{d_{70}}{16384 s^6 r^6} = \frac{\delta_{70}}{1024 s^4 r^4}. \end{aligned}$$

5.2.71 X_{71}

On pourra consulter [5] ¹¹⁹.

$$X_{71} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 (b+c) q_1}{d_{71}} \\ \frac{b^2 (c+a) q_2}{d_{71}} \\ \frac{c^2 (a+b) q_3}{d_{71}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{71} &= -(b^4 c + c^4 a + a^4 b) - (b c^4 + c a^4 + a b^4) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) \\ &+ (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + 2abc(bc + ca + ab) = -d_{5,2} + d_{5,3} + 2d_{5,5}. \end{aligned}$$

119. p. 179

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{71} &= \frac{-[s^2+r(r+4R)+4R^2]X_1+6(r+2R)RX_2+2[s^2+r(r+2R)]X_3}{s^2+r(r+2R)(r+4R)} \\
&= \frac{4s^2X_3-[3s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{48}}{s^2+r(r+2R)(r+4R)} = \frac{-2s^2RX_4+[s^2+r(r+4R)+4R^2](r+4R)X_9}{[s^2+r(r+2R)(r+4R)](r+2R)} \\
&= \frac{[s^2-r(r+2R)][s^2-r(r+4R)]X_6-s^2[s^2-3r(r+2R)]X_{31}}{[s^2+r(r+2R)(r+4R)]r^2} \\
&= \frac{[s^2+r(r+4R)](r+2R)X_{37}-2s^2RX_{65}}{[s^2+r(r+2R)(r+4R)]r} = \frac{[s^2+r(r+4R)](r+R)X_{63}-[s^2-r(r+4R)]RX_{69}}{[s^2+r(r+2R)(r+4R)]r}
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + r(r+2R)(r+4R) = \frac{d_{71}}{8sr^2}.$$

Donc $X_{71} \in (X_3X_{48})$, $X_{71} \in (X_4X_9)$, $X_{71} \in (X_6X_{31})$, $X_{71} \in (X_{37}X_{65})$, $X_{71} \in (X_{63}X_{69})$.

5.2.72 X_{72}

On pourra consulter [5]¹²⁰.

$$X_{72} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b+c)q_1}{2d_{72}} \\ \frac{b(c+a)q_2}{2d_{72}} \\ \frac{c(a+b)q_3}{2d_{72}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{72} = abc(a+b+c) = d_{65} = d_1 d'_{72} = d_{4,4} \text{ et } d'_{72} = d'_{65} = abc = d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{72} &= \frac{-(r+2R)X_1+3RX_2+rX_3}{R} = \frac{[s^2-r(r+2R)]X_1-[s^2-r(r+4R)]X_6}{2rR} \\
&= \frac{-rX_3+(r+R)X_{63}}{R} = \frac{-rX_4+(r+R)X_8}{2R} = \frac{2(r+R)X_{10}-(2r+R)X_{12}}{R} \\
&= \frac{-[s^2-(r+2R)(r+4R)]X_{40}+[s^2-r(r+4R)-4R^2]X_{64}}{2(r+2R)R}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } R = \frac{d_{72}}{8s^2r} = \frac{d'_{72}}{4sr}.$$

Donc $X_{72} \in (X_1X_6)$, $X_{72} \in (X_3X_{63})$, $X_{72} \in (X_4X_8)$, $X_{72} \in (X_{10}X_{12})$, $X_{72} \in (X_{40}X_{64})$.

5.2.73 X_{73}

On pourra consulter [5]¹²¹.

$$X_{73} = \left(\begin{array}{c} \frac{(2b')(2c')(b+c)a^2q_1}{d_{73}} \\ \frac{(2c')(2a')(c+a)b^2q_2}{d_{73}} \\ \frac{(2a')(2b')(a+b)c^2q_3}{d_{73}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

120. p. 179

121. p. 179

$$\begin{aligned}
d_{73} &= -(b^6 c + c^6 a + a^6 b) - (b c^6 + c a^6 + a b^6) - (b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) \\
&- (b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) + 2(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) \\
&+ a b c (b^3 c + c^3 a + a^3 b) + a b c (b c^3 + c a^3 + a b^3) + 2(b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) = d_1 d'_{73} \\
&= -d_{7,2} - d_{7,3} + 2 d_{7,5} + d_{7,6} \text{ et} \\
d'_{73} &= -(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) + 2 a b c (a^3 + b^3 + c^3) \\
&+ 2(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) \\
&+ 2 a^2 b^2 c^2 = -d_{6,2} + 2 d_{6,4} + 2 d_{6,5} - d_{6,6} + 2 d_{6,7}
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{73} &= \frac{(s^2+r^2-4R^2)X_1-6rR X_2+4rR X_3}{s^2+r(r-2R)-4R^2} = \frac{(s^2+r^2-4R^2)X_1-2rR X_4}{s^2+r(r-2R)-4R^2} \\
&= \frac{\{s^2[s^2-2r(r+5R)-8R^2]+r(r+4R)^2(r+2R)\}X_6+[s^2(3r+2R)-(r(r+4R)^2)](r+2R)X_{41}}{s^2[s^2+r(r-2R)-4R^2]} \\
&= \frac{[-s^2+r(3r+8R)+4R^2](2r-R)X_{36}+2[2s^2-2r(r+4R)-5R^2]rX_{54}}{[s^2+r(r-2R)-4R^2](2r+R)} \\
&= \frac{[s^2+r(r-2R)]X_{42}-4R^2X_{65}}{s^2+r(r-2R)-4R^2} = \frac{2[s^2-2(r+2R)R](r+R)X_{55}-[s^2-r(r+4R)-4R^2]rX_{64}}{[s^2+r(r-2R)-4R^2](r+2R)}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + r(r - 2R) - 4R^2 = \frac{d_{73}}{32s^3r^2} = \frac{d'_{73}}{16s^2r^2}.$$

Donc $X_{73} \in (X_1X_4)$, $X_{73} \in (X_6X_{41})$, $X_{73} \in (X_{36}X_{54})$, $X_{73} \in (X_{42}X_{65})$, $X_{73} \in (X_{55}X_{64})$.

5.2.74 X_{74}

On pourra consulter [5]¹²².

$$\begin{aligned}
X_{74} &= \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b^2q_2-q_3q_1)(c^2q_3-q_1q_2)}{d_{74}} \\ \frac{b^2(c^2q_3-q_1q_2)(a^2q_1-q_2q_3)}{d_{74}} \\ \frac{c^2(a^2q_1-q_2q_3)(b^2q_2-q_3q_1)}{d_{74}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(3b^2q_2-S)(3c^2q_3-S)}{d_{74}} \\ \frac{b^2(3c^2q_3-S)(3a^2q_1-S)}{d_{74}} \\ \frac{c^2(3a^2q_1-S)(3b^2q_2-S)}{d_{74}} \end{array} \right), \text{ avec :} \\
d_{74} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8c^2 + c^8a^2 + a^8b^2) - 3(b^2c^8 + c^2a^8 + a^2b^8) \\
&+ 2(b^6c^4 + c^6a^4 + a^6b^4) + 2(b^4c^6 + c^4a^6 + a^4b^6) + 5a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) \\
&- 4a^2b^2c^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_3 \delta_{74} = d_3 d_{23} \\
&= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 5d_{10,9} - 4d_{10,13} \text{ et} \\
\delta_{74} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) + (b^2c^4 + c^4a^2 + a^2b^4) - 3a^2b^2c^2 = d_{23} \\
&= -d_{6,1} + d_{6,3} - 3d_{6,7}.
\end{aligned}$$

$$X_{74} = \text{Ceva}(X_{15}, X_{16}).$$

122. p. 179

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
 X_{74} &= -\frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-3(2r+3R)RX_2-[3s^2-r(r+12R)-18R^2]X_3}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2} \\
 &= \frac{[s^2-r(r+4R)-5R^2]X_{20}+[s^2-r(r+4R)-4R^2]X_{68}}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2} \\
 &= \frac{[s^2-r(r+4R)-5R^2]X_{24}+[s^2-r(r+4R)-4R^2]X_{64}}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2} \\
 &= \frac{[3s^2-r(r+8R)-12R^2](2r+R)X_{35}-[s^2+r(r-2R)-4R^2](2r+3R)X_{73}}{2[2s^2-2r(r+4R)-9R^2]r}
 \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2s^2 - 2r(r + 4R) - 9R^2 = \frac{d_{74}}{256s^4r^4} = \frac{\delta_{74}}{16s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{74} \in (X_{20}X_{68}), X_{74} \in (X_{24}X_{64}), X_{74} \in (X_{35}X_{73}).$$

5.2.75 X_{75}

On pourra consulter [5]¹²³.

$$X_{75} = \left(\begin{array}{c} \frac{bc}{d_{75}} \\ \frac{ca}{d_{75}} \\ \frac{ab}{d_{75}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{75} = (bc + ca + ab) = d_{37} = d_{2,2}.$$

$$X_{75} = \text{Ceva}(X_1, X_{63}) = \text{Ceva}(X_2, X_8).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
 X_{75} &= \frac{-2[s^2-r(r+2R)]X_1+3(s^2+r^2)X_2-4r^2X_3}{s^2+r(r+4R)} = 3X_2 - 2X_{37} = \frac{r(r+4R)X_7+s^2X_8}{s^2+r(r+4R)} \\
 &= \frac{2[s^2-r(r+2R)][s^2-(r+2R)(r+4R)]X_{19}-[s^2-r(r+4R)][s^2-3(r+2R)^2]X_{27}}{[s^2+r(r+4R)][s^2-(r+2R)^2]}.
 \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + r(r + 4R) = d_{75}.$$

$$\text{Donc } X_{75} \in (X_2X_{37}), X_{75} \in (X_7X_8), X_{75} \in (X_{19}X_{27}).$$

5.2.76 $X_{76} \equiv \Omega''$ troisième point de Brocard

On pourra consulter [5]¹²⁴.

$$\begin{aligned}
 X_{76} \equiv \Omega'' &= \left(\begin{array}{c} \frac{b^2c^2}{d_{76}} \\ \frac{c^2a^2}{d_{76}} \\ \frac{a^2b^2}{d_{76}} \end{array} \right), \text{ avec :} \\
 d_{76} &= (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_{39} = d_{\Omega} = d_{\Omega'} = d_{4,3}.
 \end{aligned}$$

$$\omega_1(\Omega'') = \pi - \alpha, \omega_2(\Omega'') = \pi - \beta, \omega_3(\Omega'') = \pi - \gamma.$$

$$\text{On a } \Omega + \Omega' + \Omega'' = 3X_2.$$

123. p. 179

124. p. 179

$$X_{76} = \text{Ceva}(X_2, X_{69}) = \text{Ceva}(X_6, X_{22}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{76} &= \frac{-2[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+4R)]X_1+3[s^4+2s^2r(r-2R)+r^3(r+4R)]X_2-4[s^2+r(r+4R)]r^2X_3}{s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= 3X_2 - 2X_{39} = \frac{4s^2r^2X_4+[s^2-r(r+4R)]^2X_{69}}{s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2} = \frac{-16s^2rRX_{10}+[s^2+r(r+4R)]^2X_{75}}{s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^4 + 2s^2r(r-4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{76}.$$

$$\text{Donc } X_{76} \in (X_2X_{39}), X_{76} \in (X_4X_{69}), X_{76} \in (X_{10}X_{75}).$$

5.2.77 X_{77}

On pourra consulter [5]¹²⁵.

$$X_{77} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2b')(2c')q_1}{d_{77}} \\ \frac{b(2c')(2a')q_2}{d_{77}} \\ \frac{c(2a')(2b')q_3}{d_{77}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{77} &= -(a^5 + b^5 + c^5) - (b^4c + c^4a + a^4b) - (bc^4 + ca^4 + ab^4) \\ &+ 2(b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) + 2abcb(a^2 + b^2 + c^2) + 2(b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) \\ &- 2abcb(bc + ca + ab) = -d_{5,1} - d_{5,2} + 2d_{5,3} + 2d_{5,4} - 2d_{5,5} \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{77} &= \frac{[s^2-2(r+2R)R]X_1-3rRX_2+4rRX_3}{s^2-(r+4R)R} = \frac{s^2X_1-(r+4R)RX_7}{s^2-(r+4R)R} \\ &= \frac{[3s^2-r(r+8R)-12R^2]rRX_{29}+[s^2-2(r+2R)R][s^2-r(r+6R)-4R^2]X_{34}}{[s^2-(r+4R)R][s^2-(r+2R)^2]} \\ &= \frac{[s^2-r(r+4R)]rRX_{69}+s^2[s^2+r(r-2R)-4R^2]X_{73}}{(s^2+r^2)[s^2-(r+4R)R]} \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - (r+4R)R = \frac{d_{77}}{32sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{77} \in (X_1X_7), X_{77} \in (X_{29}X_{34}), X_{77} \in (X_{69}X_{73}).$$

5.2.78 X_{78}

On pourra consulter [5]¹²⁶.

$$X_{78} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2a')q_1}{d_{78}} \\ \frac{b(2b')q_2}{d_{78}} \\ \frac{c(2c')q_3}{d_{78}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

125. p. 179

126. p. 179

$$\begin{aligned}
d_{78} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2 a b c (a + b + c) \\
&= d_{46} = d_1 d'_{78} = d_{4,1} - 2 d_{4,3} + 2 d_{4,4} \text{ et} \\
d'_{78} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 4 a b c \\
&= d'_{46} = d_{3,1} - d_{3,2} + 4 d_{3,3}
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{78} &= \frac{(r+2R)X_1 - 3R X_2}{r-R} = \frac{2r X_3 - (r+R) X_{63}}{r-R} = \frac{-(r+4R) X_9 + (2r+3R) X_{21}}{r-R} \\
&= \frac{-[3s^2 - r(r+8R) - 12R^2] R X_{29} + [s^2 - r(r+2R) - 4R^2] (r+2R) X_{33}}{[s^2 - (r+2R)^2] (r-R)} \\
&= \frac{-[s^2 - r(r+4R)] R X_{69} + [s^2 + r(r-2R) - 4R^2] r X_{73}}{(s^2 + r^3) (r-R)}
\end{aligned}$$

$$\text{On a } r - R = -\frac{d_{78}}{16s^2 r} = -\frac{d'_{78}}{8sr}.$$

Donc $X_{78} \in (X_1 X_2)$, $X_{78} \in (X_3 X_{63})$, $X_{78} \in (X_9 X_{21})$, $X_{78} \in (X_{29} X_{33})$,
 $X_{78} \in (X_{69} X_{73})$.

5.2.79 X_{79}

On pourra consulter [5]¹²⁷.

$$X_{79} = \left(\begin{array}{c} \frac{(q_2 + c a)(q_3 + a b)}{d_{79}} \\ \frac{(q_3 + a b)(q_1 + b c)}{d_{79}} \\ \frac{(q_1 + b c)(q_2 + c a)}{d_{79}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{79} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3 a b c (a + b + c) = d_{21} = d_1 d'_{79} \\
&= -d_{4,1} + 2 d_{4,3} + 3 d_{4,4} \text{ et} \\
d'_{79} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) + a b c \\
&= d'_{21} = -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3}
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{79} &= \frac{(2r+3R)X_1 + 6r X_2 - 6r X_3}{2r+3R} = \frac{(2r+3R)X_1 + 6r X_{30}}{2r+3R} \\
&= \frac{r(r+4R)X_9 - [r(r+2R) - 3R^2] X_{46}}{(2r+3R)R} = \frac{2r(2r+3R)X_{21} - [4r(r+R) - 3R^2] X_{36}}{(2r+3R)R}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } 2r + 3R = \frac{d_{79}}{8s^2 r} = \frac{d'_{79}}{4sr}.$$

Donc $X_{79} \in (X_1 X_{30})$, $X_{79} \in (X_9 X_{46})$, $X_{79} \in (X_{21} X_{36})$.

5.2.80 X_{80}

On pourra consulter [5]¹²⁸.

127. p. 179

128. p. 179

$$X_{80} = \left(\begin{array}{c} \frac{(q_2-ca)(q_3-ab)}{d_{80}} \\ \frac{(q_3-ab)(q_1-bc)}{d_{80}} \\ \frac{(q_1-bc)(q_2-ca)}{d_{80}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{80} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - abc(a + b + c) = d_1 d'_{80}$$

$$= -d_{4,1} + 2d_{4,3} - d_{4,4} \text{ et}$$

$$d'_{80} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 3abc$$

$$= -d_{11} = -d_{3,1} + d_{3,2} - 3d_{3,3}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{80} = -\frac{(2r+R)X_1 - 6rX_2 + 2rX_3}{2r-R} = -\frac{(2r+R)X_1 - 4rX_5}{2r-R} = \frac{2(2r+R)X_{10} - (2r+3R)X_{21}}{2r-R}$$

$$= \frac{-4RX_{65} + (2r+3R)X_{79}}{2r-R}.$$

$$\text{On a } 2r - R = \frac{d_{80}}{8s^2r} = \frac{d'_{80}}{4sr}.$$

$$\text{Donc } X_{80} \in (X_1X_5), X_{80} \in (X_{10}X_{21}), X_{80} \in (X_{65}X_{79}).$$

5.2.81 X_{81}

On pourra consulter [5]¹²⁹.

$$X_{81} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(c+a)(a+b)}{d_{81}} \\ \frac{b(a+b)(b+c)}{d_{81}} \\ \frac{c(b+c)(c+a)}{d_{81}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{81} = (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 3abc$$

$$= d_{3,1} + d_{3,2} + 3d_{3,3}.$$

$$X_{81} = \text{Ceva}(X_1, X_6).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{81} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1 - 3rRX_2 - 2r^2X_3}{s^2-r(r+R)} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1 - r(2r+3R)X_{21}}{s^2-r(r+R)}$$

$$= \frac{3rRX_2 + [s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-r(r+R)} = \frac{[s^2+r(r+2R)](r+4R)X_7 + [s^2-3r(r+4R)-12R^2]rX_{27}}{2[s^2-r(r+R)](r+2R)}$$

$$= \frac{-[s^2+r(r+2R)]\{[s^2-r(r+5R)-6R^2]rX_{28} - \{s^2(2r+R) - r[2r+7R+7R^2]\}X_{60}\}}{[s^2-r(r+R)]\{s^2(r+R) + r[r(r+3R)+2R^2]\}}$$

$$= \frac{-(r^2-4R^2)X_{57} + [s^2-(r+4R)R]X_{77}}{s^2-r(r+R)}.$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+R) = \frac{d_{81}}{4s}.$$

$$\text{Donc } X_{81} \in (X_1X_{21}), X_{81} \in (X_2X_6), X_{81} \in (X_7X_{27}), X_{81} \in (X_{28}X_{60}),$$

$$X_{81} \in (X_{57}X_{77}).$$

129. p. 179

5.2.82 X_{82}

On pourra consulter [5] ¹³⁰.

$$X_{82} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{b(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{b(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{c(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ \frac{c(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{a(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{82} = (a^5 + b^5 + c^5) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + abc(bc + ca + ab) = d_{5,1} + d_{5,3} + d_{5,5}.$$

$$X_{82} = \text{Ceva}(X_1, X_{31}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{82} &= \frac{\{s^4 - 6s^2 r R - r^2 [r(r+2R) - 4R^2]\} X_1 - 3[s^2 r R - r^2(3r+8R)R] X_2 - 4[s^2 - r(r+3R)] r^2 X_3}{s^4 - s^2 r(4r+9R) + r^2 [(r+4R)(3r+7R)]} \\ &= \frac{[s^2 - r(r+4R)] [s^2 - 3r(r+2R)] X_{31} + [s^2 + r(r+4R)] r R X_{75}}{s^4 - s^2 r(4r+9R) + r^2 [(r+4R)(3r+7R)]} \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^4 - s^2 r(4r+9R) + r^2(r+4R)(3r+7R) = \frac{d_{82}}{4s}.$$

$$\text{Donc } X_{82} \in (X_{31} X_{75}).$$

5.2.83 X_{83}

On pourra consulter [5] ¹³¹.

$$X_{83} = \left(\begin{array}{c} \frac{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ \frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{83} = (a^4 + b^4 + c^4) + 3(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{4,1} + 3d_{4,3}.$$

$$X_{83} = \text{Ceva}(X_2, X_6).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{83} &= \frac{A_{1,83} X_1 + A_{2,83} X_2 + A_{3,83} X_3}{5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{3\{[s^2 - r(r+4R)]^2 + 4s^2 r^2\} X_2 + 2[s^2 + 2sr - r(r+4R)] [s^2 - 2sr - r(r+4R)] X_{32}}{5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{4[s^2 - r(r+4R)]^2 X_6 + \{[s^2 - r(r+4R)]^2 + 4s^2 r^2\} X_{76}}{5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{B_{10,83} X_{10} + B_{82,83} X_{82}}{[s^2 - r(r+3R)] [5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2]}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$A_{1,83} = 2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - r(r+4R)],$$

$$A_{2,83} = 3\{s^4 + 2s^2 r(r-6R) + r^2[r(r+12R) + 32R^2]\},$$

130. p. 179

131. p. 179

$$\begin{aligned}
A_{3,83} &= -4 [3s^2 - r(r+4R)] r^2, \\
B_{10,83} &= 2 \{s^6 + s^4 r(r-12R) - s^2 r^2 [r^2 - 8(r+5R)R] \\
&\quad - r^3 [r^2(r+12R) + 16(3r+4R)R^2]\} \\
B_{82,83} &= [3s^2 - r(r+4R)] \{s^4 - s^2 r(4r+9R) + r^2 [r(3r+19R) + 28R^2]\} \\
\text{On a } &5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2 = d_{83}. \\
\text{Donc } &X_{83} \in (X_2 X_{32}), X_{83} \in (X_6 X_{76}), X_{83} \in (X_{10} X_{82}).
\end{aligned}$$

5.2.84 X_{84}

On pourra consulter [5]¹³².

$$X_{84} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(cq_3+aq_1-bq_2-2bca)(aq_1+bq_2-cq_3-2cab)}{d_{84}} \\ \frac{b(aq_1+bq_2-cq_3-2cab)(bq_2+cq_3-aq_1-2abc)}{d_{84}} \\ \frac{c(bq_2+cq_3-aq_1-2abc)(cq_3+aq_1-bq_2-2bca)}{d_{84}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{84} &= (a^7 + b^7 + c^7) - (b^6 c + c^6 a + a^6 b) - (bc^6 + ca^6 + ab^6) \\
&\quad - 3(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + 2abc(a^4 + b^4 + c^4) - 3(b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) \\
&\quad + 3(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + abc(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + abc(bc^3 + ca^3 + ab^3) \\
&\quad + 3(b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) - 4abc(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2a^2 b^2 c^2 (a+b+c) = d_3 \delta_{84} \\
&= d_{7,1} - d_{7,2} - 3d_{7,3} + 2d_{7,4} + 3d_{7,5} + d_{7,6} - 4d_{7,7} + 2d_{7,8} \text{ et} \\
\delta_{84} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2abc = d'_3 \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{84} &= -\frac{(r+2R)X_1 - 6RX_2 - 2(r-2R)X_3}{r} = \frac{-4RX_3 + (r+4R)X_9}{r} = \frac{2RX_4 + (r-2R)X_{57}}{r} \\
&= \frac{(r+2R)X_8 + (r-2R)X_{20}}{r} = \frac{(r-R)^2 X_{46} + (2r-R)RX_{80}}{r^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } r = \frac{d_{84}}{128s^3 r^3} = \frac{\delta_{84}}{8sr}.$$

$$\text{Donc } X_{84} \in (X_3 X_9), X_{84} \in (X_4 X_{57}), X_{84} \in (X_8 X_{20}), X_{84} \in (X_{46} X_{80}).$$

5.2.85 X_{85}

On pourra consulter [5]¹³³.

$$X_{85} = \left(\begin{array}{c} \frac{bc(2b')(2c')}{d_{85}} \\ \frac{ca(2c')(2a')}{d_{85}} \\ \frac{ab(2a')(2b')}{d_{85}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

132. pp. 179-180

133. p. 180

$$d_{85} = -(b^3 c + c^3 a + a^3 b) - (b c^3 + c a^3 + a b^3) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + a b c(a + b + c) = -d_{4,2} + 2d_{4,3} + d_{4,4}.$$

$$X_{85} = \text{Ceva}(X_2, X_7) = \text{Ceva}(X_{55}, X_{77}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{85} &= \frac{-2[s^2-(r+2R)(r+4R)]X_1+3[s^2+r(r+4R)]X_2-4r(r+4R)X_3}{s^2+(r+4R)^2} \\ &= \frac{r^2(r+4R)^2 X_7+s^2 r^2 X_8}{[s^2+(r+4R)^2]r^2} \\ &= \frac{[s^2-r(r+4R)][3s^2-r(r+8R)-12R^2]X_{29}-2[s^2-(r+2R)(r+4R)][s^2-r(r+6R)-4R^2]X_{34}}{[s^2-(r+2R)^2][s^2+(r+4R)^2]} \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 + (r + 4R)^2 = \frac{d_{85}}{4r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{85} \in (X_7 X_8), X_{85} \in (X_{29} X_{34}).$$

5.2.86 X_{86}

On pourra consulter [5]¹³⁴.

$$X_{86} = \left(\begin{array}{c} \frac{(c+a)(a+b)}{d_{86}} \\ \frac{(a+b)(b+c)}{d_{86}} \\ \frac{(b+c)(c+a)}{d_{86}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{86} = (a^2 + b^2 + c^2) + 3(bc + ca + ab) = d_{2,1} + 3d_{2,2}.$$

$$X_{86} = \text{Ceva}(X_1, X_2) = \text{Ceva}(X_7, X_{77}) = \text{Ceva}(X_{21}, X_{81}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{86} &= \frac{2[s^2+r(r+2R)]X_1+3(s^2+r^2)X_2-4r^2X_3}{5s^2+r(r+4R)} = \frac{4s^2X_1+[s^2+r(r+4R)]X_{75}}{5s^2+r(r+4R)} \\ &= \frac{3[s^2+r(r+4R)]X_2+2[s^2-r(r+4R)]X_6}{5s^2+r(r+4R)} = \frac{[s^2+r(r+2R)](r+4R)X_7+2s^2(2r+3R)X_{21}}{[5s^2+r(r+4R)](r+2R)} \\ &= \frac{(s^2-r^2)[3s^2-r(r+8R)-12R^2]X_{29}+2[s^2-r(r+6R)-4R^2][s^2+r(r+2R)]X_{34}}{[5s^2+r(r+4R)][s^2-(r+2R)^2]}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 5s^2 + r(r + 4R) = d_{86}.$$

$$\text{Donc } X_{86} \in (X_1 X_{75}), X_{86} \in (X_2 X_6), X_{86} \in (X_7 X_{21}), X_{86} \in (X_{29} X_{34}).$$

5.2.87 X_{87}

On pourra consulter [5]¹³⁵.

134. p. 180

135. p. 180

$$X_{87} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)}{d_{87}} \\ \frac{b(ca-ab+bc)(ca+ab-bc)}{d_{87}} \\ \frac{c(ab-bc+ca)(ab+bc-ca)}{d_{87}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{87} = -(b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + 2abc(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + abc(bc + ca + ab) = -d_{5,3} + 2d_{5,4} + d_{5,5}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{87} = \frac{[s^4+2s^2r(r-4R)+r^2[r(r-8R)-16R^2]]X_1-12[s^2+r(r-4R)]rR X_2+32r^3R X_3}{s^4+2s^2r(r-10R)+r^2[r(r+12R)+32R^2]}$$

$$= \frac{-16[s^2-r(r+4R)]rR X_6+[s^2+r(r+4R)][s^2+r(r-8R)]X_{43}}{s^4+2s^2r(r-10R)+r^2[r(r+12R)+32R^2]}.$$

$$\text{On a } s^4 + 2s^2r(r-10R) + r^2[r(r+12R) + 32R^2] = -\frac{d_{87}}{2s}.$$

$$\text{Donc } X_{87} \in (X_6X_{43}).$$

5.2.88 X_{88}

On pourra consulter [5]¹³⁶.

$$X_{88} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(a-2b+c)(a+b-2c)}{d_{88}} \\ \frac{b(b-2c+a)(b+c-2a)}{d_{88}} \\ \frac{c(c-2a+b)(c+a-2b)}{d_{88}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{88} = (a^3 + b^3 + c^3) - 3(b^2c + c^2a + a^2b) - 3(bc^2 + ca^2 + ab^2) + 15abc$$

$$= d_{3,1} - 3d_{3,2} + 15d_{3,3}.$$

$$X_{88} = \text{Ceva}(X_1, X_{44}) = \text{Ceva}(X_6, X_{36}).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{88} = \frac{[s^2-3r(r+2R)]X_1-9rR X_2+6r^2X_3}{s^2+3r(r-5R)} = \frac{-27rR X_2+[s^2+3r(r+4R)]X_{45}}{s^2+3r(r-5R)}.$$

$$\text{On a } s^2 + 3r(r-5R) = -\frac{d_{88}}{4s}.$$

$$\text{Donc } X_{88} \in (X_2X_{45}).$$

5.2.89 X_{89}

On pourra consulter [5]¹³⁷.

$$X_{89} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(2a-b+2c)(2a+2b-c)}{4d_{89}} \\ \frac{b(2b-c+2a)(2b+2c-a)}{4d_{89}} \\ \frac{c(2c-a+2b)(2c+2a-b)}{4d_{89}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

136. p. 180

137. p. 180

$$d_{89} = (a^3 + b^3 + c^3) + \frac{15}{4} abc = d_{3,1} + \frac{15}{4} d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{89} &= \frac{2[s^2+3r(r+2R)]X_1-9rR X_2-12R^2 X_3}{2s^2-3r(2r-R)} = \frac{27rR X_2+2[s^2-3r(r+4R)]X_{44}}{2s^2-3r(2r-R)} \\ &= \frac{3[s^2-r(r+4R)]X_6-[s^2+3r(r-5R)]X_{88}}{2s^2-3r(2r-R)} \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2s^2 - 3r(2r - R) = \frac{d_{89}}{s}.$$

$$\text{Donc } X_{89} \in (X_2 X_{44}), X_{89} \in (X_6 X_{88}).$$

5.2.90 X_{90}

On pourra consulter [5] ¹³⁸.

$$X_{90} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(aq_1+bq_2-cq_3)(aq_1-bq_2+cq_3)}{d_{90}} \\ \frac{b(bq_2+cq_3-aq_1)(bq_2-cq_3+aq_1)}{d_{90}} \\ \frac{c(cq_3+aq_1-bq_2)(cq_3-aq_1+bq_2)}{d_{90}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{90} &= (a^7 + b^7 + c^7) - (b^6 c + c^6 a + a^6 b) - (bc^6 + ca^6 + ab^6) \\ &- 3(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) - 2abc(a^4 + b^4 + c^4) - 3(b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) \\ &+ 3(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + abc(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + abc(bc^3 + ca^3 + ab^3) \\ &+ 3(b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) + 4abc(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - 2a^2 b^2 c^2 (a + b + c) \\ &= d_1 d'_{90} = d_{7,1} - d_{7,2} - 3d_{7,3} - 2d_{7,4} + 3d_{7,5} + d_{7,6} + 4d_{7,7} - 2d_{7,8} \text{ et} \\ d'_{90} &= (a^6 + b^6 + c^6) - 2(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - 2(bc^5 + ca^5 + ab^5) \\ &- (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + 2abc(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ &+ 4(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - 2a^2 b^2 c^2 = d_{6,1} - 2d_{6,2} - d_{6,3} + 2d_{6,4} + 4d_{6,5} - 2d_{6,7} \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{90} &= -\frac{(r+R)^2 X_1 - 6rR X_2 - 2r(r-R) X_3}{r(r+2R) - R^2} = \frac{2rR X_4 + (r^2 - R^2) X_{46}}{r(r+2R) - R^2} \\ &= \frac{r(r+4R) X_9 - (2r+R) R X_{35}}{r(r+2R) - R^2} = \frac{[s^2 - r(r+2R) - 4R^2] X_{33} - [s^2 - 3r(r+2R) - 2R^2] X_{47}}{2[r(r+2R) - R^2]} \\ &= \frac{(2r-R) R X_{36} + r^2 X_{84}}{r(r+2R) - R^2} = \frac{r^2 X_{40} + (2r-R) R X_{80}}{r(r+2R) - R^2} = \frac{(r^2 - 4R^2) X_{57} + (2r+3R) R X_{79}}{r(r+2R) - R^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r(r+2R) - R^2 = \frac{d_{90}}{128s^3 r^2} = \frac{d'_{90}}{64s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{90} \in (X_4 X_{46}), X_{90} \in (X_9 X_{35}), X_{90} \in (X_{33} X_{47}), X_{90} \in (X_{36} X_{84}), \\ X_{90} \in (X_{40} X_{80}), X_{90} \in (X_{57} X_{79}).$$

5.2.91 X_{91}

On pourra consulter [5] ¹³⁹.

138. p. 180

139. p. 180

$$X_{91} = \left(\begin{array}{c} \frac{bc(q_2^2-S)(q_3^2-S)}{4d_{91}} \\ \frac{ca(q_3^2-S)(q_1^2-S)}{4d_{91}} \\ \frac{ab(q_1^2-S)(q_2^2-S)}{4d_{91}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{91} &= (b^9c + c^9a + a^9b) + (bc^9 + ca^9 + ab^9) + abc(a^7 + b^7 + c^7) \\ &- 4(b^7c^3 + c^7a^3 + a^7b^3) - 2abc(b^6c + c^6a + a^6b) - 2abc(bc^6 + ca^6 + ab^6) \\ &+ 6(b^5c^5 + c^5a^5 + a^5b^5) - 4(b^3c^7 + c^3a^7 + a^3b^7) - 2abc(b^5c^2 + c^5a^2 + a^5b^2) \\ &- 2abc(b^2c^5 + c^2a^5 + a^2b^5) + 2abc(b^4c^3 + c^4a^3 + a^4b^3) \\ &+ 2a^2b^2c^2(b^3c + c^3a + a^3b) + 2a^2b^2c^2(bc^3 + ca^3 + ab^3) \\ &+ 2abc(b^3c^4 + c^3a^4 + a^3b^4) = d_1 d'_{91} \\ &= d_{10,2} + d_{10,4} - 4d_{10,5} - 2d_{10,6} - 2d_{10,8} + 6d_{10,10} + 2d_{10,11} + 2d_{10,12} \text{ et} \\ d'_{91} &= (b^8c + c^8a + a^8b) + (bc^8 + ca^8 + ab^8) \\ &- (b^7c^2 + c^7a^2 + a^7b^2) - abc(a^6 + b^6 + c^6) - (b^2c^7 + c^2a^7 + a^2b^7) \\ &- 3(b^6c^3 + c^6a^3 + a^6b^3) - 3(b^3c^6 + c^3a^6 + a^3b^6) \\ &+ 3(b^5c^4 + c^5a^4 + a^5b^4) + abc(b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) + abc(b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) \\ &+ 3(b^4c^5 + c^4a^5 + a^4b^5) - 2abc(b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3) \\ &+ a^2b^2c^2(b^2c + c^2a + a^2b) + a^2b^2c^2(bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2a^3b^3c^3 \\ &= d_{9,2} - d_{9,3} - d_{9,4} - 3d_{9,5} + 3d_{9,7} + d_{9,8} - 2d_{9,9} + d_{9,11} - 2d_{9,12}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{91} &= \frac{A_{1,91}X_1 + A_{2,91}X_2 + A_{3,91}X_3}{s^2(r-R) + r^2(r+3R) + 2(r+R)R^2} \\ &= \frac{B_{65,91}X_{65} + B_{68,91}X_{68}}{[s^2 - r(r+2R) - 2R^2][s^2(r-R) + r^2(r+3R) + 2(r+R)R^2]}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1,91} &= -s^2(2r+R) + r^2(2r+7R) + 2(4r+R)R^2, \\ A_{2,91} &= 3(s^2 + r^2 - 2R^2)r, \\ A_{3,91} &= -4r^2(r+R), \\ B_{65,91} &= -\{s^4 - 2s^2[r(3r+4R) + 2R^2] + r[r^2(r+8R) + 4(5r+4R)R^2] + 4R^4\}R, \\ B_{68,91} &= (s^2 + r^2 - 2R^2)[s^2 - (r+2R)^2]r. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2(r-R) + r^2(r+3R) + 2(r+R)R^2 = \frac{d_{91}}{256s^4r^3} = \frac{d'_{91}}{128s^3r^3}.$$

Donc $X_{91} \in (X_{65}X_{68})$.

5.2.92 X_{92}

On pourra consulter [5]¹⁴⁰.

$$X_{92} = \left(\begin{array}{c} \frac{bcq_2q_3}{d_{92}} \\ \frac{caq_3q_1}{d_{92}} \\ \frac{abq_1q_2}{d_{92}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

140. p. 180

$$d_{92} = -(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) + a b c (a^3 + b^3 + c^3) \\ + 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) = -d_{6,2} + d_{6,4} + 2 d_{6,5}$$

$$X_{92} = \text{Ceva}(X_1, X_{19}) = \text{Ceva}(X_{47}, X_{48}).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{92} = \frac{-2[s^2-(r+2R)^2]X_1+3(s^2+r^2-4R^2)X_2-4r(r+2R)X_3}{s^2+r^2-4R^2} \\ = \frac{-2[s^2-(r+2R)^2]X_1+[3s^2-r(r+8R)-12R^2]X_{29}}{s^2+r^2-4R^2} = \frac{2r(r+2R)X_4+[s^2-(r+2R)^2]X_8}{s^2+r^2-4R^2} \\ = \frac{2[s^2-r(r+6R)-8R^2]X_{19}-[s^2-3(r+2R)^2]X_{27}}{s^2+r^2-4R^2} \\ = \frac{-2[s^2-3r(r+2R)-2R^2]RX_{47}+[s^2(r+2R)+r^2(r-6R)-4(4r+R)R^2]X_{91}}{(s^2+r^2-4R^2)r}.$$

$$\text{On a } s^2 + r^2 - 4R^2 = \frac{d_{92}}{16s^2r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{92} \in (X_1X_{29}), X_{92} \in (X_4X_8), X_{92} \in (X_{19}X_{27}), X_{92} \in (X_{47}X_{91}).$$

5.2.93 X_{93}

On pourra consulter [5] ¹⁴¹.

$$X_{93} = \left(\begin{array}{c} \frac{b^2 c^2 (c^2 a^2 - S)(a^2 b^2 - S) q_2 q_3}{c^2 a^2 (a^2 b^2 - S)(b^2 c^2 - S) q_3 q_1} \\ \frac{a^2 b^2 (b^2 c^2 - S)(c^2 a^2 - S) q_1 q_2}{d_{93}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{93} = -(b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) - (b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\ + 6 (b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) + 6 (b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) + 7 a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) \\ - 13 (b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) - 13 (b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) \\ - 15 a^2 b^2 c^2 (b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 15 a^2 b^2 c^2 (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\ + 16 (b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) + 9 a^2 b^2 c^2 (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) \\ + 9 a^2 b^2 c^2 (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) + 9 a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4) \\ - 2 a^4 b^4 c^4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{93} \\ = -d_{16,3} + 6 d_{16,7} + 7 d_{16,9} - 13 d_{16,13} - 15 d_{16,15} + 16 d_{16,21} + 9 d_{16,23} \\ + 9 d_{16,25} - 2 d_{16,29} \text{ et } \delta_{93} = (b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) + (b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) \\ - 4 (b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) - 3 a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) - 4 (b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) \\ + 6 (b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) + 2 a^2 b^2 c^2 (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\ + 2 a^2 b^2 c^2 (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + a^4 b^4 c^4 \\ = d_{12,3} - 4 d_{12,7} - 3 d_{12,9} + 6 d_{12,13} + 2 d_{12,15} + d_{12,19}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{93} = \frac{A_{1,93} X_1 + A_{2,93} X_2 + A_{3,93} X_3}{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 4R^2] + r[r^2(r+8R) + 8(3r+4R)R^2] + 13R^4}, \text{ avec :}$$

141. p. 180

$$\begin{aligned}
A_{1,93} &= -2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - (r+2R)^2], \\
A_{2,93} &= 3\{s^4 + 2s^2[r(r-2R) - 3R^2] + r[r^2(r+4R) + 2(3r+4R)R^2] + 5R^4\}, \\
A_{3,93} &= -2\{s^2(2r^2 - R^2) + r[2r^2(r+4R) + (9r+4R)R^2] + R^4\}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 4R^2] + r[r^2(r+8R) + 8(3r+4R)R^2] + 13R^4 \\
&= \frac{d_{93}}{4096s^6r^6} = \frac{\delta_{93}}{256s^4r^4}.
\end{aligned}$$

5.2.94 X_{94}

On pourra consulter [5] ¹⁴².

$$\begin{aligned}
X_{94} &= \left(\begin{array}{c} \frac{b^2c^2(3c^2a^2-S)(3a^2b^2-S)}{d_{94}} \\ \frac{c^2a^2(3a^2b^2-S)(3b^2c^2-S)}{d_{94}} \\ \frac{a^2b^2(3b^2c^2-S)(3c^2a^2-S)}{d_{94}} \end{array} \right), \text{ avec :} \\
d_{94} &= (b^{10}c^2 + c^{10}a^2 + a^{10}b^2) + (b^2c^{10} + c^2a^{10} + a^2b^{10}) \\
&- 4(b^8c^4 + c^8a^4 + a^8b^4) - a^2b^2c^2(a^6 + b^6 + c^6) - 4(b^4c^8 + c^4a^8 + a^4b^8) \\
&+ 6(b^6c^6 + c^6a^6 + a^6b^6) + 3a^4b^4c^4 = d_{12,3} - 4d_{12,7} - d_{12,9} + 6d_{12,13} + 3d_{12,19} \\
X_{94} &= \text{Ceva}(X_{49}, X_{50}).
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{94} &= \frac{A_{1,94}X_1 + A_{2,94}X_2 + A_{3,94}X_3}{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 6R^2] + r[r^2(r+8R) + 4(7r+12R)R^2] + 27R^4} \\
&= \frac{B_{49,94}X_{49} + B_{93,94}X_{93}}{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 6R^2] + r[r^2(r+8R) + 4(7r+12R)R^2] + 27R^4}, \text{ avec :} \\
A_{1,94} &= -2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - r(r+4R) - 3R^2], \\
A_{2,94} &= 3\{s^4 + 2s^2[r(r-2R) - 3R^2] + r[r^2(r+4R) + 6(r+2R)R^2] + 9R^4\}, \\
A_{3,94} &= -4[s^2 + r(r+4R) + 3R^2]r^2, \\
B_{49,94} &= -2[2s^2 - 2r(r+4R) - 7R^2]R^2 = -\frac{R^2d_{49}}{128s^4r^4}, \\
B_{93,94} &= s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 4R^2] + r[r^2(r+8R) + 8(3r+4R)R^2] + 13R^4 \\
&= \frac{d_{93}}{4096s^6r^6}.
\end{aligned}$$

On a

$$s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 6R^2] + r[r^2(r+8R) + 4(7r+12R)R^2] + 27R^4 = \frac{d_{94}}{256s^4r^4}.$$

Donc $X_{94} \in (X_{49}X_{93})$.

142. p. 180

5.2.95 X_{95}

On pourra consulter [5]¹⁴³.

$$X_{95} = \left(\begin{array}{c} \frac{(S-b^2 q_2)(S-c^2 q_3)}{d_{95}} \\ \frac{(S-c^2 q_3)(S-a^2 q_1)}{d_{95}} \\ \frac{(S-a^2 q_1)(S-b^2 q_2)}{d_{95}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{95} = (a^8 + b^8 + c^8) - 5(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 5(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) + 8(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + 5a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_{8,1} - 5d_{8,3} + 8d_{8,7} + 5d_{8,9}.$$

$$X_{95} = \text{Ceva}(X_2, X_3) = \text{Ceva}(X_{54}, X_{97}) \text{ (cf. } X_{97} \text{ ci-après)}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{95} = \frac{A_{1,95} X_1 + A_{2,95} X_2 + A_{3,95} X_3}{s^4 + 2s^2 [r(9r-4R) - 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R)} = \frac{B_{54,95} X_{54} + B_{69,95} X_{69}}{\{s^2 - [r(r+4R) + 2R^2]\} \{s^4 + 2s^2 [r(9r-4R) - 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R)\}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} A_{1,95} &= -2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - (r+2R)^2] = A_{1,93}, \\ A_{2,95} &= 3\{s^4 + 2s^2 [r(r-4R) - 2R^2] + r^2 (r+2R)^2\}, \\ A_{3,95} &= 4[3s^2 - (r+2R)^2] r^2, \\ B_{54,95} &= 8s^2 [2s^2 - 2r(r+4R) - 5R^2] r^2, \\ B_{69,95} &= [s^2 - r(r+4R)] \\ &\{s^4 + 2s^2 [r(r-4R) - 3R^2] + (r+2R)^2 [r(r+4R) + 2R^2]\}. \end{aligned}$$

On a

$$s^4 + 2s^2 [r(9r-4R) - 2R^2] + r(r+2R)^2 (r+4R) = \frac{d_{95}}{16s^2 r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{95} \in (X_{54} X_{69}).$$

5.2.96 X_{96}

On pourra consulter [5]¹⁴⁴.

$$X_{96} = \left(\begin{array}{c} \frac{(q_2^2 - S)(q_3^2 - S)(S - b^2 q_2)(S - c^2 q_3)}{4d_{96}} \\ \frac{(q_3^2 - S)(q_1^2 - S)(S - c^2 q_3)(S - a^2 q_1)}{4d_{96}} \\ \frac{(q_1^2 - S)(q_2^2 - S)(S - a^2 q_1)(S - b^2 q_2)}{4d_{96}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{(q_2^2 - S)(q_3^2 - S)(S + q_3 q_1)(S + q_1 q_2)}{16d_{96}} \\ \frac{(q_3^2 - S)(q_1^2 - S)(S + q_1 q_2)(S + q_2 q_3)}{16d_{96}} \\ \frac{(q_1^2 - S)(q_2^2 - S)(S + q_2 q_3)(S + q_3 q_1)}{16d_{96}} \end{array} \right),$$

avec :

143. p. 180

144. p. 180

$$\begin{aligned}
d_{96} &= (a^{16} + b^{16} + c^{16}) - 7(b^{14}c^2 + c^{14}a^2 + a^{14}b^2) - 7(b^2c^{14} + c^2a^{14} + a^2b^{14}) \\
&+ 22(b^{12}c^4 + c^{12}a^4 + a^{12}b^4) + 29a^2b^2c^2(a^{10} + b^{10} + c^{10}) \\
&+ 22(b^4c^{12} + c^4a^{12} + a^4b^{12}) - 41(b^{10}c^6 + c^{10}a^6 + a^{10}b^6) \\
&- 45a^2b^2c^2(b^8c^2 + c^8a^2 + a^8b^2) - 45a^2b^2c^2(b^2c^8 + c^2a^8 + a^2b^8) \\
&- 41(b^6c^{10} + c^6a^{10} + a^6b^{10}) + 50(b^8c^8 + c^8a^8 + a^8b^8) \\
&+ 23a^2b^2c^2(b^6c^4 + c^6a^4 + a^6b^4) + 26a^4b^4c^4(a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 23a^2b^2c^2(b^4c^6 + c^4a^6 + a^4b^6) - 6a^4b^4c^4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_3 \delta_{96} \\
&= d_{16,1} - 7d_{16,3} + 22d_{16,7} + 29d_{16,9} - 41d_{16,13} - 45d_{16,15} + 50d_{16,21} + 23d_{16,23} \\
&+ 26d_{16,25} - 6d_{16,29} \text{ et } \delta_{96} = -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 5(b^{10}c^2 + c^{10}a^2 + a^{10}b^2) \\
&+ 5(b^2c^{10} + c^2a^{10} + a^2b^{10}) - 11(b^8c^4 + c^8a^4 + a^8b^4) - 11a^2b^2c^2(a^6 + b^6 + c^6) \\
&- 11(b^4c^8 + c^4a^8 + a^4b^8) + 14(b^6c^6 + c^6a^6 + a^6b^6) + 6a^2b^2c^2(b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) \\
&+ 6a^2b^2c^2(b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) - 2a^4b^4c^4 \\
&= -d_{12,1} + 5d_{12,3} - 11d_{12,7} - 11d_{12,9} + 14d_{12,13} + 6d_{12,15} - 2d_{12,19}.
\end{aligned}$$

$$X_{96} = \text{Ceva}(X_3, X_{68}).$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{96} &= \frac{A_{1,96}X_1 + A_{2,96}X_2 + A_{3,96}X_3}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + [r(r+4R)+2R^2][r(r+4R)-2R^2]} \\
&= \frac{B_{2,96}X_2 + B_{54,96}X_{54}}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + [r(r+4R)+2R^2][r(r+4R)-2R^2]} \\
&= \frac{B_{76,96}X_{76} + B_{95,96}X_{95}}{8s^2\{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + [r(r+4R)+2R^2][r(r+4R)-2R^2]\}r^2}, \text{ avec :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1,96} &= 2\{s^4 - 2s^2(r+R)R - r(r+2R)[r(r+4R)+2R^2]\}, \\
A_{2,96} &= -3\{s^4 + 2s^2[r(r-2R)-2R^2] + (r^2+2R^2)[r(r+4R)+2R^2]\}, \\
A_{3,96} &= 2\{s^4 - 4s^2[r(r+2R)+R^2] + [r(r+4R)+2R^2][r(3r+4R)+2R^2]\}, \\
B_{2,96} &= -3\{s^4 + 2s^2[r(r-4R)-3R^2] + (r+2R)^2[r(r+4R)+2R^2]\}, \\
B_{54,96} &= 2\{2s^4 - s^2[4r(r+4R)+9R^2] \\
&+ [r(r+4R)+2R^2][2r(r+4R)+5R^2]\}, \\
B_{76,96} &= -\{s^8 + 2s^6[2r(r-4R)-3R^2] \\
&+ s^4(6r^4 - 16r^3R + 90r^2R^2 + 72rR^3 + 8R^4) \\
&+ s^2(4r^6 + 16r^5R - 58r^4R^2 - 304r^3R^3 - 272r^2R^4 - 64rR^5) \\
&+ r^2(r+2R)^2(r+4R)^2[r(r+4R)+2R^2]\}, \\
B_{95,96} &= \{s^8 + 2s^6[2r(3r-4R)-3R^2] \\
&+ s^4(-106r^4 - 80r^3R + 90r^2R^2 + 72rR^3 + 8R^4) \\
&+ s^2(12r^6 + 80r^5R - 70r^4R^2 - 304r^3R^3 - 304r^2R^4 - 64rR^5) \\
&+ r^2(r+2R)^2(r+4R)^2[r(r+4R)+2R^2]\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{On a } \{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + [r(r+4R)+2R^2][r(r+4R)-2R^2]\} \\
&= -\frac{d_{96}}{4096s^6r^6} = -\frac{\delta_{96}}{256s^4r^4}.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } X_{96} \in (X_2X_{54}), X_{96} \in (X_{76}X_{95}).$$

5.2.97 X_{97}

On pourra consulter [5]¹⁴⁵.

$$X_{97} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 q_1 (S-b^2 q_2) (S-c^2 q_3)}{b^2 q_2 (S-c^2 q_3) (S-a^2 q_1)} \\ \frac{b^2 q_2 (S-c^2 q_3) (S-a^2 q_1)}{c^2 q_3 (S-a^2 q_1) (S-b^2 q_2)} \end{array} \right)^{d_{97}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{97} &= -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 4(b^{10}c^2 + c^{10}a^2 + a^{10}b^2) + 4(b^2c^{10} + c^2a^{10} + a^2b^{10}) \\ &- 7(b^8c^4 + c^8a^4 + a^8b^4) - 11a^2b^2c^2(a^6 + b^6 + c^6) - 7(b^4c^8 + c^4a^8 + a^4b^8) \\ &+ 8(b^6c^6 + c^6a^6 + a^6b^6) + 7a^2b^2c^2(b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) \\ &+ 7a^2b^2c^2(b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) \\ &= -d_{12,1} + 4d_{12,3} - 7d_{12,7} - 11d_{12,9} + 8d_{12,13} + 7d_{12,15}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{97} &= \frac{A_{1,97}X_1 + A_{2,97}X_2 + A_{3,97}X_3}{s^4 - s^2 [2r(3r+4R) + 7R^2] + (r+2R)^2 [r(r+4R) + 3R^2]} \\ &= \frac{B_{2,97}X_2 + B_{95,97}X_{95}}{2\{s^4 - s^2 [2r(3r+4R) + 7R^2] + (r+2R)^2 [r(r+4R) + 3R^2]\}} \\ &= \frac{B_{3,97}X_3 + B_{54,97}X_{54}}{s^4 - s^2 [2r(3r+4R) + 7R^2] + (r+2R)^2 [r(r+4R) + 3R^2]}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1,97} &= [s^2 + r(r+2R)][s^2 - (r+2R)^2], \\ A_{2,97} &= -3[s^2 - (r+2R)^2](2r+R)R, \\ A_{3,97} &= -2[3s^2 - (r+2R)^2]r^2, \\ B_{2,97} &= 3\{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 3R^2] + (r+2R)^2[r(r+4R) + 2R^2]\} \\ &= 6 \frac{B_{69,95}}{d_6}, \\ B_{95,97} &= -\{s^4 + 2s^2[r(9r-4R) - 2R^2] + r(r+2R)^2(r+4R)\} = -\frac{d_{95}}{d_3}, \\ B_{3,97} &= -\{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 3R^2] + (r+2R)^2[r(r+4R) + 2R^2]\} \\ &= -\frac{1}{3}B_{2,97}, \\ B_{54,97} &= 2s^4 - s^2[4r(r+4R) + 13R^2] + (r+2R)^2[2r(r+4R) + 5R^2]. \end{aligned}$$

On a

$$s^4 - s^2 [2r(3r+4R) + 7R^2] + (r+2R)^2 [r(r+4R) + 3R^2] = -\frac{d_{97}}{512s^4r^4}.$$

Donc $X_{97} \in (X_2X_{95})$, $X_{97} \in (X_3X_{54})$,

5.2.98 $X_{98} \equiv Ta$ point de Tarry

On pourra consulter [5]¹⁴⁶ [8]¹⁴⁷

145. p. 180

146. p. 180

147. p. 1786 "Tarry Point"

$$\begin{aligned}
X_{98} &\equiv Ta = \left(\begin{array}{c} \frac{(c^4+a^4-b^2c^2-b^2a^2)(a^4+b^4-c^2a^2-c^2b^2)}{d_{98}} \\ \frac{(a^4+b^4-c^2a^2-c^2b^2)(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)}{d_{98}} \\ \frac{(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)(c^4+a^4-b^2c^2-b^2a^2)}{d_{98}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{(d_{32}-b^2d_6)(d_{32}-c^2d_6)}{d_{98}} \\ \frac{(d_{32}-c^2d_6)(d_{32}-a^2d_6)}{d_{98}} \\ \frac{(d_{32}-a^2d_6)(d_{32}-b^2d_6)}{d_{98}} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \frac{(d_6q_2-S)(d_6q_3-S)}{4d_{98}} \\ \frac{(d_6q_3-S)(d_6q_1-S)}{4d_{98}} \\ \frac{(d_6q_1-S)(d_6q_2-S)}{4d_{98}} \end{array} \right), \text{ avec :} \\
d_{98} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 3(b^6c^2 + c^6a^2 + a^6b^2) - 3(b^2c^6 + c^2a^6 + a^2b^6) \\
&+ 4(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4) + a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = d_3\delta_{98} \\
&= d_{8,1} - 3d_{8,3} + 4d_{8,7} + d_{8,9} \text{ et} \\
\delta_{98} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = -d_{99} = -d_{4,1} + d_{4,3}
\end{aligned}$$

Le point de Tarry $X_{98} \equiv Ta$ appartient au cercle circonscrit.

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{98} &= \frac{A_{1,98}X_1 + A_{2,98}X_2 + A_{3,98}X_3}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} = \frac{B_{3,98}X_3 + B_{76,98}X_{76}}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} \\
&= \frac{B_{4,98}X_4 + B_{32,98}X_{32}}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} = \frac{B_{5,98}X_5 + B_{83,98}X_{83}}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} \\
&= \frac{B_{23,98}X_{23} + B_{94,98}X_{94}}{[s^2 - r(r+4R) - 3R^2][s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2]}, \text{ avec :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1,98} &= 2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - r(r+4R)] = [s^2 + r(r+2R)]d_6, \\
A_{2,98} &= -3[s^4 + 2s^2r(r-2R) + r^3(r+4R)], \\
A_{3,98} &= 2[s^2 - r(r+4R)][s^2 - r(3r+4R)] = d_6[s^2 - r(3r+4R)], \\
B_{3,98} &= 2[s^4 - 2s^2r(3r+4R) + r^2(r+4R)^2], \\
B_{76,98} &= -[s^4 + 2s^2r(r-4R) + r^2(r+4R)^2], \\
B_{4,98} &= -[s^4 + 2s^2r(r-4R) + r^2(r+4R)^2], \\
B_{32,98} &= 2\{[s^2 - r(r+4R)]^2 - 4s^2r^2\}, \\
B_{5,98} &= -4[s^4 + 2s^2r(r-4R) + r^2(r+4R)^2], \\
B_{83,98} &= [5s^4 - 2s^2r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2], \\
B_{23,98} &= [2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] \\
&\{s^4 - r^2[2r(3r+4R) + 3R^2] + r(r+4R)[r(r+4R) + 3R^2]\}, \\
B_{94,98} &= -[s^2 - r(r+4R)] \\
&\{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 6R^2] + [r(r+4R) + 3R^2][r(r+4R) + 9R^2]\}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2 = -\frac{d_{98}}{16s^2r^2} = -\delta_{98}$$

$$\text{Donc } X_{98} \in (X_3X_{76}), X_{98} \in (X_4X_{32}), X_{98} \in (X_5X_{83}), X_{98} \in (X_{23}X_{94}).$$

5.2.99 $X_{99} \equiv St$ point de Steiner

On pourra consulter [5]¹⁴⁸ [8]¹⁴⁹.

148. p. 180

149. p. 1730 "Steiner Points"

$$X_{99} \equiv St = \left(\begin{array}{c} -\frac{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{d_{99}} \\ -\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{d_{99}} \\ -\frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{d_{99}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{99} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{4,1} - d_{4,3}.$$

Le point de Steiner $X_{99} \equiv St$ appartient au cercle circonscrit.

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{99} &= \frac{A_{1,99} X_1 + A_{2,99} X_2 + A_{3,99} X_3}{s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} = \frac{-16s^2 r^2 X_3 + [s^4 + 2s^2 r(r-4R) + r^2(r+4R)^2] X_{76}}{s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{-4[s^4 + 2s^2 r(r-4R) + r^2(r+4R)^2] X_{39} + [5s^4 - 2s^2 r(3r+20R) + 5r^2(r+4R)^2] X_{83}}{s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{B_{69,99} X_{69} + B_{74,99} X_{74}}{[s^2 - r(r+4R) - 6R^2][s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2]}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1,99} &= -2[s^2 + r(r+2R)][s^2 - r(r+4R)] = -[s^2 + r(r+2R)] d_6 \\ &= -A_{1,98}, \\ A_{2,99} &= 3[s^4 + 2s^2 r(r-2R) + r^3(r+4R)], \\ A_{3,99} &= -4[5s^2 + r(r+4R)] r^2, \\ B_{69,99} &= [s^2 - r(r+4R)] \\ &\{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 3R^2] + r(r+4R)[r(r+4R) + 6R^2]\} \\ &= \frac{1}{2} d_6 \{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 3R^2] + r(r+4R)[r(r+4R) + 6R^2]\}, \\ B_{74,99} &= -8s^2[2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] r^2. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{99}.$$

$$\text{Donc } X_{99} \in (X_3 X_{76}), X_{99} \in (X_{39} X_{83}), X_{99} \in (X_{69} X_{74}).$$

5.2.100 X_{100} anticomplément du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$

On pourra consulter [5]¹⁵⁰.

$$X_{100} = \left(\begin{array}{c} -\frac{a(c-a)(a-b)}{d_{100}} \\ -\frac{b(a-b)(b-c)}{d_{100}} \\ -\frac{c(b-c)(c-a)}{d_{100}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{100} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 3 a b c \\ &= d_{11} = d_{3,1} - d_{3,2} + 3 d_{3,3}. \end{aligned}$$

On vérifie que $\overrightarrow{X_{100} X_{11}} = \frac{3}{2} \overrightarrow{X_{100} G}$; donc X_{100} est l'anticomplément du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$.

150. p. 180

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{100} &= \frac{2R X_1 - 3R X_2 + 2r X_3}{2r - R} = -\frac{[s^2 - 3r(r+4R)] X_1 - [s^2 + 3r(r-5R)] X_{88}}{3r(2r-R)} \\
= 3X_2 - 2X_{11} &= \frac{2r X_3 - R X_8}{2r - R} = -\frac{4R X_{10} - (2r+3R) X_{21}}{2r - R} \\
= \frac{-[s^2 - 3r(r+2R)] X_{31} + [s^2 + r(r-8R)] X_{43}}{2r(2r-R)} &= \frac{r X_{40} + (r-R) X_{78}}{2r - R} = \frac{[s^2 + r(r-2R)] X_{42} - [s^2 - r(r+R)] X_{81}}{r(2r-R)} \\
= \frac{-[s^2 + r(r-2R) - 6R^2] R X_{72} + [2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] r X_{74}}{[s^2 - r(r+5R) - 6R^2](2r-R)}.
\end{aligned}$$

On a $2r - R = -\frac{d_{100}}{4sr}$.

Donc $X_{100} \in (X_1 X_{88})$, $X_{100} \in (X_2 X_{11})$, $X_{100} \in (X_3 X_8)$, $X_{100} \in (X_{10} X_{21})$,
 $X_{100} \in (X_{31} X_{43})$, $X_{100} \in (X_{40} X_{78})$, $X_{100} \in (X_{42} X_{81})$, $X_{100} \in (X_{72} X_{74})$.

5.2.101 X_{101}

On pourra consulter [5]¹⁵¹.

$$\begin{aligned}
X_{101} &= \left(\begin{array}{c} -\frac{a^2(c-a)(a-b)}{d_{101}} \\ -\frac{b^2(a-b)(b-c)}{d_{101}} \\ -\frac{c^2(b-c)(c-a)}{d_{101}} \end{array} \right), \text{ avec :} \\
d_{101} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^3 c + c^3 a + a^3 b) - (b c^3 + c a^3 + a b^3) + a b c (a + b + c) \\
= d_{4,1} - d_{4,2} + d_{4,4}.
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{101} &= \frac{[s^2 + (r+2R)(r+4R)] X_1 - 6(r+4R) R X_2 + 2[s^2 - r(r+4R)] X_3}{3s^2 - (r+4R)^2} \\
= \frac{-2s^2 R X_1 + [s^2(3r+4R) - r(r+4R)^2] X_{41}}{[3s^2 - (r+4R)^2] r} &= \frac{-2(r+4R) R X_9 + [3s^2 - r(r+6R) - 8R^2] X_{48}}{3s^2 - (r+4R)^2} \\
= \frac{B_{10,101} X_{10} + B_{98,101} X_{98}}{[3s^2 - (r+4R)^2] \{s^4 - 4s^2 r(r+2R) + r^2 [r(3r+16R) + 16R^2]\}} \\
= \frac{-[s^2 + r(r+6R) + 8R^2] \{5s^2 - 3[r(r+6R) + 8R^2]\} X_{71} + 4s^2 [2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] X_{74}}{3s^4 - 2s^2 [r(5r+22R) + 26R^2] + 3r^2 [r(r+12R) + 52R^2] + 96(3r+2R) R^3}, \text{ avec :} \\
\frac{1}{2} B_{10,101} &= s^6 + s^4 [r(r-10R) - 8R^2] \\
- s^2 r \{r [r(r-8R) - 64R^2] - 64R^3\} \\
- r^2 \{r [r(r+14R) + 72R^2]\} &+ (160r + 128R) R^3, \\
B_{98,101} &= [s^2 - r(r+4R)] [s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2].
\end{aligned}$$

On a $3s^2 - (r+4R)^2 = -\frac{d_{101}}{4r^2}$.

Donc $X_{101} \in (X_1 X_{41})$, $X_{101} \in (X_9 X_{48})$, $X_{101} \in (X_{10} X_{98})$, $X_{101} \in (X_{71} X_{74})$.

151. p. 180

5.3 Quelques autres points qui sont des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

5.3.1 X_{104}

$$X_{104} = \left(\begin{array}{c} \frac{a[-a^3+a^2b+a(b-c)^2-b(b^2-c^2)][-a^3+a^2c+a(b-c)^2+c(b^2-c^2)]}{b[-b^3+b^2c+b(c-a)^2-c(c^2-a^2)]} \\ \frac{d_{104}}{c[-c^3+c^2a+c(a-b)^2-a(a^2-b^2)]} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{104} &= (a^7+b^7+c^7) - (b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) - 3(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) \\ &+ 3abc(a^4+b^4+c^4) - 3(b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) + 3(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &+ abc(b^3c+c^3a+a^3b) + abc(bc^3+ca^3+ab^3) + 3(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &- 6abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 2a^2b^2c^2(a+b+c) = d_3\delta_{104} \\ &= d_{7,1} - d_{7,2} - 3d_{7,3} + 3d_{7,4} + 3d_{7,5} + d_{7,6} - 6d_{7,7} + 2d_{7,8} \text{ et} \\ \delta_{104} &= -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 3abc = -d_{11} \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 3d_{3,3} \end{aligned}$$

Relation avec les points précédents

$$X_{104} = \frac{2R X_1 - 3R X_2 + 2(R-r) X_3}{-2r+R}.$$

$$\text{On a } -2r+R = -\frac{d_{104}}{64s^3r^3} = -\frac{\delta_{104}}{4sr}.$$

5.3.2 X_{110} foyer de la parabole de Kiepert

$$X_{110} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{b^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)} \\ \frac{d_{110}}{c^2(b^2-c^2)(c^2-a^2)} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{110} &= -(a^6+b^6+c^6) + (b^4c^2+c^4a^2+a^4b^2) + (b^2c^4+c^2a^4+a^2b^4) - 3a^2b^2c^2 = d_{23} \\ &= -d_{6,1} + d_{6,3} - 3d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{110} &= \frac{[s^2+r(r+2R)] X_1 - 3(2r+3R)R X_2 + [s^2-r(3r+4R)] X_3}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2} \\ &= \frac{-[s^2+r(r+2R)]R X_1 + \{s^2(2r+R) - r[2r(2r+7R)+7R^2]\} X_{60}}{[2s^2-2r(r+4R)-9R^2]r} \\ &= \frac{B_{2,110} X_2 + B_{98,110} X_{98}}{2[s^2-r(r+4R)][2s^2-2r(r+4R)-9R^2]} \\ &= 2X_3 - X_{74} = \frac{-2R^2 X_5 + [2s^2-2r(r+4R)-7R^2] X_{49}}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_{2,110} \\ &= 3\{s^4 + 2s^2[r(r-4R) - 3R^2] + r(r+4R)[r(r+4R) + 6R^2]\} = 6\frac{B_{69,99}}{d_6}, \\ &B_{98,110} = s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{99}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2 = \frac{d_{110}}{16s^2r^2}.$$

Donc $X_{110} \in (X_1 X_{60})$, $X_{110} \in (X_2 X_{98})$, $X_{110} \in (X_3 X_{74})$, $X_{110} \in (X_5 X_{49})$.

5.3.3 X_{111} point de Parry

$$X_{111} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2b^2-c^2-a^2)(2c^2-a^2-b^2)}{d_{111}} \\ \frac{b^2(2c^2-a^2-b^2)(2a^2-b^2-c^2)}{d_{111}} \\ \frac{c^2(2a^2-b^2-c^2)(2b^2-c^2-a^2)}{d_{111}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{111} = (a^6 + b^6 + c^6) - 3(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - 3(b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 15 a^2 b^2 c^2 \\ = d_{6,1} - 3 d_{6,3} + 15 d_{6,7}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{111} = \frac{A_{1,111} X_1 + A_{2,111} X_2 + A_{3,111} X_3}{4\{-s^6 + 3s^4 r(-3r+4R) + 3s^2 r^2(3r^2+8rR+20R^2) + r^3(r+4R)^3\}} \\ = \frac{B_{2,111} X_2 + B_{99,111} X_{99}}{4\{-s^6 + 3s^4 r(-3r+4R) + 3s^2 r^2(3r^2+8rR+20R^2) + r^3(r+4R)^3\}} \\ = \frac{B_{6,111} X_6 + B_{110,111} X_{110}}{4\{-s^6 + 3s^4 r(-3r+4R) + 3s^2 r^2(3r^2+8rR+20R^2) + r^3(r+4R)^3\}}, \text{ avec :}$$

$$A_{1,111} = -4[s^2 + r(r+2R)][s^2 - r(r+4R)]^2 = d_6 A_{1,99} = -d_6 A_{1,98}, \\ A_{2,111} = 24[s^4 - 2s^2 r(r-5R) + r^2(r+4R)^2] r R, \\ A_{3,111} = -8[s^2 - r(r+4R)][5s^2 + r(r+4R)] r^2 = d_6 A_{3,99}, \\ B_{2,111} = 6[-s^6 - s^4 r(r-12R) + s^2 r^2(r^2 - 8rR + 24R^2) \\ + r^3(r^3 + 12r^2 R + 48rR^2 + 64R^3)] = A_{2,111} - d_6 A_{2,99}, \\ B_{99,111} = 2[s^2 - r(r+4R)][s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2] = d_6 d_{99}, \\ B_{6,111} = -4[s^2 - r(r+4R)][s^4 - 2s^2 r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2] \\ = -2 B_{99,111} = -2 d_6 d_{99}, \\ B_{110,111} = -48 s^2 [2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] r^2 = -3 d_{110}.$$

On a

$$4\{-s^6 - 3s^4 r(3r-4R) + 3s^2 r^2(3r^2+8rR+20R^2) + r^3(r+4R)^3\} = d_{111}$$

Donc $X_{111} \in (X_2 X_{99})$, $X_{111} \in (X_6 X_{110})$.

5.3.4 X_{115} centre de l'hyperbole de Kiepert ; milieu du segment $[X_{13} X_{14}]$

$$X_{115} = \left(\begin{array}{c} \frac{(b^2-c^2)^2}{2d_{115}} \\ \frac{(c^2-a^2)^2}{2d_{115}} \\ \frac{(a^2-b^2)^2}{2d_{115}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{115} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} = d_{4,1} - d_{4,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{115} = \frac{[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+4R)]X_1-6\{4s^2r^2+[s^2-r(r+4R)]rR\}X_2+2r^2[5s^2+r(r+4R)]X_3}{s^4-2s^2r(7r+4R)+r^2(r+4R)^2}$$

$$= \frac{X_{13}+X_{14}}{2}.$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{115}$$

$$\text{Donc } X_{115} \in (X_{13}X_{14}).$$

5.3.5 X_{140} milieu du segment $[X_3X_5]$

$$X_{140} = \left(\begin{array}{c} \frac{2a^4-3a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{4d_{140}} \\ \frac{2b^4-3b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{4d_{140}} \\ \frac{2c^4-3c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{4d_{140}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{140} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = -d_3 = d_1 d'_{140} = d_{4,1} - 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{140} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 2abc = -d'_3$$

$$= d_{3,1} - d_{3,2} + 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{140} = \frac{3X_2+X_3}{4} = \frac{3X_2-X_5}{2} = \frac{3X_3+X_4}{4} = \frac{X_3+X_5}{3} = \frac{-X_4+3X_5}{2}$$

$$= \frac{(2r-R)X_{11}+(2r+R)X_{35}}{4} = \frac{(2r+R)X_{12}+(2r-R)X_{36}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\{s^2+[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r\}X_{15}-\{\sqrt{3}s^2-[10s+\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{18}}{4r}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\{s^2-[2\sqrt{3}s-(r+4R)]r\}X_{16}+\{\sqrt{3}s^2+[10s-\sqrt{3}(r+4R)]r\}X_{17}}{16sr}.$$

$$\text{On a } 4 = -\frac{d_{140}}{4s^2r^2} = -\frac{d'_{140}}{2sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{140} \in (X_2X_3), X_{140} \in (X_2X_5), X_{140} \in (X_3X_4), X_{140} \in (X_3X_5),$$

$$X_{140} \in (X_4X_5), X_{140} \in (X_{11}X_{35}), X_{140} \in (X_{12}X_{36}), X_{140} \in (X_{15}X_{18}),$$

$$X_{140} \in (X_{16}X_{17}).$$

5.3.6 X_{141} complément du point symédian $X_6 \equiv K$; milieu du segment $[X_{67}X_{110}]$

$$X_{141} = \left(\begin{array}{c} \frac{b^2+c^2}{2d_{141}} \\ \frac{c^2+a^2}{2d_{141}} \\ \frac{a^2+b^2}{2d_{141}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{141} = (a^2 + b^2 + c^2) = d_6 = d_{2,1}.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{X_{141}X_6} = 3\overrightarrow{X_{141}G}; \text{ donc } X_{141} \text{ est le complément du point symédian } X_6 \equiv K.$$

Remarque :

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2 \Delta [\cot(\alpha) + \cot(\omega)], \\ c^2 + a^2 &= 2 \Delta [\cot(\beta) + \cot(\omega)], \\ a^2 + b^2 &= 2 \Delta [\cot(\gamma) + \cot(\omega)]. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{141} &= \frac{-[s^2+r(r+2R)]X_1+3[s^2-r(r+2R)]X_2+2r^2X_3}{2[s^2-r(r+4R)]} = \frac{3X_2-X_6}{2} = \frac{3X_2+X_{69}}{4} \\ &= \frac{B_{3,141}X_3+B_{66,141}X_{66}}{D_{141}} = \frac{X_{67}+X_{110}}{2}, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{3,141} &= 2s^6 - s^4[r(7r+24R) + 8R^2] \\ &+ s^2r[2r^2(3r+23R) + 8(13r+8R)R^2] \\ &- r^2\{r[r^2(r+14R) + 8(9r+20R)R^2] + 128R^4\}, \\ B_{66,141} &= 2s^6 - s^4[r(7r+24R) + 16R^2] \\ &+ s^2r\{2r^2(3r+23R) + 4(31r+32R)R^2\} + 32R^4 \\ &- r\langle r\{r[r^2(r+14R) + 4(19r+50R)R^2] + 256R^4\} + 128R^5\rangle, \\ D_{141} &= 2\|2s^6 - s^4[r(7r+24R) + 12R^2] \\ &+ s^2\{r[2r^2(3r+23R) + 6(19r+16R)R^2] + 16R^4\} \\ &- r\langle r\{r[r^2(r+14R) + 2(37r+90R)R^2] + 192R^4\} + 64R^5\|\| \end{aligned}$$

$$\text{On a } 2[s^2 - r(r+4R)] = d_{141}.$$

$$\text{Donc } X_{141} \in (X_2X_6), X_{141} \in (X_2X_{69}), X_{141} \in (X_3X_{66}), X_{141} \in (X_{67}X_{110}).$$

5.3.7 X_{142} complément du “Mittenpunkt” $X_9 \equiv M$

$$X_{142} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b+c)-(b-c)^2}{2d_{142}} \\ \frac{b(c+a)-(c-a)^2}{2d_{142}} \\ \frac{c(a+b)-(a-b)^2}{2d_{142}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{142} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) = d_7 = -d_{2,1} + 2d_{2,2}.$$

On a $\overrightarrow{X_{142}X_9} = 3\overrightarrow{X_{142}G}$; donc X_{142} est le complément du “Mittenpunkt” $X_9 \equiv M$.

Relations avec les points précédents

$$X_{142} = \frac{(r+2R)X_1+3(r+2R)X_2-2rX_3}{2(r+4R)} = \frac{3X_2+X_7}{4} = \frac{3X_2-X_9}{2}.$$

$$\text{On a } 2(r+4R) = \frac{d_{142}}{2r}.$$

$$\text{Donc } X_{142} \in (X_2X_7), X_{142} \in (X_2X_9).$$

5.3.8 X_{144} anticomplément du point de Gergonne $X_7 \equiv Ge$

$$X_{144} = \left(\begin{array}{c} \frac{3a^2 - 2a(b+c) - (b-c)^2}{d_{144}} \\ \frac{3b^2 - 2b(c+a) - (c-a)^2}{d_{144}} \\ \frac{3c^2 - 2c(a+b) - (a-b)^2}{d_{144}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{144} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc + ca + ab) = -d_7 = d_{2,1} - 2d_{2,2}.$$

On a $\overrightarrow{X_{144}X_7} = \frac{3}{2} \overrightarrow{X_{144}G}$; donc X_{144} est l'anticomplément du point de Gergonne $X_7 \equiv Ge$.

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{144} &= \frac{-4(r+2R)X_1 - 3(r-4R)X_2 + 8rX_3}{r+4R} = 3X_2 - 2X_7 = -3X_2 + 4X_9 \\ &= 9X_2 - 8X_{142} = -3X_7 + 4X_{142} = 3X_9 - 2X_{142} = \frac{rX_{20} + 4RX_{72}}{r+4R}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r + 4R = -\frac{d_{144}}{4r}.$$

Donc $X_{144} \in (X_2X_7)$, $X_{144} \in (X_2X_9)$, $X_{144} \in (X_2X_{142})$, $X_{144} \in (X_7X_{142})$, $X_{144} \in (X_9X_{142})$, $X_{144} \in (X_{20}X_{72})$.

5.3.9 X_{145} anticomplément du point de Nagel $X_8 \equiv Na$

$$X_{145} = \left(\begin{array}{c} \frac{3a-b-c}{d_{145}} \\ \frac{3b-c-a}{d_{145}} \\ \frac{3c-a-b}{d_{145}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{145} = a + b + c = d_1 = d_{1,1}.$$

On a $\overrightarrow{X_{145}X_8} = \frac{3}{2} \overrightarrow{X_{145}G}$; donc X_{145} est l'anticomplément du point de Nagel $X_8 \equiv Na$.

Relations avec les points précédents

$$X_{145} = 4X_1 - 3X_2 = 3X_1 - 2X_{10} = -3X_8 + 4X_{10} = \frac{-2(r-R)X_{56} + (2r-R)X_{100}}{R}$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_{145}}{2s}.$$

Donc $X_{145} \in (X_1X_2)$, $X_{145} \in (X_1X_{10})$, $X_{145} \in (X_8X_{10})$, $X_{145} \in (X_{56}X_{100})$.

5.3.10 X_{165} centre de gravité du triangle excentral $J_1J_2J_3$

$$X_{165} \triangleq \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3} = \left(\begin{array}{c} \frac{a[-3a^2 + 2a(b-c) + (b-c)^2]}{3d_{165}} \\ \frac{b[-3b^2 + 2b(c-a) + (c-a)^2]}{3d_{165}} \\ \frac{c[-3c^2 + 2c(a-b) + (a-b)^2]}{3d_{165}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{165} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2abc = d'_3 \\ = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{165} = \frac{-X_1+4X_3}{3} = \frac{2X_{10}+X_{20}}{3} = \frac{(r+R)X_{63}+(2r-R)X_{100}}{3r}.$$

$$\text{On a } 3 = \frac{3d_{165}}{8sr^2}.$$

Donc $X_{165} \in (X_1X_3)$, $X_{165} \in (X_{10}X_{20})$, $X_{165} \in (X_{63}X_{100})$.

5.3.11 $X_{175} \equiv So'$ point isopérimétrique ou point de Soddy extérieur

$$X_{175} \equiv So' = \left(\begin{array}{c} \frac{a-r_1}{d_{175}} \\ \frac{b-r_2}{d_{175}} \\ \frac{c-r_3}{d_{175}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{175} = (a + b + c) - (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - (r_1 + r_2 + r_3).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{175} = \frac{2[s-(r+2R)]X_1-3rX_2+4rX_3}{2s-(r+4R)} = \frac{2sX_1-(r+4R)X_7}{2s-(r+4R)}.$$

$$\text{On a } 2s - (r + 4R) = d_{175}.$$

Donc $X_{175} \in (X_1X_7)$.

5.3.12 $X_{176} \equiv So$ point d'égal detour ou point de Soddy intérieur

$$X_{176} \equiv So = \left(\begin{array}{c} \frac{a+r_1}{d_{176}} \\ \frac{b+r_2}{d_{176}} \\ \frac{c+r_3}{d_{176}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{176} = (a + b + c) + (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + (r_1 + r_2 + r_3).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{176} = \frac{2[s+(r+2R)]X_1+3rX_2-4rX_3}{2s+(r+4R)} = \frac{2sX_1+(r+4R)X_7}{2s+(r+4R)}.$$

$$\text{On a } 2s + (r + 4R) = d_{176}.$$

Donc $X_{176} \in (X_1X_7)$.

5.3.13 X_{181} point d'Apollonius

$$X_{181} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 [a^2 (b+c)^2 - (b^2 - c^2)^2]}{2 d_{181}} \\ \frac{b^2 [b^2 (c+a)^2 - (c^2 - a^2)^2]}{2 d_{181}} \\ \frac{c^2 [c^2 (a+b)^2 - (a^2 - b^2)^2]}{2 d_{181}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{181} = a b c (a^3 + b^3 + c^3) + 3 a^2 b^2 c^2 = d_{6,4} + 3 d_{6,7}.$$

Remarque :

$$\begin{aligned} a^2 (b+c)^2 - (b^2 - c^2)^2 &= 4 a^2 b c \left[\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \right]^2, \\ b^2 (c+a)^2 - (c^2 - a^2)^2 &= 4 b^2 c a \left[\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \right]^2, \\ c^2 (a+b)^2 - (a^2 - b^2)^2 &= 4 c^2 a b \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{181} &= \frac{[s^2 (r+R) + r^2 (r+3R)] X_1 - 6 r^2 R X_2 - (s^2 + r^2) r X_3}{(s^2 - 3 r^2) R} = \frac{2 s X_1 + (r+4R) X_7}{2 s + (r+4R)} \\ &= \frac{-2 [s^2 r + r^2 (r+2R)] X_{10} + (s^2 + r^2) (2r+R) X_{12}}{(s^2 - 3 r^2) R} = \frac{[s^2 - 3 r (r+2R)] X_{31} + 6 r R X_{51}}{s^2 - 3 r^2} \\ &= \frac{[s^2 + r (r-8R)] r X_{43} - (s^2 + r^2) (r-2R) X_{57}}{2 (s^2 - 3 r^2) R}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } (s^2 - 3 r^2) R = \frac{d_{181}}{8 s^2 r}.$$

$$\text{Donc } X_{181} \in (X_1 X_7), X_{181} \in (X_{10} X_{12}), X_{181} \in (X_{31} X_{51}), X_{181} \in (X_{43} X_{57}).$$

5.3.14 X_{182} point milieu du diamètre de Brocard $[X_3 X_6]$

$$X_{182} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 [a^4 - a^2 (b^2 + c^2) - 2 b^2 c^2]}{d_{182}} \\ \frac{b^2 [b^4 - b^2 (c^2 + a^2) - 2 c^2 a^2]}{d_{182}} \\ \frac{c^2 [c^4 - c^2 (a^2 + b^2) - 2 a^2 b^2]}{d_{182}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{182} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 6 a^2 b^2 c^2 \\ &= d_3 \delta_{182} = d_{6,1} - d_{6,3} - 6 d_{6,7} \text{ et } \delta_{182} = -(a^2 + b^2 + c^2) = -d_6 = -d_{2,1}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{182} = \frac{[s^2 + r (r+2R)] X_1 - 6 r R X_2 + [s^2 - r (3r+4R)] X_3}{2 [s^2 - r (r+4R)]} = \frac{X_3 + X_6}{2}.$$

$$\text{On a } 2 [s^2 - r (r+4R)] = -\frac{d_{182}}{16 s^2 r^2} = -\delta_{182}.$$

$$\text{Donc } X_{182} \in (X_3 X_6).$$

5.3.15 X_{183}

$$X_{183} = \left(\begin{array}{c} \frac{-a^4+a^2(b^2+c^2)+2b^2c^2}{d_{183}} \\ \frac{-b^4+b^2(c^2+a^2)+2c^2a^2}{d_{183}} \\ \frac{-c^4+c^2(a^2+b^2)+2a^2b^2}{d_{183}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{183} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = -d_{4,1} + 4d_{4,3}.$$

Remarque :

$$\begin{aligned} -a^4 + a^2(b^2 + c^2) + 2b^2c^2 &= 2d_6 \Delta [\cot(\alpha) + \tan(\omega)], \\ -b^4 + b^2(c^2 + a^2) + 2c^2a^2 &= 2d_6 \Delta [\cot(\beta) + \tan(\omega)], \\ -c^4 + c^2(a^2 + b^2) + 2a^2b^2 &= 2d_6 \Delta [\cot(\gamma) + \tan(\omega)]. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{183} &= \frac{3[s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2]X_2+2[-s^4+2s^2r(r+8R)-r^2(r+4R)^2]X_6}{s^4+2s^2r(5r-4R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{3X_2-2[\cos(\omega)]^2X_6}{3-2[\cos(\omega)]^2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } s^4 + 2s^2r(5r - 4R) + r^2(r + 4R)^2 = \frac{d_{183}}{2}.$$

Donc $X_{183} \in (X_2X_6)$.

5.3.16 X_{186}

$$X_{186} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(q_1^2-b^2c^2)q_2q_3}{d_{186}} \\ \frac{b^2(q_2^2-c^2a^2)q_3q_1}{d_{186}} \\ \frac{c^2(q_3^2-a^2b^2)q_1q_2}{d_{186}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{186} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8c^2 + c^8a^2 + a^8b^2) - 3(b^2c^8 + c^2a^8 + a^2b^8) \\ &+ 2(b^6c^4 + c^6a^4 + a^6b^4) + 5a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4c^6 + c^4a^6 + a^4b^6) \\ &- 4a^2b^2c^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = d_{74} = d_3\delta_{186} = d_3d_{23} \\ &= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 5d_{10,9} - 4d_{10,13} \text{ et} \\ \delta_{186} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4c^2 + c^4a^2 + a^4b^2) + (b^2c^4 + c^2a^4 + a^2b^4) - 3a^2b^2c^2 \\ &= d_{23} = -d_{6,1} + d_{6,3} - 3d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{186} = \frac{-3R^2X_2+[2s^2-2r(r+4R)-6R^2]X_3}{2s^2-2r(r+4R)-9R^2} = \frac{2X_3+X_{23}}{3}.$$

$$\text{On a } 2s^2 - 2r(r + 4R) - 9R^2 = \frac{d_{186}}{256s^4r^4} = \frac{\delta_{186}}{16s^2r^2}.$$

Donc $X_{186} \in (X_2X_3)$, $X_{186} \in (X_3X_{23})$.

5.3.17 X_{187} centre de Schoute ; milieu du segment $[X_{15}X_{16}]$

$$X_{187} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2a^2-b^2-c^2)}{2d_{187}} \\ \frac{b^2(2b^2-c^2-a^2)}{2d_{187}} \\ \frac{c^2(2c^2-a^2-b^2)}{2d_{187}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{187} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} = d_{4,1} - d_{4,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{187} = \frac{[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+4R)]X_1 - 6[s^2-r(r+4R)]rR X_2 - 2[7s^2-r(r+4R)]r^2 X_3}{s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2}$$

$$= \frac{X_{15} + X_{16}}{2}.$$

$$\text{On a } s^4 - 2s^2r(7r+4R) + r^2(r+4R)^2 = d_{187}.$$

$$\text{Donc } X_{187} \in (X_{15}X_{16}).$$

5.3.18 X_{191}

$$X_{191} = \left(\begin{array}{c} \frac{a[-a^3-a^2(b+c)+a(b^2+bc+c^2)+b^3+b^2c+bc^2+c^3]}{d_{191}} \\ \frac{b[-b^3-b^2(c+a)+b(c^2+ca+a^2)+c^3+c^2a+ca^2+a^3]}{d_{191}} \\ \frac{c[-c^3-c^2(a+b)+c(a^2+ab+b^2)+a^3+a^2b+ab^2+b^3]}{d_{191}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{191} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3abc(a+b+c) = d_{21} = d_1 d'_{191}$$

$$= -d_{4,1} + 2d_{4,3} + 3d_{4,4} \text{ et}$$

$$d'_{191} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) + abc = d'_{21}$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{191} = \frac{-(2r+3R)X_1 + 6RX_2 + 4rX_3}{2r+3R} = -X_1 + 2X_{21} = \frac{(r+4R)X_9 + (r-R)X_{46}}{2r+3R}$$

$$= \frac{6RX_{30} + (2r+3R)X_{40}}{2r+3R} = \frac{(2r+R)X_{35} + 2RX_{72}}{2r+3R}.$$

$$\text{On a } 2r + 3R = \frac{d_{191}}{8s^2r} = \frac{d'_{191}}{4sr}.$$

$$\text{Donc } X_{191} \in (X_1X_{21}), X_{191} \in (X_9X_{46}), X_{191} \in (X_{30}X_{40}), X_{191} \in (X_{35}X_{72}).$$

5.3.19 X_{230} ; milieu du segment $[X_{115}X_{187}]$

$$X_{230} = \left(\begin{array}{c} \frac{2a^4 - a^2(b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2}{4d_{230}} \\ \frac{2b^4 - b^2(c^2+a^2) + (c^2-a^2)^2}{4d_{230}} \\ \frac{2c^4 - c^2(a^2+b^2) + (a^2-b^2)^2}{4d_{230}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{230} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} = d_{4,1} - d_{4,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{230} = \frac{[s^2+r(r+2R)][s^2-r(r+4R)]X_1-6[s^2r(2r+R)-r^2(r+4R)R]X_2-2[s^2-r(r+4R)]r^2X_3}{s^4-2s^2r(7r+4R)+r^2(r+4R)^2}$$

$$= \frac{X_{115}+X_{187}}{2}.$$

On a $s^4 - 2s^2r(7r + 4R) + r^2(r + 4R)^2 = d_{230}$.

Donc $X_{230} \in (X_{115}X_{187})$.

5.3.20 X_{256} premier point de Sharygin

$$X_{256} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b^2+ca)(c^2+ab)}{d_{256}} \\ \frac{b(c^2+ab)(a^2+bc)}{d_{256}} \\ \frac{c(a^2+bc)(b^2+ca)}{d_{256}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{256} = (b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2) + (b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) + abc(bc + ca + ab) = d_{5,3} + d_{5,4} + d_{5,5}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{256} = \frac{[s^4-2s^2r(r+2R)+r^3(r+4R)]X_1+24r^3RX_2+4[s^2+r(r+4R)]X_3}{s^4+2s^2r(r-2R)+r^3(r+4R)}$$

$$= \frac{2[s^2+r(r-4R)]r(r+4R)X_9+[s^2-r(r+4R)][s^2+r(r-8R)]X_{43}}{s^4+2s^2r(r-2R)+r^3(r+4R)}$$

On a $s^4 + 2s^2r(r - 2R) + r^3(r + 4R) = \frac{d_{256}}{2s}$.

Donc $X_{256} \in (X_9X_{43})$.

5.3.21 X_{284}

$$X_{284} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(2a')(c+a)(a+b)}{d_{284}} \\ \frac{b^2(2b')(a+b)(b+c)}{d_{284}} \\ \frac{c^2(2c')(b+c)(c+a)}{d_{284}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{284} = -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2) + (b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) + 2abc(bc + ca + ab) = -d_{5,1} + d_{5,3} + d_{5,4} + 2d_{5,5}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{284} = \frac{[s^2+r(r+2R)](r+2R)X_1-6r(r+2R)RX_2+2[s^2-r(r+2R)]rX_3}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)}$$

$$= \frac{2s^2(r+R)X_1+[s^2-r(r+6R)-8R^2]rX_{19}}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)} = \frac{2s^2rX_3+[s^2-r(r+4R)](r+2R)X_6}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)}$$

$$= \frac{-[s^2+r(r+2R)](r+4R)X_9+2s^2(2r+3R)X_{21}}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)} = \frac{2s^2(2r+R)X_{35}-[s^2+(r+2R)(r+4R)]rX_{71}}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)}$$

$$= \frac{2[s^2+r(r+4R)]RX_{37}+[3s^2-(r+4R)^2]rX_{101}}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)}$$

$$= \frac{[s^2-(r+2R)(r+4R)](r-2R)X_{57}+2[s^2-(r+4R)R](r+2R)X_{77}}{s^2(3r+2R)-r(r+2R)(r+4R)}.$$

On a $s^2(3r+2R) - r(r+2R)(r+4R) = \frac{d_{284}}{8sr}$.

Donc $X_{284} \in (X_1X_{19})$, $X_{284} \in (X_3X_6)$, $X_{284} \in (X_9X_{21})$, $X_{284} \in (X_{35}X_{71})$,
 $X_{284} \in (X_{37}X_{101})$, $X_{284} \in (X_{57}X_{77})$.

5.3.22 X_{291} second point de Sharygin

$$X_{291} = \left(\begin{array}{c} \frac{a(b^2-ca)(c^2-ab)}{d_{291}} \\ \frac{b(c^2-ab)(a^2-bc)}{d_{291}} \\ \frac{c(a^2-bc)(b^2-ca)}{d_{291}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{291} &= -(b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) \\ &+ abc(bc + ca + ab) = d_1 d'_{291} = -d_{5,3} + d_{5,4} + d_{5,5} \text{ et} \\ d'_{291} &= -(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + abc(a + b + c) = -d_{4,3} + d_{4,4}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{291} &= \frac{[s^2+r(r+4R)][s^2-r(3r+8R)]X_1 - 12[s^2-r(r+4R)]rR X_2 + 4[s^2+r(r+4R)]r^2 X_3}{s^4+2s^2r(r-8R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{-[s^4+2s^2r^2+r^2(r+4R)^2]X_1 + 2[s^4+2s^2r(r-4R)+r^2(r+4R)^2]X_{39}}{s^4+2s^2r(r-8R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{-6[3s^2-r(r+4R)]rR X_2 + [s^2+r(r+4R)][s^2+r(r-2R)]X_{38}}{s^4+2s^2r(r-8R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{[s^2+r(r-2R)][3s^2-r(r+4R)]X_{42} - 2[s^2+r(r+4R)][s^2-r(r+R)]X_{81}}{s^4+2s^2r(r-8R)+r^2(r+4R)^2} \\ &= \frac{[s^2-r(r+4R)][s^2+r(r-8R)]X_{43} + 2[s^2+r(r+4R)]r(r-2R)X_{57}}{s^4+2s^2r(r-8R)+r^2(r+4R)^2}. \end{aligned}$$

On a $s^4 + 2s^2r(r-8R) + r^2(r+4R)^2 = -\frac{d_{291}}{2s} = -d'_{291}$.

Donc $X_{291} \in (X_1X_{39})$, $X_{291} \in (X_2X_{38})$, $X_{291} \in (X_{42}X_{81})$, $X_{291} \in (X_{43}X_{57})$.

5.3.23 X_{329}

$$X_{329} = \left(\begin{array}{c} \frac{3a^5+5a^4(b+c)-4a^2(b^3+b^2c+bc^2+c^3)-3ab^2-c^2b^5-b^4c+2b^3c^2+2b^2c^3-bc^4-c^5}{d_{329}} \\ \frac{3b^5+5b^4(c+a)-4b^2(c^3+c^2a+ca^2+a^3)-3bc^2-a^2c^5-c^4a+2c^3a^2+2c^2a^3-ca^4-a^5}{d_{329}} \\ \frac{3c^5+5c^4(a+b)-4c^2(a^3+a^2b+ab^2+b^3)-3ca^2-b^2a^5-a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3-ab^4-b^5}{d_{329}} \end{array} \right),$$

avec :

$$\begin{aligned} d_{329} &= (a^5 + b^5 + c^5) + (b^4c + c^4a + a^4b) + (bc^4 + ca^4 + ab^4) \\ &- 2(b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) - 2(b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) - 2abc(bc + ca + ab) = d_1 d'_{329} \\ &= d_{5,1} + d_{5,2} - 2d_{5,3} - 2d_{5,5} \text{ et} \\ d'_{329} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = -d_3 = d_{4,1} - 2d_{4,3} \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{329} &= -2X_1 - 3X_2 + 6X_3 = -2X_1 + 3X_{376} = -3X_4 + 4X_{10} = \\ &-2X_{10} + 3X_{40} = \frac{3X_{20} - X_{145}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 1 = -\frac{d_{329}}{32 s^3 r^2} = -\frac{d'_{329}}{16 s^2 r^2}.$$

Donc $X_{329} \in (X_1 X_{376})$, $X_{329} \in (X_4 X_{10})$, $X_{329} \in (X_{10} X_{40})$,
 $X_{329} \in (X_{20} X_{145})$.

5.3.24 X_{354} point de Weill

$$X_{354} = \left(\begin{array}{c} \frac{a[a(b+c)-(b-c)^2]}{6 d_{354}} \\ \frac{b[b(c+a)-(c-a)^2]}{6 d_{354}} \\ \frac{c[c(a+b)-(a-b)^2]}{6 d_{354}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{354} = a b c = d'_{65} = d_{3,3}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{354} = \frac{r(r+3R)X_1 - r^2 X_3}{3 r R} = \frac{[s^2+r(r+4R)]X_{37} - [s^2+r(r-2R)]X_{38}}{6 r R}.$$

$$\text{On a } 3 r R = \frac{3 d_{354}}{4 s}.$$

Donc $X_{354} \in (X_1 X_3)$, $X_{354} \in (X_{37} X_{38})$.

5.3.25 X_{376} ; milieu du segment $[X_2 X_{20}]$

$$X_{376} = \left(\begin{array}{c} \frac{5a^4 - 4a^2(b^2+c^2) - (b^2-c^2)^2}{3 d_{376}} \\ \frac{5b^4 - 4b^2(c^2+a^2) - (c^2-a^2)^2}{3 d_{376}} \\ \frac{5c^4 - 4c^2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2}{3 d_{376}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{376} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = -d_3 = d_1 d'_{376} = d_{4,1} - 2 d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{376} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 2 a b c = -d'_3$$

$$= d_{3,1} - d_{3,2} + 2 d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{376} = -X_2 + 2 X_3 = \frac{X_2 + X_{20}}{2} = \frac{-[s^2-r(r+4R)]X_{69} + 2[2s^2-2r(r+4R)-9R^2]X_{74}}{3[s^2-r(r+4R)-6R^2]}.$$

$$\text{On a } 1 = -\frac{d_{376}}{16 s^2 r^2} = -\frac{d'_{376}}{8 s r^2}.$$

Donc $X_{376} \in (X_2 X_3)$, $X_{376} \in (X_2 X_{20})$, $X_{376} \in (X_{69} X_{74})$.

5.3.26 X_{378}

$$X_{378} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 q_2 q_3 [a^4 - 2a^2(b^2+c^2) + b^4 + 4b^2 c^2 + c^4]}{d_{378}} \\ \frac{b^2 q_3 q_1 [b^4 - 2b^2(c^2+a^2) + c^4 + 4c^2 a^2 + a^4]}{d_{378}} \\ \frac{c^2 q_1 q_2 [c^4 - 2c^2(a^2+b^2) + a^4 + 4a^2 b^2 + b^4]}{d_{378}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{378} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 2a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\
&+ 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{378} \\
&= d_{10,1} - 3d_{10,3} + 2d_{10,7} + 2d_{10,9} + 2d_{10,13} \text{ et} \\
\delta_{378} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) = d_{22} \\
&= -d_{6,1} + d_{6,3}.
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned}
X_{378} &= \frac{3R^2 X_2 + [s^2 - r(r+4R) - 6R^2] X_3}{s^2 - r(r+4R) - 3R^2} = 2X_3 - X_{22} \\
&= \frac{[s^2 - r(r+4R)] X_6 + [2s^2 - 2r(r+4R) - 9R^2] X_{74}}{3[s^2 - r(r+4R) - 3R^2]} = \frac{[s^2 - r(r+2R) - 4R^2] R X_{33} + [s^2 - (r+2R)^2] (2r-R) X_{36}}{2[s^2 - r(r+4R) - 3R^2] r} \\
&= \frac{-[s^2 - r(r+6R) - 4R^2] R X_{34} + [s^2 - (r+2R)^2] (2r+R) X_{35}}{2[s^2 - r(r+4R) - 3R^2] r} = \frac{[2s^2 - 2r(r+4R) - 5R^2] X_{54} + [s^2 - (r+2R)^2] X_{64}}{3[s^2 - r(r+4R) - 3R^2]}
\end{aligned}$$

$$\text{On a } s^2 - r(r+4R) - 3R^2 = \frac{d_{378}}{512s^4r^4} = \frac{\delta_{378}}{32s^2r^2}.$$

Donc $X_{378} \in (X_2 X_3)$, $X_{378} \in (X_3 X_{22})$, $X_{378} \in (X_6 X_{74})$, $X_{378} \in (X_{33} X_{36})$,
 $X_{378} \in (X_{34} X_{35})$, $X_{378} \in (X_{54} X_{64})$

5.3.27 X_{381} milieu du segment $[X_2 X_4]$

$$X_{381} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^4 + a^2(b^2 + c^2) - 2(b^2 - c^2)^2}{3d_{381}} \\ \frac{b^4 + b^2(c^2 + a^2) - 2(c^2 - a^2)^2}{3d_{381}} \\ \frac{c^4 + c^2(a^2 + b^2) - 2(a^2 - b^2)^2}{3d_{381}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{381} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{381} = -d_{4,1} + 2d_{4,3} \\
\text{et } d'_{381} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2abc = d'_3 \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.
\end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{381} = 2X_2 - X_3 = \frac{X_2 + X_4}{2} = \frac{X_3 + 2X_4}{3} = \sqrt{3} \frac{-[s^2 - r(r+4R)] X_6 + \{s^2 + 2[2\sqrt{3}s - (r+4R)]\} X_{13}}{6sr}$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_{381}}{16s^2r^2} = \frac{d'_{381}}{8sr^2}.$$

Donc $X_{381} \in (X_2 X_3)$, $X_{381} \in (X_2 X_4)$, $X_{381} \in (X_3 X_4)$, $X_{381} \in (X_6 X_{13})$

5.3.28 X_{382}

$$X_{382} = \left(\begin{array}{c} \frac{3a^4 - a^2(b^2 + c^2) - 2(b^2 - c^2)^2}{d_{381}} \\ \frac{3b^4 - b^2(c^2 + a^2) - 2(c^2 - a^2)^2}{d_{381}} \\ \frac{3c^4 - c^2(a^2 + b^2) - 2(a^2 - b^2)^2}{d_{381}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
d_{382} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{382} = -d_{4,1} + 2d_{4,3} \\
\text{et} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'_{382} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{382} = 6 X_2 - 5 X_3 = \frac{-3 X_2 + 5 X_4}{2} = -X_3 + 2 X_4$$

$$\text{On a } 1 = \frac{d_{382}}{16 s^2 r^2} = \frac{d'_{382}}{8 s r^2}.$$

$$\text{Donc } X_{382} \in (X_2 X_3), X_{382} \in (X_2 X_4), X_{382} \in (X_3 X_4).$$

5.3.29 X_{390}

$$X_{390} = \left(\begin{array}{c} \frac{-(2a') [3a^2 + (b-c)^2]}{d_{390}} \\ \frac{-(2b') [3b^2 + (c-a)^2]}{d_{390}} \\ \frac{-(2c') [3c^2 + (a-b)^2]}{d_{390}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{390} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 6 a b c \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} - 6 d_{3,3} = -d_1 d'_{390} \text{ et } d'_{390} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2 (b c + c a + a b) \\ &= -d_7 = d_{2,1} - 2 d_{2,2}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{390} = \frac{4R X_1 - 3r X_2 + 4r X_3}{r + 4R} = 2 X_1 - X_7 = \frac{9r X_2 - 4(2r - R) X_{11}}{r + 4R} = -X_8 + 2 X_9$$

$$\text{On a } r + 4R = -\frac{d_{390}}{8sr} = -\frac{d'_{390}}{4r}.$$

$$\text{Donc } X_{390} \in (X_1 X_7), X_{390} \in (X_2 X_{11}), X_{390} \in (X_8 X_9).$$

5.3.30 X_{468} intersection de la droite ou ligne d'Euler et de l'axe orthique L_3 (cf. ci-après)

$$X_{468} = \left(\begin{array}{c} \frac{(-2a^2 + b^2 + c^2) q_2 q_3}{4d_{468}} \\ \frac{(-2b^2 + c^2 + a^2) q_3 q_1}{4d_{468}} \\ \frac{(-2c^2 + a^2 + b^2) q_1 q_2}{4d_{468}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{468} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 3 a^2 b^2 c^2 \\ &= d_{23} = -d_{6,1} + d_{6,3} - 3 d_{6,7}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{468} = \frac{3[s^2 - r(r + 4R) - 6R]^2 X_2 + [s^2 - r(r + 4R)] X_3}{2[2s^2 - 2r(r + 4R) - 9R]^2} = \frac{3X_2 + X_{23}}{4} = \frac{X_4 + 3X_{186}}{4}.$$

$$\text{On a } 2[2s^2 - 2r(r + 4R) - 9R]^2 = \frac{d_{468}}{8s^2 r^2}.$$

Donc $X_{468} \in (X_2X_3)$, $X_{468} \in (X_2X_{23})$, $X_{468} \in (X_4X_{186})$. Et X_{468} appartient à l'axe orthique L_3 (cf. ci-après).

5.3.31 X_{481} premier point d'Eppstein

$$X_{481} = \left(\begin{array}{c} \frac{a-2r_1}{d_{481}} \\ \frac{b-2r_2}{d_{481}} \\ \frac{c-2r_3}{d_{481}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{481} = (a + b + c) - 2(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{481} = \frac{[s-2(r+2R)]X_1-3rX_2+4rX_3}{s-(r+4R)} = \frac{sX_1-(r+4R)X_7}{s-(r+4R)}.$$

$$\text{On a } s - (r + 4R) = \frac{d_{481}}{2}.$$

$$\text{Donc } X_{481} \in (X_1X_7).$$

5.3.32 X_{482} deuxième point d'Eppstein

$$X_{482} = \left(\begin{array}{c} \frac{a+2r_1}{d_{482}} \\ \frac{b+2r_2}{d_{482}} \\ \frac{c+2r_3}{d_{482}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{482} = (a + b + c) + 2(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Relations avec les points précédents

$$X_{482} = \frac{[s+2(r+2R)]X_1+3rX_2-4rX_3}{s+(r+4R)} = \frac{sX_1+(r+4R)X_7}{s+(r+4R)}.$$

$$\text{On a } s + (r + 4R) = \frac{d_{482}}{2}.$$

$$\text{Donc } X_{482} \in (X_1X_7).$$

5.3.33 X_{485} point de Vecten

$$X_{485} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2+4a^2\Delta}{2d_{485}} \\ \frac{b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2+4b^2\Delta}{2d_{485}} \\ \frac{c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2+4c^2\Delta}{2d_{485}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{485} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)\Delta = d_3 + 2d_6\Delta \\ = (-d_{4,1} + 2d_{4,3}) + 2d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{485} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1+6(s-R)rX_2-2(s+r)rX_3}{s^2+4sr-r(r+4R)} = \frac{4srX_5+[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2+4sr-r(r+4R)}.$$

$$\text{On a } s^2 + 4sr - r(r + 4R) = \frac{d_{485}}{4sr}.$$

Donc $X_{485} \in (X_5 X_6)$.

5.3.34 X_{486} point de Vecten intérieur

$$X_{486} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2-4a^2\Delta}{2d_{486}} \\ \frac{b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2-4b^2\Delta}{2d_{486}} \\ \frac{c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2-4c^2\Delta}{2d_{486}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{486} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2)\Delta = d_3 - 2d_6\Delta \\ = (-d_{4,1} + 2d_{4,3}) - 2d_{2,1}\Delta.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{486} = \frac{[s^2+r(r+2R)]X_1-6(s+R)rX_2+2(s-r)rX_3}{s^2-4sr-r(r+4R)} = \frac{-4srX_5+[s^2-r(r+4R)]X_6}{s^2-4sr-r(r+4R)}.$$

$$\text{On a } s^2 - 4sr - r(r + 4R) = -\frac{d_{486}}{4sr}.$$

Donc $X_{486} \in (X_5 X_6)$.

5.3.35 X_{521} point à l'infini

Attention : ce point n'étant pas à distance fini est tel que la somme de ses coordonnées aréolaires n'est pas égale à un mais à zéro.

$$X_{521} = \left(\begin{array}{c} a(2a')(b-c)q_1 \\ b(2b')(c-a)q_2 \\ c(2c')(a-b)q_3 \end{array} \right) \text{ et } d_{521} = 0.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{521} = \frac{A_{1,521}X_1+A_{2,521}X_2+A_{3,521}X_3}{s^4+2s^2[r(r-10R)-2R^2]+r(r+4R)^3} D \\ = \frac{16s^4[s^2-(r+R)(r+4R)](2r-R)}{\{s^4+2s^2[r(r-10R)-2R^2]+r(r+4R)^3\}(r+2R)} D(X_{59} - X_{100}), \text{ avec :}$$

$$A_{1,521} = -16s^2r\{s^2(r-3R)+r[r(r+3R)+8R^2]+12R^3\}$$

$$A_{2,521} = -48s^2r\{s^2-[r(3r+4R)+4R^2]\}R$$

$$A_{3,521} = 16s^2r\{s^2+[r(r-6R)-4R^2]\}r$$

$$\text{On a } 0 = d_{521}.$$

Donc $X_{521} \in (X_{59} X_{100})$.

5.3.36 X_{546} ; milieu du segment $[X_4X_5] \equiv [HN]$

$$X_{546} = \left(\begin{array}{c} \frac{2a^4+a^2(b^2+c^2)-3(b^2-c^2)^2}{4d_{546}} \\ \frac{2b^4+b^2(c^2+a^2)-3(c^2-a^2)^2}{4d_{546}} \\ \frac{2c^4+c^2(a^2+b^2)-3(a^2-b^2)^2}{4d_{546}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{546} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1 d'_{546} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{546} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc = d'_3$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{546} = \frac{9X_2-5X_3}{4} = \frac{X_4+X_5}{2}.$$

$$\text{On a } 4 = \frac{d_{546}}{4s^2r^2} = \frac{d'_{546}}{2sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{546} \in (X_2X_3), X_{546} \in (X_4X_5).$$

5.3.37 X_{547} ; milieu des segments $[X_2X_5] \equiv [GN]$ et $[X_{381}X_{549}]$

$$X_{547} = \left(\begin{array}{c} \frac{-2a^4+7a^2(b^2+c^2)-5(b^2-c^2)^2}{12d_{547}} \\ \frac{-2b^4+7b^2(c^2+a^2)-5(c^2-a^2)^2}{12d_{547}} \\ \frac{-2c^4+7c^2(a^2+b^2)-5(a^2-b^2)^2}{12d_{547}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{547} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1 d'_{547} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{547} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc = d'_3$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{547} = \frac{5X_2-X_3}{4} = \frac{X_2+X_5}{2}.$$

$$\text{On a } 4 = \frac{d_{547}}{4s^2r^2} = \frac{d'_{547}}{2sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{547} \in (X_2X_3), X_{547} \in (X_2X_5).$$

5.3.38 X_{548} ; milieu du segment $[X_5X_{20}] \equiv [NL]$

$$X_{548} = \left(\begin{array}{c} \frac{-6a^4+5a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{d_{548}} \\ \frac{-6b^4+5b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{d_{548}} \\ \frac{-6c^4+5c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{d_{548}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{548} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1 d'_{548} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{548} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc = d'_3$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{548} = \frac{-3X_2+7X_3}{4} = \frac{X_5+X_{20}}{2}.$$

$$\text{On a } 4 = \frac{d_{548}}{4s^2r^2} = \frac{d'_{548}}{2sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{548} \in (X_2X_3), X_{548} \in (X_5X_{20}).$$

5.3.39 X_{549} ; milieu du segment $[X_2X_3] \equiv [GO]$

$$X_{549} = \left(\begin{array}{c} \frac{-4a^4+5a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{6d_{549}} \\ \frac{-4b^4+5b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2}{6d_{549}} \\ \frac{-4c^4+5c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2}{6d_{549}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{549} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1 d'_{549} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{549} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc = d'_3$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{549} = \frac{X_2+X_3}{2} = -X_{281} + 2X_{547}.$$

$$\text{On a } 2 = \frac{d_{549}}{8s^2r^2} = \frac{d'_{549}}{4sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{549} \in (X_2X_3), X_{549} \in (X_{281}X_{547}).$$

5.3.40 X_{550} ; milieu du segment $[X_3X_{20}] \equiv [OL]$

$$X_{550} = \left(\begin{array}{c} \frac{-4a^4+3a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{2d_{550}} \\ \frac{-4b^4+3b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{2d_{550}} \\ \frac{-4c^4+3c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{2d_{550}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{550} = -(a^4+b^4+c^4) + 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = d_3 = d_1 d'_{550} = -d_{4,1} + 2d_{4,3}$$

$$\text{et } d'_{550} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2c+c^2a+a^2b) + (bc^2+ca^2+ab^2) - 2abc = d'_3$$

$$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2d_{3,3}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{550} = \frac{-3X_2+5X_3}{2} = \frac{X_3+X_{20}}{2}.$$

$$\text{On a } 2 = \frac{d_{550}}{8s^2r^2} = \frac{d'_{550}}{4sr^2}.$$

$$\text{Donc } X_{550} \in (X_2X_3), X_{550} \in (X_3X_{20}).$$

5.3.41 X_{551} ; milieu du segment $[X_1X_2] \equiv [IG]$

$$X_{551} = \left(\begin{array}{c} \frac{4a+b+c}{6d_{551}} \\ \frac{4b+c+a}{6d_{551}} \\ \frac{4c+a+b}{6d_{551}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{551} = (a + b + c) = d_1 = d_{1,1}.$$

Relation avec les points précédents

$$X_{551} = \frac{X_1+X_2}{2}.$$

$$\text{On a } 2 = \frac{d_{551}}{s}.$$

$$\text{Donc } X_{551} \in (X_1X_2).$$

5.3.42 X_{560} ; quatrième point puissance

$$X_{560} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^5}{d_{560}} \\ \frac{b^5}{d_{560}} \\ \frac{c^5}{d_{560}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{560} = a^5 + b^5 + c^5 = d_{5,1}.$$

$$\text{On a } d_{560} = 2s [s^4 - 10s^2r(r+R) + 5r^2(r+2R)(r+4R)].$$

5.3.43 X_{657}

$$X_{657} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2(b-c)(2a')^2}{d_{657}} \\ \frac{b^2(c-a)(2b')^2}{d_{657}} \\ \frac{c^2(a-b)(2c')^2}{d_{657}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{657} = -(b-c)(c-a)(a-b)[(a^2+b^2+c^2) - 2(bc+ca+ab)] = d_7D.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{657} = \frac{A_{1,657}X_1 + A_{2,657}X_2 + A_{3,657}X_3}{\{s^4 + 2S^2[r(r-10R) - 2R^2] + r(r+4R)^3\}(r+4R)}$$

$$= \frac{-4s^2[s^2 - (r+R)(r+4R)](2r-R)X_{59} + [3s^2 - (r+4R)^2]^2 r X_{101}}{\{s^4 + 2S^2[r(r-10R) - 2R^2] + r(r+4R)^3\}(r+4R)}, \text{ avec :}$$

$$A_{1,657} = s^2(3r - 8R) + 2s^2[r^2(3r + 7R) + 4(3r + 4R)R^2]$$

$$+ r\{r[3r^2(r + 2R) - 16(r + 3R)R^2] - 32R^4\}$$

$$A_{2,657} = 6\{2s^4 - s^2[3r(r + 6R) + 8R^2]\}$$

$$+ r[-r^2(5r + 8R) + 24(r + 2R)R^2]R\}$$

$$A_{3,657} = -2\{s^4r + 2s^2r^2(r + 2R) + r^2[r^2(r - 20R) - 80(r + R)R^2]\}$$

$$\text{On a } \{s^4 + 2S^2[r(r - 10R) - 2R^2] + r(r + 4R)^3\}(r + 4R) = -\frac{d_{657}D}{16r^3}$$

$$\text{Donc } X_{657} \in (X_{59}X_{101})$$

5.3.44 X_{1001} ; milieu du segment $[X_1X_9] \equiv [IM]$

$$X_{1001} = \left(\begin{array}{c} \frac{a[a^2-a(b+c)-2bc]}{d_{1001}} \\ \frac{b[b^2-b(c+a)-2ca]}{d_{1001}} \\ \frac{c[c^2-c(a+b)-2ab]}{d_{1001}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} d_{1001} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 6abc = d_{390} \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} - 6d_{3,3} = d_1 d'_{1001} \text{ et } d'_{1001} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc + ca + ab) \\ &= d'_{390} = -d_7 = d_{2,1} - 2d_{2,2}. \end{aligned}$$

Relations avec les points précédents

$$\begin{aligned} X_{1001} &= \frac{RX_1 + 3RX_2 + rX_3}{r+4R} = \frac{[s^2+r(r+4R)]X_1 - [s^2-r(r+4R)]X_6}{2r(r+4R)} = \frac{X_1 + X_9}{2} \\ &= \frac{3(r+R)X_2 - (2r-R)X_{11}}{r+4R} = \frac{RX_7 + (2r+3R)X_{21}}{2(r+2R)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } r + 4R = -\frac{d_{1001}}{8sr} = -\frac{d'_{1001}}{4r}.$$

Donc $X_{1001} \in (X_1X_6)$, $X_{1001} \in (X_1X_9)$, $X_{1001} \in (X_2X_{11})$,
 $X_{1001} \in (X_7X_{21})$.

5.3.45 X_{1113} première intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (la plus proche de X_4)

$$X_{1113} = \left(\begin{array}{c} \frac{(J-1)a^2q_1 + q_2q_3}{d_{1113}} \\ \frac{(J-1)b^2q_2 + q_3q_1}{d_{1113}} \\ \frac{(J-1)c^2q_3 + q_1q_2}{d_{1113}} \end{array} \right), \text{ avec : } d_{1113} = Jd_3 = J(-d_{4,1} + 2d_{4,3}).$$

Remarque : On a $\|\overrightarrow{OH}\| = JR$ et $X_{1113} = \frac{3RX_2 + (\|\overrightarrow{OH}\| - 3R)X_3}{\|\overrightarrow{OH}\|}$.

Relations avec les points précédents

$$X_{1113} = \frac{3X_2 + (J-3)X_3}{J} = \frac{3(J-1)X_2 - (J-3)X_4}{2J} = \frac{(J-1)X_3 + X_4}{J}.$$

$$\text{On a } J = \frac{d_{1113}}{16s^2r^2}.$$

Donc $X_{1113} \in (X_2X_3)$, $X_{1113} \in (X_2X_4)$, $X_{1113} \in (X_3X_4)$.

On peut vérifier que X_{1113} est la première intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (cf. ci-après) (la plus proche de X_4).

5.3.46 X_{1114} seconde intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (la moins proche de X_4)

$$X_{1114} = \left(\begin{array}{c} \frac{(J+1) a^2 q_1 - q_2 q_3}{d_{1114}} \\ \frac{(J+1) b^2 q_2 - q_3 q_1}{d_{1114}} \\ \frac{(J+1) c^2 q_3 - q_1 q_2}{d_{1114}} \end{array} \right), \text{ avec :}$$

$$d_{1114} = J d_3 = d_{1113} = J(-d_{4,1} + 2 d_{4,3}).$$

Remarque : On a $\|\overrightarrow{OH}\| = JR$ et $X_{1114} = \frac{-3R X_2 + (\|\overrightarrow{OH}\| + 3R) X_3}{\|\overrightarrow{OH}\|}$.

Relations avec les points précédents

$$X_{1114} = \frac{-3 X_2 + (J+3) X_3}{J} = \frac{3(J+1) X_2 - (J+3) X_4}{2J} = \frac{(J+1) X_3 - X_4}{J}.$$

$$\text{On a } J = \frac{d_{1114}}{16 s^2 r^2}.$$

Donc $X_{1114} \in (X_2 X_3)$, $X_{1114} \in (X_2 X_4)$, $X_{1114} \in (X_3 X_4)$.

On peut vérifier que X_{1114} est la seconde intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (cf. ci-après) (la moins proche de X_4).

6 Vecteurs et distances entre points quelconques ou entre quelques points particuliers du triangle

Considérons deux vecteurs quelconques :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } v_1 + v_2 + v_3 = 0 \text{ et } \vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$w_1 + w_2 + w_3 = 0$ (la somme des trois coordonnées aréolaires d'un vecteur est nulle) et considérons la forme bilinéaire symétrique :

$$\delta(\vec{V}, \vec{W}) \triangleq \frac{1}{2} (q_1 v_1 w_1 + q_2 v_2 w_2 + q_3 v_3 w_3). \text{ On a :}$$

$$\delta(\vec{V}, \vec{W}) = -\frac{1}{2} [a^2 (v_2 w_3 + v_3 w_2) + b^2 (v_3 w_1 + v_1 w_3) + c^2 (v_1 w_2 + v_2 w_1)].$$

Les vecteurs \vec{V} et \vec{W} sont orthogonaux ($\vec{V} \perp \vec{W}$) ssi $\delta(\vec{V}, \vec{W}) = 0$.

Considérons la forme quadratique :

$$\delta(\vec{V}, \vec{V}) \triangleq \frac{1}{2} (q_1 v_1^2 + q_2 v_2^2 + q_3 v_3^2). \text{ Alors } \|\vec{V}\| \triangleq \sqrt{\delta(\vec{V}, \vec{V})}.$$

Soient P et Q deux points quelconques du triangle. On a (rappel) :

$$P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} x_1(Q) \\ x_2(Q) \\ x_3(Q) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } \vec{V} = \overrightarrow{PQ}. \text{ On a } \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$v_1 = x_1(Q) - x_1(P)$, $v_2 = x_2(Q) - x_2(P)$, $v_3 = x_3(Q) - x_3(P)$ et donc on a bien $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{\delta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \{q_1 [x_1(Q) - x_1(P)]^2 + q_2 [x_2(Q) - x_2(P)]^2 + q_3 [x_3(Q) - x_3(P)]^2\}}. \end{aligned}$$

On fait de même pour calculer la distance entre deux points quelconques ou particuliers du triangle.

Par exemple on trouve :

$$\tilde{a} \triangleq \|\overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}}\| = 2a, \tilde{b} \triangleq \|\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{A}}\| = 2b, \tilde{c} \triangleq \|\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}\| = 2c.$$

$$\begin{aligned}
\bar{a} &\triangleq \|\overrightarrow{BC}\| = \frac{2a^3 bc}{q_2 q_3}, \quad \bar{b} \triangleq \|\overrightarrow{CA}\| = \frac{2b^3 ca}{q_3 q_1}, \quad \bar{c} \triangleq \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{2c^3 ab}{q_1 q_2}. \\
\hat{a} &\triangleq \|\overrightarrow{\hat{B}\hat{C}}\| = \sqrt{\frac{-a^2+3b^2+3c^2+4\sqrt{3}\Delta}{2}}, \\
\hat{b} &\triangleq \|\overrightarrow{\hat{C}\hat{A}}\| = \sqrt{\frac{-b^2+3c^2+3a^2+4\sqrt{3}\Delta}{2}}, \\
\hat{c} &\triangleq \|\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}\| = \sqrt{\frac{-c^2+3a^2+3b^2+4\sqrt{3}\Delta}{2}}. \\
\check{a} &\triangleq \|\overrightarrow{\check{B}\check{C}}\| = \sqrt{\frac{-a^2+3b^2+3c^2-4\sqrt{3}\Delta}{2}}, \\
\check{b} &\triangleq \|\overrightarrow{\check{C}\check{A}}\| = \sqrt{\frac{-b^2+3c^2+3a^2-4\sqrt{3}\Delta}{2}}, \\
\check{c} &\triangleq \|\overrightarrow{\check{A}\check{B}}\| = \sqrt{\frac{-c^2+3a^2+3b^2-4\sqrt{3}\Delta}{2}}. \\
\|\overrightarrow{I_b I_c}\| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4-2a^3b-2a^3c+4a^2bc+2ab^3-2ab^2c-2abc^2+2ac^3-b^4+2b^2c^2-c^4}{bc}}, \\
\|\overrightarrow{I_c I_a}\| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^4-2b^3c-2b^3a+4b^2ca+2bc^3-2bc^2a-2bca^2+2ba^3-c^4+2c^2a^2-a^4}{ca}}, \\
\|\overrightarrow{I_a I_b}\| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^4-2c^3a-2c^3b+4c^2ab+2ca^3-2ca^2b-2cab^2+2cb^3-a^4+2a^2b^2-b^4}{ab}}.
\end{aligned}$$

6.1 Calcul de l'angle de deux vecteurs

On pourra consulter [3]¹⁵² où l'auteur définit la mesure de l'angle de deux vecteurs par un couple de scalaires qui représente un point de la droite projective et où la tangente de cet angle n'est définie que dans un cas particulier.

Rappel : (\vec{V}, \vec{W}) représente l'angle des vecteurs \vec{V} et \vec{W} .

Soit $\vec{V} \times \vec{W} \triangleq v_1 w_2 - v_2 w_1$. Alors on remarque que :

$$\vec{V} \times \vec{W} = v_1 w_2 - v_2 w_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3.$$

En effet $v_1 w_2 - v_2 w_1 = v_1(-w_3 - w_1) + (v_3 + v_1)w_1 = v_3 w_1 - v_1 w_3$
 $= v_3(-w_2 - w_3) + (v_2 + v_3)w_3 = v_2 w_3 - v_3 w_2$.

Alors $\tan(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{2\Delta \vec{V} \times \vec{W}}{\delta(\vec{V}, \vec{W})}$.

On remarque que si $\vec{V} \perp \vec{W}$ on a $\delta(\vec{V}, \vec{W}) = 0$ et on trouve bien $\tan(\vec{V}, \vec{W}) = \infty$.

152. pp. 87-91 §2 "Angle entre deux vecteurs" et p. 117

7 Équations de quelques droites, axes ou lignes, en coordonnées aréolaires

On pourra consulter [3]¹⁵³.

Soit $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (rappel $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) le point courant du plan du triangle ABC .

Ce point appartient à une droite (D) ssi :

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ [il s'agit donc d'une équation de la droite (D)] ou, bien entendu :

$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \bar{u}_3 x_3 = 0$, avec $\bar{u}_1 = \lambda u_1$, $\bar{u}_2 = \lambda u_2$, $\bar{u}_3 = \lambda u_3$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ [il s'agit donc d'une infinité d'équations de la droite (D)].

Remarque : Comme $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ il y a beaucoup d'autres équations possibles pour la droite (D) : par exemple $(u_1 - u_2)x_2 + (u_1 - u_3)x_3 = u_1$.

Un vecteur \vec{V} qui donne la direction de la droite (D) est :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} u_2 - u_3 \\ -u_1 + u_3 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}. \text{ Et on a bien } v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \vec{W} &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & q_3 \\ q_1 & 0 & -q_3 \\ -q_1 & q_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (q_2 + q_3)u_1 - q_3 u_2 - q_2 u_3 \\ -q_3 u_1 + (q_3 + q_1)u_2 - q_1 u_3 \\ -q_2 u_1 - q_1 u_2 + (q_1 + q_2)u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 u_1 - q_3 u_2 - q_2 u_3 \\ -q_3 u_1 + 2b^2 u_2 - q_1 u_3 \\ -q_2 u_1 - q_1 u_2 + 2c^2 u_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors le vecteur \vec{W} est orthogonal au vecteur \vec{V} et donne donc la direction perpendiculaire à la droite (D) ; en effet on vérifie que :

$$\delta(\vec{V}, \vec{W}) \triangleq \frac{1}{2} (q_1 v_1 w_1 + q_2 v_2 w_2 + q_3 v_3 w_3) = 0.$$

Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \text{ et } u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3 = 0$$

et \vec{V}' et \vec{W}' les vecteurs attachés à la droite (D') comme les vecteurs \vec{V} et \vec{W} le sont à la droite (D) .

153. pp. 36-38 § 2 "Droites du plan affine"

- Les droites (D) et (D') sont parallèles ssi :

$$u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3 = 0 \quad [3]^{154}.$$

- Lorsque les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles i.e. lorsque $u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3 \neq 0$ leur intersection est le point :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{u_2 u'_3 - u_3 u'_2}{u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3} \\ \frac{u_3 u'_1 - u_1 u'_3}{u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3} \\ \frac{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}{u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3} \end{array} \right)$$

- Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires ssi les vecteurs \vec{V} et \vec{V}' sont orthogonaux ou si les vecteurs \vec{W} et \vec{W}' le sont i. e. ssi :

$q_1 v_1 v'_1 + q_2 v_2 v'_2 + q_3 v_3 v'_3 = 0$ ou $q_1 w_1 w'_1 + q_2 w_2 w'_2 + q_3 w_3 w'_3 = 0$ (on peut vérifier que ces deux conditions sont équivalentes).

◇ Si la droite (D) passe par les points P et Q on note $(D) \triangleq (PQ)$ et on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_2(P) x_3(Q) - x_3(P) x_2(Q), \\ u_2 &= x_3(P) x_1(Q) - x_1(P) x_3(Q), \\ u_3 &= x_1(P) x_2(Q) - x_2(P) x_1(Q). \end{aligned}$$

◇ Si la droite (D) passe par le point P et à pour vecteur directeur \vec{V} on note $(D) \triangleq (P, \vec{V})$ et on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_2(P) v_3 - x_3(P) v_2, \\ u_2 &= x_3(P) v_1 - x_1(P) v_3, \\ u_3 &= x_1(P) v_2 - x_2(P) v_1. \end{aligned}$$

Exemple 1 : droite (BC) . On a $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$; donc :

$$(BC) : x_1 = 0.$$

Exemple 2 : droite (AH) . On a $u_1 = 0, u_2 = -\frac{q_1 q_2}{S}, u_3 = \frac{q_3 q_1}{S}$ ou, avec $\lambda = \frac{S}{q_1} : \bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = -q_2, \bar{u}_3 = q_3$; donc :

$$(AH) : -q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0.$$

Exemple 3 : droite $(J_2 J_3)$. On a $u_1 = 0, u_2 = \frac{ac}{2b'c'}, u_3 = \frac{ab}{2b'c'}$ ou, avec $\lambda = \frac{2b'c'}{a} : \bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = c, \bar{u}_3 = b$; donc :

$$(J_2 J_3) : c x_2 + b x_3 = 0.$$

154. p. 37

7.1 Équations de quelques droites quelconques

$$\begin{aligned}(P_{BA}P_{CA}) &: [1 - x_1(P)] x_1 - x_1(P) x_2 - x_1(P) x_3 = 0, \\(P_{CB}P_{AB}) &: -x_2(P) x_1 + [1 - x_2(P)] x_2 - x_2(P) x_3 = 0, \\(P_{AC}P_{BC}) &: -x_3(P) x_1 - x_3(P) x_2 + [1 - x_3(P)] x_3 = 0,\end{aligned}$$

7.2 Équations de quelques droites particulières

7.2.1 Équations de quelques céviennes du triangle ABC

Cotés du triangle ABC

$$\begin{aligned}(BC) &: x_1 = 0, \\(CA) &: x_2 = 0, \\(AB) &: x_3 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \tan(\alpha) = \frac{4\Delta}{q_1}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= \tan(\beta) = \frac{4\Delta}{q_2}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &= \tan(\gamma) = \frac{4\Delta}{q_3}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par le premier point de Brocard Ω

$$\begin{aligned}(A\Omega) &: -c^2 x_2 + a^2 x_3 = 0, \\(B\Omega) &: b^2 x_1 - a^2 x_3 = 0, \\(C\Omega) &: -b^2 x_1 + c^2 x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) = \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega}) = \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}) = \tan(\omega) = \frac{4\Delta}{d_6}.$$

Céviennes passant par le deuxième point de Brocard Ω'

$$\begin{aligned}(A\Omega') &: -a^2 x_2 + b^2 x_3 = 0, \\(B\Omega') &: c^2 x_1 - b^2 x_3 = 0, \\(C\Omega') &: -c^2 x_1 + a^2 x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}') &= \tan(\alpha - \omega) = \frac{4a^2\Delta}{-a^4 + a^2(b^2 + c^2) + 2b^2c^2}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega}') &= \tan(\beta - \omega) = \frac{4b^2\Delta}{-b^4 + b^2(c^2 + a^2) + 2c^2a^2}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}') &= \tan(\gamma - \omega) = \frac{4c^2\Delta}{-c^4 + c^2(a^2 + b^2) + 2a^2b^2}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par le centre du cercle inscrit I : bissectrices du triangle ABC

$$\begin{aligned}(AI) &: -c x_2 + b x_3 = 0, \\(BI) &: c x_1 - a x_3 = 0, \\(CI) &: -b x_1 + a x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4\Delta}{q_1+2bc}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) &= \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{4\Delta}{q_2+2ca}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) &= \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{4\Delta}{q_3+2ab}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par le centre de gravité G : médianes du triangle ABC

On pourra consulter [3]¹⁵⁵.

$$\begin{aligned}(AG) &: -x_2 + x_3 = 0, \\ (BG) &: x_1 - x_3 = 0, \\ (CG) &: -x_1 + x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) &= \frac{4\Delta}{-a^2+b^2+3c^2}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}) &= \frac{4\Delta}{-b^2+c^2+3a^2}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CG}) &= \frac{4\Delta}{-c^2+a^2+3b^2}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par le centre du cercle circonscrit O

$$\begin{aligned}(AO) &: -c^2 q_3 x_2 + b^2 q_2 x_3 = 0, \\ (BO) &: c^2 q_3 x_1 - a^2 q_1 x_3 = 0, \\ (CO) &: -b^2 q_2 x_1 + a^2 q_1 x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) &= \cot(\gamma) = \frac{q_3}{4\Delta}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) &= \cot(\alpha) = \frac{q_1}{4\Delta}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) &= \cot(\beta) = \frac{q_2}{4\Delta}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par l'orthocentre H : hauteurs du triangle ABC

On pourra consulter [3]¹⁵⁶.

$$\begin{aligned}(AH) &: -q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0, \\ (BH) &: q_1 x_1 - q_3 x_3 = 0, \\ (CH) &: -q_1 x_1 + q_2 x_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) &= \frac{q_2}{4\Delta}, \\ \tan(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) &= \frac{q_3}{4\Delta}, \\ \tan(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CH}) &= \frac{q_1}{4\Delta}.\end{aligned}$$

Céviennes passant par le centre du cercle d'Euler N

155. pp. 108-109 § 1 "Les médianes et le barycentre"

156. pp. 110-111 § 3 "Les hauteurs et l'orthocentre"

$$\begin{aligned}
(AN) &: -(S - c^2 q_3) x_2 + (S - b^2 q_2) x_3 = 0, \\
(BN) &: (S - c^2 q_3) x_1 - (S - a^2 q_1) x_3 = 0, \\
(CN) &: -(S - b^2 q_2) x_1 + (S - a^2 q_1) x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le point symédian K

$$\begin{aligned}
(AK) &: -c^2 x_2 + b^2 x_3 = 0, \\
(BK) &: c^2 x_1 - a^2 x_3 = 0, \\
(CK) &: -b^2 x_1 + a^2 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le point de Gergonne Ge

$$\begin{aligned}
(AGe) &: -(2b)' x_2 + (2c)' x_3 = 0, \\
(BGe) &: (2a)' x_1 - (2c)' x_3 = 0, \\
(CGe) &: -(2a)' x_1 + (2b)' x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le point de Nagel Na

$$\begin{aligned}
(ANa) &: -(2c)' x_2 + (2b)' x_3 = 0, \\
(BNa) &: (2c)' x_1 - (2a)' x_3 = 0, \\
(CNa) &: -(2b)' x_1 + (2a)' x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le “Mittenpunkt” M

$$\begin{aligned}
(AM) &: -c(2c)' x_2 + b(2b)' x_3 = 0, \\
(BM) &: c(2c)' x_1 - a(2a)' x_3 = 0, \\
(CM) &: -b(2b)' x_1 + a(2a)' x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le point de Spieker Sp

$$\begin{aligned}
(ASp) &: -(a+b) x_2 + (c+a) x_3 = 0, \\
(BSp) &: (a+b) x_1 - (b+c) x_3 = 0, \\
(CSp) &: -(c+a) x_1 + (b+c) x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le point de Feuerbach F

$$\begin{aligned}
(AF) &: -(2c)' (a-b)^2 x_2 + (2b)' (c-a)^2 x_3 = 0, \\
(BF) &: (2c)' (a-b)^2 x_1 - (2a)' (b-c)^2 x_3 = 0, \\
(CF) &: -(2b)' (c-a)^2 x_1 + (2a)' (b-c)^2 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

7.2.2 Équations des cotés de quelques triangles

Triangle $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$

$$\begin{aligned}
(\tilde{B}\tilde{C}) &: x_2 + x_3 = 0, \\
(\tilde{C}\tilde{A}) &: x_1 + x_3 = 0, \\
(\tilde{A}\tilde{B}) &: x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Triangle $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$$\begin{aligned}(\bar{B}\bar{C}) &: c^2 x_2 + b^2 x_3 = 0, \\(\bar{C}\bar{A}) &: c^2 x_1 + a^2 x_3 = 0, \\(\bar{A}\bar{B}) &: b^2 x_1 + a^2 x_2 = 0.\end{aligned}$$

Triangle $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

$$\begin{aligned}(\hat{B}\hat{C}) &: (4\Delta - \sqrt{3}q_1)x_1 + 2(4\Delta + \sqrt{3}c^2)x_2 + 2(4\Delta + \sqrt{3}b^2)x_3 = 0, \\(\hat{C}\hat{A}) &: 2(4\Delta + \sqrt{3}c^2)x_1 + (4\Delta - \sqrt{3}q_2)x_2 + 2(4\Delta + \sqrt{3}a^2)x_3 = 0, \\(\hat{A}\hat{B}) &: +2(4\Delta + \sqrt{3}b^2)x_1 + 2(4\Delta + \sqrt{3}a^2)x_2 + (4\Delta - \sqrt{3}q_3)x_3 = 0.\end{aligned}$$

Triangle $\check{A}\check{B}\check{C}$

$$\begin{aligned}(\check{B}\check{C}) &: (4\Delta + \sqrt{3}q_1)x_1 + 2(4\Delta - \sqrt{3}c^2)x_2 + 2(4\Delta - \sqrt{3}b^2)x_3 = 0, \\(\check{C}\check{A}) &: 2(4\Delta - \sqrt{3}c^2)x_1 + (4\Delta + \sqrt{3}q_2)x_2 + 2(4\Delta - \sqrt{3}a^2)x_3 = 0, \\(\check{A}\check{B}) &: +2(4\Delta - \sqrt{3}b^2)x_1 + 2(4\Delta - \sqrt{3}a^2)x_2 + (4\Delta + \sqrt{3}q_3)x_3 = 0.\end{aligned}$$

Triangle de contact $I_a I_b I_c$

$$\begin{aligned}(I_b I_c) &: -a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 = 0, \\(I_c I_a) &: a' x_1 - b' x_2 + c' x_3 = 0, \\(I_a I_b) &: a' x_1 + b' x_2 - c' x_3 = 0.\end{aligned}$$

Triangle excentral $J_1 J_2 J_3$

$$\begin{aligned}(J_2 J_3) &: c x_2 + b x_3 = 0, \\(J_3 J_1) &: c x_1 + a x_3 = 0, \\(J_1 J_2) &: b x_1 + a x_2 = 0.\end{aligned}$$

Triangle orthique $H_a H_b H_c$

$$\begin{aligned}(H_b H_c) &: -q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0, \\(H_c H_a) &: q_1 x_1 - q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0, \\(H_a H_b) &: q_1 x_1 + q_2 x_2 - q_3 x_3 = 0.\end{aligned}$$

Triangle d'Euler $E_1 E_2 E_3$

$$\begin{aligned}(E_2 E_3) &: (S + 2a^2 q_1)x_1 - q_2 q_3 x_2 - q_2 q_3 x_3 = 0, \\(E_3 E_1) &: -q_3 q_1 x_1 + (S + 2b^2 q_2)x_2 - q_3 q_1 x_3 = 0, \\(E_1 E_2) &: -q_1 q_2 x_1 - q_1 q_2 x_2 + (S + 2c^2 q_3)x_3 = 0.\end{aligned}$$

Triangle $K_{AB} K_{BC} K_{CA}$

$$\begin{aligned}
(K_{BC}K_{CA}) &: (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)x_1 + c^2 a^2 x_2 - a^2(a^2 + b^2)x_3 = 0, \\
(K_{CA}K_{AB}) &: -b^2(b^2 + c^2)x_1 + (b^2 + c^2)(c^2 + a^2)x_2 + a^2 b^2 x_3 = 0, \\
(K_{AB}K_{BC}) &: b^2 c^2 x_1 - c^2(c^2 + a^2)x_2 + (c^2 + a^2)(a^2 + b^2)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Triangle $K_{AC}K_{BA}K_{CB}$

$$\begin{aligned}
(K_{BA}K_{CB}) &: (b^2 + c^2)(c^2 + a^2)x_1 - a^2(c^2 + a^2)x_2 + a^2 b^2 x_3 = 0, \\
(K_{CB}K_{AC}) &: b^2 c^2 x_1 + (c^2 + a^2)(a^2 + b^2)x_2 - b^2(a^2 + b^2)x_3 = 0, \\
(K_{AC}K_{BA}) &: -c^2(b^2 + c^2)x_1 + c^2 a^2 x_2 + (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Triangle $K_{BA}^*K_{CB}^*K_{AC}^*$

$$\begin{aligned}
(K_{CB}^*K_{AC}^*) &: q_3 q_1 x_1 + 4c^2 a^2 x_2 - 2a^2 q_3 x_3 = 0, \\
(K_{AC}^*K_{BA}^*) &: -2b^2 q_1 x_1 + q_1 q_2 x_2 + 4a^2 b^2 x_3 = 0, \\
(K_{BA}^*K_{CB}^*) &: 4b^2 c^2 x_1 - 2c^2 q_2 x_2 + q_2 q_3 x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Triangle $K_{CA}^*K_{AB}^*K_{BC}^*$

$$\begin{aligned}
(K_{AB}^*K_{BC}^*) &: q_1 q_2 x_1 - 2a^2 q_2 x_2 + 4a^2 b^2 x_3 = 0, \\
(K_{BC}^*K_{CA}^*) &: 4b^2 c^2 x_1 + q_2 q_3 x_2 - 2b^2 q_3 x_3 = 0, \\
(K_{CA}^*K_{AB}^*) &: -2c^2 q_1 x_1 + 4c^2 a^2 x_2 + q_3 q_1 x_3 = 0.
\end{aligned}$$

7.2.3 Équations des droites L_i

À tout point X_i on associe la droite L_i d'équation :

$$\frac{x_1(X_i)}{a^2} x_1 + \frac{x_2(X_i)}{b^2} x_2 + \frac{x_3(X_i)}{c^2} x_3 = 0 \quad [3] \quad [5].$$

Particularités de certaines de ces droites

Droite L_1 . $L_1 \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_2 , droite ou axe de Lemoine. $L_2 \perp (X_2X_{51}), (X_3X_6), (X_4X_{69}), (X_{66}X_{68})$.

Droite L_3 , axe orthique. $L_3 \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_4 . $L_4 \perp (X_3X_{64}), (X_4X_{51})$.

Droite L_5 . $L_5 \perp (X_3X_{49}), (X_4X_{52})$.

Droite L_6 , droite de l'infini. Elle est perpendiculaire à toute droite.

Droite L_7 . $L_7 \perp (X_3X_{101})$.

Droite L_8 . $L_8 \perp (X_{40}X_{43})$.

Droite L_9 . $L_9 \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_{10} . $L_{10} \perp (X_3X_{31})$.

Droite L_{13} . $L_{13} \perp (X_3X_{74}), (X_4X_{94})$.
 Droite L_{14} . $L_{14} \perp (X_3X_{74}), (X_4X_{94})$.
 Droite L_{15} . $L_{15} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{16} . $L_{16} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{17} . $L_{17} \perp (X_3X_{54}), (X_4X_{93}), (X_5X_{51})$.
 Droite L_{18} . $L_{18} \perp (X_3X_{54}), (X_4X_{93}), (X_5X_{51})$.
 Droite L_{19} . $L_{19} \perp (X_1X_{84}), (X_4X_{65}), (X_{40}X_{64})$.
 Droite L_{22} . $L_{22} \perp (X_4X_{83})$.
 Droite L_{24} . $L_{24} \perp (X_4X_{54})$.
 Droite L_{25} . $L_{25} \perp (X_3X_{66}), (X_4X_6), (X_{20}X_{64}), (X_{67}X_{74})$.
 Droite L_{31} . $L_{31} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.
 Droite L_{32} . $L_{32} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{33} . $L_{33} \perp (X_1X_{64})$.
 Droite L_{34} . $L_{34} \perp (X_1X_{84}), (X_4X_{65}), (X_{40}X_{64})$.
 Droite L_{37} . $L_{37} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.
 Droite L_{39} . $L_{39} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{41} . $L_{41} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.
 Droite L_{42} . $L_{42} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.
 Droite L_{44} . $L_{44} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.
 Droite L_{45} . $L_{45} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.
 Droite L_{48} . $L_{48} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.
 Droite L_{49} . $L_{49} \perp (X_3X_{70}), (X_{26}X_{68})$.
 Droite L_{50} . $L_{50} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{51} . $L_{51} \perp (X_3X_{66}), (X_4X_6), (X_{20}X_{64}), (X_{67}X_{74})$.
 Droite L_{52} . $L_{52} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.
 Droite L_{53} . $L_{53} \perp (X_3X_{64}), (X_4X_{51})$.
 Droite L_{54} . $L_{54} \perp (X_4X_{54})$.

Droite L_{55} . $L_{55} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.

Droite L_{56} . $L_{56} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.

Droite L_{57} . $L_{57} \perp (X_3X_9), (X_4X_7), (X_{20}X_{72})$.

Droite L_{58} . $L_{58} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{61} . $L_{61} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{62} . $L_{62} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{63} . $L_{63} \perp (X_3X_{37}), (X_4X_{75})$.

Droite L_{64} . $L_{64} \perp (X_4X_{64})$.

Droite L_{65} . $L_{65} \perp (X_1X_{84}), (X_4X_{65}), (X_{40}X_{64})$.

Droite L_{66} . $L_{66} \perp (X_4X_{66}), (X_6X_{64})$.

Droite L_{67} . $L_{67} \perp (X_4X_{67}), (X_6X_{74})$.

Droite L_{68} . $L_{68} \perp (X_3X_{49}), (X_4X_{52})$.

Droite L_{69} . $L_{69} \perp (X_2X_{51}), (X_3X_6), (X_4X_{69}), (X_{66}X_{68})$.

Droite L_{70} . $L_{70} \perp (X_4X_{70})$.

Droite L_{71} . $L_{71} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.

Droite L_{72} . $L_{72} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_{73} . $L_{73} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.

Droite L_{74} . $L_{74} \perp (X_4X_{74})$.

Droite L_{81} . $L_{81} \perp (X_2X_{51}), (X_3X_6), (X_4X_{69}), (X_{66}X_{68})$.

Droite L_{86} . $L_{86} \perp (X_2X_{51}), (X_3X_6), (X_4X_{69}), (X_{66}X_{68})$.

Droite L_{97} . $L_{97} \perp (X_4X_{95})$.

Droite L_{101} . $L_{101} \perp (X_1X_5), (X_3X_8)$.

Les droites L_i parallèles

- $L_1 \parallel L_9, L_{37}, L_{44}, L_{45}, L_{72}$, • $L_2 \parallel L_{69}, L_{81}, L_{86}$,
- $L_3 \parallel L_{15}, L_{16}, L_{32}, L_{39}, L_{50}, L_{52}, L_{58}, L_{61}, L_{62}$, • $L_5 \parallel L_{68}$, • $L_{17} \parallel L_{18}$,
- $L_{19} \parallel L_{34}, L_{65}$, • $L_{31} \parallel L_{42}, L_{55}, L_{71}$, • $L_{41} \parallel L_{48}, L_{56}, L_{73}$, • $L_{76} \parallel L_{83}$,
- $L_{88} \parallel L_{89}$.

7.2.4 Équations de quelques droites ayant un nom particulier

Médiatrices du triangle ABC

On pourra consulter [3]¹⁵⁷.

$$(OG_A) \equiv (OO_a) : (b^2 - c^2)x_1 + a^2x_2 - a^2x_3 = 0,$$

$$(OG_B) \equiv (OO_b) : -b^2x_1 + (c^2 - a^2)x_2 + b^2x_3 = 0,$$

$$(OG_C) \equiv (OO_c) : c^2x_1 - c^2x_2 + (a^2 - b^2)x_3 = 0.$$

Droite ou axe de Lemoine

Il s'agit de la droite L_2 .

$$b^2c^2x_1 + c^2a^2x_2 + a^2b^2x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{187} appartient à cette droite.

Droite ou axe de orthique

Il s'agit de la droite L_3 .

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{468} appartient à cette droite.

Droite de l'infini

Il s'agit de la droite L_6 .

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{30} et X_{521} appartiennent à cette droite.

7.2.5 Équations de quelques droites joignant deux points particuliers du triangle ABC

Équations de quelques droites (X_1X_i) ; $i = 2, 3, \dots$

$$\text{Droite } (X_1X_2) \equiv (IG)$$

$$(b - c)x_1 + (c - a)x_2 + (a - b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_8 \equiv Na$, $X_{10} \equiv Sp$, X_{42} , X_{43} , X_{78} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_1X_3) \equiv (IO)$$

$$(2a')bc(b - c)x_1 + (2b')ca(c - a)x_2 + (2c')ab(a - b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{35} , X_{36} , X_{40} , X_{46} , X_{55} , X_{56} , X_{57} , X_{65} appartiennent à cette droite.

157. p. 111 § 4 "Les médiatrices"

Elle est \perp à $L_1, L_9, L_{37}, L_{44}, L_{45}, L_{72}$.

Droite $(X_1X_4) \equiv (IH)$

$$2a'(b-c)q_1x_1 + 2b'(c-a)q_2x_2 + 2c'(a-b)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{33}, X_{34}, X_{73} appartiennent à cette droite.

Elle est \perp à $L_{41}, L_{48}, L_{56}, L_{73}$.

Droite $(X_1X_5) \equiv (IN)$

$$(b-c)(q_1-bc)(q_1+2bc)x_1 + (c-a)(q_2-ca)(q_2+2ca)x_2 + (a-b)(q_3-ab)(q_3+2ab)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{11} \equiv F, X_{12}, X_{80}$ appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_6) \equiv (IK)$

$$(b-c)bcx_1 + (c-a)cax_2 + (a-b)abx_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_9 \equiv M, X_{37}, X_{44}, X_{45}, X_{72}$ appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_7) \equiv (IGe)$

$$(2a')^2(b-c)x_1 + (2b')^2(c-a)x_2 + (2c')^2(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{20} \equiv L, X_{77}$ appartiennent à cette droite.

Elle est \perp à $L_{31}, L_{42}, L_{55}, L_{71}$.

Droite $(X_1X_{19}) \equiv (IX_{19})$

$$bc(b^2-c^2)q_1x_1 + ca(c^2-a^2)q_2x_2 + ab(a^2-b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{28}, X_{48} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_{21}) \equiv (ISc)$

$$bc(b^2-c^2)x_1 + ca(c^2-a^2)x_2 + ab(a^2-b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{31}, X_{38}, X_{47}, X_{58}, X_{63}, X_{81}$ appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_{29}) \equiv (IX_{29})$

$$a(b^2-c^2)q_1^2x_1 + b(c^2-a^2)q_2^2x_2 + c(a^2-b^2)q_3^2x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{92} appartient à cette droite.

Droite $(X_1X_{30}) \equiv (IX_{30})$

$$(q_1 + b c) (b q_2 - c q_3) x_1 + (q_2 + c a) (c q_3 - a q_1) x_2 + (q_3 + a b) (a q_1 - b q_2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_1 X_{41}) \equiv (IX_{41})$$

$$b c (b - c) [d_6 - (2 s) a] x_1 + c a (c - a) [d_6 - (2 s) b] x_2 + a b (a - b) [d_6 - (2 s) c] x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_1 X_{75}) \equiv (IX_{75})$$

$$a (b^2 - c^2) x_1 + b (c^2 - a^2) x_2 + c (a^2 - b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{86} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_1 X_{88}) \equiv (IX_{88})$$

$$b c (b - c) (-2 a + b + c) x_1 + c a (c - a) (-2 b + c + a) x_2 + a b (a - b) (-2 c + a + b) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites $(X_2 X_i)$; $i = 3, 4, \dots$

$$\text{Droite ou ligne d'Euler } (X_2 X_3) \equiv (GO) = (X_2 X_4) \equiv (GH)$$

On pourra consulter [3]¹⁵⁸.

$$(b^2 - c^2) q_1 x_1 + (c^2 - a^2) q_2 x_2 + (a^2 - b^2) q_3 x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_5 \equiv N$, $X_{20} \equiv L$, $X_{21} \equiv Sc$, $X_{22} \equiv Ex$, X_{23} , X_{24} , X_{25} , X_{26} , X_{27} , X_{28} , X_{29} , X_{30} , X_{468} appartiennent à cette droite.

Elle est \perp à $L_3, L_{15}, L_{16}, L_{32}, L_{39}, L_{50}, L_{52}, L_{58}, L_{61}, L_{62}$.

$$\text{Droite } (X_2 X_6) \equiv (GK)$$

$$(b^2 - c^2) x_1 + (c^2 - a^2) x_2 + (a^2 - b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{69}, X_{81}, X_{86} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2 X_7) \equiv (GGe)$$

$$(2 a') (b - c) x_1 + (2 b') (c - a) x_2 + (2 c') (a - b) x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_9 \equiv M$, X_{57}, X_{63} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2 X_8) \equiv (GNa)$$

158. p. 112 § 5 "La droite d'Euler"

$$(2a')(b-c)x_1 + (2b')(c-a)x_2 + (2c')(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{10} \equiv Sp$, X_{57} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{11}) \equiv (GF)$$

$$(b-c)(b^2+c^2-ab-ac)x_1 + (c-a)(c^2+a^2-bc-ba)x_2 + (a-b)(a^2+b^2-ca-cb)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{55} , X_{100} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{12}) \equiv (GX_{12})$$

$$(2a')(b-c)(ab+ac+b^2+c^2)x_1 + (2b')(c-a)(bc+ba+c^2+a^2)x_2 + (2c')(a-b)(ca+cb+a^2+b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{13}) \equiv (GX)$$

$$(b^2-c^2)(3q_1+4\sqrt{3}\Delta)x_1 + (c^2-a^2)(3q_2+4\sqrt{3}\Delta)x_2 + (a^2-b^2)(3q_3+4\sqrt{3}\Delta)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point $X_{16} \equiv S'$ appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{14}) \equiv (GX')$$

$$(b^2-c^2)(3q_1-4\sqrt{3}\Delta)x_1 + (c^2-a^2)(3q_2-4\sqrt{3}\Delta)x_2 + (a^2-b^2)(3q_3-4\sqrt{3}\Delta)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{15} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{17}) \equiv (GX_{17})$$

$$(b^2-c^2)(q_1+4\sqrt{3}\Delta)x_1 + (c^2-a^2)(q_2+4\sqrt{3}\Delta)x_2 + (a^2-b^2)(q_3+4\sqrt{3}\Delta)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{62} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{18}) \equiv (GX_{18})$$

$$(b^2-c^2)(q_1-4\sqrt{3}\Delta)x_1 + (c^2-a^2)(q_2-4\sqrt{3}\Delta)x_2 + (a^2-b^2)(q_3-4\sqrt{3}\Delta)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{61} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_2X_{32}) \equiv (GX_{32})$$

$$(b^4-c^4)x_1 + (c^4-a^4)x_2 + (a^4-b^4)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{37}) \equiv (GX_{37})$

$$a(b-c)x_1 + b(c-a)x_2 + c(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{75} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{39}) \equiv (G\frac{\Omega+\Omega'}{2})$

$$a^2(b^2-c^2)x_1 + b^2(c^2-a^2)x_2 + c^2(a^2-b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{44}) \equiv (GX_{44})$

$$(b-c)[2(b+c)-a]x_1 + (c-a)[2(c+a)-b]x_2 + (a-b)[2(a+b)-c]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{89} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{45}) \equiv (GX_{45})$

$$(b-c)[b+c-2a]x_1 + (c-a)[c+a-2b]x_2 + (a-b)[a+b-2c]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{88} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{54}) \equiv (GX_{54})$

$$(b^2-c^2)(q_1^2-S)(S-a^2q_1)x_1 + (c^2-a^2)(q_2^2-S)(S-b^2q_2)x_2 + (a^2-b^2)(q_3^2-S)(S-c^2q_3)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{68}, X_{96} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_{95}) \equiv (GX_{95})$

$$(b^2-c^2)q_1(S-a^2q_1)x_1 + (c^2-a^2)q_2(S-b^2q_2)x_2 + (a^2-b^2)q_3(S-c^2q_3)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{97} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_3X_i) ; $i = 4, 5, \dots$

Droite $(X_3X_4) \equiv (OH)$

$$(b^2-c^2)q_1x_1 + (c^2-a^2)q_2x_2 + (a^2-b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_5 \equiv N, X_{20} \equiv L, X_{26}$ appartiennent à cette droite.

Droite ou axe ou diamètre de Brocard $(X_3X_6) \equiv (OK)$

On pourra consulter [3]¹⁵⁹ [8]¹⁶⁰.

159. p. 136

160. p. 174 "Brocard Axis"

$$b^2 c^2 (b^2 - c^2) x_1 + c^2 a^2 (c^2 - a^2) x_2 + a^2 b^2 (a^2 - b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{15} \equiv S$, $X_{16} \equiv S'$, X_{32} , $X_{39} \equiv \frac{1}{2} (\Omega + \Omega')$, X_{50} , X_{52} , X_{58} , X_{61} , X_{62} appartiennent à cette droite.

Elle est \perp à L_2 , L_{69} , L_{81} , L_{86} .

Droite $(X_3 X_8) \equiv (ONa)$

$$(b - c) [a^3 (b + c) + a (a - b - c) (b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2] x_1 \\ + (c - a) [b^3 (c + a) + b (b - c - a) (c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2] x_2 \\ + (a - b) [c^3 (a + b) + c (c - a - b) (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2] x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_3 X_{13}) \equiv (OX)$

$$(b^2 - c^2) (S q_1 + 4 \sqrt{3} b^2 c^2 \Delta) x_1 + (c^2 - a^2) (S q_2 + 4 \sqrt{3} c^2 a^2 \Delta) x_2 \\ + (a^2 - b^2) (S q_3 + 4 \sqrt{3} a^2 b^2 \Delta) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{17} appartient à cette droite.

Droite $(X_3 X_{14}) \equiv (OX')$

$$(b^2 - c^2) (S q_1 - 4 \sqrt{3} b^2 c^2 \Delta) x_1 + (c^2 - a^2) (S q_2 - 4 \sqrt{3} c^2 a^2 \Delta) x_2 \\ + (a^2 - b^2) (S q_3 - 4 \sqrt{3} a^2 b^2 \Delta) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

Droite $(X_3 X_{54}) \equiv (OX_{54})$

$$b^2 c^2 (b^2 - c^2) q_1 (S - a^2 q_1) x_1 + c^2 a^2 (c^2 - a^2) q_2 (S - b^2 q_2) x_2 \\ + a^2 b^2 (a^2 - b^2) q_3 (S - c^2 q_3) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{97} appartient à cette droite.

Droite $(X_3 X_{63}) \equiv (OX_{63})$

$$bc(b - c) q_2 q_3 x_1 + ca(c - a) q_3 q_1 x_2 + ab(a - b) q_1 q_2 x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{72} , X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_3 X_{76}) \equiv (O\Omega'')$

$$a^2 (b^2 - c^2) (d_{32} - a^2 d_6) x_1 + b^2 (c^2 - a^2) (d_{32} - b^2 d_6) x_2 \\ + c^2 (a^2 - b^2) (d_{32} - c^2 d_6) x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{98} , X_{99} appartiennent à cette droite.

Équations de quelques droites $(X_4 X_i)$; $i = 5, 6, \dots$

Droite $(X_4 X_6) \equiv (HK)$

$$(b^2 - c^2) q_1^2 x_1 + (c^2 - a^2) q_2^2 x_2 + (a^2 - b^2) q_3^2 x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{53} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_8) \equiv (HNa)$$

$$a(b - c) q_1 x_1 + b(c - a) q_2 x_2 + c(a - b) q_3 x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{72} , X_{92} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_9) \equiv (HM)$$

$$q_1 [c(2c') q_3 - b(2b') q_2] x_1 + q_2 [a(2a') q_1 - c(2c') q_3] x_2 + q_3 [b(2b') q_2 - a(2a') q_1] x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{10} \equiv Sp$, X_{19} , X_{40} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_{11}) \equiv (HF)$$

$$(2a') q_1 [(2b')^2 c^2 q_3 - (2c')^2 b^2 q_2] x_1 + (2b') q_2 [(2c')^2 a^2 q_1 - (2a')^2 c^2 q_3] x_2 + (2c') q_3 [(2a')^2 b^2 q_2 - (2b')^2 a^2 q_1] x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_{12}) \equiv (HX_{12})$$

$$(2a') [c^2 (2c')^2 (c + a)^2 - b^2 (2b')^2 (a + b)^2] x_1 + (2b') [a^2 (2a')^2 (a + b)^2 - c^2 (2c')^2 (b + c)^2] x_2 + (2c') [b^2 (2b')^2 (b + c)^2 - a^2 (2a')^2 (c + a)^2] x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{55} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_{13}) \equiv (HX)$$

$$(b^2 - c^2) q_1 (S + 4\sqrt{3}\Delta q_1) x_1 + (c^2 - a^2) q_2 (S + 4\sqrt{3}\Delta q_2) x_2 + (a^2 - b^2) q_3 (S + 4\sqrt{3}\Delta q_3) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{61} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_{14}) \equiv (HX')$$

$$(b^2 - c^2) q_1 (S - 4\sqrt{3}\Delta q_1) x_1 + (c^2 - a^2) q_2 (S - 4\sqrt{3}\Delta q_2) x_2 + (a^2 - b^2) q_3 (S - 4\sqrt{3}\Delta q_3) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{62} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4 X_{15}) \equiv (HS)$$

$$(b^2 - c^2) q_1 (\sqrt{3}S + 4\Delta q_1) x_1 + (c^2 - a^2) q_2 (\sqrt{3}S + 4\Delta q_2) x_2 + (a^2 - b^2) q_3 (\sqrt{3}S + 4\Delta q_3) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{17} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{16}) \equiv (HS')$$

$$(b^2 - c^2) q_1 (\sqrt{3}S - 4\Delta q_1) x_1 + (c^2 - a^2) q_2 (\sqrt{3}S - 4\Delta q_2) x_2 + (a^2 - b^2) q_3 (\sqrt{3}S - 4\Delta q_3) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{25}) \equiv (HX_{25})$$

$$(b^2 - c^2) q_1 x_1 + (c^2 - a^2) q_2 x_2 + (a^2 - b^2) q_3 x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{28} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{32}) \equiv (HX_{32})$$

$$(b^2 - c^2) q_1 [a^2 (b^2 + c^2) - (b^4 + c^4)] x_1 + (c^2 - a^2) q_2 [b^2 (c^2 + a^2) - (c^4 + a^4)] x_2 + (a^2 - b^2) q_3 [c^2 (a^2 + b^2) - (a^4 + b^4)] x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{46}) \equiv (HX_{46})$$

$$(2a') (b - c) q_1 (-a q_1 + b q_2 + c q_3) x_1 + (2b') (c - a) q_2 (-b q_2 + c q_3 + a q_1) x_2 + (2c') (a - b) q_3 (-c q_3 + a q_1 + b q_2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{52}) \equiv (HX_{52})$$

$$a^2 (b^2 - c^2) q_1 (q_1^2 - S) x_1 + b^2 (c^2 - a^2) q_2 (q_2^2 - S) x_2 + c^2 (a^2 - b^2) q_3 (q_3^2 - S) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{68} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{69}) \equiv (HX_{69})$$

$$a^2 (b^2 - c^2) q_1 x_1 + b^2 (c^2 - a^2) q_2 x_2 + c^2 (a^2 - b^2) q_3 x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_4X_{80}) \equiv (HX_{80})$$

$$(2a') (b - c) (q_1 - bc) (-a q_1 + b q_2 + c q_3) x_1 + (2b') (c - a) (q_2 - ca) (-b q_2 + c q_3 + a q_1) x_2 + (2c') (a - b) (q_3 - ab) (-c q_3 + a q_1 + b q_2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_5X_i) ; $i = 6, 7, \dots$

Droite $(X_5X_6) \equiv (NK)$

$$(b^2 - c^2) (q_1^2 - 2b^2 c^2) x_1 + (c^2 - a^2) (q_2^2 - 2c^2 a^2) x_2 + (a^2 - b^2) (q_3^2 - 2a^2 b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{68} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{13}) \equiv (NX)$

$$(b^2 - c^2) [S q_1 + 4\sqrt{3} \Delta (S - 2b^2 c^2)] x_1 + (c^2 - a^2) [S q_2 + 4\sqrt{3} \Delta (S - 2c^2 a^2)] x_2 + (a^2 - b^2) [S q_3 + 4\sqrt{3} \Delta (S - 2a^2 b^2)] x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{18} , X_{62} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_5X_{14}) \equiv (NX')$

$$(b^2 - c^2) [S q_1 - 4\sqrt{3} \Delta (S - 2b^2 c^2)] x_1 + (c^2 - a^2) [S q_2 - 4\sqrt{3} \Delta (S - 2c^2 a^2)] x_2 + (a^2 - b^2) [S q_3 - 4\sqrt{3} \Delta (S - 2a^2 b^2)] x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{17} , X_{61} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_5X_{49}) \equiv (NX_{49})$

$$(b^2 - c^2) (S - a^2 q_1) (S - 3b^2 c^2) x_1 + (c^2 - a^2) (S - b^2 q_2) (S - 3c^2 a^2) x_2 + (a^2 - b^2) (S - c^2 q_3) (S - 3a^2 b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{54} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{51}) \equiv (NX_{51})$

$$(b^2 - c^2) (S - b^2 q_2) (S - c^2 q_3) x_1 + (c^2 - a^2) (S - c^2 q_3) (S - a^2 q_1) x_2 + (a^2 - b^2) (S - a^2 q_1) (S - b^2 q_2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{52} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{83}) \equiv (NX_{83})$

$$(b^4 - c^4) (b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2) x_1 + (c^4 - a^4) (c^4 + a^4 - b^2 c^2 - b^2 a^2) x_2 + (a^4 - b^4) (a^4 + b^4 - c^2 a^2 - c^2 b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_6X_i) ; $i = 7, 8, \dots$

Droite $(X_6X_{13}) \equiv (KX)$

$$(b^2 - c^2) (S - 3b^2 c^2) x_1 + (c^2 - a^2) (S - 3c^2 a^2) x_2 + (a^2 - b^2) (S - 3a^2 b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point $X_{14} \equiv X'$ appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{17}) \equiv (KX_{17})$

$$(b^2 - c^2)(S - b^2 c^2) x_1 + (c^2 - a^2)(S - c^2 a^2) x_2 + (a^2 - b^2)(S - a^2 b^2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{19}) \equiv (KX_{19})$

$$(2a')bc(b-c)q_1x_1 + (2b')ca(c-a)q_2x_2 + (2c')ab(a-b)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{34}, X_{65} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{24}) \equiv (KX_{24})$

$$b^2c^2[(S - 2c^2q_3)(q_3^2 - S) - (S - 2b^2q_2)(q_2^2 - S)]x_1 \\ + c^2a^2[(S - 2a^2q_1)(q_1^2 - S) - (S - 2c^2q_3)(q_3^2 - S)]x_2 \\ + a^2b^2[(S - 2b^2q_2)(q_2^2 - S) - (S - 2a^2q_1)(q_1^2 - S)]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{54} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{25}) \equiv (KX_{25})$

$$b^2c^2(b^2 - c^2)q_1x_1 + c^2a^2(c^2 - a^2)q_2x_2 + a^2b^2(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{51} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{31}) \equiv (KX_{31})$

$$b^2c^2(b-c)x_1 + c^2a^2(c-a)x_2 + a^2b^2(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{42}, X_{55} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{41}) \equiv (KX_{41})$

$$(2a')(b-c)b^2c^2x_1 + (2b')(c-a)c^2a^2x_2 + (2c')(a-b)a^2b^2x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{48}, X_{56}, X_{73} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{43}) \equiv (KX_{43})$

$$bc(b-c)(-bc+ca+ab)x_1 + ca(c-a)(-ca+ab+bc)x_2 \\ + ab(a-b)(-ab+bc+ca)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{87} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{76}) \equiv (KX_{76})$

$$a^2(b^4 - c^4)x_1 + b^2(c^4 - a^4)x_2 + c^2(a^4 - b^4)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{88}) \equiv (KX_{88})$

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)(2a-b-c)(a-2b-2c)x_1 \\
& + ca(c-a)(2b-c-a)(b-2c-2a)x_2 \\
& + ab(a-b)(2c-a-b)(c-2a-2b)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{89} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_7X_i) ; $i = 8, 9, \dots$

$$\text{Droite } (X_7X_8) \equiv (GeNa)$$

$$a(b-c)(2a')x_1 + b(c-a)(2b')x_2 + c(a-b)(2c')x_3 = 0.$$

On vérifie que les points $X_{65}, X_{69}, X_{75}, X_{85}$ appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_7X_{21}) \equiv (GeX_{21})$$

$$(2a')(b^2 - c^2)x_1 + (2b')(c^2 - a^2)x_2 + (2c')(a^2 - b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{56}, X_{86} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_7X_{27}) \equiv (GeX_{27})$$

$$(2a')(b^2 - c^2)q_1x_1 + (2b')(c^2 - a^2)q_2x_2 + (2c')(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_8X_i) ; $i = 9, 10, \dots$

$$\text{Droite } (X_8X_{20}) \equiv (NaX_{20})$$

$$\begin{aligned}
& [(2b')c(-aq_1 - bq_2 + cq_3 + 2abc) - (2c')b(-aq_1 + bq_2 - cq_3 + 2abc)]x_1 \\
& + [(2c')a(-bq_2 - cq_3 + aq_1 + 2bca) - (2a')c(-bq_2 + cq_3 - aq_1 + 2bca)]x_2 \\
& + [(2a')b(-cq_3 - aq_1 + bq_2 + 2cab) - (2b')a(-cq_3 + aq_1 - bq_2 + 2cab)]x_3 = 0
\end{aligned}$$

ou

$$[(2b')cq_3 - (2c')bq_2]x_1 + [(2c')aq_1 - (2a')cq_3]x_2 + [(2a')bq_2 - (2b')aq_1]x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{40} (avec la première expression), X_{63} (avec la deuxième expression) appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_8X_{21}) \equiv (NaSc)$$

$$(2b')(2c')(b^2 - c^2)x_1 + (2c')(2a')(c^2 - a^2)x_2 + (2a')(2b')(a^2 - b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{55} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_9X_i) ; $i = 10, 11, \dots$

$$\text{Droite } (X_9X_{21}) \equiv (MX_{21})$$

$$\begin{aligned}
& bc(2b')(2c')(b^2 - c^2)x_1 + ca(2c')(2a')(c^2 - a^2)x_2 \\
& + ab(2a')(2b')(a^2 - b^2)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que les points X_{41} , X_{78} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_9X_{35}) \equiv (MX_{35})$$

$$bc(b-c)(-aq_1 + bq_2 + cq_3)x_1 + ca(c-a)(-bq_2 + cq_3 + aq_1)x_2 + ab(a-b)(-cq_3 + aq_1 + bq_2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_9X_{46}) \equiv (MX_{46})$$

$$(b-c)(q_1 + bc)x_1 + (c-a)(q_2 + ca)x_2 + (a-b)(q_3 + ab)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_9X_{48}) \equiv (MX_{48})$$

$$bc(b-c)[a^3(b+c) + a^2(b^2+c^2) - a(b^3+b^2c+bc^2+c^3) - b^4 + 2b^2c^2 - c^4]x_1 + ca(c-a)[b^3(c+a) + b^2(c^2+a^2) - b(c^3+c^2a+ca^2+a^3) - c^4 + 2c^2a^2 - a^4]x_2 + ab(a-b)[c^3(a+b) + c^2(a^2+b^2) - c(a^3+a^2b+ab^2+b^3) - a^4 + 2a^2b^2 - b^4]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites $(X_{10}X_i)$; $i = 11, 12, \dots$

$$\text{Droite } (X_{10}X_{12}) \equiv (SpX_{12})$$

$$(2a')(c+a)(a+b)(b-c)x_1 + (2b')(a+b)(b+c)(c-a)x_2 + (2c')(b+c)(c+a)(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{65} , X_{72} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{10}X_{21}) \equiv (SpX_{21})$$

$$(b^2 - c^2)(q_1 - bc)x_1 + (c^2 - a^2)(q_2 - ca)x_2 + (a^2 - b^2)(q_3 - ab)x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{35} , X_{80} , X_{100} appartiennent à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{10}X_{46}) \equiv (SpX_{46})$$

$$[(a+b)bq_2 - (c+a)cq_3]x_1 + [(b+c)cq_3 - (a+b)aq_1]x_2 + [(c+a)aq_1 - (b+c) bq_2]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{63} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{10}X_{75}) \equiv (SpX_{75})$$

$$a^2(b-c)x_1 + b^2(c-a)x_2 + c^2(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

Droite $(X_{10}X_{82}) \equiv (SpX_{82})$

$$(b - c)(b^2 + c^2)x_1 + (c - a)(c^2 + a^2)x_2 + (a - b)(a^2 + b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_{10}X_{98}) \equiv (SpX_{98})$

$$(b - c)[a^2(b^2 + c^2) - (b^4 + c^4)]x_1 + (c - a)[b^2(c^2 + a^2) - (c^4 + a^4)]x_2 + (a - b)[c^2(a^2 + b^2) - (a^4 + b^4)]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Équations de quelques autres droites (X_iX_j)

Droite $(X_{13}X_{15}) \equiv (XS)$

$$(b^2 - c^2)[3S q_1 + 4\sqrt{3}\Delta(6b^2c^2 - S)]x_1 + (c^2 - a^2)[3S q_2 + 4\sqrt{3}\Delta(6c^2a^2 - S)]x_2 + (a^2 - b^2)[3S q_3 + 4\sqrt{3}\Delta(6a^2b^2 - S)]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{30} appartient à cette droite.

Droite $(X_{14}X_{16}) \equiv (X'S')$

$$(b^2 - c^2)[\sqrt{3}S q_1 - 4\Delta(6b^2c^2 - S)]x_1 + (c^2 - a^2)[\sqrt{3}S q_2 - 4\Delta(6c^2a^2 - S)]x_2 + (a^2 - b^2)[\sqrt{3}S q_3 - 4\Delta(6a^2b^2 - S)]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{30} appartient à cette droite.

Droite $(X_{19}X_{25}) \equiv (ClX_{25})$

$$bc(b - c)q_1x_1 + ca(c - a)q_2x_2 + ab(a - b)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{33} , X_{37} , X_{55} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{19}X_{27}) \equiv (ClX_{27})$

$$a(b^2 - c^2)q_1x_1 + b(c^2 - a^2)q_2x_2 + c(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{63} , X_{75} , X_{92} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{20}X_{64}) \equiv (LX_{64})$

$$(b^2 - c^2)(4a^2q_1 - S)x_1 + (c^2 - a^2)(4b^2q_2 - S)x_2 + (a^2 - b^2)(4c^2q_3 - S)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{69} appartient à cette droite.

Droite $(X_{20}X_{68}) \equiv (LX_{68})$

$$(b^2 - c^2)(q_1^2 - S)(3a^2 q_1 - S)x_1 + (c^2 - a^2)(q_2^2 - S)(3b^2 q_2 - S)x_2 + (a^2 - b^2)(q_3^2 - S)(3c^2 q_3 - S)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{21}X_{36}) \equiv (ScX_{36})$$

$$(b^2 - c^2)(q_1 + bc)x_1 + (c^2 - a^2)(q_2 + ca)x_2 + (a^2 - b^2)(q_3 + ab)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{23}X_{94})$$

$$a^2(b^2 - c^2)(3b^2 c^2 - S)(d_6 q_1 - S)x_1 + b^2(c^2 - a^2)(3c^2 a^2 - S)(d_6 q_2 - S)x_2 + c^2(a^2 - b^2)(3a^2 b^2 - S)(d_6 q_3 - S)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{24}X_{33})$$

$$bcq_1[b(2c')(q_2^2 - S) - c(2b')(q_3^2 - S)]x_1 + caq_2[c(2a')(q_3^2 - S) - a(2c')(q_1^2 - S)]x_2 + abq_3[a(2b')(q_1^2 - S) - b(2a')(q_2^2 - S)]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{35} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{24}X_{34})$$

$$bcq_1[ca(b - q_3)q_1 - b(ca - q_2)q_2]x_1 + caq_2[ab(c - q_1)q_2 - c(ab - q_3)q_3]x_2 + abq_3[b(ca - q_2)q_3 - a(bc - q_1)q_1]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{36} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{24}X_{64})$$

$$b^2 c^2 (b^2 - c^2) q_1 (a^2 q_1 - q_2 q_3) (2 a^2 q_1 - q_2 q_3) x_1 + c^2 a^2 (c^2 - a^2) q_2 (b^2 q_2 - q_3 q_1) (2 b^2 q_2 - q_3 q_1) x_2 + a^2 b^2 (a^2 - b^2) q_3 (c^2 q_3 - q_1 q_2) (2 c^2 q_3 - q_1 q_2) x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{25}X_{34})$$

$$bc(2a')^2(b - c)x_1 + ca(2b')^2(c - a)x_2 + ab(2c')^2(a - b)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

$$\text{Droite } (X_{25}X_{41})$$

$$\begin{aligned}
& b^2 c^2 [c(2c')(c+a) - b(2b')(a+b)] x_1 \\
& + c^2 a^2 [a(2a')(a+b) - c(2c')(b+c)] x_2 \\
& + a^2 b^2 [b(2b')(b+c) - a(2a')(c+a)] x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{42} appartient à cette droite.

Droite ($X_{27}X_{28}$)

$$(b^2 - c^2) q_1 x_1 + (c^2 - a^2) q_2 x_2 + (a^2 - b^2) q_3 x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{29} appartient à cette droite.

Droite ($X_{28}X_{34}$)

$$\begin{aligned}
& (2a')bc(b^2 - c^2)q_1x_1 + (2b')ca(c^2 - a^2)q_2x_2 \\
& + (2c')ab(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que les points X_{57} , X_{58} appartiennent à cette droite.

Droite ($X_{28}X_{60}$)

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)(b+c)^3(c+a)(a+b)q_1x_1 \\
& + ca(c-a)(c+a)^3(a+b)(b+c)q_2x_2 \\
& + ab(a-b)(a+b)^3(b+c)(c+a)q_3x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Droite ($X_{29}X_{33}$)

$$\begin{aligned}
& a(2b')(2c')(b^2 - c^2)q_1x_1 + b(2c')(2a')(c^2 - a^2)q_2x_2 \\
& + c(2a')(2b')(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{78} appartient à cette droite.

Droite ($X_{29}X_{34}$)

$$a(2a')(b^2 - c^2)q_1x_1 + b(2b')(c^2 - a^2)q_2x_2 + c(2c')(a^2 - b^2)q_3x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{77} , X_{85} , X_{86} appartiennent à cette droite.

Droite ($X_{31}X_{32}$)

$$b^3c^3(b-c)x_1 + c^3a^3(c-a)x_2 + a^3b^3(a-b)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{41} appartient à cette droite.

Droite ($X_{31}X_{43}$)

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)[a(b^2 + c^2) - bc(b+c)]x_1 + ca(c-a)[b(c^2 + a^2) - ca(c+a)]x_2 \\
& + ab(a-b)[c(a^2 + b^2) - ab(a+b)]x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite ($X_{31}X_{75}$)

$$a(b^4 - c^4)x_1 + b(c^4 - a^4)x_2 + c(a^4 - b^4)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{82} appartient à cette droite.

Droite ($X_{33}X_{47}$)

$$\begin{aligned} & bcq_1(-aq_1 + bq_2 + cq_3)[(2c')q_2(bq_2 - cq_3 + aq_1) \\ & - (2b')q_3(cq_3 + aq_1 - bq_2)]x_1 \\ & + caq_2(-bq_2 + cq_3 + aq_1)[(2a')q_3(cq_3 - aq_1 + bq_2) \\ & - (2c')q_1(aq_1 + bq_2 - cq_3)]x_2 \\ & + abq_3(-cq_3 + aq_1 + bq_2)[(2b')q_1(aq_1 - bq_2 + cq_3) \\ & - (2a')q_2(bq_2 + cq_3 - aq_1)]x_3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite ($X_{33}X_{64}$)

$$\begin{aligned} & (2a')bcq_1[(c+a)(2c')^2q_2 - (a+b)(2b')^2q_3]x_1 \\ & + (2b')caq_2[(a+b)(2a')^2q_3 - (b+c)(2c')^2q_1]x_2 \\ & + (2c')abq_3[(b+c)(2b')^2q_1 - (c+a)(2a')^2q_2]x_3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{65} appartient à cette droite.

Droite ($X_{34}X_{46}$)

$$\begin{aligned} & (2a')bcq_1[(2c')q_3(-cq_3 + aq_1 + bq_2) - (2b')q_2(-bq_2 + cq_3 + aq_1)]x_1 \\ & + (2b')caq_2[(2a')q_1(-aq_1 + bq_2 + cq_3) - (2c')q_3(-cq_3 + aq_1 + bq_2)]x_2 \\ & + (2c')abq_3[(2b')q_2(-bq_2 + cq_3 + aq_1) - (2a')q_1(-aq_1 + bq_2 + cq_3)]x_3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{47} appartient à cette droite.

Droite ($X_{35}X_{42}$)

$$\begin{aligned} & b^2c^2(b^2 - c^2)(2a + b + c)x_1 + c^2a^2(c^2 - a^2)(2b + c + a)x_2 \\ & + a^2b^2(a^2 - b^2)(2c + a + b)x_3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{58} appartient à cette droite.

Droite ($X_{35}X_{73}$)

$$\begin{aligned} & (2a')b^2c^2(b-c)(a^2q_1 - q_2q_3)x_1 \\ & + (2b')c^2a^2(c-a)(b^2q_2 - q_3q_1)x_2 \\ & + (2c')a^2b^2(a-b)(c^2q_3 - q_1q_2)x_3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

Droite ($X_{36}X_{54}$)

$$\begin{aligned}
& (2a')b^2c^2(b-c)(S-a^2q_1)[S+(2s)abc]x_1 \\
& + (2b')c^2a^2(c-a)(S-b^2q_2)[S+(2s)bc a]x_2 \\
& + (2c')a^2b^2(a-b)(S-c^2q_3)[S+(2s)cab]x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite ($X_{36}X_{58}$)

$$\begin{aligned}
& b^2c^2(b-c)(b+c)^2x_1 + c^2a^2(c-a)(c+a)^2x_2 \\
& + a^2b^2(a-b)(a+b)^2x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{60} appartient à cette droite.

Droite ($X_{36}X_{84}$)

$$\begin{aligned}
& (2a')bc(b-c)(-aq_1+bq_2+cq_3)(-aq_1+bq_2+cq_3-2abc)x_1 \\
& + (2b')ca(c-a)(-bq_2+cq_3+aq_1)(-bq_2+cq_3+aq_1-2bca)x_2 \\
& + (2c')ab(a-b)(-cq_3+aq_1+bq_2)(-cq_3+aq_1+bq_2-2cab)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite ($X_{39}X_{83}$)

$$(a^4-b^2c^2)(b^4-c^4)x_1 + (b^4-c^2a^2)(c^4-a^4)x_2 + (c^4-a^2b^2)(a^4-b^4)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{99} appartient à cette droite.

Droite ($X_{40}X_{64}$)

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)(4a^2q_1-S)x_1 + ca(c-a)(4b^2q_2-S)x_2 \\
& + ab(a-b)(4c^2q_3-S)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{72} appartient à cette droite.

Droite ($X_{40}X_{78}$)

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)[(2c')(a-b)-(2b')(c-a)]x_1 \\
& + ca(c-a)[(2a')(b-c)-(2c')(a-b)]x_2 \\
& + ab(a-b)[(2b')(c-a)-(2a')(b-c)]x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite ($X_{40}X_{80}$)

$$\begin{aligned}
& (2a')(b-c)(q_1-bc)(-aq_1+bq_2+cq_3)x_1 \\
& + (2b')(c-a)(q_2-ca)(-bq_2+cq_3+aq_1)x_2 \\
& + (2c')(a-b)(q_3-ab)(-cq_3+aq_1+bq_2)x_3 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite ($X_{42}X_{65}$)

$$(2a')^2 bc(b-c)(c+a)(a+b)x_1 + (2b')^2 ca(c-a)(a+b)(b+c)x_2 + (2c')^2 ab(a-b)(b+c)(c+a)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite ($X_{42}X_{81}$)

$$bc(b^2 - c^2)(a^2 - bc)x_1 + ca(c^2 - a^2)(b^2 - ca)x_2 + ab(a^2 - b^2)(c^2 - ab)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite ($X_{47}X_{91}$)

$$a(b^2 - c^2)(q_1^2 - S)[4a^2b^2c^2 - (b^2 + c^2)S]x_1 + b(c^2 - a^2)(q_2^2 - S)[4b^2c^2a^2 - (c^2 + a^2)S]x_2 + c(a^2 - b^2)(q_3^2 - S)[4c^2a^2b^2 - (a^2 + b^2)S]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{92} appartient à cette droite.

Droite ($X_{49}X_{93}$)

$$a^2q_1(b^2c^2 - S)[(a^2b^2 - S)^2c^6q_3^2 - (c^2a^2 - S)^2b^6q_2^2]x_1 + b^2q_2(c^2a^2 - S)[(b^2c^2 - S)^2a^6q_1^2 - (a^2b^2 - S)^2c^6q_3^2]x_2 + c^2q_3(a^2b^2 - S)[(c^2a^2 - S)^2b^6q_2^2 - (b^2c^2 - S)^2a^6q_1^2]x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{94} appartient à cette droite.

Droite ($X_{54}X_{69}$)

$$(b^2 - c^2)(S - a^2q_1)x_1 + (c^2 - a^2)(S - b^2q_2)x_2 + (a^2 - b^2)(S - c^2q_3)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{95} appartient à cette droite.

Droite ($X_{55}X_{64}$)

$$(2a')b^2c^2(b-c)(4a^2q_1 - S)x_1 + (2b')c^2a^2(c-a)(4b^2q_2 - S)x_2 + (2c')a^2b^2(a-b)(4c^2q_3 - S)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite ($X_{57}X_{77}$)

$$(2a')^2bc(2b')(2c')(b^2 - c^2)x_1 + (2b')^2ca(2c')(2a')(c^2 - a^2)x_2 + (2c')^2ab(2a')(2b')(a^2 - b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Droite ($X_{57}X_{79}$)

$$(2a')(b-c)(q_1 + bc)(-aq_1 + bq_2 + cq_3)x_1 + (2b')(c-a)(q_2 + ca)(-bq_2 + cq_3 + aq_1)x_2 + (2c')(a-b)(q_3 + ab)(-cq_3 + aq_1 + bq_2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite ($X_{65}X_{68}$)

$$a(2a')(b-c)(q_1^2 - S)x_1 + b(2b')(c-a)(q_2^2 - S)x_2 + c(2c')(a-b)(q_3^2 - S)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{91} appartient à cette droite.

Droite ($X_{65}X_{79}$)

$$a(2a')(b-c)(q_1^2 - b^2c^2)x_1 + b(2b')(c-a)(q_2^2 - c^2a^2)x_2 + c(2c')(a-b)(q_3^2 - a^2b^2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{80} appartient à cette droite.

Droite ($X_{69}X_{73}$)

$$(2a')q_2q_3[a^2(b^2 - c^2) + a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)]x_1 + (2b')q_3q_1[b^2(c^2 - a^2) + b(c^3 - a^3) + ca(c^2 - a^2)]x_2 + (2c')q_1q_2[c^2(a^2 - b^2) + c(a^3 - b^3) + ab(a^2 - b^2)]x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{77} , X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite ($X_{69}X_{74}$)

$$(b^2 - c^2)(a^2q_1 - q_2q_3)x_1 + (c^2 - a^2)(b^2q_2 - q_3q_1)x_2 + (a^2 - b^2)(c^2q_3 - q_1q_2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{99} appartient à cette droite.

Droite ($X_{71}X_{74}$)

$$b^2c^2(b-c)(a^2q_1 - q_2q_3)x_1 + c^2a^2(c-a)(b^2q_2 - q_3q_1)x_2 + a^2b^2(a-b)(c^2q_3 - q_1q_2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Droite ($X_{72}X_{74}$)

$$bc(b-c)(a^2q_1 - q_2q_3)x_1 + ca(c-a)(b^2q_2 - q_3q_1)x_2 + ab(a-b)(c^2q_3 - q_1q_2)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite ($X_{76}X_{95}$)

$$a^2(b^2 - c^2)(q_1^2 - S)(S - a^2q_1)x_1 + b^2(c^2 - a^2)(q_2^2 - S)(S - b^2q_2)x_2 + c^2(a^2 - b^2)(q_3^2 - S)(S - c^2q_3)x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{96} appartient à cette droite.

8 Équations des cercles en coordonnées aréolaires

On pourra consulter [3]¹⁶¹.

Le point courant $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (rappel $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) du plan du

triangle ABC appartient à un cercle (C) de centre $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (rappel $z_1 + z_2 + z_3 = 1$) et de rayon ρ ssi :

$\frac{1}{2} q_1 [(x_1 - z_1)^2 + q_2 (x_2 - z_2)^2 + q_3 (x_3 - z_3)^2] - \rho^2 = 0$ (il s'agit donc d'une équation du cercle (C)) [3]¹⁶².

Remplaçons z_1, z_2, z_3 par $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tels que :

$$\delta_1 \triangleq \rho^2 + q_1 z_1 - \frac{1}{2} (q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_3 z_3^2),$$

$$\delta_2 \triangleq \rho^2 + q_2 z_2 - \frac{1}{2} (q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_3 z_3^2),$$

$$\delta_3 \triangleq \rho^2 + q_3 z_3 - \frac{1}{2} (q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_3 z_3^2).$$

Alors une autre équation du cercle s'écrit :

$$\frac{1}{2} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2) - \delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 - \delta_3 x_3 = 0 \quad [3]^{163}.$$

De plus si on pose :

$$\delta'_1 \triangleq \delta_1 - \frac{1}{2} q_1 = \rho^2 - c^2 z_2^2 - b^2 z_3^2 - q_1 z_2 z_3,$$

$$\delta'_2 \triangleq \delta_2 - \frac{1}{2} q_2 = \rho^2 - a^2 z_3^2 - c^2 z_1^2 - q_2 z_3 z_1,$$

$$\delta'_3 \triangleq \delta_3 - \frac{1}{2} q_3 = \rho^2 - b^2 z_1^2 - a^2 z_2^2 - q_3 z_1 z_2 \text{ et si l'on remarque que :}$$

$$x_1^2 = -x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_1,$$

$$x_2^2 = -x_2 x_3 - x_2 x_1 + x_2,$$

$$x_3^2 = -x_3 x_1 - x_3 x_2 + x_3 \quad [3]^{164} \text{ alors une autre équation du cercle s'écrit :}$$

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + \delta'_1 x_1 + \delta'_2 x_2 + \delta'_3 x_3 = 0.$$

Nous donnons ci-après les équations de certains cercles particuliers sous cette dernière forme.

161. pp. 84-107 Chapitre VI "GÉOMÉTRIE DU CERCLE"

162. p. 85

163. p. 85

164. p. 70

8.1 Cercle passant par les points B, Ω, C

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - b^2 x_1 = 0.$$

8.2 Cercle passant par les points C, Ω, A

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - c^2 x_2 = 0.$$

8.3 Cercle passant par les points A, Ω, B

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - a^2 x_3 = 0.$$

8.4 Cercle passant par les points B, Ω', C

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - c^2 x_1 = 0.$$

8.5 Cercle passant par les points C, Ω', A

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - a^2 x_2 = 0.$$

8.6 Cercle passant par les points A, Ω', B

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - b^2 x_3 = 0.$$

8.7 Cercle de centre A et de rayon a'

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + a'^2 x_1 + (a'^2 - c^2) x_2 + (a'^2 - b^2) x_3 = 0.$$

8.8 Cercle de centre B et de rayon b'

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + (b'^2 - c^2) x_1 + b'^2 x_2 + (b'^2 - a^2) x_3 = 0.$$

8.9 Cercle de centre C et de rayon c'

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + (c'^2 - b^2) x_1 + (c'^2 - a^2) x_2 + c'^2 x_3 = 0.$$

8.10 Cercle inscrit (donc de centre $X_1 \equiv I$)

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - a'^2 x_1 - b'^2 x_2 - c'^2 x_3 = 0 \text{ [3]}^{165}.$$

Le point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$ appartient au cercle inscrit.

165. p. 122

8.11 Cercles exinscrits et certains cercles associés

8.11.1 Cercle exinscrit de centre J_1

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - s^2 x_1 - c'^2 x_2 - b'^2 x_3 = 0.$$

8.11.2 Cercle exinscrit de centre J_2

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - c'^2 x_1 - s^2 x_2 - a'^2 x_3 = 0.$$

8.11.3 Cercle exinscrit de centre J_3

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - b'^2 x_1 - a'^2 x_2 - s^2 x_3 = 0.$$

8.11.4 Cercle de diamètre $[IJ_1]$

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - bcx_1 = 0.$$

8.11.5 Cercle de diamètre $[IJ_2]$

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - cax_2 = 0.$$

8.11.6 Cercle de diamètre $[IJ_3]$

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - abx_3 = 0.$$

8.12 Premier cercle d'Apollonius de diamètre

$$[I_A J_{2A}] \equiv [I_A J_{3A}]$$

On pourra consulter [3]¹⁶⁶.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + \frac{c^2 a^2}{b^2 - c^2} x_2 - \frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2} x_3 = 0.$$

Le point A appartient à ce cercle.

8.13 Deuxième cercle d'Apollonius de diamètre

$$[I_B J_{3B}] \equiv [I_B J_{1B}]$$

On pourra consulter [3]¹⁶⁷.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + \frac{a^2 b^2}{c^2 - a^2} x_3 - \frac{b^2 c^2}{c^2 - a^2} x_1 = 0.$$

Le point B appartient à ce cercle.

166. p. 138

167. p. 138

8.14 Troisième cercle d'Apollonius de diamètre

$$[I_C J_{1C}] \equiv [I_C J_{2C}]$$

On pourra consulter [3]¹⁶⁸.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + \frac{b^2 c^2}{a^2 - b^2} x_1 - \frac{c^2 a^2}{a^2 - b^2} x_2 = 0.$$

Le point C appartient à ce cercle.

8.15 Cercle circonscrit (donc de centre $X_3 \equiv O$)

On pourra consulter [8]¹⁶⁹.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 = 0 \quad [3]^{170}.$$

Les points de Tarry $X_{98} \equiv Ta$ et de Steiner $X_{99} \equiv St$ appartiennent au cercle circonscrit.

8.16 Cercles de Droz-Farny : cercles centrés à l'orthocentre $X_4 \equiv H$ et de rayon ρ

On pourra consulter [3]¹⁷¹ [8]¹⁷²

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 + (\rho^2 - \frac{1}{2} q_1 + \frac{q_1 q_2 q_3}{2S}) x_1 + (\rho^2 - \frac{1}{2} q_2 + \frac{q_1 q_2 q_3}{2S}) x_2 + (\rho^2 - \frac{1}{2} q_3 + \frac{q_1 q_2 q_3}{2S}) x_3 = 0.$$

Remarque : on a donc aussi $\frac{1}{2} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2) - (\rho^2 + \frac{q_1 q_2 q_3}{2S}) = 0$ car $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \rho^2 + \frac{q_1 q_2 q_3}{2S}$ [3]¹⁷³.

8.16.1 Cercle polaire : cas particulier du cercle centré à l'orthocentre $X_4 \equiv H$ et de rayon ρ tel que $\rho^2 = -\frac{q_1 q_2 q_3}{2S}$

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - \frac{1}{2} q_1 x_1 - \frac{1}{2} q_2 x_2 - \frac{1}{2} q_3 x_3 = 0.$$

Ce cercle peut être imaginaire.

Remarque : on a donc aussi $\frac{1}{2} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2) = 0$ car $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ [3]¹⁷⁴.

168. p. 138

169. pp. 258-259 "Circumcircle"

170. p. 140

171. pp. 113-114 § 6 "Cercles centrés à l'orthocentre"

172. pp. 494-495 "Droz-Farny Circles"

173. p. 113

174. p. 113

8.17 Cercle d'Euler

On pourra consulter [2] [3]¹⁷⁵ [9].

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - \frac{1}{4} (q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3) = 0.$$

Les 9 points $H_a \equiv A_a, G_A, E_1, H_b \equiv B_b, G_B, E_2, H_c \equiv C_c, G_C, E_3$ appartiennent à ce cercle, de centre $X_5 \equiv N$, d'où l'autre dénomination de ce cercle : cercle des neuf points. Il est aussi appelé cercle de Feuerbach, cercle de Terquem, cerle médian, etc. En fait il comporte au moins 43 points remarquables [9]. Par exemple le point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$ appartient à ce cercle [2]¹⁷⁶.

Théorème de Feuerbach : le cercle d'Euler du triangle ABC est tangent aux cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC [2]¹⁷⁷.

8.18 Cercle de Lemoine ou premier cercle de Lemoine

On pourra consulter [3]¹⁷⁸ [8]¹⁷⁹.

Ce cercle à pour centre le point $\frac{X_3+X_6}{2} \equiv \frac{O+K}{2}$.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^2} [b^2 c^2 (b^2 + c^2) x_1 + c^2 a^2 (c^2 + a^2) x_2 + a^2 b^2 (a^2 + b^2) x_3] = 0.$$

Les points $K_{BC}, K_{CA}, K_{AB} ; K_{CB}, K_{AC}, K_{BA}$ appartiennent à ce cercle.

8.19 Cercle des cosinus ou second cercle de Lemoine

On pourra consulter [3]¹⁸⁰ [8]¹⁸¹.

Ce cercle à pour centre le point de Lemoine $X_6 \equiv K$.

$$a^2 x_2 x_3 + b^2 x_3 x_1 + c^2 x_1 x_2 - \frac{2b^2 c^2 q_1}{a_6^2} x_1 - \frac{2c^2 a^2 q_2}{a_6^2} x_2 - \frac{2a^2 b^2 q_3}{a_6^2} x_3 = 0.$$

Les points $K_{CB}^*, K_{AC}^*, K_{BA}^* ; K_{BC}^*, K_{CA}^*, K_{AB}^*$ appartiennent à ce cercle.

175. pp. 122-127 § 11 "Cercle d'Euler ou cercle des neuf points"

176. p. 39

177. p. 24

178. pp. 127-132 § 12 "Le point de Lemoine et les cercles de Lemoine"

179. p. 1067 "Lemoine Circle"

180. pp. 127-132 § 12 "Le point de Lemoine et les cercles de Lemoine"

181. p. 340 "Cosine Circle"

9 Annexes

9.1 Annexe A : Expressions des termes utiles $d_{i,j}$, de degré i , polynômes en a, b, c et valeurs de ces termes (pour $i \leq 9$) en s, r, R

9.1.1 Termes de dimension $[L]^1$

$$d_{1,1} = a + b + c = 2s$$

9.1.2 Termes de dimension $[L]^2$

$$\begin{aligned}d_{2,1} &= a^2 + b^2 + c^2 = 2[s^2 - r(r + 4R)] \\d_{2,2} &= bc + ca + ab = s^2 + r(r + 4R)\end{aligned}$$

9.1.3 Termes de dimension $[L]^3$

$$\begin{aligned}d_{3,1} &= a^3 + b^3 + c^3 = 2s[s^2 - 3r(r + 2R)] \\d_{3,2} &= (b^3c + c^3a + a^3b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = 2s[s^2 + r(r - 2R)] \\d_{3,3} &= abc = 4srR\end{aligned}$$

9.1.4 Termes de dimension $[L]^4$

$$\begin{aligned}d_{4,1} &= a^4 + b^4 + c^4 = 2[s^4 - 2s^2r(3r + 4R) + r^2(r + 4R)^2] \\d_{4,2} &= (b^3c + c^3a + a^3b) + (bc^3 + c^3a + ab^3) = 2[s^4 - 4s^2rR - r^2(r + 4R)^2] \\d_{4,3} &= (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = s^4 + 2s^2r(r - 4R) + r^2(r + 4R)^2 \\d_{4,4} &= abc(a + b + c) = d_{1,1}d_{3,3} = 8s^2rR\end{aligned}$$

9.1.5 Termes de dimension $[L]^5$

$$\begin{aligned}d_{5,1} &= a^5 + b^5 + c^5 \\&= 2s[s^4 - 10s^2r(r + R) + 5r^2(r + 2R)(r + 4R)] \\d_{5,2} &= (b^4c + c^4a + a^4b) + (bc^4 + c^4a + ab^4) \\&= 2s\{s^4 - 2s^2r(r + 3R) - r^2[r(3r + 14R) + 8R^2]\} \\d_{5,3} &= (b^3c^2 + c^3a^2 + a^3b^2) \\&+ (b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) = 2s[s^4 + 2s^2r(r - 5R) + r^2(r + 2R)(r + 4R)] \\d_{5,4} &= abc(a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,1}d_{3,3} = 8s[s^2 - r(r + 4R)]rR \\d_{5,5} &= abc(bc + ca + ab) = d_{2,2}d_{3,3} = 4s[s^2 + r(r + 4R)]rR\end{aligned}$$

9.1.6 Termes de dimension [L]⁶

$$\begin{aligned}
d_{6,1} &= a^6 + b^6 + c^6 \\
&= 2 \{s^6 - 3s^4 r (5r + 4R) + 3s^2 r^2 [r(5r + 24R) + 24R^2] - r^3 (r + 4R)^3\} \\
d_{6,2} &= (b^5 c + c^5 a + a^5 b) + (bc^5 + ca^5 + ab^5) \\
&= 2 \{s^6 - s^4 r (5r + 8R) - s^2 r^2 [r(5r + 12R) - 8R^2] + r^3 (r + 4R)^3\} \\
d_{6,3} &= (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\
&= 2 \{s^6 + s^4 r (r - 12R) + s^2 r^2 [r(-r + 8R) + 24R^2] - r^3 (r + 4R)^3\} \\
d_{6,4} &= abc(a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1} d_{3,3} = 8s^2 [s^2 - 3r(r + 2R)] r R \\
d_{6,5} &= (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) = s^6 + 3s^4 r (r - 4R) + 3s^2 r^4 + r^3 (r + 4R)^3 \\
d_{6,6} &= abc[(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2)] = d_{3,2} d_{3,3} \\
&= 8s^2 [s^2 + r(r - 2R)] r R \\
d_{6,7} &= a^2 b^2 c^2 = d_{3,3}^2 = 16s^2 r^2 R^2
\end{aligned}$$

9.1.7 Termes de dimension [L]⁷

$$\begin{aligned}
d_{7,1} &= a^7 + b^7 + c^7 \\
&= 2s \{s^6 - 7s^4 r (3r + 2R) + 7s^2 r^2 [5r(r + 4R) + 16R^2] \\
&\quad - 7r^3 [r^2 (r + 10R) + 32(r + R)R^2]\} \\
d_{7,2} &= (b^6 c + c^6 a + a^6 b) + (bc^6 + ca^6 + ab^6) \\
&= 2s \{s^6 - s^4 r (9r + 10R) + s^2 r^2 [r(-5r + 4R) + 32R^2] \\
&\quad + r^3 [r^2 (5r + 46R) + 16(8r + 6R)R^2]\} \\
d_{7,3} &= (b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + (b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) \\
&= 2s \{s^6 - s^4 r (r + 14R) + s^2 r^2 [5r(-r + 4R) + 48R^2] \\
&\quad - r^3 [3r^2 (r + 10R) + 96(r + R)R^2]\} \\
d_{7,4} &= abc(a^4 + b^4 + c^4) = d_{3,3} d_{4,1} \\
&= 8s [s^4 - 2s^2 r (3r + 4R) + r^2 (r + 4R)^2] r R \\
d_{7,5} &= (b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + (b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) \\
&= 2s \{s^6 + s^4 r (3r - 14R) + s^2 r^2 [r(3r - 4R) + 16R^2] \\
&\quad + r^3 [r^2 (r + 10R) + 32(r + R)R^2]\} \\
d_{7,6} &= abc[(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + (bc^3 + ca^3 + ab^3)] = d_{3,3} d_{4,2} \\
&= 8s [s^4 - 4s^2 r R - r^2 (r + 4R)^2] r R \\
d_{7,7} &= abc(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{3,3} d_{4,3} \\
&= 4s [s^4 + 2s^2 r (r - 4R) + r^2 (r + 4R)^2] r R \\
d_{7,8} &= a^2 b^2 c^2 (a + b + c) = d_{1,1} d_{6,7} = d_{1,1} d_{3,3}^2 = d_{3,3} d_{4,4} = 32s^3 r^2 R^2
\end{aligned}$$

9.1.8 Termes de dimension [L]⁸

$$\begin{aligned}
d_{8,1} &= a^8 + b^8 + c^8 \\
&= 2 \{s^8 - 4s^6 r (7r + 4R) + 10s^4 r^2 [r(7r + 24R) + 16R^2] \\
&\quad - 4s^2 r^3 [r^2 (7r + 60R) + 32(5r + 4R)R^2] + r^4 (r + 4R)^4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{8,2} &= (b^7 c + c^7 a + a^7 b) + (b c^7 + c a^7 + a b^7) \\
&= 2 \{s^8 - 2 s^6 r (7 r + 6 R) + 8 s^4 r^2 (5 r + 8 R) R \\
&\quad + 2 s^2 r^3 [r^2 (7 r + 50 R) + 32 (3 r + R) R^2] - r^4 (r + 4 R)^4\} \\
d_{8,3} &= (b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) + (b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) \\
&= 2 \{s^8 - 4 s^6 r (r + 4 R) - 2 s^4 r^2 [r (5 r - 24 R) - 40 R^2] \\
&\quad - 4 s^2 r^3 [r^2 (r + 12 R) + 4 (11 r + 12 R) R^2] + r^4 (r + 4 R)^4\} \\
d_{8,4} &= a b c (a^5 + b^5 + c^5) = d_{3,3} d_{5,1} \\
&= 8 s^2 [s^4 - 10 s^2 r (r + R) + 5 r^2 (r + 2 R) (r + 4 R)] r R \\
d_{8,5} &= (b^5 c^3 + c^5 a^3 + a^5 b^3) + (b^3 c^5 + c^3 a^5 + a^3 b^5) \\
&= 2 \{s^8 + 2 s^6 r (r - 8 R) + 40 s^4 r^2 R^2 \\
&\quad - 2 s^2 r^3 [r (r^2 - 20 R^2) - 16 R^3] - r^4 (r + 4 R)^4\} \\
d_{8,6} &= a b c [(b^4 c + c^4 a + a^4 b) + (b c^4 + c a^4 + a b^4)] = d_{3,3} d_{5,2} \\
&= 8 s^2 \{s^4 - 2 s^2 r (r + 3 R) - r^2 [r (3 r + 14 R) + 8 R^2]\} r R \\
d_{8,7} &= (b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) \\
&= s^8 + 4 s^6 r (r - 4 R) + 2 s^4 r^2 [r (3 r - 8 R) + 16 R^2] + 4 s^2 r^5 (r + 4 R) \\
&\quad + r^4 (r + 4 R)^4 \\
d_{8,8} &= a b c [(b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3)] = d_{3,3} d_{5,3} \\
&= 8 s^2 [s^4 + 2 s^2 r (r - 5 R) + r^2 (r + 2 R) (r + 4 R)] r R \\
d_{8,9} &= a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,1} d_{6,7} = d_{2,1} d_{3,3}^2 = d_{3,3} d_{5,4} \\
&= 32 s^2 [s^2 - r (r + 4 R)] r^2 R^2 \\
d_{8,10} &= a^2 b^2 c^2 (b c + c a + a b) = d_{2,2} d_{6,7} = d_{2,2} d_{3,3}^2 = d_{3,3} d_{5,5} \\
&= 16 s^2 [s^2 + r (r + 4 R)] r^2 R^2
\end{aligned}$$

9.1.9 Termes de dimension $[L]^9$

$$\begin{aligned}
d_{9,1} &= a^9 + b^9 + c^9 \\
&= 2 s \{s^8 - 18 s^6 r (2 r + R) + 18 s^4 r^2 [7 r (r + 3 R) + 12 R^2] \\
&\quad - 6 s^2 r^3 [7 r^2 (2 r + 15 R) + 80 (3 r + 2 R) R^2] + 9 r^4 (r + 2 R) (r + 4 R)^3\} \\
d_{9,2} &= (b^8 c + c^8 a + a^8 b) + (b c^8 + c a^8 + a b^8) = 2 s \{s^8 - 2 s^6 r (10 r + 7 R) \\
&\quad + 2 s^4 r^2 [r (7 r + 51 R) + 52 R^2] + 2 s^2 r^3 [r^2 (14 r + 75 R) + 16 (5 r - 2 R) R^2] \\
&\quad - r^4 (7 r + 10 R) (r + 4 R)^3\} \\
d_{9,3} &= (b^7 c^2 + c^7 a^2 + a^7 b^2) + (b^2 c^7 + c^2 a^7 + a^2 b^7) \\
&= 2 s \{s^8 - 2 s^6 r (4 r + 9 R) + 2 s^4 r^2 [7 r (-r + 7 R) + 60 R^2] \\
&\quad - 2 s^2 r^3 [r (35 r + 176 R) + 192 R^2] R + 5 r^4 (r + 2 R) (r + 4 R)^3\} \\
d_{9,4} &= a b c (a^6 + b^6 + c^6) = d_{3,3} d_{6,1} \\
&= 8 s \{s^6 - 3 s^4 r (5 r + 4 R) + 3 s^2 r^2 [r (5 r + 24 R) + 24 R^2] \\
&\quad - r^3 (r + 4 R)^3\} r R \\
d_{9,5} &= (b^6 c^3 + c^6 a^3 + a^6 b^3) + (b^3 c^6 + c^3 a^6 + a^3 b^6) = 2 s \{s^8 - 18 s^6 r R \\
&\quad + 6 s^4 r^2 [r (-r + 3 R) + 12 R^2] \\
&\quad - s^2 r^3 [2 r^2 (4 r + 3 R) + 16 (-3 r + 2 R) R^2] - 3 r^4 (r + 2 R) (r + 4 R)^3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{9,6} &= abc [(b^5 c + c^5 a + a^5 b) + (bc^5 + ca^5 + ab^5)] = d_{3,3} d_{6,2} \\
&= 8s \{s^6 - s^4 r (5r + 8R) - s^2 r^2 [r (5r + 12R) - 8R^2] + r^3 (r + 4R)^3\} r R \\
d_{9,7} &= (b^5 c^4 + c^5 a^4 + a^5 b^4) + (b^4 c^5 + c^4 a^5 + a^4 b^5) \\
&= 2s \{s^8 + 2s^6 r (2r - 9R) + 2s^4 r^2 [r (3r - 11R) + 28R^2] + 2s^2 r^5 (2r + 5R) \\
&\quad + r^4 (r + 2R) (r + 4R)^3\} \\
d_{9,8} &= abc [(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4)] = d_{3,3} d_{6,3} \\
&= 8s \{s^6 + s^4 r (r - 12R) + s^2 r^2 [r (-r + 8R) + 24R^2] - r^3 (r + 4R)^3\} r R \\
d_{9,9} &= a^2 b^2 c^2 (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1} d_{6,7} = d_{3,1} d_{3,3}^2 = d_{3,3} d_{6,4} \\
&= 32s^3 [s^2 - 3r (r + 2R)] r^2 R^2 \\
d_{9,10} &= abc (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) = d_{3,3} d_{6,5} \\
&= 4s \{s^6 + 3s^4 r (r - 4R) + 3s^2 r^4 + r^3 (r + 4R)^3\} r R \\
d_{9,11} &= a^2 b^2 c^2 [(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2)] = d_{3,2} d_{6,7} \\
&= d_{3,2} d_{3,3}^2 = d_{3,3} d_{6,6} = 32s^3 [s^2 + r (r - 2R)] r^2 R^2 \\
d_{9,12} &= a^3 b^3 c^3 = d_{3,3}^3 = 64s^3 r^3 R^3
\end{aligned}$$

9.1.10 Termes de dimension $[L]^{10}$

$$\begin{aligned}
d_{10,1} &= a^{10} + b^{10} + c^{10} \\
d_{10,2} &= (b^9 c + c^9 a + a^9 b) + (bc^9 + ca^9 + ab^9) \\
d_{10,3} &= (b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) + (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
d_{10,4} &= abc (a^7 + b^7 + c^7) = d_{3,3} d_{7,1} \\
d_{10,5} &= (b^7 c^3 + c^7 a^3 + a^7 b^3) + (b^3 c^7 + c^3 a^7 + a^3 b^7) \\
d_{10,6} &= abc [(b^6 c + c^6 a + a^6 b) + (bc^6 + ca^6 + ab^6)] = d_{3,3} d_{7,2} \\
d_{10,7} &= (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) = d_{3,3} d_{7,3} \\
d_{10,8} &= abc [(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + (b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5)] \\
d_{10,9} &= a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) = d_{3,3} d_{7,4} = d_{3,3}^2 d_{4,1} = d_{4,1} d_{6,7} \\
d_{10,10} &= (b^5 c^5 + c^5 a^5 + a^5 b^5) \\
d_{10,11} &= abc [(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + (b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4)] = d_{3,3} d_{7,5} \\
d_{10,12} &= a^2 b^2 c^2 [(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + (bc^3 + ca^3 + ab^3)] = d_{3,3} d_{7,6} = \\
d_{3,3}^2 d_{4,2} &= d_{4,2} d_{6,7} \\
d_{10,13} &= a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{3,3} d_{7,7} = d_{3,3}^2 d_{4,3} = d_{4,3} d_{6,7} \\
d_{10,14} &= a^3 b^3 c^3 (a + b + c) = d_{3,3} d_{7,8} = d_{3,3}^2 d_{4,4} = d_{4,4} d_{6,7}
\end{aligned}$$

9.1.11 Termes de dimension $[L]^{12}$

$$\begin{aligned}
d_{12,1} &= a^{12} + b^{12} + c^{12} \\
d_{12,2} &= (b^{11} c + c^{11} a + a^{11} b) + (bc^{11} + ca^{11} + ab^{11}) \\
d_{12,3} &= (b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) + (b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) \\
d_{12,4} &= abc (a^9 + b^9 + c^9) \\
d_{12,5} &= (b^9 c^3 + c^9 a^3 + a^9 b^3) + (b^3 c^9 + c^3 a^9 + a^3 b^9) \\
d_{12,6} &= abc [(b^8 c + c^8 a + a^8 b) + (bc^8 + ca^8 + ab^8)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12,7} &= (b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) + (b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) \\
d_{12,8} &= a b c [(b^7 c^2 + c^7 a^2 + a^7 b^2) + (b^2 c^7 + c^2 a^7 + a^2 b^7)] = d_{3,3} d_{9,3} \\
d_{12,9} &= a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) = d_{3,3} d_{9,4} = d_{3,3}^2 d_{6,1} = d_{6,1} d_{6,7} \\
d_{12,10} &= (b^7 c^5 + c^7 a^5 + a^7 b^5) + (b^5 c^7 + c^5 a^7 + a^5 b^7) \\
d_{12,11} &= a b c [(b^6 c^3 + c^6 a^3 + a^6 b^3) + (b^3 c^6 + c^3 a^6 + a^3 b^6)] = d_{3,3} d_{9,5} \\
d_{12,12} &= a^2 b^2 c^2 [(b^5 c + c^5 a + a^5 b) + (b c^5 + c a^5 + a b^5)] = d_{3,3} d_{9,6} = \\
& d_{3,3}^2 d_{6,2} = d_{6,2} d_{6,7} \\
d_{12,13} &= (b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) \\
d_{12,14} &= a b c [(b^5 c^4 + c^5 a^4 + a^5 b^4) + (b^4 c^5 + c^4 a^5 + a^4 b^5)] = d_{3,3} d_{9,7} \\
d_{12,15} &= a^2 b^2 c^2 [(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4)] = d_{3,3} d_{9,8} = \\
& d_{3,3}^2 d_{6,3} = d_{6,3} d_{6,7} \\
d_{12,16} &= a^3 b^3 c^3 (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,3} d_{9,9} = d_{3,3}^2 d_{6,4} = d_{6,4} d_{6,7} = d_{3,1} d_{3,3}^3 \\
d_{12,17} &= a^2 b^2 c^2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) = d_{3,3} d_{9,10} = d_{3,3}^2 d_{6,5} = d_{6,5} d_{6,7} \\
d_{12,18} &= a^3 b^3 c^3 [(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2)] = d_{3,3} d_{9,11} = \\
& d_{3,3}^2 d_{6,6} = d_{6,6} d_{6,7} = d_{3,2} d_{3,3}^3 \\
d_{12,19} &= a^4 b^4 c^4 = d_{3,3}^4
\end{aligned}$$

9.1.12 Termes de dimension $[L]^{16}$

$$\begin{aligned}
d_{16,1} &= a^{16} + b^{16} + c^{16} \\
d_{16,2} &= (b^{15} c + c^{15} a + a^{15} b) + (b c^{15} + c a^{15} + a b^{15}) \\
d_{16,3} &= (b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) + (b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\
d_{16,4} &= a b c (a^{13} + b^{13} + c^{13}) \\
d_{16,5} &= (b^{13} c^3 + c^{13} a^3 + a^{13} b^3) + (b^3 c^{13} + c^3 a^{13} + a^3 b^{13}) \\
d_{16,6} &= a b c [(b^{12} c + c^{12} a + a^{12} b) + (b c^{12} + c a^{12} + a b^{12})] \\
d_{16,7} &= (b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) + (b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) \\
d_{16,8} &= a b c [(b^{11} c^2 + c^{11} a^2 + a^{11} b^2) + (b^2 c^{11} + c^2 a^{11} + a^2 b^{11})] \\
d_{16,9} &= a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) \\
d_{16,10} &= (b^{11} c^5 + c^{11} a^5 + a^{11} b^5) + (b^5 c^{11} + c^5 a^{11} + a^5 b^{11}) \\
d_{16,11} &= a b c [(b^{10} c^3 + c^{10} a^3 + a^{10} b^3) + (b^3 c^{10} + c^3 a^{10} + a^3 b^{10})] \\
d_{16,12} &= a^2 b^2 c^2 [b^9 c + c^9 a + a^9 b] + (b c^9 + c a^9 + a b^9) \\
d_{16,13} &= (b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) + (b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) \\
d_{16,14} &= a b c [(b^9 c^4 + c^9 a^4 + a^9 b^4) + (b^4 c^9 + c^4 a^9 + a^4 b^9)] \\
d_{16,15} &= a^2 b^2 c^2 [(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) + (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8)] \\
d_{16,16} &= a^3 b^3 c^3 (a^7 + b^7 + c^7) \\
d_{16,17} &= (b^9 c^7 + c^9 a^7 + a^9 b^7) + (b^7 c^9 + c^7 a^9 + a^7 b^9) \\
d_{16,18} &= a b c [(b^8 c^5 + c^8 a^5 + a^8 b^5) + (b^5 c^8 + c^5 a^8 + a^5 b^8)] \\
d_{16,19} &= a^2 b^2 c^2 [(b^7 c^3 + c^7 a^3 + a^7 b^3) + (b^3 c^7 + c^3 a^7 + a^3 b^7)] \\
d_{16,20} &= a^3 b^3 c^3 [(b^6 c + c^6 a + a^6 b) + (b c^6 + c a^6 + a b^6)] \\
d_{16,21} &= (b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) \\
d_{16,22} &= a b c [(b^7 c^6 + c^7 a^6 + a^7 b^6) + (b^6 c^7 + c^6 a^7 + a^6 b^7)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{16,23} &= a^2 b^2 c^2 [(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6)] \\
d_{16,24} &= a^3 b^3 c^3 [(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) + (b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5)] \\
d_{16,25} &= a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4) \\
d_{16,26} &= a^2 b^2 c^2 (b^5 c^5 + c^5 a^5 + a^5 b^5) \\
d_{16,27} &= a^3 b^3 c^3 [(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) + (b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4)] \\
d_{16,28} &= a^4 b^4 c^4 [(b^3 c + c^3 a + a^3 b) + (b c^3 + c a^3 + a b^3)] \\
d_{16,29} &= a^4 b^4 c^4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
d_{16,30} &= a^5 b^5 c^5 (a + b + c)
\end{aligned}$$

9.2 Annexe B : Expressions des dénominateurs d_i des coordonnées aréolaires des points X_i en fonction de a, b, c et en fonction des polynômes $d_{i,j}$

Remarque : ce n'est pas parce que d_i est un multiple de d_1 que $\frac{d_i}{d_1}$ est un polynôme en a, b, c , mais il peut l'être et dans ce cas il est noté d'_i et ce n'est pas parce que d_i est un multiple de d_3 que $\frac{d_i}{d_3}$ est un polynôme en a, b, c , mais il peut l'être et dans ce cas il est noté δ_i . Bien entendu si d_i est multiple de d_3 il est également multiple de d_1 puisque $d_3 = d_1 d'_3$ et on n'utilisera que δ_i et non d'_i (excepté lorsque $\delta_i = 1$ où l'on utilisera d'_i).

9.2.1 Termes de dimension $[L]^0$

Rappel :

$$J \triangleq \frac{\sqrt{(a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 3 a^2 b^2 c^2}}{a b c}$$

$$d_2 = 3$$

$$d_{30} = 0$$

$$d_{521} = 0$$

$$\delta_3 = 1$$

$$\delta_4 = 1$$

$$\delta_5 = 1$$

$$\delta_{20} = 1$$

$$\delta_{40} = 1$$

9.2.2 Termes de dimension $[L]^1$

$$d_1 = (a + b + c)$$

$$d_8 = (a + b + c) = d_1$$

$$d_{10} = (a + b + c) = d_1$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{145} &= (a + b + c) = d_1 \\
d_{175} &= (a + b + c) - (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - (r_1 + r_2 + r_3) \\
d_{176} &= (a + b + c) + (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + (r_1 + r_2 + r_3) \\
d_{481} &= (a + b + c) - 2(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - 2(r_1 + r_2 + r_3) \\
d_{482} &= (a + b + c) + 2(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + 2(r_1 + r_2 + r_3) \\
d_{551} &= (a + b + c) = d_1
\end{aligned}$$

9.2.3 Termes de dimension $[L]^2$

$$\begin{aligned}
d_6 &= (a^2 + b^2 + c^2) \\
d_7 &= -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) \\
d_9 &= -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) = d_7 \\
d_{37} &= (bc + ca + ab) \\
d_{44} &= -(a^2 + b^2 + c^2) + (bc + ca + ab) \\
d_{45} &= -(a^2 + b^2 + c^2) + 4(bc + ca + ab) \\
d_{69} &= (a^2 + b^2 + c^2) = d_6 \\
d_{75} &= (bc + ca + ab) = d_{37} \\
d_{86} &= (a^2 + b^2 + c^2) + 3(bc + ca + ab)
\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{141} &= (a^2 + b^2 + c^2) = d_6 \\
d_{142} &= -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) = d_7 \\
d_{144} &= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc + ca + ab) = -d_7 \\
d'_{390} &= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc + ca + ab) = -d_7 \\
d'_{1001} &= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc + ca + ab) = -d_7 \\
\delta_{182} &= -(a^2 + b^2 + c^2) = -d_6
\end{aligned}$$

9.2.4 Termes de dimension $[L]^3$

$$\text{Rappel : } D \triangleq (b-c)(c-a)(a-b) = -(b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2)$$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 3abc \\
&= d_{3,1} - d_{3,2} + 3d_{3,3} \\
d_{31} &= (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1} \\
d_{38} &= (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = d_{3,2} \\
d_{42} &= (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = d_{38} = d_{3,2} \\
d_{43} &= (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 3abc = d_{3,2} - 3d_{3,3} \\
d_{55} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2c + c^2a + a^2b) + (bc^2 + ca^2 + ab^2) = -d_{3,1} + d_{3,2} \\
d_{57} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2c + c^2a + a^2b) - (bc^2 + ca^2 + ab^2) + 6abc \\
&= d_{3,1} - d_{3,2} + 6d_{3,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{63} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) = d_{55} \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} \\
d_{81} &= (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 3 a b c \\
&= d_{3,1} + d_{3,2} + 3 d_{3,3} \\
d_{88} &= (a^3 + b^3 + c^3) - 3 (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - 3 (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 15 a b c \\
&= d_{3,1} - 3 d_{3,2} + 15 d_{3,3} \\
d_{89} &= (a^3 + b^3 + c^3) + \frac{15}{4} a b c = d_{3,1} + \frac{15}{4} d_{3,3} \\
d_{100} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 3 a b c \\
&= d_{11} = d_{3,1} - d_{3,2} + 3 d_{3,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_3 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3} = (2 a') (2 b') (2 c') \\
d'_4 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\
&= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3} \\
d'_5 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\
&= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3} \\
d'_{12} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b^2 c^2 + c a^2 + a b^2) - a b c \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} - d_{3,3} \\
d'_{20} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\
&= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3} \\
d'_{21} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) + a b c \\
&= -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3} \\
d'_{35} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - a b c \\
&= d'_{12} = -d_{3,1} + d_{3,2} - d_{3,3} \\
d'_{36} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 3 a b c \\
&= d_{11} = d_{3,1} - d_{3,2} + 3 d_{3,3} \\
d'_{40} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\
&= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3} \\
d'_{46} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 4 a b c \\
&= d_{3,1} - d_{3,2} + 4 d_{3,3} \\
d'_{56} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 4 a b c \\
&= d'_{46} = d_{3,1} - d_{3,2} + 4 d_{3,3} \\
d'_{58} &= (a^3 + b^3 + c^3) + a b c = d_{3,1} + d_{3,3} \\
d'_{65} &= a b c = d_{3,3} \\
d'_{72} &= a b c = d'_{65} = d_{3,3} \\
d'_{78} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 4 a b c \\
&= d'_{46} = d_{3,1} - d_{3,2} + 4 d_{3,3} \\
d'_{79} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) + a b c \\
&= d'_{21} = -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3} \\
d'_{80} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 3 a b c \\
&= -d_{11} = -d_{3,1} + d_{3,2} - 3 d_{3,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{84} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c \\ &= d'_3 = -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}d_{165} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$d_{354} = a b c = d'_{65} = d_{3,3}$$

$$\begin{aligned}d_{390} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 6 a b c \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} - 6 d_{3,3} = d_1 d'_{390}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{1001} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 6 a b c \\ &= d_{390} = d_{3,1} - d_{3,2} - 6 d_{3,3} = d_1 d'_{1001}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{140} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 2 a b c = -d'_3 \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} + 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{191} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) + a b c = d'_{21} \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} + 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{376} &= (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c + c^2 a + a^2 b) - (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 2 a b c = -d'_3 \\ &= d_{3,1} - d_{3,2} + 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{381} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{382} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{546} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{547} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{548} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{549} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d'_{550} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 2 a b c = d'_3 \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2 d_{3,3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{104} &= -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b c^2 + c a^2 + a b^2) - 3 a b c = -d_{11} \\ &= -d_{3,1} + d_{3,2} - 3 d_{3,3}\end{aligned}$$

9.2.5 Termes de dimension $[L]^4$

Certains de ces termes sont multiples de d_1 .

$$\begin{aligned}d_3 &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = S = d_1 d'_3 \\ d_4 &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_5 &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_5 \\
d_{12} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a+b+c) = d_1 d'_{12} \\
d_{20} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{20} \\
d_{21} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3abc(a+b+c) = d_1 d'_{21} \\
d_{32} &= (a^4 + b^4 + c^4) \\
d_{35} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a+b+c) = d_{12} \\
&= d_1 d'_{35} \\
d_{36} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a+b+c) = d_1 d'_{36} \\
d_{39} &= (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_\Omega = d'_\Omega \\
d_{40} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{40} \\
d_{41} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + (b^3 c + c^3 a + a^3 b) + (bc^3 + ca^3 + ab^3) \\
d_{46} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2abc(a+b+c) = d_1 d'_{46} \\
d_{56} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2abc(a+b+c) = d_{46} = d_1 d'_{56} \\
d_{58} &= (a^4 + b^4 + c^4) + (b^3 c + c^3 a + a^3 b) + (bc^3 + ca^3 + ab^3) + abc(a+b+c) \\
&= d_1 d'_{58} \\
d_{65} &= abc(a+b+c) = d_1 d'_{65} \\
d_{72} &= abc(a+b+c) = d_{65} = d_1 d'_{72} \\
d_{76} &= (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{39} \\
d_{78} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2abc(a+b+c) = d_{46} \\
&= d_1 d'_{78} \\
d_{79} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3abc(a+b+c) = d_{21} \\
&= d_1 d'_{79} \\
d_{80} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - abc(a+b+c) = -d_{36} \\
&= d_1 d'_{80} \\
d_{83} &= (a^4 + b^4 + c^4) + 3(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
d_{85} &= -(b^3 c + c^3 a + a^3 b) - (bc^3 + ca^3 + ab^3) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
&+ abc(a+b+c) \\
d_{99} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
d_{101} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^3 c + c^3 a + a^3 b) - (bc^3 + ca^3 + ab^3) + abc(a+b+c) \\
d_{98} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = -d_{99}
\end{aligned}$$

Termes faisant intervenir Δ

$$\begin{aligned}
d_{13} &= 3d_3 + 4\sqrt{3}d_6\Delta \\
d_{14} &= 3d_3 - 4\sqrt{3}d_6\Delta \\
d_{15} &= \sqrt{3}d_3 + 4d_6\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3}d_{13} \\
d_{16} &= -\sqrt{3}d_3 + 4d_6\Delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}d_{14} \\
d_{17} &= 5d_3 + 4\sqrt{3}d_6\Delta \\
d_{18} &= 5d_3 - 4\sqrt{3}d_6\Delta \\
d_{61} &= d_3 + 4\sqrt{3}d_6\Delta \\
d_{62} &= d_3 - 4\sqrt{3}d_6\Delta
\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{115} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} \\
d_{140} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = -d_3 = d_1 d'_{140} \\
d_{183} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 4(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\
d_{187} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} \\
d_{191} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 3abc(a+b+c) = d_{21} \\
&= d_1 d'_{191} \\
d_{230} &= (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{99} \\
d_{376} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = -d_3 = d_1 d'_{376} \\
d_{381} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{381} \\
d_{382} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{382} \\
d_{546} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{546} \\
d_{547} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{547} \\
d_{548} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{548} \\
d_{549} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{549} \\
d_{550} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 = d_1 d'_{550} \\
d_{1113} &= J d_3 \\
d_{1114} &= J d_3 = d_{1113} \\
d'_{291} &= -(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + abc(a+b+c) \\
d'_{329} &= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = -d_3
\end{aligned}$$

Autres valeurs faisant intervenir Δ

$$\begin{aligned}
d_{485} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2) \Delta = d_3 + 2d_6 \Delta \\
d_{486} &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) \Delta = d_3 - 2d_6 \Delta
\end{aligned}$$

9.2.6 Termes de dimension $[L]^5$

$$\begin{aligned}
d_{19} &= (a^5 + b^5 + c^5) - (b^4 c + c^4 a + a^4 b) - (b c^4 + c a^4 + a b^4) \\
&+ 2abc(bc + ca + ab) \\
d_{48} &= -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
d_{71} &= -(b^4 c + c^4 a + a^4 b) - (b c^4 + c a^4 + a b^4) \\
&+ (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + 2abc(bc + ca + ab) \\
d_{77} &= -(a^5 + b^5 + c^5) - (b^4 c + c^4 a + a^4 b) - (b c^4 + c a^4 + a b^4) \\
&+ 2(b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + 2abc(a^2 + b^2 + c^2) + 2(b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
&- 2abc(bc + ca + ab) \\
d_{82} &= (a^5 + b^5 + c^5) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
&+ abc(bc + ca + ab) \\
d_{87} &= -(b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + 2abc(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
&+ abc(bc + ca + ab)
\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{256} &= (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + a b c (a^2 + b^2 + c^2) \\
&+ (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + a b c (b c + c a + a b) \\
d_{284} &= -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + a b c (a^2 + b^2 + c^2) \\
&+ (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) + 2 a b c (b c + c a + a b) \\
d_{291} &= -(b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) + a b c (a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
&+ a b c (b c + c a + a b) = d_1 d'_{291} \\
d_{329} &= (a^5 + b^5 + c^5) + (b^4 c + c^4 a + a^4 b) + (b c^4 + c a^4 + a b^4) \\
&- 2 (b^3 c^2 + c^3 a^2 + a^3 b^2) - 2 (b^2 c^3 + c^2 a^3 + a^2 b^3) \\
&- 2 a b c (b c + c a + a b) = d_1 d'_{329} \\
d_{560} &= a^5 + b^5 + c^5 \\
d_{657} &= -(b - c) (c - a) (a - b) [(a^2 + b^2 + c^2) - 2 (b c + c a + a b)] = d_7 D
\end{aligned}$$

9.2.7 Termes de dimensions [L]⁶

Remarque :

$$\begin{aligned}
D^2 &= (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - 2 a b c (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\
&- 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) + 2 a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2 a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) \\
&- 6 a^2 b^2 c^2 = d_{6,3} - 2 d_{6,4} - 2 d_{6,5} + 2 d_{6,6} - 6 d_{6,7} \\
d_{22} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\
d_{23} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 3 a^2 b^2 c^2 \\
d_{25} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 6 a^2 b^2 c^2 \\
d_{27} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\
&- a b c (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) + 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) \\
&+ 2 a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2 a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) + 6 a^2 b^2 c^2 \\
d_{33} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - 2 a b c (a^3 + b^3 + c^3) \\
&+ (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 2 a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2 a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) \\
&- 6 a^2 b^2 c^2 \\
d_{51} &= a^2 b^2 c^2 = (d'_{65})^2 \\
d_{92} &= -(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) + a b c (a^3 + b^3 + c^3) \\
&+ 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) \\
d_{468} &= -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\
&- 3 a^2 b^2 c^2 = d_{23} \\
d'_{28} &= (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - a b c (a^3 + b^3 + c^3) \\
&- (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) + a b c (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + a b c (b c^2 + c a^2 + a b^2) \\
&+ 4 a^2 b^2 c^2 \\
d'_{29} &= -(a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (b c^5 + c a^5 + a b^5) \\
&+ (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + a b c (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2 c^4 + c^4 a^2 + a^2 b^4) \\
&+ 2 (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - 2 a^2 b^2 c^2
\end{aligned}$$

$$d'_{34} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - 2abc(a^3 + b^3 + c^3) \\ - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + 2abc(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2abc(bc^2 + ca^2 + ab^2) \\ - 2a^2 b^2 c^2$$

$$d'_{47} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (bc^5 + ca^5 + ab^5) \\ - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + 2abc(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ + 2(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - abc(b^2 c + c^2 a + a^2 b) - abc(bc^2 + ca^2 + ab^2) \\ + 2a^2 b^2 c^2$$

$$d'_{60} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ + 2abc(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + 2abc(bc^2 + ca^2 + ab^2) + a^2 b^2 c^2$$

$$d'_{73} = -(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - (bc^5 + ca^5 + ab^5) + 2abc(a^3 + b^3 + c^3) \\ + 2(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - abc(b^2 c + c^2 a + a^2 b) - abc(bc^2 + ca^2 + ab^2) \\ + 2a^2 b^2 c^2$$

$$d'_{90} = (a^6 + b^6 + c^6) - 2(b^5 c + c^5 a + a^5 b) - 2(bc^5 + ca^5 + ab^5) \\ - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + 2abc(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ + 4(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) - 2a^2 b^2 c^2$$

$$\delta_{24} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 4a^2 b^2 c^2$$

$$\delta_{26} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 2a^2 b^2 c^2 \\ = q_1 q_2 q_2$$

$$\delta_{49} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - a^2 b^2 c^2$$

$$\delta_{52} = -a^2 b^2 c^2 = -d_{51}$$

$$\delta_{54} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + a^2 b^2 c^2$$

$$\delta_{64} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 2a^2 b^2 c^2 \\ = \delta_{26} = q_1 q_2 q_2$$

$$\delta_{68} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 2a^2 b^2 c^2 \\ = \delta_{26} = q_1 q_2 q_2$$

$$\delta_{74} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 3a^2 b^2 c^2 \\ = d_{23}$$

Autres valeurs

$$d_{110} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ - 3a^2 b^2 c^2 = d_{23}$$

$$d_{111} = (a^6 + b^6 + c^6) - 3(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - 3(b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ + 15a^2 b^2 c^2$$

$$d_{181} = abc(a^3 + b^3 + c^3) + 3a^2 b^2 c^2$$

$$d_{182} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) - (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 6a^2 b^2 c^2 \\ = d_3 \delta_{182}$$

$$\delta_{186} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\ - 3a^2 b^2 c^2 = d_{23}$$

$$\delta_{378} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) = d_{22}$$

9.2.8 Termes de dimension [L]⁷

Les d_i sont multiples de d_1 : $d_i = d_1 d'_i$.

$$\begin{aligned} d_{28} &= (a^7+b^7+c^7)+(b^6c+c^6a+a^6b)+(bc^6+ca^6+ab^6)-(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) \\ &- abc(a^4+b^4+c^4) - (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) - (b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &- abc(b^3c+c^3a+a^3b) - abc(bc^3+ca^3+ab^3) - (b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &+ 2abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 6a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1 d'_{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{29} &= -(a^7+b^7+c^7) - 2(b^6c+c^6a+a^6b) - 2(bc^6+ca^6+ab^6) \\ &- abc(a^4+b^4+c^4) + 3(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &+ 2abc(b^3c+c^3a+a^3b) + 2abc(bc^3+ca^3+ab^3) + 3(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &+ 2abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) - 2a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1 d'_{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{34} &= (a^7+b^7+c^7)+(b^6c+c^6a+a^6b)+(bc^6+ca^6+ab^6)-(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) \\ &- 2abc(a^4+b^4+c^4) - (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) - (b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &- abc(b^3c+c^3a+a^3b) - abc(bc^3+ca^3+ab^3) - (b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &+ 4abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 2a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1 d'_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{47} &= (a^7+b^7+c^7) - 2(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) - 2(b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) \\ &+ (b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) + (b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) = d_1 d'_{47} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{60} &= -(a^7+b^7+c^7) - (b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) \\ &+ (b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) + (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) + (b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &+ 3abc(b^3c+c^3a+a^3b) + 3abc(bc^3+ca^3+ab^3) + (b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) \\ &+ 4abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 5a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1 d'_{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{73} &= -(b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) - (b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) \\ &- (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) + 2(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) \\ &+ abc(b^3c+c^3a+a^3b) + abc(bc^3+ca^3+ab^3) + 2(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) = d_1 d'_{73} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{84} &= (a^7+b^7+c^7) - (b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) \\ &- 3(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) + 2abc(a^4+b^4+c^4) - 3(b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) \\ &+ 3(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) + abc(b^3c+c^3a+a^3b) + abc(bc^3+ca^3+ab^3) \\ &+ 3(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) - 4abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 2a^2b^2c^2(a+b+c) = d_3 \delta_{84} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{90} &= (a^7+b^7+c^7) - (b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) \\ &- 3(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) - 2abc(a^4+b^4+c^4) - 3(b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) \\ &+ 3(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) + abc(b^3c+c^3a+a^3b) + abc(bc^3+ca^3+ab^3) \\ &+ 3(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) + 4abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) - 2a^2b^2c^2(a+b+c) = d_1 d'_{90} \end{aligned}$$

Autre valeur

$$\begin{aligned} d_{104} &= (a^7+b^7+c^7) - (b^6c+c^6a+a^6b) - (bc^6+ca^6+ab^6) \\ &- 3(b^5c^2+c^5a^2+a^5b^2) + 3abc(a^4+b^4+c^4) - 3(b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5) \\ &+ 3(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) + abc(b^3c+c^3a+a^3b) + abc(bc^3+ca^3+ab^3) \\ &+ 3(b^3c^4+c^3a^4+a^3b^4) - 6abc(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 2a^2b^2c^2(a+b+c) \\ &= d_3 \delta_{104} \end{aligned}$$

9.2.9 Termes de dimension $[L]^8$

$$\begin{aligned}
d_{50} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 2(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) \\
&+ 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\
d_{53} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 2(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) \\
&+ 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + 2a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\
d_{59} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 2(b^7 c + c^7 a + a^7 b) - 2(bc^7 + ca^7 + ab^7) \\
&+ 6abc(a^5 + b^5 + c^5) + 2(b^5 c^3 + c^5 a^3 + a^5 b^3) - 4abc(b^4 c + c^4 a + a^4 b) \\
&- 4abc(bc^4 + ca^4 + ab^4) + 2(b^3 c^5 + c^3 a^5 + a^3 b^5) - 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) \\
&+ 5a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2 b^2 c^2 (bc + ca + ab). \\
d_{66} &= -(a^8 + b^8 + c^8) + 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) = d_6 \delta_{26} \\
d_{67} &= -(a^8 + b^8 + c^8) + 2(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) - a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\
&= d_6 d_{23} \\
d_{95} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 5(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 5(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) \\
&+ 8(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + 5a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\
d_{98} &= (a^8 + b^8 + c^8) - 3(b^6 c^2 + c^6 a^2 + a^6 b^2) - 3(b^2 c^6 + c^2 a^6 + a^2 b^6) \\
&+ 4(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) + a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = d_1 d'_{98}
\end{aligned}$$

9.2.10 Terme de dimension $[L]^9$

$$\begin{aligned}
d'_{91} &= (b^8 c + c^8 a + a^8 b) + (bc^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) \\
&- (b^7 c^2 + c^7 a^2 + a^7 b^2) - abc(a^6 + b^6 + c^6) - (b^2 c^7 + c^2 a^7 + a^2 b^7) \\
&- 3(b^6 c^3 + c^6 a^3 + a^6 b^3) - 3(b^3 c^6 + c^3 a^6 + a^3 b^6) \\
&+ 3(b^5 c^4 + c^5 a^4 + a^5 b^4) + abc(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + abc(b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) \\
&+ 3(b^4 c^5 + c^4 a^5 + a^4 b^5) - 2abc(b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) \\
&+ a^2 b^2 c^2 (b^2 c + c^2 a + a^2 b) + a^2 b^2 c^2 (bc^2 + ca^2 + ab^2) - 2a^3 b^3 c^3.
\end{aligned}$$

9.2.11 Termes de dimension $[L]^{10}$

Ces termes sont multiples de d_1 et certains sont multiples de d_3 .

$$\begin{aligned}
d_{24} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 6a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 6a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{24} \\
d_{26} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 4a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{26} \\
d_{49} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 3a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) = d_3 \delta_{49} \\
d_{52} &= a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) - 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{54} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) + 4a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{54} \\
d_{64} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 4a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{64} \\
d_{68} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 4a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{68} \\
d_{74} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 5a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\
&- 4a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{91} &= (b^9 c + c^9 a + a^9 b) + (bc^9 + c^9 a + a^9 b) + abc(a^7 + b^7 + c^7) \\
&- 4(b^7 c^3 + c^7 a^3 + a^7 b^3) - 2abc(b^6 c + c^6 a + a^6 b) - 2abc(bc^6 + ca^6 + ab^6) \\
&- 4(b^3 c^7 + c^3 a^7 + a^3 b^7) - 2abc(b^5 c^2 + c^5 a^2 + a^5 b^2) \\
&- 2abc(b^2 c^5 + c^2 a^5 + a^2 b^5) + 6(b^5 c^5 + c^5 a^5 + a^5 b^5) + 2abc(b^4 c^3 + c^4 a^3 + a^4 b^3) \\
&+ 2a^2 b^2 c^2 (b^3 c + c^3 a + a^3 b) + 2a^2 b^2 c^2 (bc^3 + ca^3 + ab^3) \\
&+ 2abc(b^3 c^4 + c^3 a^4 + a^3 b^4) = d_1 d'_{91}
\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{186} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 5a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) \\
&- 4a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_{74} = d_3 \delta_{186} \\
d_{378} &= (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 3(b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 2(b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 2a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 2(b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) + 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = d_3 \delta_{378}
\end{aligned}$$

9.2.12 Termes de dimension [L]¹²

$$\begin{aligned}
d_{94} &= (b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) + (b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) \\
&- 4(b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) - a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) - 4(b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) \\
&+ 6(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) + 3a^4 b^4 c^4 \\
d_{97} &= -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 4(b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) + 4(b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) \\
&- 7(b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) - 11a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) - 7(b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) \\
&+ 8(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) + 7a^2 b^2 c^2 (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\
&+ 7a^2 b^2 c^2 (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{70} &= (a^{12} + b^{12} + c^{12}) - 2(b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) \\
&- 2(b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) - (b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) + 2a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) \\
&- (b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) + 4(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) - 2a^4 b^4 c^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{93} &= (b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) + (b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) \\
&- 4(b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) - 3a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) - 4(b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) \\
&+ 6(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) + 2a^2 b^2 c^2 (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\
&+ 2a^2 b^2 c^2 (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) + a^4 b^4 c^4. \\
\delta_{96} &= -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 5(b^{10} c^2 + c^{10} a^2 + a^{10} b^2) \\
&+ 5(b^2 c^{10} + c^2 a^{10} + a^2 b^{10}) - 11(b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) - 11a^2 b^2 c^2 (a^6 + b^6 + c^6) \\
&- 11(b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8) + 14(b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6) + 6a^2 b^2 c^2 (b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) \\
&+ 6a^2 b^2 c^2 (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4) - 2a^4 b^4 c^4.
\end{aligned}$$

Remarques :

$$\delta_{93} - d_{94} = 2(d_{22} - d_{51})d_{51} = 2\delta_{49}d_{51}$$

$$\delta_{70} - 2\delta_{96} + 3d_{97} = (9d_{22} + 2d_{51})d_{51}$$

$$\delta_{70} - 3\delta_{93} + \delta_{96} = -7d_{51}^2.$$

9.2.13 Termes de dimension $[L]^{16}$

Ces trois termes sont multiples de d_3 .

$$\begin{aligned}
d_{70} &= d_3 \delta_{70} \\
&= -(a^{16} + b^{16} + c^{16}) + 4(b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) + 4(b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\
&- 4(b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) - 8a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 4(b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) \\
&- 4(b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) - 4(b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) + 10(b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) \\
&+ 4a^2 b^2 c^2 (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 8a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 4a^2 b^2 c^2 (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 8a^4 b^4 c^4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2). \\
d_{93} &= d_3 \delta_{93} = -(b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) - (b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\
&+ 6(b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) + 6(b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) + 7a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) \\
&- 15(b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) - 15(b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) \\
&- 15a^2 b^2 c^2 (b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 15a^2 b^2 c^2 (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&+ 20(b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) + 9a^2 b^2 c^2 (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) \\
&+ 9a^2 b^2 c^2 (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) + 9a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4). \\
d_{96} &= d_3 \delta_{96} \\
&= (a^{16} + b^{16} + c^{16}) - 7(b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) - 7(b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14}) \\
&+ 22(b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) + 29a^2 b^2 c^2 (a^{10} + b^{10} + c^{10}) \\
&+ 22(b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12}) - 41(b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) \\
&- 45a^2 b^2 c^2 (b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) - 45a^2 b^2 c^2 (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8) \\
&- 41(b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10}) + 50(b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8) \\
&+ 23a^2 b^2 c^2 (b^6 c^4 + c^6 a^4 + a^6 b^4) + 26a^4 b^4 c^4 (a^4 + b^4 + c^4) \\
&+ 23a^2 b^2 c^2 (b^4 c^6 + c^4 a^6 + a^4 b^6) - 6a^4 b^4 c^4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2).
\end{aligned}$$

Remarque : $d_{70} - 3d_{93} + d_{96} = d_3 (\delta_{70} - 3\delta_{93} + \delta_{96}) = -7d_3 d_{51}^2.$

9.3 Annexe C : Expressions des dénominateurs d_i des coordonnées aréolaires des points X_i en fonction de s, r, R

Les valeurs entre parenthèses sont celles du triangle équilatéral pour lequel $c = b = a$.

$$\text{On a : } s \left(\frac{3}{2}a\right), r \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right), R \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right).$$

$$\Delta = s r \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$$

$$J = \frac{\sqrt{-2s^2+2r(r+4R)+9R^2}}{R} \quad (0)$$

$$D = 2r \sqrt{-\{s^4 + 2s^2[r(r-10R) - 2R^2] + r(r+4R)^3\}} \quad (0)$$

$$S = 16s^2r^2(3a^4)$$

$$d_1 = 2s(3a)$$

$$d_2 = 3(3)$$

$$d_3 = 16s^2r^2(3a^4) \text{ et } d'_3 = 8sr^2(a^3) \text{ et } \delta_3 = 1(1)$$

$$d_4 = 16s^2r^2 = d_3(3a^4) \text{ et } d'_4 = 8sr^2 = d'_3(a^3) \text{ et } \delta_4 = 1(1)$$

$$d_5 = 16s^2r^2 = d_3(3a^4) \text{ et } d'_5 = 8sr^2 = d'_3(a^3) \text{ et } \delta_5 = 1(1)$$

$$d_6 = 2[s^2 - r(r+4R)](3a^2)$$

$$d_7 = 4r(r+4R)(3a^2)$$

$$d_8 = 2s(3a)$$

$$d_9 = 4r(r+4R) = d_7(3a^2)$$

$$d_{10} = 2s(3a)$$

$$d_{11} = -4sr(2r-R)(0)$$

$$d_{12} = 8s^2r(2r+R)(6a^4) \text{ et } d'_{12} = 4sr(2r+R)(2a^3)$$

$$d_{13} = 8\sqrt{3}s\{s^2 + [2\sqrt{3}s - (r+4R)]r\}r(18a^4)$$

$$d_{14} = -8\sqrt{3}s\{s^2 - [2\sqrt{3}s + (r+4R)]r\}r(0)$$

$$d_{15} = 8s\{s^2 + [2\sqrt{3}s - (r+4R)]r\}r = \frac{\sqrt{3}}{3}d_{13}(6\sqrt{3}a^4)$$

$$d_{16} = 8s\{s^2 - [2\sqrt{3}s + (r+4R)]r\}r = -\frac{\sqrt{3}}{3}d_{14}(0)$$

$$d_{17} = 8s\{\sqrt{3}s^2 + [10s - \sqrt{3}(r+4R)]r\}r(24a^4)$$

$$d_{18} = -8s\{\sqrt{3}s^2 - [10s + \sqrt{3}(r+4R)]r\}r(6a^4)$$

$$d_{19} = -16s[s^2 - (r+2R)(r+4R)]r^2(3a^5)$$

$$d_{20} = 16s^2r^2 = d_3(3a^4) \text{ et } d'_{20} = 8sr^2 = d'_3(a^3) \text{ et } \delta_{20} = 1(1)$$

$$d_{21} = 8s^2r(2r+3R)(12a^4) \text{ et } d'_{21} = 4sr(2r+3R)(4a^3)$$

$$d_{22} = 32s^2[s^2 - r(r+4R) - 3R^2]r^2(3a^6)$$

$$d_{23} = 16s^2\{2[s^2 - r(r+4R)] - 9R^2\}r^2(0)$$

$$d_{24} = 512s^4[s^2 - r(r+4R) - 5R^2]r^4(-3a^{10}) \text{ et}$$

$$\delta_{24} = 32s^2[s^2 - r(r+4R) - 5R^2]r^2(-a^6)$$

$$d_{25} = -32s^2[s^2 - r(r+4R) - 6R^2]r^2(3a^6)$$

$$\begin{aligned}
& d_{26} = 512 s^4 [s^2 - (r + 2R)^2] r^4 (3a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{26} &= 32 s^2 [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = q_1 q_2 q_3 (a^6) \\
& d_{27} = -16 s^2 [s^2 - 3(r + 2R)^2] r^2 (12a^6) \\
& d_{28} = -64 s^3 [s^2 - r(r + 5R) - 6R^2] r^2 (12a^7) \text{ et} \\
d'_{28} &= -32 s^2 [s^2 - r(r + 5R) - 6R^2] r^2 (4a^6) \\
& d_{29} = 32 s^3 [3s^2 - r(r + 8R) - 12R^2] r^2 (12a^7) \text{ et} \\
d'_{29} &= 16 s^2 [3s^2 - r(r + 8R) - 12R^2] r^2 (4a^6) \\
& d_{30} = 0 (0) \\
& d_{31} = 2s [s^2 - 3r(r + 2R)] (3a^3) \\
& d_{32} = 2 [s^4 - 2s^2 r(3r + 4R) + r^2(r + 4R)^2] (3a^4) \\
& d_{33} = 32 s^2 [s^2 - r(r + 2R) - 4R^2] r^2 (3a^6) \\
& d_{34} = -64 s^3 [s^2 - r(r + 6R) - 4R^2] r^2 (3a^7) \text{ et} \\
d'_{34} &= -32 s^2 [s^2 - r(r + 6R) - 4R^2] r^2 (a^6) \\
& d_{35} = 8 s^2 r(2r + R) = d_{12} (6a^4) \text{ et } d'_{35} = 4sr(2r + R) = d'_{12} (2a^3) \\
& d_{36} = -8 s^2 r(2r - R) (0) \text{ et } d'_{36} = -4sr(2r - R) = d_{11} (0) \\
& d_{37} = s^2 + r(r + 4R) (3a^2) \\
& d_{38} = 2s [s^2 + r(r - 2R)] (6a^3) \\
& d_{39} = s^4 + 2s^2 r(r - 4R) + r^2(r + 4R)^2 (3a^4) \\
& d_{40} = 16 s^2 r^2 = d_3 (3a^4) \text{ et } d'_{40} = 8sr^2 = d'_3 (a^3) \text{ et } \delta_{40} = 1 (1) \\
& d_{41} = 4 [s^2 (3r + 2R) - r(r + 4R)^2] r (3a^4) \\
& d_{42} = 2s [s^2 + r(r - 2R)] = d_{38} (6a^3) \\
& d_{43} = 2s [s^2 + r(r - 8R)] (3a^3) \\
& d_{44} = -[s^2 - 3r(r + 4R)] (0) \\
& d_{45} = 2 [s^2 + 3r(r + 4R)] (9a^2) \\
& d_{46} = -16 s^2 r(r - R) (3a^4) \text{ et } d'_{46} = -8sr(r - R) (a^3) \\
& d_{47} = -32 s^3 [s^2 - 3r(r + 2R) - 2R^2] r^2 (-3a^7) \text{ et} \\
d'_{47} &= -16 s^2 [s^2 - 3r(r + 2R) - 2R^2] r^2 (-a^6) \\
& d_{48} = 8s [3s^2 - (r + 2R)(r + 4R)] r^2 (3a^5) \\
& d_{49} = 256 s^4 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 7R^2\} r^4 (6a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{49} &= 16 s^2 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 7R^2\} r^2 (2a^6) \\
& d_{50} = -32 s^2 \\
& \{s^4 - s^2 [2r(3r + 4R) + 3R^2] + r [r^2(r + 8R) + (19r + 12R)R^2]\} r^2 (0) \\
& d_{51} = 16 s^2 r^2 R^2 (a^6) \\
& d_{52} = -256 s^4 r^4 R^2 (-3a^{10}) \text{ et } \delta_{52} = -16 s^2 r^2 R^2 = -d_{51} (-a^6) \\
& d_{53} = -32 s^2 \{s^4 - 2s^2 [r(3r + 4R) + 2R^2] + r(r + 2R)^2(r + 4R)\} r^2 (3a^8) \\
& d_{54} = 256 s^4 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 5R^2\} r^4 (12a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{54} &= 16 s^2 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 5R^2\} r^2 (4a^6) \\
& d_{55} = 8sr(r + R) (3a^3) \\
& d_{56} = -16 s^2 r(r - R) = d_{46} (3a^4) \text{ et } d'_{56} = -8sr(r - R) = d'_{46} (a^3) \\
& d_{57} = -8sr(r - 2R) (3a^3) \\
& d_{58} = 4s^2 [s^2 - r(3r + 4R)] (12a^4) \text{ et } d'_{58} = 2s [s^2 - r(3r + 4R)] (4a^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{59} &= 64 s^2 [s^2 - (r + R)(r + 4R)] (2r - R) r^3 (3a^8) \\
d_{60} &= 32 s^3 \{s^2 (2r + R) - r[r(2r + 7R) + 7R^2]\} r (48a^7) \text{ et} \\
d'_{60} &= 16 s^2 \{s^2 (2r + R) - r[r(2r + 7R) + 7R^2]\} r (16a^6) \\
d_{61} &= 8 s \{\sqrt{3} s^2 + [2s - \sqrt{3}(r + 4R)] r\} r (12a^4) \\
d_{62} &= 8 s \{-\sqrt{3} s^2 + [2s + \sqrt{3}(r + 4R)] r\} r (-6a^4) \\
d_{63} &= 8 s r (r + R) = d_{55} (3a^3) \\
d_{64} &= 512 s^4 [s^2 - (r + 2R)^2] r^4 = d_{26} (3a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{64} &= 32 s^2 [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = \delta_{26} (a^6) \\
d_{65} &= 8 s^2 r R (3a^4) \text{ et } d'_{65} = 4 s r R (a^3) \\
d_{66} &= 64 s^2 [s^2 - r(r + 4R)] [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = d_6 \delta_{26} (3a^8) \\
d_{67} &= 32 s^2 [s^2 - r(r + 4R)] \{2[s^2 - r(r + 4R)] - 9R^2\} r^2 = d_6 d_{23} (0) \\
d_{68} &= 512 s^4 [s^2 - (r + 2R)^2] r^4 = d_{26} (3a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{68} &= 32 s^2 [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = \delta_{26} (a^6) \\
d_{69} &= 2 [s^2 - r(r + 4R)] = d_6 (3a^2) \\
d_{70} &= 16384 s^6 \{s^4 - 2s^2[r(r + 4R) + 3R^2] \\
&+ r[r^2(r + 8R) + 2(11r + 12R)R^2] + 7R^4\} r^6 (3a^{16}) \text{ et} \\
\delta_{70} &= 1024 s^4 \{s^4 - 2s^2[r(r + 4R) + 3R^2] \\
&+ r[r^2(r + 8R) + 2(11r + 12R)R^2] + 7R^4\} r^4 (a^{12}) \\
d_{71} &= 8 s [s^2 + (r + 2R)(r + 4R)] r^2 (6a^5) \\
d_{72} &= 8 s^2 r R = d_{65} \text{ et } d'_{72} = 4 s r R = d'_{65} (3a^4) \\
d_{73} &= 32 s^3 [s^2 + r(r - 2R) - 4R^2] r^2 (6a^7) \text{ et} \\
d'_{73} &= 16 s^2 [s^2 + r(r - 2R) - 4R^2] r^2 (2a^6) \\
d_{74} &= 256 s^4 \{2[s^2 - r(r + 4R)] - 9R^2\} r^4 (0) \text{ et} \\
\delta_{74} &= 16 s^2 \{2[s^2 - r(r + 4R)] - 9R^2\} r^2 = d_{23} (0) \\
d_{75} &= s^2 + r(r + 4R) = d_{37} (3a^2) \\
d_{76} &= s^4 + 2s^2 r(r - 4R) + r^2(r + 4R)^2 = d_{39} (3a^4) \\
d_{77} &= 32 s [s^2 - (r + 4R)R] r^2 (3a^5) \\
d_{78} &= -16 s^2 r(r - R) = d_{46} (3a^4) \text{ et } d'_{78} = -8 s r(r - R) = d'_{46} (a^3) \\
d_{79} &= 8 s^2 r(2r + 3R) = d_{21} (12a^4) \text{ et } d'_{79} = 4 s r(2r + 3R) = d'_{21} (4a^3) \\
d_{80} &= 8 s^2 r(2r - R) = -d_{36} (0) \text{ et } d'_{80} = 4 s r(2r - R) = -d'_{11} (0) \\
d_{81} &= 4 s [s^2 - r(r + R)] (12a^3) \\
d_{82} &= 4 s [s^4 - s^2 r(4r + 9R) + r^2(r + 4R)(3r + 7R)] (12a^5) \\
d_{83} &= 5 s^4 - 2s^2 r(3r + 20R) + 5r^2(r + 4R)^2 (12a^4) \\
d_{84} &= 128 s^3 r^4 (3a^7) \text{ et } \delta_{84} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{85} &= 4 [s^2 + (r + 4R)^2] r^2 (3a^4) \\
d_{86} &= 5 s^2 + r(r + 4R) (12a^2) \\
d_{87} &= -2 s [s^4 + 2s^2 r(r - 10R) + r^2(r + 4R)(r + 8R)] (3a^5) \\
d_{88} &= -4 s [s^2 + 3r(r - 5R)] (0) \\
d_{89} &= 2 s [s^2 - 3r(r - \frac{R}{2})] (\frac{27}{4} a^3) \\
d_{90} &= 128 s^3 [r(r + 2R) - R^2] r^2 (3a^7) \text{ et } d'_{90} = 64 s^2 [r(r + 2R) - R^2] r^2 (a^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{91} &= 256 s^4 [s^2 (r - R) + r^2 (r + 3R) + 2 (r + R) R^2] r^3 (15 a^{10}) \text{ et} \\
d'_{91} &= 128 s^3 [s^2 (r - R) + r^2 (r + 3R) + 2 (r + R) R^2] r^3 (5 a^9) \\
d_{92} &= 16 s^2 [s^2 + r^2 - 4 R^2] r^2 (3 a^6) \\
d_{93} &= 4096 s^6 \\
&\{s^4 + 2 s^2 [r (r - 4R) - 4 R^2] + r [r^2 (r + 8R) + 8 (3r + 4R) R^2] + 13 R^4\} r^6 \\
&(12 a^{16}) \text{ et } \delta_{93} = 256 s^4 \\
&\{s^4 + 2 s^2 [r (r - 4R) - 4 R^2] + r [r^2 (r + 8R) + 8 (3r + 4R) R^2] + 13 R^4\} r^4 (4 a^{12}) \\
d_{94} &= 256 s^4 \\
&\{s^4 + 2 s^2 [r (r - 4R) - 6 R^2] + r [r^2 (r + 8R) + 4 (7r + 12R) R^2] + 27 R^4\} r^4 (0) \\
d_{95} &= 16 s^2 \{s^4 + 2 s^2 [r (9r - 4R) - 2 R^2] + r (r + 2R)^2 (r + 4R)\} r^2 (12 a^8) \\
d_{96} &= -4096 s^6 \{s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) \\
&+ [r (r + 4R) + 2 R^2] [r (r + 4R) - 2 R^2]\} r^6 (12 a^{16}) \text{ et} \\
\delta_{96} &= -256 s^4 \{s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) + [r (r + 4R) + 2 R^2] [r (r + 4R) - 2 R^2]\} r^4 \\
&(4 a^{12}) \\
d_{97} &= -512 s^4 \\
&\{s^4 - s^2 [2r (3r + 4R) + 7 R^2] + (r + 2R)^2 [r (r + 4R) + 3 R^2]\} r^4 (12 a^{12}) \\
d_{98} &= -16 s^2 [s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) + r^2 (r + 4R)^2] r^2 (0) \text{ et} \\
\delta_{98} &= -[s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) + r^2 (r + 4R)^2] = -d_{99} (0) \\
d_{99} &= s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) + r^2 (r + 4R)^2 (0) \\
d_{100} &= -4 s r (2r - R) = d_{11} (0) \\
d_{101} &= -4 [3 s^2 - (r + 4R)^2] r^2 (0)
\end{aligned}$$

Remarques :

$$\begin{aligned}
\delta_{70} + \delta_{96} - 3 \delta_{93} &= -7 d_{51}^2 = -1792 s^4 r^4 R^4 (-7 a^{12}) \\
d_{70} + d_{96} - 3 d_{93} &= 7 d_{51} d_{52} = -28672 s^6 r^6 R^4 (-21 a^{16}) \\
q_1 q_2 q_3 &= 32 s^2 [s^2 - (r + 2R)^2] r^2 = \delta_{26} (a^6)
\end{aligned}$$

Autres valeurs

$$\begin{aligned}
d_{104} &= 64 s^3 r^3 (2r - R) (0) \text{ et } \delta_{104} = 4 s r (2r - R) = -d_{11} (0) \\
d_{110} &= 16 s^2 \{2 [s^2 - r (r + 4R)] - 9 R^2\} r^2 = d_{23} (0) \\
d_{111} &= 4 \{-s^6 - 3 s^4 r (3r - 4R) + 3 s^2 r^2 [r (3r + 8R) + 20 R^2] + r^3 (r + 4R)^3\} (0) \\
d_{115} &= s^4 - 2 s^2 r (7r + 4R) + r^2 (r + 4R)^2 = d_{99} (0) \\
d_{140} &= -16 s^2 r^2 = -d_3 (-3 a^4) \text{ et } d'_{140} = -8 s r^2 = -d'_3 (-a^3) \\
d_{141} &= 2 [s^2 - r (r + 4R)] = d_6 (3 a^2) \\
d_{142} &= 4 r (r + 4R) = d_7 (3 a^2) \\
d_{144} &= -4 r (r + 4R) = -d_7 (-3 a^2) \\
d_{145} &= 2 s = d_1 (3 a) \\
d_{165} &= 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{175} &= 2 s - (r + 4R) \left(\frac{3(2-\sqrt{3})}{2} a\right) \\
d_{176} &= 2 s + (r + 4R) \left(\frac{3(2+\sqrt{3})}{2} a\right) \\
d_{181} &= 8 s^2 (s^2 - 3 r^2) r R (6 a^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{182} &= -32 s^2 [s^2 - r(r + 4R)] r^2 (-9 a^6) \text{ et} \\
\delta_{182} &= -2 [s^2 - r(r + 4R)] = -d_6 (-3 a^2) \\
d_{183} &= 2 [s^4 + 2 s^2 r(5r - 4R) + r^2(r + 4R)^2] (9 a^4) \\
d_{186} &= 256 s^4 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 9 R^2\} r^4 = d_{74} (0) \text{ et} \\
\delta_{186} &= 16 s^2 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 9 R^2\} r^2 = d_{23} (0) \\
d_{187} &= s^4 - 2 s^2 r(7r + 4R) + r^2(r + 4R)^2 = d_{99} (0) \\
d_{191} &= 8 s^2 r(2r + 3R) = d_{21} (12 a^4) \text{ et } d'_{191} = 4 s r(2r + 3R) = d'_{21} (4 a^3) \\
d_{230} &= s^4 - 2 s^2 r(7r + 4R) + r^2(r + 4R)^2 = d_{99} (0) \\
d_{256} &= 2 s [s^4 + 2 s^2 r(r - 2R) + r^3(r + 4R)] (12 a^5) \\
d_{284} &= 8 s [s^2(3r + 2R) - r(r + 2R)(r + 4R)] r (12 a^5) \\
d_{291} &= -2 s [s^4 + 2 s^2 r(r - 8R) + r^2(r + 4R)^2] (0) \text{ et} \\
d'_{291} &= -[s^4 + 2 s^2 r(r - 8R) + r^2(r + 4R)^2] (0) \\
d_{329} &= -32 s^3 r^2 (-9 a^5) \text{ et } d'_{329} = -16 s^2 r^2 = -d_3 (-3 a^4) \\
d_{354} &= 4 s r R = d'_{65} (a^3) \\
d_{376} &= -16 s^2 r^2 = -d_3 (-3 a^4) \text{ et } d'_{376} = -8 s r^2 = -d'_3 (-a^3) \\
d_{378} &= 512 s^4 [s^2 - r(r + 4R) - 3 R^2] r^4 (9 a^{10}) \text{ et} \\
\delta_{378} &= 32 s^2 [s^2 - r(r + 4R) - 3 R^2] r^2 = d_{22} (3 a^6) \\
d_{381} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{381} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{382} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{382} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{390} &= -8 s r(r + 4R) (-9 a^3) \text{ et } d'_{390} = -4 r(r + 4R) = -d_7 (-3 a^2) \\
d_{468} &= 16 s^2 \{2 [s^2 - r(r + 4R)] - 9 R^2\} r^2 = d_{23} (0) \\
d_{481} &= 2 [s - (r + 4R)] (3(1 - \sqrt{3}) a) \\
d_{482} &= 2 [s + (r + 4R)] (3(1 + \sqrt{3}) a) \\
d_{485} &= 4 s [s^2 + 4 s r - r(r + 4R)] r \left(\frac{3(2+\sqrt{3})a^4}{2} \right) \\
d_{486} &= -4 s [s^2 - 4 s r - r(r + 4R)] r \left(\frac{3(2-\sqrt{3})a^4}{2} \right) \\
d_{521} &= 0 (0) \\
d_{546} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{546} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{547} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{547} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{548} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{548} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{549} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{549} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{550} &= 16 s^2 r^2 = d_3 (3 a^4) \text{ et } d'_{550} = 8 s r^2 = d'_3 (a^3) \\
d_{551} &= 2 s = d_1 (3 a) \\
d_{560} &= 2 s [s^4 - 10 s^2 r(r + R) + 5 r^2(r + 2R)(r + 4R)] (3 a^5) \\
d_{657} &= 4 r(r + 4R) D (0) \\
d_{1001} &= -8 s r(r + 4R) = d_{390} (-9 a^3) \text{ et} \\
d'_{1001} &= -4 r(r + 4R) = -d_7 (-3 a^2) \\
d_{1113} &= 16 s^2 \sqrt{-2 s^2 + 2 r(r + 4R) + 9 R^2} R (0) \\
d_{1114} &= 16 s^2 \sqrt{-2 s^2 + 2 r(r + 4R) + 9 R^2} R = d_{1113} (0)
\end{aligned}$$

Références

- [1] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF. Paris. 1983.
- [2] M. Collet et G. Griso. *Le cercle d'Euler*. Collection "Maths en plus". Vuibert. Paris. 1987.
- [3] S. Dubuc. *Géométrie plane*. Collection Sup. Le mathématicien. PUF. Paris. 1971.
- [4] A. Gérardin. *Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à 120°* . Nouvelles annales des mathématiques. 4^{ème} série, tome 1, pp. 62-74. 1916.
Advanced Euclidean Geometry. Dover, 1960.
- [5] C. Kimberling. *Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle*. Mathematics Magazine. Vol. 67. no. 3. pp. 163-187. Juin 1994.
- [6] C. Kimberling. *ETC, Encyclopedia of Triangle Centers*. 1998-2019.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>.
- [7] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM) by the Mathematical Society of Japan*. 2nd edition. The MIT Press. Cambridge, Massachussets, Londres, Angleterre. 1960.
- [8] E. W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics*. CRC Press LLC. 1999.
- [9] Cercle d'Euler. *Wikipedia*.