



**HAL**  
open science

# Fonctions d'une variable complexe (avec des applications et de nombreux dessins)

Marc Lenoir

► **To cite this version:**

Marc Lenoir. Fonctions d'une variable complexe (avec des applications et de nombreux dessins). École d'ingénieur. ENSTA ParisTech, France. 2000. hal-04073590

**HAL Id: hal-04073590**

**<https://hal.science/hal-04073590>**

Submitted on 18 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Cours MA 104

Edition 2017-2018

# **Fonctions d'une variable complexe**

**avec des applications et de nombreux dessins**

**Marc Lenoir**

ENSTA UMA  
828 Boulevard des Maréchaux  
91762 Palaiseau CEDEX



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Séries entières</b>	<b>7</b>
1.1	Séries numériques . . . . .	7
1.1.1	Séries à termes positifs (dans $\mathbb{R}$ !)	8
1.1.2	Séries absolument convergentes . . . . .	10
1.1.3	Séries semi-convergentes . . . . .	12
1.2	Séries entières . . . . .	13
1.2.1	Opérations algébriques sur les séries entières . . . . .	16
1.2.2	Dérivation . . . . .	16
1.2.3	Primitive . . . . .	18
1.2.4	Développements en série entière . . . . .	19
1.2.5	Substitution . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Fonctions analytiques</b>	<b>23</b>
2.1	Principe des zéros isolés . . . . .	24
2.2	Exemples de fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$ . . . . .	26
2.2.1	La fonction exponentielle . . . . .	27
2.2.2	Trigonométrie . . . . .	27
2.2.3	Une définition de l'argument . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>31</b>
3.1	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	31
3.2	Convergence uniforme . . . . .	33
3.3	Convergence ponctuelle . . . . .	35
3.3.1	Le théorème de Fejér . . . . .	36
3.3.2	Le théorème de Dirichlet . . . . .	38
3.4	Deux exemples . . . . .	40
3.5	Les distributions périodiques . . . . .	41
3.5.1	La formule de Poisson . . . . .	43
3.5.2	Série de Fourier . . . . .	44
3.5.3	Le cas d'une fonction continue . . . . .	45
<b>4</b>	<b>L'intégrale de Cauchy</b>	<b>47</b>
4.1	La relation de Cauchy-Riemann . . . . .	47
4.2	Intégrales de chemin . . . . .	49
4.2.1	Changement de paramétrage . . . . .	50
4.2.2	Changement de variable . . . . .	51
4.2.3	Formes différentielles . . . . .	51
4.2.4	Composition des chemins . . . . .	52

4.3	La théorie locale . . . . .	53
4.3.1	La formule de Cauchy locale . . . . .	53
4.3.2	Développement en série . . . . .	56
4.3.3	Développement en série de Laurent . . . . .	58
<b>5</b>	<b>La théorie de Cauchy globale</b>	<b>61</b>
5.1	L'indice d'un point par rapport à un lacet . . . . .	61
5.1.1	Calcul pratique de l'indice . . . . .	62
5.2	La formule de Cauchy globale . . . . .	63
5.3	Le principe de symétrie . . . . .	67
5.4	Le bord orienté d'un compact . . . . .	70
5.4.1	Développement en série de Laurent . . . . .	73
5.5	Le théorème de Cauchy homotopique . . . . .	73
5.6	Primitives . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Le principe du maximum</b>	<b>81</b>
6.1	En domaine borné . . . . .	82
6.2	En domaine non borné . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Singularités des fonctions analytiques</b>	<b>89</b>
7.1	Singularités isolées . . . . .	89
7.1.1	Fonctions méromorphes . . . . .	91
7.2	Le théorème des résidus . . . . .	92
7.2.1	Calcul pratique des résidus . . . . .	93
7.2.2	Le résidu à l'infini . . . . .	93
<b>8</b>	<b>Le principe de l'argument</b>	<b>99</b>
8.1	Localisation des zéros . . . . .	100
8.2	Inversion des fonctions analytiques . . . . .	101
8.2.1	Le problème local . . . . .	101
8.2.2	Le problème global . . . . .	103
8.2.3	Coupures et déterminations . . . . .	104
<b>9</b>	<b>La transformation de Laplace</b>	<b>111</b>
9.1	Transformée de Laplace des fonctions . . . . .	111
9.1.1	Analyticité . . . . .	112
9.1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	113
9.1.3	Quelques transformées de Laplace usuelles . . . . .	115
9.1.4	Transformée de Laplace d'un produit de convolution . . . . .	115
9.1.5	Transformées de Laplace des fonctions à croissance lente . . . . .	116
9.1.6	Transformées de Laplace des fonctions analytiques de type exponentiel dans un secteur . . . . .	117
9.1.7	Transformées de Laplace des fonctions entières de type exponentiel . . . . .	119
9.2	Transformée de Laplace des distributions . . . . .	121
9.2.1	Analyticité . . . . .	124
9.2.2	Propriétés élémentaires . . . . .	125
9.2.3	Quelques transformées de Laplace de distributions . . . . .	126
9.2.4	Application au calcul de transformées de Fourier . . . . .	127
9.2.5	Transformée de Laplace d'un produit de convolution . . . . .	128

9.3	Inversion de la transformation de Laplace . . . . .	129
9.3.1	Calcul pratique . . . . .	131
9.3.2	Développements asymptotiques . . . . .	133
9.3.3	Equations de convolution . . . . .	134
9.3.4	Equations différentielles . . . . .	135
9.3.5	Equations aux dérivées partielles . . . . .	136
<b>10</b>	<b>Espaces de fonctions holomorphes</b>	<b>137</b>
10.1	Topologie . . . . .	137
10.1.1	Propagation de la convergence . . . . .	139
10.1.2	Séries de fonctions méromorphes . . . . .	140
10.1.3	Produits infinis de fonctions holomorphes . . . . .	141
10.2	Approximation des fonctions holomorphes . . . . .	147
<b>11</b>	<b>La sphère de Riemann</b>	<b>151</b>
11.1	Compactification . . . . .	151
11.2	La droite projective complexe . . . . .	151
11.3	Projection stéréographique . . . . .	152
11.4	Fonctions holomorphes . . . . .	153
11.5	Le théorème des résidus . . . . .	153
<b>12</b>	<b>Transformations conformes</b>	<b>159</b>
12.1	Applications holomorphes . . . . .	159
12.2	Groupes d'automorphismes . . . . .	160
12.2.1	Automorphismes de $\mathbb{C}$ . . . . .	160
12.2.2	Automorphismes de $P^1(\mathbb{C})$ . . . . .	161
12.2.3	Automorphismes du demi-plan supérieur . . . . .	162
12.2.4	Automorphismes du disque unité $D$ . . . . .	164
12.3	Représentation d'un ouvert simplement connexe . . . . .	164
12.3.1	Prolongement au bord . . . . .	168
12.4	Retour sur la simple connexité . . . . .	168
<b>13</b>	<b>Les fonctions harmoniques</b>	<b>171</b>
13.1	Fonctions harmoniques dans un disque . . . . .	172
13.2	Problème de Dirichlet . . . . .	173
<b>I</b>	<b>Calculs d'intégrales</b>	<b>177</b>
I.1	Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ , . . . . .	177
I.2	Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ . . . . .	178
I.3	Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$ . . . . .	180
I.4	La formule de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . . . . .	184
I.5	Fonctions présentant des coupures . . . . .	185
<b>II</b>	<b>La méthode du col</b>	<b>187</b>
II.1	Variable réelle : la méthode de Laplace . . . . .	187
II.1.1	Un premier exemple . . . . .	187
II.1.2	Plus généralement . . . . .	188
II.1.3	Cas particulier . . . . .	190
II.2	Variable complexe : la méthode du col . . . . .	190

II.2.1	Application de la méthode de Laplace . . . . .	190
II.2.2	Choix du chemin . . . . .	194
<b>III</b>	<b>La portance d'un profil d'aile</b>	<b>197</b>
III.1	L'écoulement autour d'un profil . . . . .	197
III.1.1	Le potentiel complexe . . . . .	197
III.1.2	La dérivée du potentiel complexe . . . . .	198
III.1.3	La circulation . . . . .	198
III.1.4	Les formules de Blasius . . . . .	199
III.1.5	Le paradoxe de d'Alembert . . . . .	200
III.2	L'écoulement autour d'un cercle . . . . .	201
III.2.1	Conditions aux limites . . . . .	201
III.2.2	Points d'arrêt . . . . .	201
III.2.3	Plus généralement . . . . .	202
III.3	Transformations conformes . . . . .	204
III.3.1	La transformation de Joukowski . . . . .	204
III.3.2	La transformation de Karmann-Trefftz . . . . .	207
III.4	Écoulement autour du profil . . . . .	208
III.4.1	La condition de Kutta-Joukowski . . . . .	208
III.4.2	Les efforts sur le profil . . . . .	209
<b>A</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>211</b>
<b>B</b>	<b>Substitution des séries entières</b>	<b>213</b>
<b>C</b>	<b>Calcul pratique de l'indice</b>	<b>217</b>
<b>D</b>	<b>Connexité</b>	<b>221</b>
<b>E</b>	<b>La transformation de Fourier des distributions</b>	<b>225</b>
E.1	Transformation de Fourier des fonctions à décroissance rapide . . . . .	225
E.1.1	L'espace $\mathcal{S}$ . . . . .	225
E.1.2	Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$ . . . . .	226
E.2	Transformation de Fourier des distributions tempérées . . . . .	226
E.2.1	L'espace $\mathcal{S}'$ . . . . .	226
E.2.2	La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$ . . . . .	227
E.2.3	Propriétés élémentaires . . . . .	228
E.2.4	Les formules de réciprocity et de Plancherel . . . . .	229
E.2.5	Transformation de Fourier et convolution . . . . .	230
<b>F</b>	<b>Le rayon de Bohr</b>	<b>233</b>
<b>G</b>	<b>Les homographies</b>	<b>239</b>
G.1	Les transformations de Möbius . . . . .	239
G.1.1	L'inversion symétrie . . . . .	242
G.1.2	La transformation de Cayley . . . . .	244
<b>H</b>	<b>La transformation de Schwarz-Christoffel</b>	<b>245</b>
<b>I</b>	<b>Quelques lectures profitables</b>	<b>249</b>

# Chapitre 1

## Séries entières

Dans ce chapitre et dans le suivant, on traitera, sauf mention contraire, indifféremment de séries à valeurs réelles ou complexes. Le début de ce chapitre est consacré à rappeler les résultats élémentaires relatifs à la convergence des séries numériques. Le second paragraphe traite des séries entières ou du moins des résultats élémentaires à cet égard, en fonction de l'utilisation ultérieure que nous en aurons pour l'étude des fonctions holomorphes.

### 1.1 Séries numériques

Commençons par quelques rappels tout à fait élémentaires.

**DÉFINITION 1.1** On dit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles  $S_N = \sum_{n=0}^N s_n$  converge. Plus précisément, si  $|S_N - S| \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ , on écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = S.$$

**THÉORÈME 1.2 (Critère de Cauchy)** Pour que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  soit convergente, il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon, \exists N \text{ tel que } \forall q > p > N, \left| \sum_{n=p}^q s_n \right| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

**DÉMONSTRATION.** En effet, comme  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont complets, la suite des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, soit si (1.1) est vérifié.

Q.E.D.

Il en résulte en particulier que le terme général d'une série convergente tend vers 0, mais bien entendu ce n'est pas une condition suffisante de convergence.

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  est appelée *série géométrique*, elle converge pour  $|z| < 1$  et on a alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n = (1 - z)^{-1}; \quad (1.2)$$

en effet  $(1 - z)S_N = (1 - z) \sum_{n \leq N} z^n = 1 - z^{N+1}$ .

Selon la nature des termes d'une série, il est plus ou moins difficile d'en étudier la convergence ; bien entendu toutes les propriétés qui peuvent être associées aux termes d'une série s'entendent comme étant valables 'à partir d'un certain rang'.

### 1.1.1 Séries à termes positifs (dans $\mathbb{R}$ !)

Le cas des séries réelles à termes positifs est le plus simple, son importance tient en particulier au fait que s'y ramène l'étude de certaines séries (dites semi-convergentes) à coefficients de signes quelconques ou même complexes.

**PROPOSITION 1.3** *Pour qu'une série à termes positifs converge, il suffit (et il faut !) que la suite de ses sommes partielles soit majorée.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $S_n$  est majorée alors d'après le lemme 1.4 ci-dessous, elle admet une borne supérieure, soit  $s = \sup_n S_n$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ , par définition de la borne supérieure  $\exists p$  tel que  $S_p \geq s - \varepsilon$ , et comme la suite est croissante,  $\forall q \geq p, s \geq S_q \geq s - \varepsilon$ , ce qui prouve que  $s$  est la limite de  $S_n$ .

*Q.E.D.*

Le résultat qui précède repose sur le lemme fondamental suivant, qui renvoie en fait à la construction même de  $\mathbb{R}$  en tant que complété de  $\mathbb{Q}$ .

**LEMME 1.4 (Propriété de la borne supérieure)** *Les ensembles majorés de  $\mathbb{R}$  admettent une borne supérieure.*

**DÉMONSTRATION.**

▷ Notons déjà que si  $E \subset \mathbb{R}$ , les majorants de  $E$  sont les mêmes que ceux de  $\bar{E}$ . Supposons en effet que  $x$  soit un majorant de  $E$  et que  $\alpha \in \bar{E}$  vérifie  $x < \alpha$ , alors  $0 < \alpha - x \leq \alpha - y, \forall y \in E$ , ce qui contredit le fait que  $\alpha$  appartienne à l'adhérence de  $E$ . Comme la borne supérieure, si elle existe, est le plus petit des majorants, il en résulte que  $E$  possède une borne supérieure si et seulement si  $\bar{E}$  en possède une et par conséquent qu'il suffit de démontrer le lemme pour des ensembles fermés.

▷ Supposons donc  $E$  fermé, notons  $b$  un majorant de  $E$ , choisissons arbitrairement  $a \in E$  et pour  $a \leq x \in E$ , posons  $E_x = [x, b] \cap E$ . Les  $E_x$  sont fermés non vides, et comme ils sont emboîtés, une intersection finie d'entre eux n'est pas vide non plus. Comme l'ensemble  $[a, b] \cap E$  est fermé et borné, il est compact, et par conséquent  $\bigcap_{a \leq x \in E} E_x$  n'est pas vide. Soit  $s$  appartenant à cette intersection, c'est un majorant de  $E$  appartenant à  $E$  et donc une (la) borne supérieure de  $E$ .

*Q.E.D.*

**COROLLAIRE 1.5 (Principe de comparaison)** *Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$  sont deux séries à termes positifs et si  $\exists N$  tel que  $t_n \geq s_n, \forall n \geq N$ , alors*

- (i) *Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$  est convergente, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  l'est également.*
- (ii) *Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  est divergente, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$  l'est également.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$  converge et soit  $T$  sa somme, c'est un majorant de la suite des sommes partielles  $S_n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$ , qui converge donc en vertu de la proposition 1.3. L'item (ii) s'en déduit immédiatement.

*Q.E.D.*

Le principe de comparaison permet de *remplacer les termes d'une série par leur partie principale* pour en étudier la convergence ; supposons en effet que  $t_n/g(n) \rightarrow c \neq 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors pour  $n$  suffisamment grand, on aura  $cg(n)/2 < t_n < 2cg(n)$ . En pratique  $g$  appartient à un ensemble  $\mathcal{J}$  de fonctions de jauge, positives au voisinage de  $+\infty$  et tendant vers 0 ou  $+\infty$ , l'ensemble  $\mathcal{J}$  étant stable par multiplication et élévation à une puissance réelle. On prendra couramment pour  $\mathcal{J}$  l'ensemble des fonctions de la forme  $g(x) = x^\alpha (\text{Log } x)^\beta$ .

Un critère essentiel relatif à la convergence des séries à termes positifs décroissants repose sur la comparaison avec une intégrale :

**PROPOSITION 1.6 (Comparaison à une intégrale)** Soit  $g$  une fonction positive décroissante au delà de  $a$  ; pour que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} g(n)$  converge, il faut et il suffit que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $n_0$  un entier supérieur à  $a$ , pour  $n_0 \leq n \leq x < n+1$ , on pose  $f(x) = g(n+1)$  et on aura  $g(x+1) \leq f(x) \leq g(x)$ . Par conséquent

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} g(k) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} g(n+1) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_n^{n+1} g(x) dx = \int_{n_0}^{+\infty} g(x) dx$$

et

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} g(t) dt = \int_{n_0}^{+\infty} g(x+1) dx \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=n_0}^{+\infty} g(n+1),$$

d'où le résultat.

*Q.E.D.*

**COROLLAIRE 1.7** La série de Riemann  $s_n = n^{-\gamma}$  converge si et seulement si  $1 < \gamma$ .

La proposition suivante est surtout utile pour l'étude des séries entières, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir de façon plus détaillée :

**PROPOSITION 1.8 (Comparaison à une série géométrique)** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  une série à termes positifs, deux conditions suffisantes de convergence sont les suivantes :

(i) Règle de d'Alembert

$$\exists N \text{ et } a \in ]0, 1[ \text{ tels que } \forall n \geq N, \frac{s_{n+1}}{s_n} \leq a. \quad (1.3)$$

(ii) Règle de Cauchy

$$\exists N \text{ et } a \in ]0, 1[ \text{ tels que } \forall n \geq N, (s_n)^{1/n} \leq a. \quad (1.4)$$

**DÉMONSTRATION.**

▷ Dans le cas de la règle de d'Alembert, pour  $n \geq N$ , par récurrence on aura  $s_n \leq a^{n-N} s_N$  ; or la série géométrique  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$  converge, et par conséquent la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$ , d'après le principe de comparaison 1.5.

▷ De même pour la règle de Cauchy, si  $n \geq N$ , on a  $s_n \leq a^n$ , d'où le résultat.

*Q.E.D.*

**COROLLAIRE 1.9** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  une série à termes positifs

(i) si  $s_{n+1}/s_n$  converge, soit vers  $a < 1$ , alors la série converge.

(ii) si  $s_{n+1}/s_n$  converge, soit vers  $a > 1$ , ou si  $s_{n+1}/s_n \rightarrow 1$  par valeurs supérieures alors la série diverge.

(iii) si  $(s_n)^{1/n}$  converge, soit vers  $a < 1$ , alors la série converge.

(iv) si  $(s_n)^{1/n}$  converge, soit vers  $a > 1$  ou si  $(s_n)^{1/n} \rightarrow 1$  par valeurs supérieures, alors la série diverge.

Notons que si la limite  $a$  est égale à 1, il n'est pas possible avec cette seule hypothèse de conclure à la convergence (ou à la divergence).

**DÉMONSTRATION.** Il nous suffira de noter que si  $s_{n+1}/s_n$  ou  $(s_n)^{1/n}$  reste supérieur à 1 à partir d'un certain rang, alors  $s_n$  ne tend pas vers 0, et par conséquent, d'après le théorème 1.2, la série ne converge pas.

*Q.E.D.*

On peut même être un peu plus précis :

**LEMME 1.10 (Règle de Raabe-Duhamel)** Une série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  à termes positifs telle que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(n^{-\beta}), \quad \alpha > 0, \beta > 1,$$

converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

DÉMONSTRATION. On pose  $t_n = n^\alpha s_n$ , on aura

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(n^{-2})\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O(n^{-\beta})\right) = 1 + O(n^{-\gamma}),$$

où  $\gamma = \min(2, \beta)$ . En vertu du corollaire 1.7 il en résulte que  $\text{Log}(t_{n+1}/t_n) = O(n^{-\gamma})$  est le terme général d'une série convergente si et seulement si  $\gamma < 1$ , c'est-à-dire si  $\beta < 1$ . et par conséquent que la suite  $\text{Log } t_n$  converge, soit vers  $\tau$ . On aura donc  $t_n \rightarrow e^\tau$ , d'où à partir d'un certain rang  $s_n \leq 2n^{-\alpha} e^\tau$ , et toujours d'après 1.7, la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$ . La réciproque est immédiate puisque si  $\alpha > 1$ ,  $s_n$  ne tend pas vers 0.

Q.E.D.

### 1.1.2 Séries absolument convergentes

**DÉFINITION 1.11** On dit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  est absolument convergente si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n|$  converge.

C'est la proposition suivante qui fait tout l'intérêt des séries absolument convergentes.

**PROPOSITION 1.12** Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  est absolument convergente, alors elle est convergente.



DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que  $\left| \sum_{n=p}^q s_n \right| \leq \sum_{n=p}^q |s_n|$  et d'appliquer le théorème 1.2

Q.E.D.

**PROPOSITION 1.13** On ne modifie pas la somme d'une série absolument convergente en effectuant des permutations ou des regroupements arbitraires sur ses termes.

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  soit absolument convergente, de somme  $S$ .

▷ Une permutation est une bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  ; on posera  $s'_n = s_{\sigma(n)}$  et  $S'_N = \sum_{n=0}^N s'_n$ .

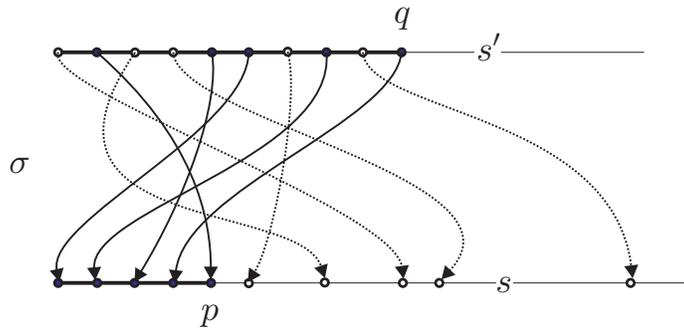


FIGURE 1.1 – Permutations

Il est clair tout d'abord, en vertu de la proposition 1.3, que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s'_n$  est absolument convergente, puisque  $\forall k$   $\sum_{n=0}^k |s'_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n|$ .

▷ Par ailleurs pour  $\varepsilon$  donné,  $\exists p$  tel que  $\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - S_p \right| \leq \sum_{k > p} |s_k| \leq \varepsilon/3$ .

Notons alors  $q = \max_{\ell \leq p} \{\sigma^{-1}(\ell)\}$  ; on aura  $\sigma^{-1}[0, p] \subset [0, q]$  d'où  $\sigma([0, q]^c) \subset [0, p]^c$ . Il en résulte que

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s'_n - S'_q \right| = \left| \sum_{n > q} s'_n \right| \leq \sum_{n > q} |s'_n| = \sum_{n > q} |s_{\sigma(n)}| \leq \sum_{k > p} |s_k| \leq \varepsilon/3,$$

▷ Mais de plus  $\left| S'_q - S_p \right| = \left| \sum_{n=0}^q s'_n - \sum_{\ell=0}^p s'_{\sigma^{-1}(\ell)} \right| \leq \left| \sum_{k > p} s_k \right| \leq \sum_{k > p} |s_k| \leq \varepsilon/3$ , soit finalement

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} s'_n \right| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - S_p \right| + \left| S'_q - S_p \right| + \left| S'_q - \sum_{n \in \mathbb{N}} s'_n \right| = \varepsilon,$$

et ceci  $\forall \varepsilon$ , d'où la conclusion.

▷ Un *regroupement* est défini par une application  $\varphi$  strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans lui-même. On posera

$$s''_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} s_k \text{ et } s''_{k+1} = \sum_{\ell=\varphi(k)+1}^{\varphi(k+1)} s_\ell,$$

Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  est absolument convergente, alors  $\sum_{k \in \mathbb{N}} s''_k$  l'est également car

$$\sum_{k \leq n} |s''_k| = \sum_{k \leq n} \left| \sum_{\ell=\varphi(k)+1}^{\varphi(k+1)} s_\ell \right| \leq \sum_{k \leq n} \sum_{\ell=\varphi(k)+1}^{\varphi(k+1)} |s_\ell| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |s_m|.$$

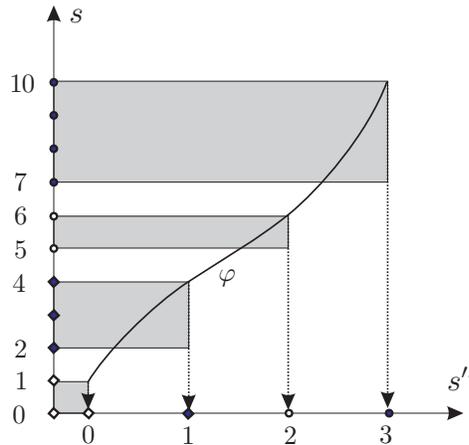


FIGURE 1.2 – Regroupements

▷ On aura  $S_{\varphi(k)} = S''_k$  et par conséquent si les deux séries précédentes convergent

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} s''_n \right| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - S_{\varphi(k)} \right| + \left| S''_k - \sum_{n \in \mathbb{N}} s''_n \right| = \left| \sum_{n > \varphi(k)} s_n \right| + \left| \sum_{n > k} s''_n \right|.$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , comme  $\varphi$  est croissante,  $\exists k$  tel que  $\left| \sum_{n > \varphi(k)} s_n \right| \leq \varepsilon/2$  et  $\left| \sum_{n > k} s''_n \right| \leq \varepsilon/2$ , d'où

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} s''_n \right| \leq \varepsilon,$$

soit en fait  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} s''_n$ .

Q.E.D.

PROPOSITION 1.14 Si  $\sum_{i \in \mathbb{N}} s_i$  et  $\sum_{j \in \mathbb{N}} t_j$  sont deux séries absolument convergentes, alors

$$\left( \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} t_j \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n \text{ où } w_n = \sum_{i+j=n} s_i t_j,$$

la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$  étant absolument convergente.

DÉMONSTRATION. Il est clair tout d'abord que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$  converge absolument puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |w_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i+j=n} s_i t_j \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=n} |s_i| |t_j| = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |s_i| \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |t_j| \right).$$

De plus

$$\left| \sum_{n \leq N} w_n - \left( \sum_{i \leq N} s_i \right) \left( \sum_{j \leq N} t_j \right) \right| = \left| \sum_{n \leq N} \sum_{i+j=n} s_i t_j - \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq N} s_i t_j \right| \leq \sum_{n=N+1}^{2N} |w_n|,$$

qui tend vers 0 en vertu du théorème 1.2.

Q.E.D.

### 1.1.3 Séries semi-convergentes

Les séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes sont couramment qualifiées de *semi-convergentes*. Leur étude est beaucoup plus difficile et en particulier, leur somme dépend de l'ordre et des regroupements effectués entre les termes. Un exemple élémentaire est la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$  qui diverge, alors que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} ((-1)^m + (-1)^{m+1}) = 0.$$

On montre même qu'étant donnée une série semi-convergente, tout nombre peut être obtenu comme limite d'une série construite à partir des termes qui la composent !

La règle suivante, bien que très simple, se révèle souvent utile pour l'étude des séries semi-convergentes :

LEMME 1.15 (règle d'Abel) Si les sommes partielles  $S_n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$  sont majorées en module, soit par  $M$ , et si la suite  $\varepsilon_n$  tend vers 0 en décroissant, alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n s_n$  converge.

DÉMONSTRATION. Avec  $T_n = \sum_{p \leq n} \varepsilon_p s_p$  on aura

$$\begin{aligned} T_n &= \varepsilon_0 s_0 + \sum_{1 \leq p \leq n} \varepsilon_p (S_p - S_{p-1}) = \varepsilon_0 s_0 + \sum_{1 \leq p \leq n} \varepsilon_p S_p - \sum_{0 \leq q \leq n-1} \varepsilon_{q+1} S_q \\ &= \varepsilon_n S_n + \sum_{0 \leq p \leq n-1} \varepsilon_p S_p - \sum_{0 \leq q \leq n-1} \varepsilon_{q+1} S_q = \varepsilon_n S_n + \sum_{0 \leq p \leq n-1} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) S_p. \end{aligned}$$

La suite  $S_n$  étant bornée, on a  $\varepsilon_n S_n \rightarrow 0$ , et comme de plus

$$\sum_{0 \leq p \leq n-1} |\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}| |S_p| \leq M \sum_{0 \leq p \leq n-1} |\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}| = M \sum_{0 \leq p \leq n-1} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) = M(\varepsilon_0 - \varepsilon_n),$$

la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) S_p$  est absolument convergente, et donc convergente. Il en résulte que la suite  $T_n$  converge, d'où le résultat.

Q.E.D.

## 1.2 Séries entières

Après ces quelques rappels, nous entrons maintenant dans le vif du sujet, les séries entières étant à la base de la définition des fonctions analytiques.

**DÉFINITION 1.16** On appelle série entière une série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z), \text{ où } f_n(z) = a_n z^n.$$

On note  $s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

En appliquant le principe de comparaison 1.5 on obtient le lemme suivant

**LEMME 1.17** Soient  $r_0$  et  $r_1 \in \mathbb{R}^+$  ;

- (i) si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r_0^n$  converge, alors il en est de même de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$  pour  $r \in [0, r_0]$ ,
- (ii) si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r_1^n$  diverge, alors il en est de même de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$  pour  $r \in [r_1, \infty[$ .

Rappelons les différents modes usuels de convergence d'une série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$$

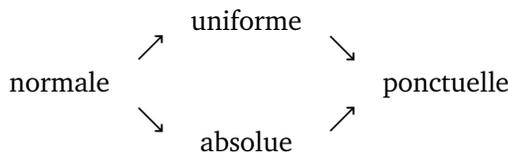
au sein de  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , ensemble des fonctions continues et bornées sur  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , muni de la norme de la convergence uniforme  $\|f\| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$ .

- (i) La convergence ponctuelle :  $\forall z \in \Omega$ ,  $\sum_{n \leq N} f_n(z)$  possède une limite quand  $N \rightarrow \infty$ .
- (ii) La convergence absolue :  $\forall z \in \Omega$ ,  $\sum_{n \leq N} |f_n(z)|$  possède une limite quand  $N \rightarrow \infty$ ;
- (iii) La convergence uniforme :  $\exists f$  définie sur  $\bar{\Omega}$ , telle que

$$\left\| \sum_{n \leq N} f_n - f \right\| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

- (iv) La convergence normale :  $\sum_{n \leq N} \|f_n\|$  possède une limite quand  $N \rightarrow \infty$ .

Notons également le diagramme suivant relatif à ces diverses formes de convergence



En effet, si la série des  $\|f_n\|$  converge, la suite de ses sommes partielles est de Cauchy, et par conséquent,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , tel que  $\forall m > n > N, \left\| \sum_{p=m}^n f_p \right\| \leq \sum_{p=m}^n \|f_p\| \leq \varepsilon$ . C'est dire que la suite des sommes partielles de la série des  $f_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , or cet espace est complet, d'où la convergence uniforme de la série des  $f_n$ .

**DÉFINITION 1.18** On appelle rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  le nombre réel positif  $\rho$  (éventuellement infini) défini par

$$\rho = \sup \left\{ r \in [0, \infty[ \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}. \tag{1.5}$$

Le résultat fondamental relatif aux séries entières est le suivant :

**THÉORÈME 1.19 (Lemme d'Abel)** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 0$  alors

- (i) Si  $\rho_1 \in [0, \rho[$ , la série est normalement convergente sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho_1\}$ .
- (ii) Si  $|z| < \rho$ , la série est absolument convergente au point  $z$ .
- (iii) Si  $|z| > \rho$ , la série est divergente au point  $z$ .

DÉMONSTRATION.

- ▷ Pour  $|z| \leq \rho_1$ , on a  $|a_n z^n| \leq |a_n| \rho_1^n$ , d'où la convergence normale de la série sur le disque de rayon  $\rho_1$ .
- ▷ La convergence absolue de la série pour  $|z| < \rho$  en résulte en choisissant  $\rho_1$  tel que  $|z| < \rho_1 < \rho$ .
- ▷ Choisissons  $|z_1| > \rho$ , alors  $\exists \rho_1$  tel que  $\rho < \rho_1 < |z_1|$ . Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_1^n$  converge, alors son terme général tend vers 0 en vertu du théorème 1.2, et en particulier  $\exists M > 0$  tel que  $|a_n| |z_1^n| = |a_n z_1^n| < M, \forall n$ . Il en résulte que

$$|a_n| \rho_1^n = |a_n| |z_1^n| \left| \frac{\rho_1}{z_1} \right|^n \leq M \left| \frac{\rho_1}{z_1} \right|^n,$$

terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, et par conséquent convergente. Du principe de comparaison 1.5, il résulte que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho_1^n$  converge, ce qui constitue une contradiction avec la définition même de  $\rho$ .

Q.E.D.

On ne peut trop insister sur la portée de ce résultat :

- (i) Si une série entière converge en un point  $z$ , alors elle converge dans tout disque de rayon inférieur à  $|z|$ .
- (ii) Hormis sur le bord du disque de convergence une série entière ne peut être convergente sans être absolument convergente.

Précisons également qu'il n'y a aucun résultat général relatif à la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  lorsque  $|z| = \rho$ .

Considérons, par exemple, la série  $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ , elle a pour rayon de convergence 1 et diverge pour  $z = 1$ . Cependant pour  $|z| = 1, z = e^{i\theta} \neq 1$ , on montre que la série converge par application de la règle d'Abel 1.15. En effet, pour  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq p \geq 1} e^{ip\theta} &= \sum_{n \geq p \geq 1} (e^{i\theta})^p = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2} e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2} e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \sum_{n \geq p \geq 1} e^{ip\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

et la convergence de la série avec  $\varepsilon_n = 1/n$ .

**DÉFINITION 1.20** On appelle disque de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  le disque ouvert

$$D = \{z \mid |z| < \rho\},$$

où  $\rho$  est le rayon de convergence de la série. Dans le cas où  $z$  est réel, ce disque est en fait un segment !

Comme la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est elle-même continue, il résulte du lemme d'Abel **1.19**, qu'une série entière est continue sur son disque de convergence. C'est là une constatation intéressante, mais qui sera bientôt supplantée par le théorème **1.27** qui assure que la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur son disque de convergence.

La définition **1.5** du rayon de convergence ne permet pas d'en faire aisément le calcul, nous allons en donner ci-dessous une expression plus concrète. Rappelons que, pour  $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \geq n} \alpha_p = \inf_n \sup_{p \geq n} \alpha_p, \quad (1.6)$$

où la limite existe, puisque la suite  $t_n = \sup_{p \geq n} \alpha_p$  est décroissante et minorée.

**PROPOSITION 1.21** Si  $\rho$  est le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ , on a

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.7)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $z$  est tel que  $\limsup |a_n|^{1/n} |z| < 1$ , alors  $\exists N$  et  $\ell < 1$  tels que  $\sup_{p \geq N} |a_p|^{1/p} |z| < \ell$ , d'où  $|a_p|^{1/p} |z| < \ell$ ,  $\forall p > N$ . D'après la règle de Cauchy (**1.4**), il en résulte que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n$  converge; c'est dire que  $\rho \geq 1/\limsup |a_n|^{1/n}$ .

▷ Réciproquement si  $\limsup |a_n|^{1/n} |z| > 1$ , alors  $\exists N$  et  $\ell > 1$  tels que  $\sup_{p \geq N} |a_p|^{1/p} |z| > \ell \forall n > N$ . Il en résulte que  $\sup_{p \geq n} |a_p| |z|^p > \ell^p$ , ce qui exclut la possibilité pour  $|a_n| |z|^n$  de tendre vers 0, et donc pour la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n$  de converger.

Q.E.D.

Une première propriété surprenante des séries entières est la suivante :

**PROPOSITION 1.22 (Principe des zéros isolés I)** Si  $s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  n'est pas identiquement nulle et si son rayon de convergence  $\rho$  n'est pas nul, il existe  $r_0 > 0$  tel que  $s(z) \neq 0$  pour  $0 < |z| < r_0$ . 

DÉMONSTRATION. Notons  $k$  le plus petit entier tel que  $a_k \neq 0$  et

$$g(z) = z^{-k} s(z) = \sum_{n \geq k} a_n z^{n-k} = \sum_{n \geq k} (a_n z^{-k}) z^n,$$

dont le rayon de convergence n'est autre que  $\rho$  en vertu de la formule (1.7). La fonction  $g$  est donc continue pour  $|z| < \rho$ ; elle ne s'annule pas en 0, et donc pas non plus dans un voisinage de 0.

Q.E.D.

On voit donc que lorsqu'une série entière possède un zéro à l'origine, ce zéro est isolé. Il en résulte en particulier qu'une série entière telle que 0 soit point d'accumulation de ses racines est identiquement nulle, ainsi que l'unicité du développement en série entière. C'est là un résultat tout-à-fait significatif qui met en lumière une propriété très particulière des séries entières. Considérons en effet la fonction  $x^k \sin(1/x)$ , bien que  $k - 2$  fois dérivable à l'origine, elle ne peut être développée en série entière au voisinage de l'origine puisque ses racines sont les  $x_n = 1/(n\pi)$ . 

### 1.2.1 Opérations algébriques sur les séries entières

**PROPOSITION 1.23 (Somme)** Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , alors

(i) le rayon de convergence  $\rho$  de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$  est supérieur ou égal à  $\min(\rho_1, \rho_2)$  et pour  $|z| < \min(\rho_1, \rho_2)$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n.$$

(ii) si  $\rho_1 \neq \rho_2$ , on a  $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair que si  $|z| < \min(\rho_1, \rho_2)$  les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  convergent et que par conséquent  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ , d'où il résulte que  $|z| \geq \min(\rho_1, \rho_2)$ .

▷ Supposons que  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ , alors pour  $\rho_1 < |z| < \rho$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$  convergent, d'où il résulte que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge, ce qui constitue une contradiction.

Q.E.D.

**PROPOSITION 1.24 (Produit)** Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et  $w_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ , alors le rayon de convergence  $\rho$  de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n z^n$  est supérieur ou égal à  $\min(\rho_1, \rho_2)$  et pour  $|z| < \min(\rho_1, \rho_2)$ , on a

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n z^n.$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la proposition 1.14.

Q.E.D.

### 1.2.2 Dérivation

**LEMME 1.25** Les séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  ont même rayon de convergence

DÉMONSTRATION. Notons  $\rho$  et  $\rho'$  les rayons de convergence respectifs de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ .

▷ Pour  $n \geq r$ , on a tout d'abord  $|a_n| r^n \leq n |a_n| r^{n-1}$ , ce qui prouve que  $\rho \geq \rho'$ .

▷ Réciproquement supposons  $\rho > 0$ , on pourra trouver  $r$  et  $\rho_1$  tels que  $0 < r < \rho_1 < \rho$ , et on aura

$$n |a_n| r^{n-1} = |a_n| \rho_1^n \frac{n}{\rho_1} \left( \frac{r}{\rho_1} \right)^{n-1}.$$

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho_1^n$  converge, son terme général est borné, et par conséquent  $\exists M$  tel que

$$n |a_n| r^{n-1} \leq \frac{M}{\rho_1} n \left( \frac{r}{\rho_1} \right)^{n-1}.$$

Mais il s'agit là du terme général d'une série convergente, puisqu'en vertu de la règle de d'Alembert (1.3), la série  $\sum_{n \geq 1} n (r/\rho_1)^{n-1}$  converge. Il en résulte que  $\rho' \geq \rho$ , et finalement le résultat.

Q.E.D.

REMARQUE 1.26 En réitérant l'application du lemme 1.25 on constate que le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$  est indépendant de  $k \geq 0$ .

La conséquence suivante, a priori tout-à-fait surprenante, est particulièrement importante et constitue l'une des pierres angulaires de la théorie des fonctions analytiques :

THÉORÈME 1.27 Si  $S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  possède un rayon de convergence  $\rho$  strictement positif, alors

- ♥ (i)  $T(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  possède le même rayon de convergence,  
(ii)  $S(z)$  est dérivable dans son disque de convergence et

$$\frac{d}{dz} S(z) = T(z). \quad (1.8)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Choisissons  $z$  et  $r$  tels que  $|z| < r < \rho$ , et  $h$  tel que  $0 < |h| \leq r - |z|$ .

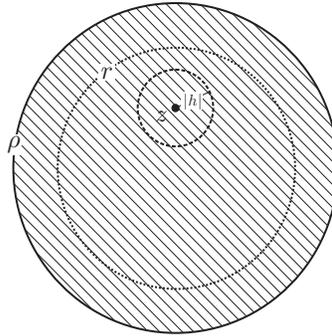


FIGURE 1.3 – Somme de la série dérivée

Alors  $|z + h| \leq |z| + |h| \leq r < \rho$  et

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) = \sum_{n \geq 1} a_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right),$$

soit en posant  $b = z + h$ ,

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) = \sum_{n \geq 1} a_n \left( \frac{b^n - z^n}{b - z} - n z^{n-1} \right).$$

▷ Fixons maintenant  $b$ , et considérons la fonction  $f(b, z) = b^n - z^n$ , nous aurons

$$f(b, z) = (b - z) \sum_{k=0}^{n-1} z^k b^{n-k-1},$$

d'où, d'une part

$$\frac{\partial}{\partial z} f(b, z) = -n z^{n-1},$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f(b, z) &= - \sum_{k=0}^{n-1} z^k b^{n-k-1} + (b - z) \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} b^{n-k-1} \\ &= - \frac{b^n - z^n}{b - z} + (b - z) \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} b^{n-k-1}, \end{aligned}$$

soit par conséquent

$$\frac{b^n - z^n}{b - z} - n z^{n-1} = (b - z) \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} b^{n-k-1}. \quad (1.9)$$

▷ Si nous remplaçons maintenant  $b$  par  $z + h$ , il en résulte que

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) = h \sum_{n \geq 2} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} (z+h)^{n-k-1}.$$

Mais de plus

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} (z+h)^{n-k-1} \right| \leq r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

d'où

$$\left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n \geq 2} n(n-1) |a_n| r^{n-2},$$

où la série  $\sum_{n \geq 2} n(n-1) |a_n| r^{n-2}$  converge, selon la remarque 1.26. Il en résulte que  $S(z)$  est dérivable, avec  $S'(z) = T(z)$ .

Q.E.D.

De ce résultat découle immédiatement le fait qu'une série entière  $S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est indéfiniment dérivable terme à terme dans son disque de convergence et que dans ce disque

♡

$$\frac{d^k}{dz^k} S(z) = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k}. \quad (1.10)$$

### 1.2.3 Primitive

PROPOSITION 1.28 Si  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  dans le disque de centre 0 et de rayon  $r$ , alors la série

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

converge dans ce disque et sa somme est une primitive de  $f$ .

DÉMONSTRATION.

Posons  $c_n = a_n / (n+1)$ ,  $n \geq 1$ , on aura  $|c_n| \leq |a_n|$ , d'où la convergence de la série

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$$

et par conséquent de

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = z \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.27 pour conclure.

Q.E.D.

Considérons les séries  $G(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{2n}$  et  $H(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . D'après (1.2) on aura  $G(x) = (1-x^2)^{-1}$  et  $H(x) = (1+x^2)^{-1}$ , les rayons de convergence étant tous deux égaux à 1. Que le rayon de convergence de  $G$  soit égal à 1 n'est pas surprenant, en tout état de cause il ne peut être supérieur, la fonction  $G$  étant singulière en  $x = \pm 1$ . Dans le cas de  $H$ , par contre une telle obstruction n'existe pas et il est troublant de constater que le rayon de convergence n'est pas plus élevé. C'est là qu'apparaît la supériorité des fonctions d'une variable complexe par rapport à celles d'une variable réelle ; dans le cas de  $H$  en effet, il est loisible de remplacer  $x \in \mathbb{R}$  par  $z \in \mathbb{C}$ , et on constate aisément que la fonction  $H$  possède bien une singularité sur le bord du disque de rayon 1, soit en fait en  $z = \pm i$ .

♠ Il ne faudrait cependant pas en déduire qu'il existe nécessairement un point du bord du disque de convergence où la somme d'une série entière n'est pas bornée. Considérons en effet  $J(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}} z^n$ , on aura  $(e^{-\sqrt{n}})^{1/n} = e^{-1/\sqrt{n}}$ , d'où il résulte que  $\rho(J) = 1$ , et que la série représentant  $J$  converge normalement sur le disque de rayon 1. En particulier  $J$  est bornée sur son disque de convergence ; il en est d'ailleurs de même de toutes ses dérivées ainsi qu'on le démontre aisément.

Nous aurons l'occasion de démontrer ultérieurement que si une fonction de variable complexe est dérivable dans un ouvert  $\Omega$ , alors elle possède un développement en série entière dans tout disque contenu dans  $\Omega$ . Rien de tel n'est vrai pour les fonctions de variable réelle. ♠

### 1.2.4 Développements en série entière

PROPOSITION 1.29

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \implies a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0). \quad (1.11)$$

DÉMONSTRATION. On aura en effet

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k},$$

d'où le résultat.

Q.E.D.

Il est alors clair que si une fonction admet une représentation sous forme de série entière dans un disque, ses coefficients sont entièrement déterminés et que la série est par conséquent unique. On peut se poser la question inverse : une fonction  $f(z)$ , indéfiniment dérivable au voisinage de 0, est-elle égale à sa série de Taylor au voisinage de 0 ? Nous verrons ultérieurement que la réponse est oui dans le cas où  $z$  est complexe, mais des conditions supplémentaires sont nécessaires dans le cas d'une variable réelle. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$  peut être nul, et sinon sa somme peut être différente de  $f(x)$  dans tout voisinage de 0, il suffit pour s'en convaincre de considérer la fonction définie par ♠

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x^2} \text{ pour } x > 0 \\ f(x) &= 0 \text{ pour } x \leq 0, \end{aligned}$$

pour laquelle on a  $f^{(n)}(0) = 0$ , et qui ne peut laisser indifférents les adeptes de la théorie des distributions. Cette simple constatation n'est pas si ancienne, et on a longtemps imaginé qu'un tel phénomène ne pouvait pas se produire ; c'est de cette prise de conscience qu'est née la théorie des fonctions analytiques.

PROPOSITION 1.30 Soit  $f$ , indéfiniment dérivable dans un voisinage de 0, et qui vérifie la propriété suivante :  $\exists r, M, t > 0$  tels que  $\forall n \geq 0$

$$\frac{1}{n!} \sup_{|x| \leq r} |f^{(n)}(x)| \leq M t^n, \quad (1.12)$$

alors  $f$  est développable en série entière selon sa série de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0), \text{ pour } |z| < \min\left(r, \frac{1}{t}\right).$$

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons de démontrer ce résultat dans le cas de la variable réelle, en effet dans le cas de la variable complexe, la condition (1.12) est automatiquement vérifiée par les fonctions différentiables. Considérons le développement de Taylor de  $f$  au voisinage de 0, on aura

$$f(x) = f(0) + \sum_{n \leq N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^N}{N!} f^{(N)}(\theta x), \text{ où } \theta \in ]0, 1[.$$

Avec  $\alpha < \min(r, 1/t)$ ,

$$\sup_{|x| \leq \alpha} \left| \frac{x^N}{N!} f^{(N)}(\theta x) \right| \leq \alpha^N M t^N = M (\alpha t)^N,$$

d'où  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{x^N}{N!} f^{(N)}(\theta x) \right| = 0$ , pour  $|x| \leq \alpha$ .

Q.E.D.

### 1.2.5 Substitution

La définition des fonctions analytiques repose sur le résultat de substitution suivant, qui semble assez naturel, mais dont la démonstration n'est pas tout-à-fait immédiate :

PROPOSITION 1.31 Soit  $s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho$ ,  $|z_0| < \rho$  et  $t(h) = z_0 + h$ , alors

$$s(t(h)) = \sum_{q \in \mathbb{N}} c_q h^q,$$

où  $c_q$  est la somme de la série absolument convergente suivante :

$$c_q = \sum_{m \in \mathbb{N}} \binom{q+m}{m} a_{q+m} z_0^m, \quad q \geq 0$$

et le rayon de convergence de la série  $\sum_{q \in \mathbb{N}} c_q h^q$  est supérieur ou égal à  $\rho - |z_0|$ .

Dans la formule précédente on a noté

$$\binom{m}{0} = 1 \quad \forall m \geq 0 \text{ soit } c_0 = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z_0^m.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit donc  $|h| < \rho - |z_0|$ , par hypothèse la série  $\sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| (|z_0| + |h|)^m$  converge, d'où  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $\sum_{m \geq N+1} |a_m| (|z_0| + |h|)^m \leq \varepsilon$ . Mais par ailleurs

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = a_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q} = a_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \left( z_0^m + \sum_{q=1}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q} \right),$$

où la série  $\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z_0^m$  converge puisque  $|z_0| < \rho$ , il en est donc de même de

$$\sum_{m \geq 1} a_m \sum_{q=1}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q} = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m - \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z_0^m,$$

et par conséquent

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z_0^m + \sum_{m \geq 1} a_m \sum_{q=1}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q}.$$

▷ On peut poursuivre le processus, car la série  $\sum_{m \geq 1} \binom{m}{1} a_m z_0^{m-1}$  converge également en vertu du lemme 1.25, d'où

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z_0^m + \sum_{m \geq 1} \binom{m}{1} a_m h z_0^{m-1} + \sum_{m \geq 2} a_m \sum_{q=2}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q},$$

et par récurrence,  $\forall N$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{m \geq 0} a_m z_0^m + \sum_{q=1}^N h^q \sum_{m \geq q} \binom{m}{q} a_m z_0^{m-q} + \sum_{m \geq N+1} a_m \sum_{q=N+1}^m \binom{m}{q} h^q z_0^{m-q}.$$

On aura alors

$$\left| \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m - \sum_{q=0}^N h^q \sum_{m \geq q} \binom{m}{q} a_m z_0^{m-q} \right| \leq \sum_{m \geq N+1} |a_m| \sum_{q=N+1}^m \binom{m}{q} |h|^q |z_0|^{m-q} \\ \leq \sum_{m \geq N+1} |a_m| (|z_0| + |h|)^m \leq \varepsilon,$$

d'où il résulte que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{q \in \mathbb{N}} h^q \sum_{m \geq q} \binom{m}{q} a_m z_0^{m-q}.$$

Q.E.D.

On trouvera dans l'appendice B une démonstration de la proposition plus générale suivante :

**PROPOSITION 1.32** Soit  $s(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z^m$  une série entière de rayon de convergence  $\rho(s)$  et  $t(h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n h^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho(t)$ . On pose  $T(h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| h^n$  et on suppose qu'il existe  $r$  tel que  $0 < r < \rho(t)$  et  $T(|h|) < \rho(s)$ ,  $\forall |h| < r$ ; alors pour  $|h| < r$  on a  $|t(h)| < \rho(s)$ , et

$$s(t(h)) = a_0 + \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p h^p,$$

où  $c_p$  est la somme de la série absolument convergente

$$c_p = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{n_1 + \dots + n_m = p} b_{n_1} \cdots b_{n_m}.$$

La proposition 1.31 en découle en fait : avec  $z_0 = b_0$ ,  $b_1 = 1$  et  $b_n = 0$ ,  $n \geq 2$ . On obtient  $c_q$  sous la forme

$$c_q = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{n_1 + \dots + n_m = q} b_{n_1} \cdots b_{n_m} \\ = a_q + a_{q+1} b_0 \binom{q+1}{1} + \cdots + a_{q+\ell} (b_0)^\ell \binom{q+\ell}{\ell} + \cdots \\ = \sum_{m \geq q} \binom{m}{q} a_m (b_0)^{m-q}, \quad q \geq 1$$

et

$$c_0 = a_0 + a_1 b_0 + \cdots + a_\ell (b_0)^\ell + \cdots \\ = a_0 + \sum_{m \geq 1} \binom{m}{0} a_m (b_0)^{m-0}$$

**PROPOSITION 1.33 (Inverse)** *Si le rayon de convergence de  $S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est strictement positif et si  $a_0 \neq 0$ , il existe une et une seule série entière  $T$  de rayon de convergence strictement positif telle que  $S(z)T(z) = 1$ ,  $\forall |z| < \min(\rho(S), \rho(T))$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour  $|z| < \rho(S)$ , posons  $R(z) = a_0 - S(z)$ , on a  $S(z) = a_0(1 - R(z)/a_0)$  et comme  $R(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 0$ , pour  $|z|$  assez petit

$$(S(z))^{-1} = \frac{1}{a_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{R(z)}{a_0} \right)^n.$$

Comme  $R(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ , et que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  a pour rayon de convergence 1, il découle de la proposition 1.32 que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (R(z)/a_0)^n$  constitue une série entière de la variable  $z$ , de rayon de convergence strictement positif.

*Q.E.D.*

## Chapitre 2

# Fonctions analytiques

Ainsi que dans le chapitre précédent les résultats qui suivent sont valables, sauf mention contraire, aussi bien pour les fonctions de variable réelle que complexe. Le dernier paragraphe, dans lequel sont définis l'exponentielle et le logarithme mérite une attention particulière car celles-ci revêtent une importance toute particulière tout au long du développement de la théorie.

**DÉFINITION 2.1** On dit que la fonction  $f(z)$  définie dans un voisinage de  $z_0$  est

- (i) développable en série entière au voisinage de  $z_0$  si il existe une série entière

$$s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$$

de rayon de convergence strictement positif  $\rho$ , telle que

$$f(z_0 + h) = \sum_{q \in \mathbb{N}} c_q h^q, \quad \forall |h| < \rho. \quad (2.1)$$

- (ii) analytique dans l'ouvert  $\Omega$ , si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de  $\Omega$ .

Il est donc clair qu'une fonction analytique dans  $\Omega$  y est indéfiniment dérivable, et que ses dérivées successives sont analytiques. Une fonction analytique dans  $\mathbb{C}$  tout entier est dite *fonction entière*.

Notons que si deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement analytiques sur les ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et coïncident sur leur intersection, alors la fonction  $f$  égale à  $f_1$  sur  $\Omega_1$  et à  $f_2$  sur  $\Omega_2$  est analytique sur  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ; elle est en effet développable en série entière au voisinage de tout point de  $\Omega$ .

Il ne faut pas se méprendre sur le statut du théorème suivant : ce n'est pas une évidence, et sa démonstration repose sur un théorème non trivial de substitution dans les séries entières.

**THÉORÈME 2.2** Une fonction définie par une série entière est analytique dans son disque de convergence.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  de rayon de convergence  $\rho$ , et  $z_0$  tel que  $|z_0| < \rho$ . Choisissons  $r$  tel que  $0 < r < \rho - |z_0|$ . Pour  $|h| \leq r$ , on a  $|z_0| + |h| < \rho$ , d'où il résulte que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{q=0}^{\infty} h^q \sum_{m=q}^{\infty} \binom{m}{q} a_m z_0^{m-q} = \sum_{q=0}^{\infty} c_q h^q,$$

en vertu de la proposition 1.31.

Q.E.D. 

**THÉORÈME 2.3** Pour qu'une fonction  $f(z)$ , indéfiniment dérivable dans l'ouvert  $\Omega$ , y soit analytique, il faut et il suffit qu'en tout point  $x_0 \in \Omega$ , il existe  $r_0, M_0, t_0 > 0$  tels que

$$\sup_{|x-x_0|<r_0} |f^{(n)}(x)| \leq M_0 n! t_0^n. \quad (2.2)$$

DÉMONSTRATION. Nous nous limiterons à démontrer ce théorème dans le cas de la variable réelle, en effet ainsi que nous le verrons par la suite, la condition (2.2) est automatiquement vérifiée par les fonctions dérivables de la variable complexe, qui sont donc analytiques

▷ On sait déjà que la condition est suffisante, en vertu de la proposition 1.30.

▷ Montrons qu'elle est nécessaire. De même qu'au théorème 2.2 ci-dessus, si  $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m x^m$ ,  $|x_0| < \rho$ ,  $0 < r < \rho - |x_0|$  et  $|h| \leq r$ , alors

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| (|x_0| + |h|)^m = \sum_{q=0}^{\infty} |h|^q \sum_{m=q}^{\infty} \binom{m}{q} |a_m| |x_0|^{m-q} \geq \sum_{q=0}^{\infty} |c_q| |h|^q.$$

Il en résulte d'après la proposition 1.29, que

$$\left| \frac{1}{q!} f^{(q)}(x_0) \right| = |c_q| = \sum_{m=q}^{\infty} \binom{m}{q} |a_m| |x_0|^{m-q} \leq \frac{M}{r^q}, \text{ avec } M = \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| (|x_0| + r)^m,$$

Posons alors  $r_0 = r/2$ , pour  $|x - x_0| < r_0$ , on aura  $r_0 < \rho - |x|$  car

$$\rho - |x| > r + |x_0| - |x| \text{ et } ||x_0| - |x|| < |x - x_0| < r_0$$

d'où

$$\rho - |x| > r - r_0 = r_0.$$

Il en résulte que

$$\left| \frac{1}{q!} f^{(q)}(x) \right| \leq \frac{M'}{r_0^q}, \text{ avec } M' = \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| (|x| + r_0)^m,$$

soit en fait, comme  $|x| + r_0 \leq |x_0| + r$ ,

$$\left| \frac{1}{q!} f^{(q)}(x) \right| \leq \frac{M}{r_0^q}, \forall x \text{ tel que } |x - x_0| < r_0. \quad (2.3)$$

Q.E.D.

Dans le cas de la variable réelle, la condition (2.2) peut être adoucie sous la forme suivante :

$$\sup_{|x| \leq r} |f^{(n)}(x)| \leq M_0 (n!)^\theta t_0^n, \theta > 1,$$

on définit ainsi la *classe de Gevrey* d'ordre  $\theta$ , ce qui fournit une échelle d'espaces intermédiaires entre les fonctions analytiques et les fonctions indéfiniment dérivables.

## 2.1 Principe des zéros isolés

**THÉORÈME 2.4** Soit  $f$  analytique dans l'ouvert connexe  $\Omega$  (voir la définition D.1), si  $z_0 \in \Omega$ , les conditions suivantes sont équivalentes

- (i)  $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \geq 0$
- (ii)  $f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $z_0$

(iii)  $f$  est identiquement nulle dans  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION. Il est clair tout d'abord que (iii)  $\implies$  (i)

▷ Si (i) est vérifié, selon la proposition 1.29, pour  $|h|$  suffisamment petit, on aura

$$f(z_0 + h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0) = 0,$$

soit (ii)

▷ Supposons maintenant (ii) vérifié et notons  $D$  l'ensemble des points de  $\Omega$  au voisinage desquels  $f$  s'annule. Il n'est pas vide en vertu de (ii), il est ouvert car si  $z \in D$ ,  $f$  s'annule sur un voisinage ouvert  $U$  de  $z$ , et comme  $U$  est voisinage de chacun de ses points,  $U \subset D$ . Mais de plus  $D$  est fermé pour la topologie induite sur  $\Omega$ , car si  $z \in \overline{D}$ , il existe une suite  $z_n$  d'éléments de  $D$  qui converge vers  $z$ , cela implique que tout voisinage de  $z$  contient un zéro de  $f$ ; et par conséquent que  $z \in D$  en vertu du principe des zéros isolés 1.22. Il en résulte que  $D = \Omega$ , puisque  $\Omega$  est connexe.

Q.E.D.

**COROLLAIRE 2.5** Si deux fonctions analytiques dans l'ouvert connexe  $\Omega$  coïncident au voisinage d'un point de  $\Omega$ , alors elles sont identiques dans  $\Omega$ .

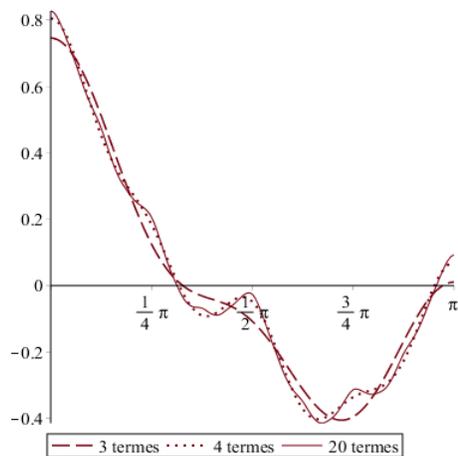
**COROLLAIRE 2.6 (Principe du prolongement analytique)** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts d'intersection non vide et d'union  $\Omega$  connexe, et  $f_1$  analytique dans  $\Omega_1$ . Si  $f_2$  et  $f_2'$  sont analytiques dans  $\Omega_2$  et coïncident avec  $f_1$  sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , alors  $f_2 = f_2'$  dans  $\Omega_2$ .

DÉMONSTRATION. Les fonctions  $g$  et  $g'$  égales à  $f_1$  dans  $\Omega_1$  et respectivement à  $f_2$  et  $f_2'$  dans  $\Omega_2$  sont analytiques dans  $\Omega$ , elles coïncident sur  $\Omega_1$  et donc sur  $\Omega$  tout entier d'après le Corollaire 2.5.

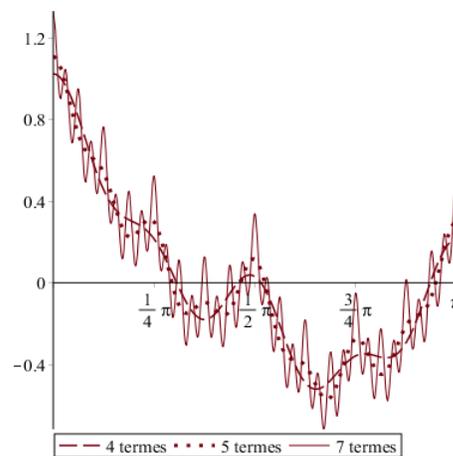
Q.E.D.

On dit que  $f_2$  est le *prolongement analytique* de  $f_1$  à  $\Omega_2$ . Il faut bien noter que le corollaire n'assure pas l'existence du prolongement analytique, il se contente d'affirmer que s'il existe, il est unique. ♠

Nous avons déjà remarqué qu'une série entière peut fort bien être bornée ainsi que ses dérivées sur son disque de convergence. ♠



Au bord du disque



En dehors du disque

En fait on peut même la choisir de telle sorte qu'elle ne puisse être prolongée analytiquement à aucun ouvert contenant son disque de convergence, ainsi qu'un théorème de Hadamard permet de le montrer pour la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{2^n}} z^{2^n}$ , dont le rayon de convergence est égal à  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-\sqrt{2^n}})^{1/2^n} = 1$ . La Figure qui précède met en évidence la convergence de la série sur le cercle de rayon 1, et sa divergence sur un cercle de rayon légèrement supérieur.

**THÉORÈME 2.7** Si  $f$  et  $g$  sont analytiques dans l'ouvert connexe  $\Omega$  et coïncident en une suite de points  $\heartsuit$  distincts possédant un point d'accumulation  $a \in \Omega$ , alors elles coïncident dans  $\Omega$  tout entier.

**DÉMONSTRATION.** La fonction  $f - g$  est développable en série entière au voisinage de  $a$  ; en vertu du principe des zéros isolés 1.22 elle est donc nulle dans un voisinage de  $a$ , et en vertu du corollaire 2.5 dans  $\Omega$  tout entier.

Q.E.D.

**PROPOSITION 2.8 (Principe des zéros isolés II)** Soit  $f$  analytique et non identiquement nulle dans l'ouvert connexe  $\Omega$ , et  $Z(f)$  l'ensemble de ses racines, alors

(i)  $\forall a \in Z(f)$  il existe un unique entier  $m$  appelé ordre du zéro de  $f$  au point  $a$ , tel que

$$f(z) = (z - a)^m g(z),$$

où  $g$  est analytique et  $g(a) \neq 0$ .

(ii)  $Z(f)$  est au plus dénombrable et n'a pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ .

**DÉMONSTRATION.**

▷ Si  $a \in Z(f)$ ,  $f$  est développable en série entière au voisinage de  $a$ , soit

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} c_n (z - a)^n$$

dans le disque  $B_r(a)$ . En vertu du théorème 2.7, les  $c_n$  ne sont pas tous nuls. On notera  $m$  le plus petit indice ( $\geq 1$ ) tel que  $c_m \neq 0$ , et on aura  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  où la série entière  $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{n+m} (z - a)^n$  est convergente dans  $B_r(a)$ . Notons que  $g(0) = c_m \neq 0$ , et que cette factorisation est unique, car si

$$(z - a)^n h(z) = f(z) = (z - a)^m g(z),$$

avec par exemple  $m > n$ , on aura  $h(z) = (z - a)^{m-n} g(z)$ , d'où  $h(a) = 0$ .

▷ En vertu du principe des zéros isolés 1.22,  $Z(f)$  ne peut avoir de point d'accumulation dans  $\Omega$ , il ne possède donc qu'un nombre fini de points dans chaque compact ; c'est donc un ensemble au plus dénombrable, puisque dans un espace métrique localement compact séparable, un ouvert est union dénombrable de compacts.

Q.E.D.

L'hypothèse de connexité est essentielle, car une fonction analytique peut être identiquement nulle dans une composante connexe de  $\Omega$  sans être nulle dans  $\Omega$  ; dans cette composante connexe particulière les zéros sont d'ordre infini et ne sont pas isolés.

## 2.2 Exemples de fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$

La fonction  $1/z$  est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , en effet, si  $z_0 \neq 0$ , on a

$$\frac{1}{z_0 + h} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + h/z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \left(\frac{h}{z_0}\right)^n, \quad (2.4)$$

série dont le rayon de convergence n'est autre que  $|z_0|$ .

### 2.2.1 La fonction exponentielle

Par définition, on pose

$$e^z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}, \quad (2.5)$$

série dont le rayon de convergence est infini (règle de d'Alembert) ; la fonction exponentielle est donc une fonction entière.

PROPOSITION 2.9 *La fonction exponentielle est un caractère, c'est-à-dire un homomorphisme complexe :*

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (2.6)$$

DÉMONSTRATION. Selon la proposition 1.14

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{z_2^m}{m!} \right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{k \leq p} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{p-k}}{(p-k)!} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p!} (z_1 + z_2)^p = e^{z_1 + z_2}.$$

Q.E.D.

Il en résulte en particulier que  $1/e^z = e^{-z}$ . Notons que selon le théorème 1.27 on aura

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{z^m}{m!} = e^z. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Trigonométrie

On pose également

$$\cos z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } \sin z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \quad (2.8)$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \cos z &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} = -\sin z \\ \frac{d}{dz} \sin z &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z, \end{aligned} \quad (2.9)$$

ainsi que la formule de Moivre

$$e^{iz} = \sum_{n \in \mathbb{N}} i^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos z + i \sin z, \quad (2.10)$$

et

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ d'où } \cos(-z) = \cos z \text{ et } \sin(-z) = -\sin z.$$

Notons également que

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \right)^2 = e^{iz} e^{-iz} = e^0 = 1, \quad (2.11)$$

et que si  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  sont réels, d'où

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1. \quad (2.12)$$

Nous renvoyons à l'annexe A pour la démonstration des formules de trigonométrie classiques, dont la validité s'étend donc au cas d'arguments complexes.

### 2.2.3 Une définition de l'argument

Complétons ces rappels par l'étude des variations des fonctions  $\sin y$  et  $\cos y$ , où  $y \in \mathbb{R}$ .

Comme  $\cos 0 = 1$ , par continuité,  $\exists y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos y > 0$ , pour  $y \in [0, y_0]$ , et par conséquent, en vertu de (2.9),  $\sin y$  est strictement croissant dans cet intervalle. Comme de plus  $\sin 0 = 0$ , on aura également  $\sin y > 0$ , pour  $y \in ]0, y_0]$ .

Soit alors  $y_1 > y_0$ , si on suppose que  $\cos y > 0$ , pour  $y \in [y_0, y_1]$ , alors  $\sin y > a = \sin y_0$  pour  $y \in [y_0, y_1]$ , et comme

$$\cos y_1 - \cos y_0 = - \int_{y_0}^{y_1} \sin y \, dy,$$

on aura  $\cos y_1 - \cos y_0 < -a(y_1 - y_0)$ , d'où  $\cos y_0 > a(y_1 - y_0)$ , et par conséquent

$$y_1 < \frac{\cos y_0}{a} + y_0,$$

puisque  $\cos y_1 > 0$ . Il en résulte que  $\cos y$  s'annule en un point au moins de l'intervalle  $[y_0, y_0 + (\cos y_0)/a]$ .

**DÉFINITION 2.10 (de  $\pi$ )** On note  $\pi = 2 \times \inf\{y > 0 \mid \cos y = 0\}$

On aura donc

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ d'où } \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

puisque  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$  et que  $\sin y$  est positif sur  $[0, \pi/2]$ . On peut résumer ce qui précède en disant que  $\cos y$  est strictement décroissant et  $\sin y$  strictement croissant sur  $[0, \pi/2]$ , d'où la proposition suivante, où  $\mathbb{T}$  note le cercle de rayon 1 dans le plan complexe et  $\mathbb{T}^+$  son intersection avec le quart de plan  $x \geq 0, y \geq 0$  :

**PROPOSITION 2.11** L'application  $y \in [0, \pi/2] \rightarrow e^{iy} = \cos y + i \sin y \in \mathbb{T}^+$ , est une bijection et même un homéomorphisme car elle est continue sur un intervalle compact.

Comme

$$\sin(\pi/2 + y) = \cos y \text{ et } \cos(\pi/2 + y) = -\sin y ;$$

il en est de même sur les intervalles  $[\pi/2, \pi]$ ,  $[\pi, 3\pi/2]$ , et  $[3\pi/2, 2\pi]$ . On montre alors aisément que l'application  $y \in \mathbb{R} \rightarrow e^{iy} = \cos y + i \sin y$  est une bijection  $[0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{T}$ , et qu'elle se prolonge à  $\mathbb{R}$  en une fonction continue et de période  $2\pi$  ; c'est donc également une bijection  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ . Il en résulte que  $e^z$  est périodique de période  $2i\pi$ .

**DÉFINITION 2.12** On appelle argument, et on note  $\arg(z) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  l'application réciproque de  $y \rightarrow e^{iy}$ . On étend cette définition à un complexe quelconque non nul en posant  $\arg z = \arg(z/|z|)$

Comme  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est compact pour la topologie induite et  $y \rightarrow e^{iy}$  continue  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ , l'argument est une application continue. Par contre, comme  $[0, 2\pi[$  n'est pas compact, on ne peut pas démontrer la continuité de la fonction réciproque de  $y \rightarrow e^{iy} : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{T}$ , et pour cause ! On écrira

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z| e^{i \arg(z/|z|)} = |z| e^{i \arg z}. \quad (2.13)$$

Notons bien que l'argument ainsi défini, considéré en tant que fonction  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction multiforme : l'argument d'un nombre complexe est défini dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire à un multiple près de  $2\pi$  dans  $\mathbb{R}$ . Bien qu'aucune de ces diverses déterminations de l'argument n'ait prééminence sur les autres, on distingue souvent parmi celles-ci une détermination dite *principale*, celle qui vaut 0 en  $z = 1$ , on la note  $\text{Arg } z$ .

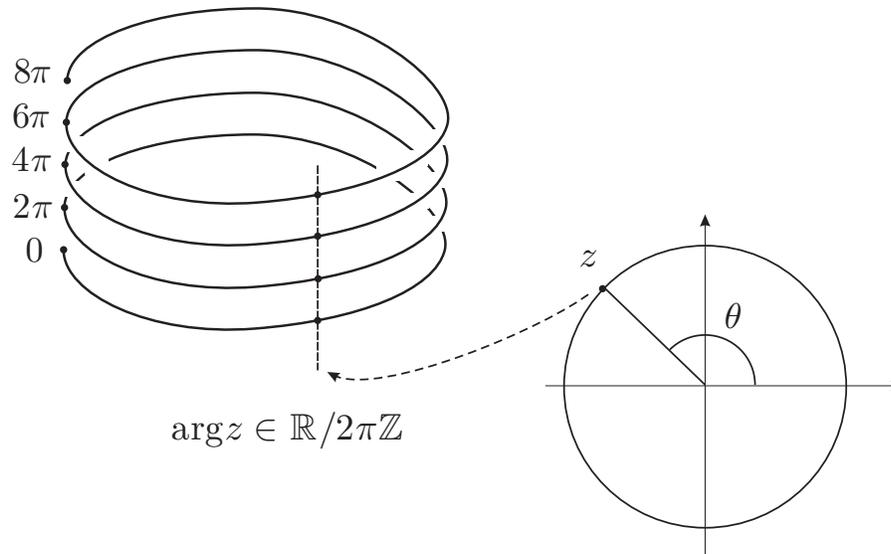


FIGURE 2.1 – L'argument

### Le Logarithme

On cherche  $z = x + iy$  solution de l'équation

$$e^z = w, \quad (2.14)$$

soit encore, d'après (2.6) et (2.13)  $e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$ , ce qui équivaut d'une part à

$$e^x = |w|, \text{ soit } x = \text{Log } |w|,$$

et d'autre part

$$e^{iy} = e^{i \arg w}, \text{ soit d'après la proposition 2.11, } y = \arg w,$$

puisque  $|e^{iy}| = 1$  d'après (A.3). Il en résulte que les solutions de (2.14) sont données par

$$z = x + iy = \text{Log } |w| + i \arg w. \quad (2.15)$$

Il existe donc *plusieurs solutions* à l'équation (2.14), elles diffèrent les unes des autres d'un multiple entier de  $2i\pi$ .

Il est clair d'après (2.15) que  $e^z \neq 0, \forall z$ , et la question est donc maintenant de savoir si, étant donné un ouvert  $\Omega$ , que nous supposons *connexe*, il est possible de définir une fonction  $f$  *continue*  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$e^{f(w)} = w.$$

Une telle fonction s'appellera une *détermination continue du logarithme* dans l'ouvert  $\Omega$ . Supposons tout d'abord qu'il en existe une, et préoccupons nous de la comparer à d'éventuelles autres, soit  $g(w)$  l'une d'entre elle. On aura

$$e^{f(w)-g(w)} = 1,$$

et par conséquent  $f(w) - g(w) = i \arg 0$ , c'est dire que  $h(w) = (f(w) - g(w))/2i\pi$  est une fonction continue ne prenant que des valeurs entières. Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , il est facile de démontrer que  $\{w \in \Omega | h(w) = k\}$

est à la fois ouvert et fermé, et donc par connexité que  $h$  est constante, soit que nécessairement,  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$f(w) - g(w) = 2ik\pi.$$

Notons qu'une telle détermination n'existe pas dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Supposons en effet que  $u$  en soit une, selon (2.15), on aura

$$u(w) = \text{Log } |w| + i \arg w,$$

et si  $\theta$  est la fonction réciproque de  $y \rightarrow e^{iy} : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{T}$ , continue sur le domaine connexe  $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ , le raisonnement ci-dessus nous prouve que  $u(w) - \theta(w)$  est constant, or nous avons montré que  $\theta$  n'est pas continue, ce qui constitue une contradiction.

La fonction  $f(w)$  est appelée *logarithme complexe*, et nous verrons ultérieurement que le logarithme (et donc l'argument) admet des déterminations continues dans tout ouvert *simplement connexe* (voir la définition 5.20) ne contenant pas l'origine. Ces déterminations diffèrent de  $2ik\pi$ , et l'une d'entre elles a pour valeur 0 en  $w = 1$ , c'est celle correspondant à la détermination de l'argument s'annulant en ce point. Nous l'appellerons *détermination principale du logarithme*, et nous noterons cette détermination

$$\text{Log } w = \text{Log } |w| + i \text{Arg } w. \quad (2.16)$$

Nous aurons

$$e^{\text{Log } z} = z, \text{ et } \text{Log } e^z = z. \quad (2.17)$$

Notons que de la relation  $z = e^{\text{Log } z}$  découle par dérivation,

$$1 = e^{\text{Log } z} \frac{d}{dz} \text{Log } z = z \frac{d}{dz} \text{Log } z,$$

soit

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}. \quad (2.18)$$

Il en résulte d'après la proposition 1.29 que, nécessairement

$$\begin{aligned} \text{Log}(z_0 + z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n \frac{d^n}{dz^n} \text{Log } z_0 = \text{Log } z_0 + \frac{z}{z_0} + \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} z^n \frac{(n-1)!}{n!} \left(\frac{1}{z_0}\right)^n \\ &= \text{Log } z_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Le rayon de convergence de cette série étant égal à  $|z_0|$ . On aura en particulier, pour la détermination principale du logarithme

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n} z^n. \quad (2.20)$$

La question consistant à déterminer le plus grand domaine du plan complexe où la série ci-dessus possède un prolongement analytique est une question délicate dont la résolution nécessite des outils plus élaborés et qui restera à l'arrière plan de nos préoccupations tout au long du cours.

## Chapitre 3

# Séries de Fourier

Contrairement aux séries entières dont les coefficients ne dépendent que du comportement local de la fonction considérée au voisinage du centre du disque de convergence, le calcul des coefficients de la série de Fourier d'une fonction périodique utilise l'ensemble des valeurs de la fonction.

Il s'agit d'étudier la convergence de séries de la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k, \text{ où } e_k(\theta) = e^{ik\theta}, \quad (3.1)$$

dites séries trigonométriques et de déterminer dans quel cas une fonction donnée sur le segment  $(-\pi, \pi)$ ,  $2\pi$ -périodique, ou si l'on préfère donnée sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ , est la somme d'une telle série. Deux questions se posent essentiellement : pour une topologie donnée, connaissant une fonction  $u$  déterminer les  $a_k$  tels que la série (3.1) converge vers  $u$  d'une part, et d'autre part, déterminer s'il existe une limite, et laquelle, pour (3.1) lorsque les  $a_k$  ont connus.

L'une des difficultés provient du fait qu'en fonction des données différents points de vue peuvent être développés, relatifs au mode de convergence ou au fait que l'on cherche le développement d'une fonction périodique donnée ou bien que l'on dispose d'une suite de coefficients et que l'on cherche si et vers quelle fonction la série trigonométrique qui en découle converge.

### 3.1 Convergence en moyenne quadratique

On définira le produit scalaire dans  $L^2(-\pi, \pi)$  de la façon suivante :

$$(u | v)_{L^2(-\pi, \pi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) \bar{v}(\theta) d\theta$$

Notons tout d'abord que

$$(e_n | e_m)_{L^2(-\pi, \pi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{mn}, \quad (3.2)$$

c'est-à-dire que les caractères  $e_n$  forment un système orthonormé dans  $L^2(-\pi, \pi)$ .

**PROPOSITION 3.1** *Le sous-espace  $E$  engendré par les  $e_m$  est dense dans  $\mathcal{C}_{\#}^0(-\pi, \pi)$ , ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodiques, muni de la topologie de la convergence uniforme, ainsi que dans  $L^2(-\pi, \pi)$ .*

L'ensemble  $\mathcal{C}_{\#}^0(-\pi, \pi)$  est formé des fonctions  $f$  continues sur  $[-\pi, \pi]$  qui vérifient  $f(-\pi) = f(\pi)$  et sont donc susceptibles d'un prolongement continu à  $\mathbb{R}$  tout entier. On peut également les considérer comme des fonctions continues sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . A cet effet, si  $f \in \mathcal{C}_{\#}^0(-\pi, \pi)$ , et si  $\theta$  note l'élément de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , classe de  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\tilde{f}(\theta) = f(y)$  avec  $y = x + 2k\pi$  où  $k$  est choisi de telle sorte que  $y \in ]-\pi, \pi]$ . Il est alors clair que la convergence uniforme dans  $\mathcal{C}_{\#}^0(-\pi, \pi)$  est équivalente à celle dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  muni de la topologie quotient.

DÉMONSTRATION.

▷ Le sous-espace  $E$  est stable par addition, multiplication, passage au conjugué et contient la fonction constante. De plus il sépare les points dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , en effet si  $\theta', \theta'' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\theta' \neq \theta''$ , alors  $e^{i(\theta' - \theta'')} \neq 1$ , soit  $e^{i\theta'} \neq e^{i\theta''}$ . Comme  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est compact, d'après le théorème de Stone-Weierstraß, il en résulte que  $E$  est dense dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  ou encore dans  $\mathcal{C}_{\#}^0(-\pi, \pi)$ .

▷ Par ailleurs  $C_{\#}^0(-\pi, \pi)$  qui contient l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(-\pi, \pi)$ , est dense dans  $L^2(-\pi, \pi)$ . Comme  $C_{\#}^0(-\pi, \pi)$  s'injecte continûment dans  $L^2(-\pi, \pi)$ , il en résulte que  $E$  est dense dans  $L^2(-\pi, \pi)$ .

Q.E.D.

Si  $u \in L^1(-\pi, \pi)$ , on note

$$c_n(u) = (u | e_n)_{L^2(-\pi, \pi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

c'est le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $u$ , tandis que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (u | e_k) e_k$  est la série de Fourier de  $u$ . On interprétera cette formule de la façon suivante :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (u | e_k) e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} (u | e_k) e_k.$$

Notons  $v$  la fonction égale à  $u$  sur  $(-\pi, \pi)$  et à 0 à l'extérieur de ce segment, on aura

$$c_k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{v}(k).$$

Comme par hypothèse  $u \in L^1(-\pi, \pi)$ , il en est de même de  $v$ , et par conséquent selon le théorème de Riemann-Lebesgue,  $c_n(u) \rightarrow 0$  lorsque  $|n| \rightarrow \infty$ .

**THÉORÈME 3.2** Si  $u \in L^2(-\pi, \pi)$ , sa série de Fourier converge dans  $L^2(-\pi, \pi)$  et



$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (u | e_k) e_k. \quad (3.3)$$

DÉMONSTRATION.

Notons  $E_n$  le sous-espace engendré par les  $e_k$ ,  $k = -n, n$  et  $\pi_n$  la projection orthogonale sur  $E_n$ . Si  $u \in L^2(-\pi, \pi)$ , on a  $\pi_n u = \sum_{k=-n}^n (u | e_k) e_k$  car  $(\pi_n u - u | e_j) = 0$ ,  $\forall j$ ,  $-n \leq j \leq n$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ , par densité,  $\exists v \in E$ , tel que  $\|u - v\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \varepsilon$ ; si  $n$  est choisi tel que  $v \in E_n$ , pour  $n' \geq n$  on aura

$$\|u - \pi_{n'} u\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \|u - \pi_n u\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \|u - v\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \varepsilon,$$

car  $E_n \subset E_{n'}$ , ce qui prouve que la série de Fourier de  $u$  converge vers  $u$ .

Q.E.D.

On dit que les  $e_m$  forment une *base hilbertienne* de  $L^2(-\pi, \pi)$ .

Notons que la convergence dans  $L^2$  n'implique que la convergence presque partout d'une sous-suite, mais qu'un résultat relativement récent et difficile de Carleson indique qu'en fait la suite des  $\pi_n u$  converge presque partout. Par ailleurs on connaît des exemples de fonctions de  $L^1(-\pi, \pi)$  dont la série de Fourier ne converge en aucun point.

**PROPOSITION 3.3 (Riesz-Fischer)** (i) Si la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\ell^2$ , alors il existe une fonction  $u \in L^2(-\pi, \pi)$  telle que  $a_k = c_k(u)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . On aura

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k.$$



(ii) L'application  $\alpha = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$  est une isométrie :  $\ell^2 \rightarrow L^2$ , c'est ce que l'on appelle encore la formule de Plancherel.

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $u_n = \sum_{|k| \leq n} a_k e_k$ , si  $n > m$ , on aura

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \left\| \sum_{m < |k| \leq n} a_k e_k \right\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \sum_{m < |k| \leq n} |a_k|^2$$

Comme la suite  $\alpha_n$  d'éléments de  $\ell^2$  définie par  $\alpha_n(k) = a_k$  pour  $|k| \leq n$  et  $\alpha_n(k) = 0$  pour  $|k| > n$  est convergente, elle est de Cauchy, ainsi par conséquent que la suite des  $u_n$ . Il en résulte que  $u_n$  converge, soit vers  $u \in L^2(-\pi, \pi)$ . On aura alors

$$c_\ell(u) = (u | e_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n | e_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} a_k \delta_{k\ell} = a_\ell$$

et selon le théorème 3.2,  $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$ .

▷ Ainsi que nous venons de le voir, en vertu de l'orthogonalité des  $e_k$ ,  $\|u_n\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \sum_{|k| \leq n} |a_k|^2$ , d'où, par continuité, si  $\alpha \in \ell^2$ ,  $\|u\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \|\alpha\|_{\ell^2}^2$ .

Q.E.D.

Notons que les  $e_n$  sont les fonctions propres de l'opérateur auto-adjoint  $d^2/d\theta^2$  dans  $H_{\#}^1(-\pi, \pi)$ , sous-ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques de  $H^1(-\pi, \pi)$ , et qu'en conséquence ils forment une base hilbertienne de  $H_{\#}^1(-\pi, \pi)$  et de  $L^2(-\pi, \pi)$ , sous réserve d'une normalisation adéquate.

Notons également que si  $u$  est à valeurs réelles, alors  $c_{-n} = \overline{c_n}$  et que par conséquent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

où  $a_0 = c_0$ ,  $b_0 = ic_0$ , et pour  $k \geq 1$ ,  $a_k = c_k + c_{-k} = 2\Re c_k$  et  $b_k = i(c_k - c_{-k}) = -2\Im c_k$ . Si de plus  $u$  est symétrique alors  $c_k = c_{-k}$  d'où  $b_k = 0$ , et si  $u$  est antisymétrique  $a_k = 0$ .

## 3.2 Convergence uniforme

**THÉORÈME 3.4** Si  $u \in L^1(-\pi, \pi)$  et si la suite des  $c_k(u) \in \ell^1$ , alors  $u \in C_{\#}^0(-\pi, \pi)$ , et c'est la limite uniforme de sa série de Fourier.



DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que  $\ell^1 \subset \ell^2$ , et que par conséquent, en vertu de la proposition 3.3, la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u) e_k$  converge vers  $u$  dans  $L^2(-\pi, \pi)$ . Par ailleurs, on aura

$$\|u_n - u_m\|_{C_{\#}^0(-\pi, \pi)} \leq \sum_{m < |k| \leq n} |c_k(u)| \|e_k\|_{C_{\#}^0(-\pi, \pi)} = \sum_{m < |k| \leq n} |c_k(u)|$$

d'où la convergence uniforme de la série de Fourier, soit vers  $w \in C_{\#}^0(-\pi, \pi)$ . Il en résulte que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u) e_k$  converge vers  $w$  dans  $L^2(-\pi, \pi)$ , et par conséquent que  $w = u$ .

Q.E.D.

**COROLLAIRE 3.5** Si  $u \in C_{\#}^0(-\pi, \pi)$  est de classe  $C^1$  par morceaux, alors sa série de Fourier converge uniformément vers  $u$ .

DÉMONSTRATION. En effet sur chaque intervalle  $[\theta_\ell, \theta_{\ell+1}]$  où  $u$  est de classe  $C^1$ ,

$$\int_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}} u'(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = ik \int_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}} u(\theta) e^{-ik\theta} d\theta + [u(\theta) e^{-ik\theta}]_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}}.$$

Avec  $\theta_0 = -\pi$  et  $\theta_{L+1} = \pi$ , il en résulte que

$$c_k(u') = \sum_{\ell=0}^L \int_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}} u'(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = ik \sum_{\ell=0}^L \int_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}} u(\theta) e^{-ik\theta} d\theta + \sum_{\ell=0}^L [u(\theta) e^{-ik\theta}]_{\theta_\ell}^{\theta_{\ell+1}} = ik c_k(u).$$

Comme  $u'$  est bornée, elle est de carré intégrable, d'où

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |c_k(u)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{1}{k} |c_k(u')| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |c_k(u')|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

On peut donc appliquer le résultat précédent.

Q.E.D.

Plus généralement on notera  $C_{\#}^m(-\pi, \pi)$  l'ensemble des fonctions périodiques  $m$  fois dérivables. En réitérant le procédé précédent, on montre que si  $u \in C_{\#}^{m-1}(-\pi, \pi)$  est de classe  $C^m$  par morceaux, alors  $c_k(u^{(n)}) = ik c_k(u^{(n-1)})$ , pour  $1 \leq n \leq m$ , d'où la convergence uniforme de  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u^{(n-1)}) e_k$  vers  $u^{(n-1)}$ .

**THÉORÈME 3.6** Si  $u \in L^1(-\pi, \pi)$  et si la suite des  $kc_k(u)$  appartient à  $\ell^1$ , la série de Fourier de  $u$  peut être dérivée terme à terme :

$$\frac{d}{d\theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u) e_k(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik c_k(u) e_k(\theta).$$

DÉMONSTRATION.

▷ Comme la suite  $kc_k(u) \in \ell^1$ , il en est de même de celle des  $c_k(u)$ , et par conséquent d'après le théorème 3.4 la suite  $u_n = \sum_{|k| \leq n} c_k(u) e_k$  converge uniformément vers  $u \in C_{\#}^0(-\pi, \pi)$ . De même la suite  $u'_n = \sum_{|k| \leq n} ik c_k(u) e_k$  converge uniformément, soit vers  $g$ .

▷ Il en résulte que  $\forall \theta$ ,

$$\int_0^\theta u'_n(t) dt \rightarrow \int_0^\theta g(t) dt, \text{ uniformément.}$$

et par conséquent que

$$u(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\theta) = u(0) + \int_0^\theta g(t) dt.$$

On en déduit que  $u$  est dérivable, de dérivée  $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik c_k(u) e_k$ .

Q.E.D.

### 3.3 Convergence ponctuelle

C'est une question plus difficile car la continuité de  $u$  ne suffit pas à assurer la convergence ponctuelle de sa série de Fourier. Il existe plusieurs voies pour aborder cette question : on peut soit modifier la série de Fourier de façon à ce que cette convergence soit assurée, on utilisera à cet effet le procédé de Césaro, soit imposer à  $u$  des conditions de régularité supplémentaires.

**DÉFINITION 3.7** Si  $u$  et  $v$  sont intégrables sur  $(-\pi; \pi)$  et  $2\pi$ -périodiques, on pose

$$u * v(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta - t)v(t) dt,$$

c'est le produit de convolution de  $u$  et  $v$ .

La fonction  $u * v$  est alors  $2\pi$ -périodique et

$$u * v(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau.$$

En effet, en vertu de la périodicité

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta - t)v(t) dt &= \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau \\ &= - \int_{-\pi}^{-\pi+\theta} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau + \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\pi}^{\pi+\theta} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau \end{aligned}$$

or

$$\int_{\pi}^{\pi+\theta} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau = \int_{-\pi}^{-\pi+\theta} u(\tau + 2\pi)v(\theta - \tau + 2\pi) d\tau$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta - t)v(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)v(\theta - \tau) d\tau.$$

**LEMME 3.8** On a

$$u * e_k = c_k(u) e_k.$$

**DÉMONSTRATION.** En effet

$$\begin{aligned} c_k(u) e_k(\theta) &= (u | e_k) e_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau) e^{ik(\theta-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta - t) e^{ikt} dt = u * e_k(\theta). \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

On aura donc  $\sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k = \sum_{k=-n}^n u * e_k(t)$ , ce qui conduit à la définition du *noyau de Dirichlet*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e_k(t),$$

et à la formule

$$\sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k = D_n * u.$$

Il est alors tentant d'essayer de démontrer que  $D_n \rightarrow \delta$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  ; il se trouve que ce n'est pas le cas et qu'on doit faire appel à une étape supplémentaire de régularisation à cet effet. On notera

$$C_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t),$$

c'est le *noyau de Fejér*.

### 3.3.1 Le théorème de Fejér

**DÉFINITION 3.9** On dit que la suite de fonctions  $\varphi_n$  est une approximation de l'unité si

- (i)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1$
- (ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(t)| dt$  est borné
- (iii)  $\forall \delta > 0, \int_{\pi > |t| > \delta} |\varphi_n(t)| dt \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**LEMME 3.10** On a

(i)

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{(e^{it/2})^{2n+1} - (e^{-it/2})^{2n+1}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}.$$

(ii)

$$C_N(t) = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin(N+1)t/2}{\sin t/2} \right)^2$$

**DÉMONSTRATION.** En effet

▷

$$\sum_{k=-m}^n e^{ikt} = e^{-imt} \sum_{k=0}^{m+n} (e^{it})^k = e^{-imt} \frac{1 - (e^{it})^{(m+n+1)}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-imt} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

et avec  $q = e^{it/2}$ ,

$$\sum_{k=-m}^n e^{ikt} = \frac{e^{-it/2} (e^{i(n+1)t} - e^{-imt})}{e^{-it/2} (e^{it} - 1)} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(m+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{q^{(2n+1)t} - q^{-(2m+1)t}}{q - q^{-1}}$$

▷ On aura alors

$$\begin{aligned} N(q - q^{-1}) C_N(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} q^{(2n+1)t} - q^{-(2n+1)t} = q \sum_{k=0}^N (q^2)^k - q^{-1} \sum_{k=0}^N (q^{-2})^k \\ &= q \frac{1 - (q^2)^{N+1}}{1 - q^2} - q^{-1} \frac{1 - (q^{-2})^{N+1}}{1 - q^{-2}} = \frac{1 - (q^2)^{N+1}}{q^{-1} - q} - \frac{1 - (q^{-2})^{N+1}}{q - q^{-1}} \\ &= \frac{(q^2)^{N+1} - 2 + (q^{-2})^{N+1}}{q - q^{-1}} = \frac{(q^{N+1} - q^{-(N+1)})^2}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

soit

$$C_N(t) = \frac{1}{N} \frac{(q^{N+1} - q^{-(N+1)})^2}{(q - q^{-1})^2} = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin t(N+1)/2}{\sin t/2} \right)^2$$

Q.E.D.

**PROPOSITION 3.11** *Le noyau de Fejér est une approximation de l'unité.*

DÉMONSTRATION.

▷ On a tout d'abord

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 2\pi$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} C_N(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$$

▷ On a également, pour  $\pi \geq |t| \geq \delta > 0$   $|\sin t/2| \geq \sin \delta/2$ , d'où

$$C_N(t) \leq \frac{1}{N} \left( \frac{1}{\sin t/2} \right)^2 \leq \frac{1}{N} \left( \frac{1}{\sin \delta/2} \right)^2$$

qui tend uniformément vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ . Il en résulte que

$$\int_{\pi > |t| > \delta} C_N(t) dt \rightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Enfin  $C_N(t)$  est positif et par conséquent une approximation de l'unité.

Q.E.D.

**THÉORÈME 3.12 (de Fejér)** *La moyenne des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction  $u$  continue  $2\pi$ -périodique tend uniformément vers  $u$  sur  $\mathbb{R}$ .*



DÉMONSTRATION.

▷ Rappelons tout d'abord qu'une fonction  $f$  continue sur un compact est uniformément continue, en effet dans le cas contraire,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall n, \exists x_n, y_n$  vérifiant  $|x_n - y_n| < 1/n$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ . Par compacité on peut alors extraire de  $x_n$  et  $y_n$  deux sous-suites convergentes, nécessairement vers la même limite, ce qui est contradictoire avec l'inégalité  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ .

▷ Comme  $u$  est uniformément continue sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que  $\forall x \in [-\pi, \pi], |t| < \delta \implies |u(x-t) - u(x)| < \varepsilon$ ; pour  $N$  assez grand on aura par ailleurs  $\int_{\pi > |t| > \delta} |C_N(t)| dt \leq \varepsilon$ , il en résulte que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} u(x-t) C_N(t) dt - u(x) \right| \leq \int_{|t| < \delta} |u(x-t) - u(x)| |C_N(t)| dt + \int_{\pi > |t| > \delta} |u(x-t) - u(x)| |C_N(t)| dt \\ \leq (M + 2 \|u\|_{\mathcal{C}_\#^0(-\pi, \pi)}) \varepsilon,$$

où  $M$  note un majorant de  $\int_{-\pi}^{\pi} |C_N(t)| dt$ .

▷ Nous avons donc démontré que la suite des fonctions

$$x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} u(x-t) C_N(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} u(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k(x)$$

tend uniformément vers  $u$  sur  $[-\pi, \pi]$  et donc sur  $\mathbb{R}$ .

Q.E.D.

REMARQUE 3.13 En particulier, toute fonction continue  $2\pi$ -périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

### 3.3.2 Le théorème de Dirichlet

Si on renonce à la régularisation par le procédé de Césaro, on doit exiger une régularité supplémentaire de la part de  $u$ . Le théorème de Dirichlet prend alors diverses formes.

LEMME 3.14 Pour  $t \in (-\pi, \pi)$ , on a

$$|1 - e^{it}| \geq 2 \frac{|t|}{\pi}.$$

DÉMONSTRATION. En effet

$$|1 - e^{it}|^2 = |1 - \cos t|^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2},$$

d'où

$$|1 - e^{it}| = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \geq 2 \frac{|t|}{\pi},$$

en raison de la convexité de la fonction sin entre 0 et  $\pi/2$ .

Q.E.D.

THÉORÈME 3.15 (de Dirichlet) Soit  $u$  intégrable sur  $(-\pi; \pi)$ ,  $2\pi$ -périodique. Soient  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\tau_0 \in ]-\pi; \pi]$ , si la fonction  $\tau \rightarrow (u(\tau_0 - \tau) - u_0)/\tau$  est intégrable sur  $(-\pi; \pi)$ , alors la série de Fourier de  $u$  converge vers  $u_0$  en  $\tau_0$ .

DÉMONSTRATION.

► Soit  $n$  positif, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} dt = 1,$$

et par conséquent, en notant  $\mathbf{1}$  la fonction constante égale à 1,  $\mathbf{1} * \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \mathbf{1}$ ; d'après le lemme 3.8 on aura donc

$$\sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k - u_0 \mathbf{1} = (u - u_0 \mathbf{1}) * \sum_{k=-n}^n e^{ikt}.$$

► A l'aide du lemme 3.10 on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k(\tau_0) - u_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u(\tau_0 - \tau) - u_0) \frac{e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(\tau_0 - \tau) - u_0}{1 - e^{i\tau}} (e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}) d\tau. \end{aligned}$$

On pose alors

$$v(\tau) = \frac{u(\tau_0 - \tau) - u_0}{1 - e^{i\tau}},$$

fonction intégrable en vertu du lemme 3.14, et on obtient

$$\sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k(\tau_0) - u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\tau) (e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}) d\tau = c_n(v) - c_{-(n+1)}(v)$$

▷ Le lemme de Riemann-Lebesgue nous assure que  $c_\ell(v) \rightarrow 0$  quand  $|\ell| \rightarrow \infty$ , et donc que  $\sum_{k=-n}^n c_k(u) e_k(\tau_0) - u_0$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $\infty$ , soit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(u) e_k(\tau_0) - u_0 = 0.$$

Q.E.D.

REMARQUE 3.16 Notons qu'il ne suffit pas que la fonction  $u$  soit continue en  $\tau_0$  pour que l'hypothèse du théorème 3.15 soit satisfaite.

COROLLAIRE 3.17 Si  $u$  est intégrable sur  $(-\pi; \pi)$ ,  $2\pi$ -périodique et dérivable en  $\tau_0$ ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(u) e_k(\tau_0) = u(\tau_0).$$



DÉMONSTRATION. Si  $u$  est dérivable en  $\tau_0$ , alors  $(u(\tau_0 - t) - u(\tau_0))/t$  est bornée dans un voisinage de  $t = 0$ , d'où le résultat en vertu du théorème 3.15 puisque  $u$  est intégrable.

Q.E.D.

COROLLAIRE 3.18 Si  $u$  est intégrable sur  $(-\pi; \pi)$ ,  $2\pi$ -périodique, possède des limites à gauche et à droite  $u_0^-$  et  $u_0^+$ , ainsi que des dérivées à gauche et à droite en  $\tau_0$ , alors



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(u) e_k(\tau_0) = (u_0^- + u_0^+)/2.$$

DÉMONSTRATION. Posons  $F(t) = (u(\tau_0 - t) + u(\tau_0 + t))/2$  et  $F_0 = (u_0^- + u_0^+)/2$ . La fonction

$$\begin{aligned} G(t) &= F(t) - F_0 = \frac{u(\tau_0 - t) - u_0^-}{2} + \frac{u(\tau_0 + t) - u_0^+}{2} \\ &= \frac{u(\tau_0 - t) - u_0^+}{2} + \frac{u(\tau_0 + t) - u_0^-}{2} \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0, elle est donc bornée au voisinage de  $t = 0$  et par conséquent intégrable. De plus elle possède une dérivée à gauche et à droite, d'où il résulte que  $G(t)/t$  est intégrable. Selon le théorème 3.15, on aura donc

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) - F_0 = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(\tau_0 - t)}{2} e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(\tau_0 + t)}{2} e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2} e^{-ik(\tau_0 - s)} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2} e^{-ik(s - \tau_0)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-ik\tau_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2} e^{iks} ds + \frac{1}{2\pi} e^{ik\tau_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2} e^{-iks} ds = \frac{e^{-ik\tau_0} c_{-k}(u) + e^{ik\tau_0} c_k(u)}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_0^- + u_0^+}{2} = F_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(u) e^{ik\tau_0}.$$

Q.E.D.

### 3.4 Deux exemples

(i) Considérons tout d'abord la fonction  $\psi(\theta) = \theta \sin(\theta/\theta_0)$ , où  $\theta_0$  vérifie  $\text{tg}(\pi/\theta_0) = -\pi/\theta_0$ . Ses dérivées s'annulent en  $\theta = \pm\pi$ , elle se prolonge donc par périodicité à l'extérieur du segment  $[-\pi, \pi]$  en une fonction dérivable. Ses coefficients de Fourier sont les suivants :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \theta \sin \frac{\theta}{\theta_0} e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} \theta (e^{i(1/\theta_0-n)\theta} - e^{-i(1/\theta_0+n)\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{(1/\theta_0-n)^2} [e^{i(1/\theta_0-n)\theta}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{i(1/\theta_0-n)} [\theta e^{i(1/\theta_0-n)\theta}]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{(1/\theta_0+n)^2} [e^{-i(1/\theta_0+n)\theta}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{i(1/\theta_0+n)} [\theta e^{-i(1/\theta_0+n)\theta}]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \sin \pi (1/\theta_0 - n) \left( \frac{1}{(1/\theta_0 - n)^2} + \frac{1}{(1/\theta_0 + n)^2} \right) \\ &\quad - \pi \cos \pi (1/\theta_0 + n) \left( \frac{1}{1/\theta_0 - n} + \frac{1}{1/\theta_0 + n} \right) \end{aligned}$$

La Figure 3.1 permet de constater la convergence rapide et uniforme de la série de Fourier, en conformité

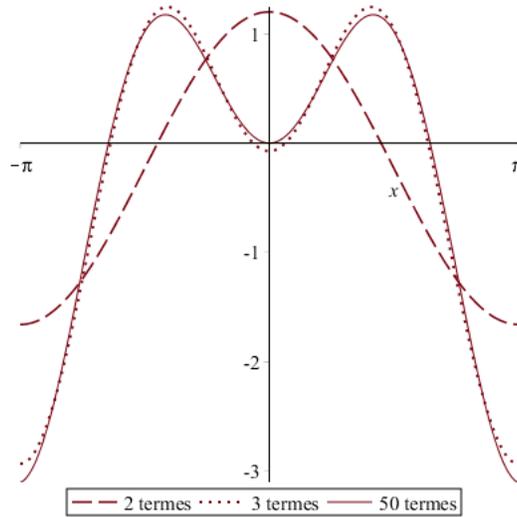


FIGURE 3.1 – Convergence uniforme

avec le corollaire 3.5.

(ii) Si maintenant on considère la fonction  $\varphi$  égale à  $\theta$  sur  $[-\pi, \pi[$  et prolongée par périodicité. Ses coefficients de Fourier sont les suivants :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta d\theta = 0$$

et pour  $|n| \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{in} [\theta e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n^2} [e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{in} [\theta e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-2i}{n^2} \sin n\pi - \frac{2\pi}{in} \cos n\pi \end{aligned}$$

soit

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in}.$$

et par conséquent

$$\varphi(x) = - \sum_{|n| \geq 1} \frac{(-1)^n}{in} e^{inx} = -2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Il n'est plus ici question de convergence uniforme car la limite de la suite des sommes partielles, qui sont continues, n'est elle-même pas continue. Cette non uniformité se traduit par des oscillations de plus en plus rapides (voir la figure 3.2) des sommes partielles auxquelles on fait référence sous le nom de "Phénomène de Gibbs". On peut montrer que le support de ces oscillations se réduit au fur à mesure de la convergence de la série mais qu'il n'en est pas de même de l'amplitude de ces oscillations, qui est en proportion de la discontinuité.

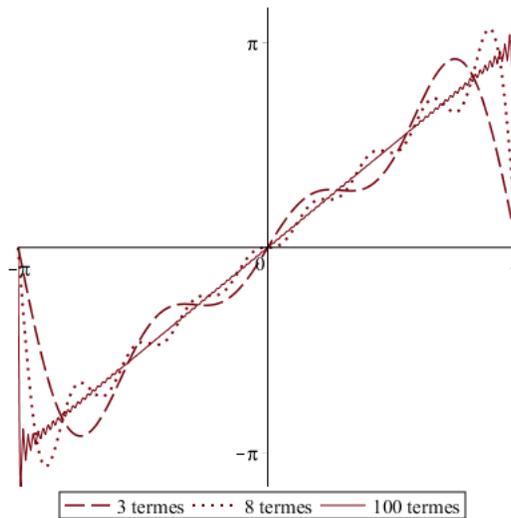


FIGURE 3.2 – Phénomène de Gibbs

### 3.5 Les distributions périodiques

On pourra se reporter à l'appendice E pour les rappels relatifs à la transformation de Fourier des distributions.

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}$ , on dit qu'elle est périodique de période  $a$  si  $\tau_a T = T$ , où l'on rappelle (E.8) que la translatée d'une distribution est définie par transposition :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle, \text{ avec } \tau_{-a} \varphi(x) = \varphi(x + a).$$

Nous avons vu précédemment que selon la topologie choisie, une fonction pouvait être, ou non, développable en série de Fourier, mais si on accepte de limiter ses ambitions et de se contenter de la topologie de  $\mathcal{S}'$ , alors toutes les distributions périodiques peuvent être développées en série de Fourier.

Il sera ultérieurement nécessaire de disposer d'une fonction de  $\mathcal{D}$  dont la somme des translatées soit identiquement égale à 1. Considérons à cet effet une fonction  $\psi$  quelconque de  $\mathcal{D}$ , et posons  $\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ak} \psi$ , où la somme est localement finie, puisque  $\psi$  est à support compact. La fonction  $\Psi$  est périodique de période  $a$ , en effet

$$\tau_a \Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{a(k+1)} \psi = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tau_{a\ell} \psi = \Psi.$$

Posons alors  $\rho = \psi/\Psi$ , elle vérifie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ak} \rho = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{ak} \psi}{\tau_{ak} \Psi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{ak} \psi}{\Psi} = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ak} \psi}{\Psi} = 1.$$

**THÉORÈME 3.19** *Les distributions périodiques sont tempérées.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $T$  périodique de période  $a$ , on aura

$$T = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ak} \rho \right) T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ak} (\rho T)$$

et par conséquent

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \tau_{ak} (\rho T), \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \rho T, \tau_{-ak} \varphi \rangle.$$

La distribution  $\rho T$  est à support compact, c'est un élément de  $\mathcal{E}'$ , elle est donc continue pour la topologie de  $\mathcal{E}$ , c'est dire qu'il existe une constante  $C$  et un entier  $p$  tels que  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$|\langle \rho T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_{x \in \text{Supp } \rho T} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

et en particulier, si  $\varphi$  est fixée,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$|\langle \rho T, \tau_{-ak} \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_{x \in \text{Supp } \rho} |\partial^\alpha \tau_{-ak} \varphi(x)|$$

Comme les fonctions  $\varphi$  et  $\rho$  sont fixées à support compact, il existe  $K$  tel que

$$\sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_{x \in \text{Supp } \rho} |\partial^\alpha \tau_{-ak} \varphi(x)| = 0, \forall k > K.$$

Par ailleurs, on a également

$$\sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_{x \in \text{Supp } \rho} |\partial^\alpha \tau_{-ak} \varphi(x)| \leq \sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_x |\partial^\alpha \tau_{-ak} \varphi(x)| = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_x |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

et par conséquent

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq K \sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \sup_x |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

ce qui prouve que  $T$  est une distribution tempérée.

*Q.E.D.*

### 3.5.1 La formule de Poisson

Dans ce qui suit, la convergence des séries s'entend au sens de  $\mathcal{S}'$ , soit en fait  $T_k \rightarrow T$  si  $\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ .

PROPOSITION 3.20 On a

$$\mathcal{F} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ak} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2\pi/a)k}. \quad (3.4)$$

DÉMONSTRATION.

▷ On peut tout d'abord noter que la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ak}$  converge au sens de  $\mathcal{S}'$ , et par continuité de la transformation de Fourier, que la série des transformées de Fourier des  $\delta_{ak}$  converge également dans  $\mathcal{S}'$ .

▷ Posons  $S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ak}$ , on a tout d'abord  $S = \tau_a S$ , d'où  $\widehat{S}_\xi = \widehat{\tau_a S}_\xi = e^{-ia\xi} \widehat{S}_\xi$ , et par conséquent

$$(1 - e^{-ia\xi}) \widehat{S}_\xi = 0. \quad (3.5)$$

Il en résulte que  $\text{Supp } \widehat{S} \subset \{\xi \mid e^{-ia\xi} = 1\} = (2\pi/a)\mathbb{Z}$ .

▷ Choisissons maintenant  $\psi \in \mathcal{D}$ , identique à 1 au voisinage de 0 et nulle en dehors de  $[-a/4, a/4]$ , on aura

$$\langle \widehat{S}, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle (\tau_{ak} \psi) \widehat{S}, \varphi \rangle,$$

soit

$$\widehat{S} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_{ak} \psi) \widehat{S}.$$

En vertu de (3.5)  $(a\xi - 2\pi k) \tau_{ak} \psi \widehat{S}_\xi = 0$ , soit encore

$$(a\xi - 2\pi k) \frac{1 - e^{-ia\xi}}{a\xi - 2\pi k} \tau_{ak} \psi \widehat{S}_\xi = 0,$$

or, au voisinage de  $\xi = (2\pi/a)k$

$$1 - e^{-ia\xi} = 1 - e^{-i(a\xi - 2\pi k)} = i(a\xi - 2\pi k) - \sum_{n \geq 2} (-i)^n (a\xi - 2\pi k)^n / n!$$

d'où

$$\frac{1 - e^{-ia\xi}}{a\xi - 2\pi k} = i + O(\xi - (2\pi/a)k),$$

ce qui prouve que  $(a\xi - 2\pi k) \tau_{ak} \psi \widehat{S}_\xi = 0$ , et par conséquent que  $\tau_{ak} \psi \widehat{S}_\xi = c_k \delta_{(2\pi/a)k}$ . On en déduit que

$$\widehat{S} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_{ak} \psi) \widehat{S} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{(2\pi/a)k}.$$

▷ Pour déterminer les coefficients  $c_k$ , on peut tout d'abord noter que  $S_x = e^{-2i\pi(x/a)} S_x$ , d'où

$$\widehat{S} = \tau_{-(2\pi/a)} \widehat{S} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{(2\pi/a)(k-1)} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\ell+1} \delta_{(2\pi/a)\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{(2\pi/a)k};$$

il en résulte que tous les  $c_k$  sont égaux, soit à  $c$ . On aura donc

$$\widehat{S} = c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2\pi/a)k}.$$

▷ Pour calculer la constante  $c$ , on prend  $\varphi \in \mathcal{S}$ . On aura d'une part

$$\langle \widehat{S}, \tau_{-y}\varphi \rangle = c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_{(2\pi/a)k}, \tau_{-y}\varphi \rangle = c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi((2\pi/a)k + y),$$

et d'autre part

$$\langle \widehat{S}, \tau_{-y}\varphi \rangle = \langle S, \widehat{\tau_{-y}\varphi} \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ak}, e^{iyx} \widehat{\varphi}(x) \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_{ak}, e^{iyx} \widehat{\varphi}(x) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iayk} \widehat{\varphi}(ak)$$

d'où

$$\begin{aligned} c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx &= c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi/a} \varphi((2\pi/a)k + y) dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(ak) \int_0^{2\pi/a} e^{iayk} dy = \widehat{\varphi}(0) \int_0^{2\pi/a} dy \\ &= (2\pi/a) \widehat{\varphi}(0) = \frac{2\pi/a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

et finalement  $c = \sqrt{2\pi}/a$ .

Q.E.D.

### 3.5.2 Série de Fourier

Soit maintenant plus généralement  $T$ ,  $2\pi$ -périodique et  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}, \varphi \rangle &= \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi l} \rho \right) T, \widehat{\varphi} \right\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle (\tau_{2\pi l} \rho) T, \widehat{\varphi} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \tau_{2\pi l} (\rho T), \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \rho T, \tau_{-2\pi l} \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \rho T, \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau_{-2\pi l} \widehat{\varphi} \right\rangle, \end{aligned}$$

mais par ailleurs

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau_{-2\pi l} \widehat{\varphi}(\xi) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau_{-\xi} \widehat{\varphi}(2\pi l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{e^{-i\xi x} \varphi(x)}(2\pi l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \delta_{2\pi l}, \widehat{e^{-i\xi x} \varphi(x)} \rangle = \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}, \widehat{e^{-i\xi x} \varphi(x)} \right\rangle = \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}, e^{-i\xi x} \varphi(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, e^{-i\xi x} \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_k, e^{-i\xi x} \varphi(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi k} \varphi(k). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}, \varphi \rangle &= \left\langle \rho(\xi) T_{\xi}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi k} \varphi(k) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \langle \rho(\xi) T_{\xi}, e^{-i\xi k} \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \widehat{\rho T}(k) \end{aligned}$$

car

$$\widehat{\rho T}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \rho(\xi) T_{\xi}, e^{-ix\xi} \rangle,$$

puisque  $\rho T$  est à support compact. On écrira donc

$$\widehat{T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\rho T}(k) \delta_k$$

d'où

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\rho T}(k) e^{ikx}. \quad (3.6)$$

C'est le développement en série de Fourier de la distribution  $2\pi$ -périodique  $T$ . Ses coefficients sont les

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\rho T}(k); \quad (3.7) \quad \heartsuit$$

ils ne dépendent pas du choix de  $\rho \in \mathcal{D}$  qui vérifie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi k} \rho = 1.$$

### 3.5.3 Le cas d'une fonction continue

Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique, on aura

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\rho f}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle \rho(x) f(x), e^{-ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi-2\pi\ell}^{\pi-2\pi\ell} \rho(x) f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{2\pi\ell} \rho(y) \tau_{2\pi\ell} f(y) e^{-ik(y-2\pi\ell)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{2\pi\ell} \rho(y) f(y) e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi\ell} \rho(y) \right) f(y) e^{-iky} dy \end{aligned}$$

soit

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy. \quad (3.8)$$

On retrouve bien là les traditionnels coefficients de Fourier.



## Chapitre 4

# L'intégrale de Cauchy

Nous ne traiterons plus désormais que de fonctions de variable complexe, ce qui nous permettra un changement de point de vue et l'introduction d'un nouvel outil : l'intégrale de Cauchy. C'est de la confrontation de ces deux approches (séries entières et intégrale de Cauchy) que découle la puissance de la théorie des fonctions holomorphes.

### 4.1 La relation de Cauchy-Riemann

Rappelons tout d'abord que

**DÉFINITION 4.1** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ; on dit qu'elles sont tangentes en  $a$  si, pour  $r$  suffisamment petit,

$$\sup_{|z-a|<r} |f(z) - g(z)| = o(r).$$

Le fait pour deux fonctions d'être tangentes en un point constitue une relation d'équivalence.

**DÉFINITION 4.2** La fonction  $f$  est dérivable en  $z_0$  si il existe une application linéaire continue  $Df_{z_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  telle que  $f(z) - f(z_0)$  et  $Df_{z_0}(z - z_0)$  soient tangentes en  $z_0$ .

Cette définition est bien entendu valable dans un cadre beaucoup plus large tel celui des applications entre espaces de Banach.

Notons que deux applications linéaires tangentes en un point sont identiques et que la dérivée est par conséquent unique. On écrira

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f'(z_0) + o(z - z_0). \quad (4.1)$$

Si  $\tilde{f}$  est une fonction dérivable :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , on a

$$\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|).$$

Soient maintenant une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $c$  l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$c(x, y) = x + iy. \quad (4.2)$$

Nous poserons

$$\tilde{f} = f \circ c, \text{ soit } \tilde{f}(x, y) = f(x + iy). \quad (4.3)$$

PROPOSITION 4.3 (**Relation de Cauchy-Riemann**) Pour que  $f$  soit dérivable en  $a = \alpha + i\beta$ , il faut et il suffit que  $\tilde{f}$  le soit en  $(\alpha, \beta)$  et que la relation suivante soit vérifiée

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0 ; \quad (4.4)$$

on aura alors

$$f'(a) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) = -i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta). \quad (4.5)$$

On explicite couramment la relation (4.4) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial \Im \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial \Im \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial \Re \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ce qui conduit à parler des relations de Cauchy-Riemann, mais ne présente aucun avantage par rapport à la formule (4.4).

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons tout d'abord que  $f$  soit dérivable, on aura

$$D\tilde{f}_{(\alpha, \beta)} = Df_a \circ Dc_{(\alpha, \beta)}, \text{ soit } \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta) \right) = f'(a) \cdot (1, i),$$

ou encore

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) = f'(a) \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta) = if'(a).$$

▷ Réciproquement supposons  $\tilde{f}$  dérivable et la relation de Cauchy-Riemann vérifiée, et posons

$$g(z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) - (z - a)g(z) &= \tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(\alpha, \beta) - ((x - \alpha) + i(y - \beta)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) \\ &= \tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(\alpha, \beta) - \left( (x - \alpha) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\alpha, \beta) + (y - \beta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\alpha, \beta) \right) \\ &= o(|x - \alpha| + |y - \beta|) = o(z - a). \end{aligned}$$

Q.E.D.

DÉFINITION 4.4 On dit que  $f$  est holomorphe dans l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  vis-à-vis de la variable complexe  $z$ .



Notons qu'en fait, ainsi que nous aurons l'occasion de le démontrer ultérieurement, l'hypothèse de continuité de la dérivée est inutile, car les fonctions dérivables sont holomorphes, et même indéfiniment dérivables. Il est donc loisible de supprimer l'hypothèse de continuité de la dérivée dans la définition des

fonctions holomorphes, mais il se trouve que le choix du texte permet quelques simplifications dans l'exposé des propriétés essentielles des fonctions holomorphes.

Posons

$$\check{f}(z, \bar{z}) = \tilde{f}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

ce qui conduit à écrire

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial \check{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right). \quad (4.7) \quad \heartsuit$$

Dans ce contexte la relation de Cauchy-Riemann prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (4.8)$$

et on aura

$$f'(z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial \check{f}}{\partial z} + \frac{\partial \check{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \check{f}}{\partial z}. \quad (4.9)$$

Les précautions que nous avons respectées en introduisant les notations  $\tilde{f}$  et  $\check{f}$  sont souvent considérées comme inutiles et il est courant de rencontrer des formules telles que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

qui doivent être manipulées avec prudence.

C'est la relation (4.4) qui permet de saisir à quel point l'hypothèse de dérivabilité de  $f$  est plus contraignante que celle de dérivabilité pour  $\tilde{f}$ . ♠

## 4.2 Intégrales de chemin

**DÉFINITION 4.5** Un chemin est une application continue  $\gamma$  d'un intervalle fermé borné  $[a, b]$  ( $a < b$ ) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . L'origine est le point  $\gamma(a)$  et l'extrémité le point  $\gamma(b)$ . Si  $\gamma(a) = \gamma(b)$  on dit que le chemin est un lacet.

On supposera désormais que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une subdivision (finie!)  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  de  $[a, b]$  telle que la restriction de  $\gamma$  à  $[a_i, a_{i+1}]$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Il importe de distinguer le chemin, qui est une application  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , de son image  $\gamma([a, b])$ , deux chemins différents étant susceptibles de partager la même image. En fait, nous n'y sacrifions pas toujours dans le texte, mais le lecteur est vivement invité à garder en mémoire cette distinction.

**DÉFINITION 4.6 (Intégrale de Cauchy)** On appelle intégrale (de Cauchy) de  $f$  sur le chemin  $\gamma$ , et on note

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0, n-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_{[a, b]} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt. \quad (4.10)$$

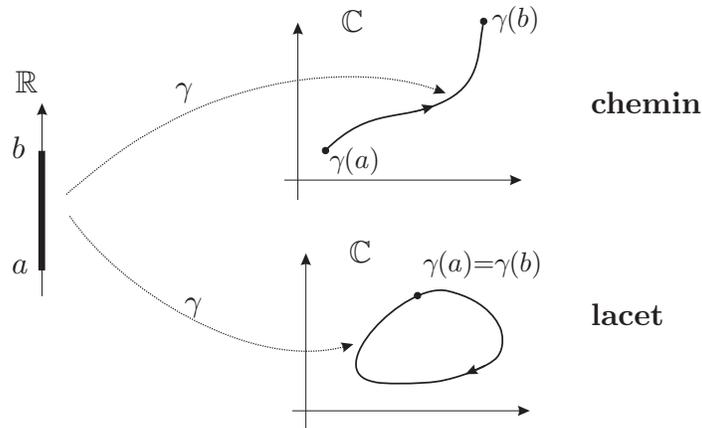


FIGURE 4.1 – Chemins et lacets

### 4.2.1 Changement de paramétrage

Supposons que  $\varphi$  soit une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, *croissante* :  $[c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors  $\theta = \gamma \circ \varphi$  est un chemin, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, dont l'image est la même que celle de  $\gamma$ , et on aura

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{[a,b]} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_{\varphi^{-1}[a,b]} f \circ \gamma \circ \varphi(s) \gamma' \circ \varphi(s) |\varphi'(s)| ds \\ &= \int_{[c,d]} f \circ \gamma \circ \varphi(s) \gamma' \circ \varphi(s) \varphi'(s) ds \\ &= \int_{[c,d]} f \circ \theta(s) \theta'(s) ds = \int_{\theta} f(z) dz, \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz.$$

C'est dire que  $\gamma$  et  $\theta$  sont deux chemins *équivalents*, qu'on ne distinguera pas par la suite. En particulier on pourra toujours supposer que l'intervalle de variation du paramètre est  $[0, 1]$  (ou  $[0, 2\pi]$  quand le chemin est un cercle !)

Choisissons maintenant pour  $\varphi$  une bijection *décroissante* :  $[c, d] \rightarrow [a, b]$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{[a,b]} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_{[c,d]} f \circ \gamma \circ \varphi(s) \gamma' \circ \varphi(s) |\varphi'(s)| ds \\ &= - \int_{[c,d]} f \circ \theta(s) \theta'(s) ds = - \int_{\theta} f(z) dz. \end{aligned}$$

L'intégrale de Cauchy ne dépend donc du paramétrage que par l'intermédiaire du sens de parcours du chemin considéré, elle est changée en son opposée quand le sens de parcours est inversé.



Notons également que, si  $\gamma$  est un lacet, alors pour  $c \in [a, b]$ , le chemin  $\theta$  défini par

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \gamma(s), \quad c \leq s \leq b \\ \theta(s) &= \gamma(s - b + a), \quad b \leq s \leq b + c - a \end{aligned}$$

est équivalent à  $\gamma$ , ce qui signifie qu'en fait l'origine  $a = b$  est sans importance.

### 4.2.2 Changement de variable

Soit  $\psi$  holomorphe au voisinage de  $\gamma$  ; on pose

$$h = f \circ \psi,$$

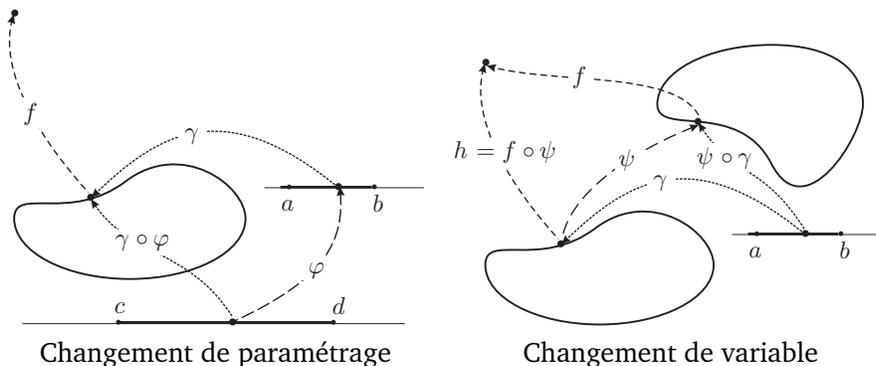
alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h(z) \psi'(z) dz &= \int_{[a,b]} h \circ \gamma(t) \psi' \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{[a,b]} f \circ \psi \circ \gamma(t) (\psi \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_{\psi \circ \gamma} f(z') dz', \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\gamma} f \circ \psi(z) \psi'(z) dz = \int_{\psi \circ \gamma} f(z') dz', \tag{4.11}$$

formule qui présente une subtile différence (laquelle ?) avec la formule classique du changement de variable.



Contrairement à l'intégrale de Lebesgue, l'intégrale de Cauchy n'est pas une forme linéaire positive, son signe dépend du sens de parcours du chemin et le changement de variable fait intervenir la dérivée de  $\psi$  et non pas son module ; c'est qu'ici la notion adéquate n'est pas celle d'intégrale d'une fonction mais celle d'intégrale d'une forme différentielle sur une variété.

On notera que malgré une certaine ressemblance superficielle, les formules (4.10) et (4.11) sont de natures différentes : lors d'un changement de paramétrage, la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée continue et dérivable par morceaux, tandis que dans un changement de variable  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.

Si  $b > a$ , et  $c = [a, b]$ , on note couramment

$$-\int_b^a f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_c f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

### 4.2.3 Formes différentielles

Une forme différentielle de degré 0 sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est tout simplement une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ; une forme différentielle  $\omega$  de degré 1 sur  $\Omega$  est une application  $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ , c'est encore dire que

$\omega(z)$  est une application linéaire de  $\mathbb{C}$  dans lui-même, ou encore que  $\langle \omega(z), \zeta \rangle = \omega(z)\zeta$ . La différentielle extérieure d'une forme différentielle  $g$  de degré 0 est la forme différentielle  $dg$  de degré 1 donnée par  $\langle dg(z), \zeta \rangle = g'(z)\zeta$ .

Si  $\gamma$  est un chemin, on note  $\langle \gamma^* \omega(t), \tau \rangle = \langle \omega(\gamma(t)), \langle \gamma'(t), \tau \rangle \rangle$ , ce qui définit également  $\gamma^* \omega$  comme une forme différentielle de degré 1 :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Par définition,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^* \omega.$$

L'application identité  $\mathbf{1} : z \rightarrow z$  est linéaire, sa différentielle extérieure est donc l'application constante égale à  $\mathbf{1}$  elle-même, on la note  $dz$ . Avec cette notation, on écrira  $\zeta = \langle dz, \zeta \rangle$  et  $dg(z) = g'(z)dz$  ainsi que  $\gamma^* \omega(t) = \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ .

(i) Si  $\omega(z) = f(z)dz$ , on aura  $\gamma^* \omega(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$  et

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

(ii) Si  $\omega = dg$ , (on dit alors que la forme différentielle  $\omega$  est exacte), alors  $\gamma^* \omega(t) = g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = (g \circ \gamma(t))'dt$ , d'où  $\int_{\gamma} \omega = g \circ \gamma(b) - g \circ \gamma(a)$ ; on dit que  $\omega$  possède une primitive. Contrairement au cas des fonctions continues de la variable réelle, qui possèdent une primitive, *toutes les formes différentielles ne possèdent pas de primitive*.

(iii) Une forme différentielle est dite fermée si elle possède *localement* une primitive. Le fait pour une forme différentielle d'être fermée n'entraîne pas nécessairement qu'elle soit exacte, cela *dépend de la géométrie* du domaine  $\Omega$  considéré.

#### 4.2.4 Composition des chemins

On peut également recoller deux chemins : si  $\gamma$  est défini sur  $[a, b]$  et  $\theta$  sur  $[c, d]$  et si  $\gamma(b) = \theta(c)$ , on peut poser par exemple

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \gamma(t), \quad a \leq t \leq b \\ \lambda(t) &= \theta(t + c - b), \quad b \leq t \leq b + d - c, \end{aligned}$$

et on aura

$$\int_{\lambda} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\theta} f(z)dz;$$

on note  $\lambda = \gamma \vee \theta$ .

Si  $\theta(t) = \gamma(b + a - t)$ , alors les chemins  $\gamma$  et  $\theta$  ont la même image mais sont parcourus en sens inverses et on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \vee \theta} f(z)dz &= \int_{\gamma} f(z)dz + \int_a^b f \circ \theta(t) \theta'(t)dt \\ &= \int_{\gamma} f(z)dz - \int_a^b f \circ \gamma(b + a - t) \gamma'(b + a - t)dt \\ &= \int_{\gamma} f(z)dz - \int_a^b f \circ \gamma(s) \gamma'(s)ds = 0. \end{aligned}$$

On constate que le lacet  $\gamma \vee \theta$  est équivalent à 0, et que l'hypothèse de croissance dans le changement de paramétrage est essentielle à l'invariance de l'intégrale de chemin.

On peut généraliser cette formule au cas où les chemins ne se raccordent pas et poser

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{\lambda} f(z) dz \text{ avec } \lambda = \bigvee_{i=1}^n \gamma_i.$$

On appelle  $\lambda$  une chaîne et, dans le cas où les  $\gamma_i$  sont des lacets, un cycle.

### 4.3 La théorie locale

Soient  $a \in \mathbb{C}$ , et  $r > 0$ , on utilisera essentiellement dans ce paragraphe le chemin circulaire

$$\gamma_r^a(t) = a + re^{2i\pi t}, \quad t \in [0, 1], \quad (4.12)$$

ce qui en fait reposer les résultats (déjà substantiels) sur des calculs explicites extrêmement simples.

#### 4.3.1 La formule de Cauchy locale

Il s'agit là d'un résultat intermédiaire nécessaire à la mise en place de la théorie, mais qui sera ultérieurement supplanté par un résultat considérablement plus général.

LEMME 4.7 Soit  $f$  continue dans la couronne

$$\Xi = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

et holomorphe, sauf éventuellement en un point, soit  $z_0$ , alors si  $r < \rho < R$ ,

(i) L'intégrale

$$\int_{\gamma_\rho^a} f(z) dz$$

est indépendante de  $\rho$ ,

(ii) si de plus  $r = 0$ ,  $f$  étant définie et continue en  $a$ , alors

$$\int_{\gamma_\rho^a} f(z) dz = 0.$$

Nous verrons ultérieurement que les hypothèses faites sur  $f$  rendent impossible l'existence d'un tel point  $z_0$ . ♠

DÉMONSTRATION.

▷ Posons

$$\mathcal{A}(\rho) = \int_{\gamma_\rho^a} f(z) dz ;$$

selon la formule du changement de variable (4.11), avec  $w = z - a$  et  $h(w) = f(z)$ , on aura

$$\mathcal{A}(\rho) = \int_{\gamma_\rho^0} h(w) dw = 2i\pi\rho \int_0^1 h(\rho e^{2i\pi t}) e^{2i\pi t} dt.$$

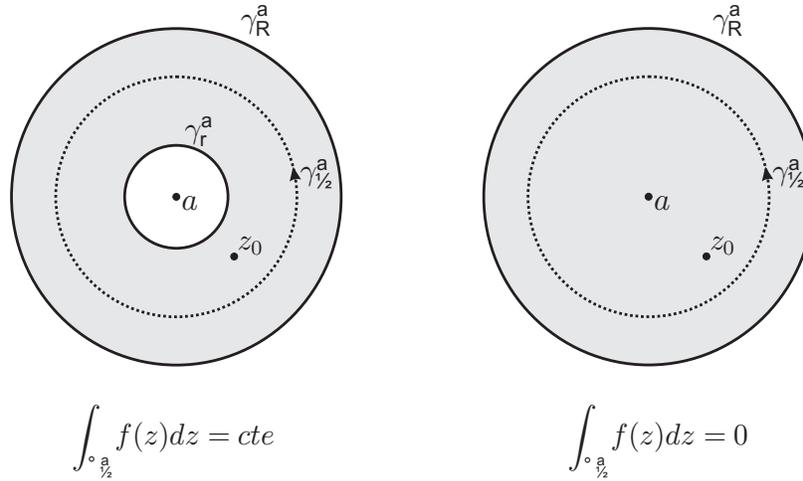


FIGURE 4.2 – Invariance vis-à-vis du rayon

Ou encore avec  $g(w) = wh(w)$ ,

$$\mathcal{I}(\rho) = 2i\pi \int_0^1 g(\rho e^{2i\pi t}) dt.$$

Posons  $w_0 = z_0 - a$  ; la fonction  $\rho \rightarrow g(\rho e^{2i\pi t})$  est continue, et pour  $\rho \neq |w_0|$  vérifie

$$\frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi t} g'(w) = e^{2i\pi t} (h(w) + wh'(w)).$$

Elle est donc continûment dérivable pour  $\rho \neq |w_0|$ , et par conséquent

$$\mathcal{I}'(\rho) = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi t} g'(\rho e^{2i\pi t}) dt = \frac{1}{\rho} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} g(\rho e^{2i\pi t}) dt = 0.$$

Il en résulte que  $\mathcal{I}$  est séparément constante sur  $[r, |z_0|]$  et  $[|z_0|, R]$ , et comme elle est continue, qu'elle est en fait globalement constante sur  $[r, R]$ .

▷ Si de plus  $r = 0$ , on a

$$\mathcal{I}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{I}(\rho) = 2i\pi \int_0^1 g(0) dt = 0.$$

Q.E.D.

LEMME 4.8 Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r \neq |z_0 - a|$ , alors



$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < |z_0 - a| \\ 1 & \text{si } r > |z_0 - a| \end{cases} \quad (4.13)$$



La structure de cette formule n'est pas sans rappeler celle des formules de représentation intégrale de la théorie du potentiel; nous aurons l'occasion de constater par la suite que cette ressemblance n'est pas fortuite. Notons bien que la fonction  $(z - z_0)^{-1}$  n'est pas susceptible du lemme 4.7 car elle n'est pas continue en  $z_0$ .

DÉMONSTRATION. Avec  $w = z - a$  et  $w_0 = z_0 - a$ , on aura

$$\int_{\gamma_r^a} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_r^a} \frac{dw}{w - w_0}$$

▷ Pour  $|w| = r < |w_0|$ ,

$$\frac{1}{w-w_0} = \frac{1}{w_0} \frac{1}{w/w_0 - 1} = -\frac{1}{w_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w}{w_0}\right)^n.$$

Comme le rayon de convergence de cette série est égal à  $|\zeta_0|$ , elle est uniformément convergente sur  $\gamma_r^0$ , et par conséquent

$$\int_{\gamma_r^0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w}{w_0}\right)^n dw = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\gamma_r^0} \left(\frac{w}{w_0}\right)^n dw,$$

d'où

$$\int_{\gamma_r^0} \frac{dw}{w-w_0} = -\frac{1}{w_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\gamma_r^0} \left(\frac{w}{w_0}\right)^n dw = -2i\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{r}{w_0}\right)^{n+1} \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)t} dt = 0.$$

▷ De même, si  $|w| = r > |w_0|$ ,

$$\frac{1}{w} \frac{1}{1-w_0/w} = \frac{1}{w} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w_0}{w}\right)^n,$$

d'où

$$\int_{\gamma_r^0} \frac{1}{\zeta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w_0}{w}\right)^n dw = 2i\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w_0}{r}\right)^n \int_0^1 \frac{dt}{e^{2i\pi nt}},$$

soit en fait

$$\int_{\gamma_r^a} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi \int_0^1 dt = 2i\pi.$$

Q.E.D.

**THÉORÈME 4.9 (Formule de Cauchy locale)** Si  $f$  est holomorphe dans le disque  $|z-a| < R$ , et si  $z_0$  appartient à ce disque avec  $|z_0-a| < r < R$ , alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \quad (4.14)$$

Il s'agit bien là d'une formule de représentation intégrale : la valeur de  $f$  en tout point du disque ouvert de rayon  $r$  peut être explicitement obtenue à partir de sa trace sur le bord de ce disque.

DÉMONSTRATION. On pose

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \neq z_0 \text{ et } \varphi(z_0) = f'(z_0).$$

Comme  $f$  est holomorphe, la fonction  $\varphi$  est continue dans le disque, et elle y est holomorphe, sauf peut-être en  $z_0$ . D'après le lemme 4.7 on aura

$$\int_{\gamma_r^a} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r^a} \varphi(z) dz = 0,$$

mais le lemme 4.8 nous montre que

$$\int_{\gamma_r^a} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0),$$

d'où le résultat.

Q.E.D.

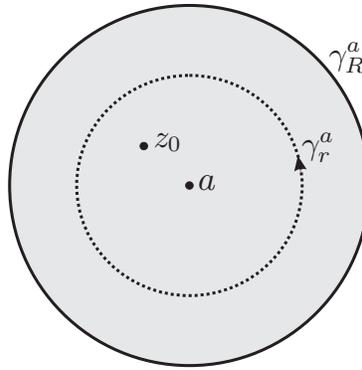


FIGURE 4.3 – Formule de Cauchy

### 4.3.2 Développement en série

THÉORÈME 4.10 Si  $f$  est holomorphe dans le disque  $|z - a| < R$ , alors

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - a)^n, \text{ où } a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall |z - a| < r < R, \quad (4.15)$$

et le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à  $R$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $z$  et  $r$  tels que  $|z - a| < r < R$ ; en vertu du théorème 4.9, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

mais, si  $w = \zeta - a$ ,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{w - (z - a)} = \frac{1}{w} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{z - a}{w} \right)^n,$$

d'où

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(z - a)^n}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

et le résultat.

Q.E.D.

La conséquence suivante est tout-à-fait remarquable, et n'a pas son équivalent pour les fonctions de variable réelle :

COROLLAIRE 4.11 Une fonction holomorphe est analytique.

Il y a donc coïncidence entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques d'une variable complexe. En particulier les fonctions holomorphes sont indéfiniment dérivables et sont sujettes au principe du prolongement analytique.

PROPOSITION 4.12 (Inégalités de Cauchy) Soit  $f$  holomorphe dans un ouvert contenant le disque  $|z - a| \leq r$ , alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \gamma_r^a} |f(z)|. \quad (4.16)$$

♠ Il s'agit là en fait d'une version renforcée de l'inégalité (2.2) dont nous avons dû faire l'hypothèse pour démontrer qu'une fonction de variable réelle indéfiniment dérivable est analytique, alors qu'elle est automatiquement vérifiée dans le cas d'une fonction holomorphe.

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 1.29, on aura en effet  $f^{(n)}(a) = n!a_n$ , or selon (4.15)

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

d'où

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \gamma_r^a} |f(\zeta)| \frac{2\pi r}{r^{n+1}} = \frac{1}{r^n} \sup_{\zeta \in \gamma_r^a} |f(\zeta)|, \quad (4.17)$$

et par conséquent

$$|f^{(n)}(a)| = n! |a_n| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\zeta \in \gamma_r^a} |f(\zeta)|.$$

Q.E.D.

**THÉORÈME 4.13 (Théorème de Liouville)** Une fonction entière  $f$  vérifiant

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^p,$$



où  $p$  est un entier positif ou nul, est un polynôme de degré  $p$  au plus. En particulier une fonction entière bornée est constante.

DÉMONSTRATION. D'après la formule (4.17), comme  $f$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, on aura  $\forall n, r$

$$|a_n| \leq \frac{C(1+r)^p}{r^n},$$

d'où  $a_n = 0, \forall n > p$ , soit  $f(z) = \sum_{n=0}^p a_n z^n$ .

Q.E.D.

Il n'existe bien sûr aucun résultat de ce type pour les fonctions de variable réelle.

**COROLLAIRE 4.14 (Théorème de d'Alembert)** Un polynôme non constant possède au moins une racine complexe.



DÉMONSTRATION. Considérons un polynôme  $P(z)$  de degré  $n$ , et la fonction  $f(z) = 1/P(z)$ . Si  $P(z)$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$ , elle est continûment dérivable et donc entière, et de plus bornée. En effet si on suppose que  $a_n \neq 0$

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = z^n \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z^{n-k}},$$

ce qui prouve que  $|P(z)| \rightarrow \infty$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ , et donc que  $f(z)$  est bornée en dehors d'un disque compact; comme d'autre part  $f(z)$  est continue, elle est bornée sur ce disque. Il en résulte que  $f(z)$  et donc  $P(z)$  est constant.

Q.E.D.

**COROLLAIRE 4.15** Si les racines  $a_i$ ,  $i = 1, m$  du polynôme  $P(z)$  ont pour multiplicité  $k_i$ , alors il existe une constante  $c$  telle que

$$P(z) = c \prod_{i=1}^m (z - a_i)^{k_i}$$

où  $k = \sum_{i=1, m} k_i$ , et  $k$  est le degré de  $P$ .

**DÉMONSTRATION.** En effet, un développement de Taylor nous fournit

$$P(z) = P(a_i) + (z - a_i)Q(z),$$

où  $Q(z)$  est un polynôme de degré  $k - 1$ , soit si  $a_i$  est une racine,  $P(z) = (z - a_i)Q(z)$ . En répétant l'opération, ce qui est toujours possible jusqu'à ce que  $Q(z)$  soit constant, et compte tenu du corollaire précédent, on obtient la formule annoncée.

Q.E.D.

### 4.3.3 Développement en série de Laurent

Nous venons de voir qu'une fonction entière dont le comportement à l'infini se compare à une puissance n'est rien de plus qu'un polynôme, il est donc particulièrement naturel de s'intéresser à des fonctions qui ne sont pas holomorphes dans tout le plan, et en particulier à des fonctions qui ne sont holomorphes qu'à l'extérieur d'un disque ou plus généralement dans une couronne.

**THÉORÈME 4.16** Si  $f(z)$  est holomorphe dans la couronne  $\Xi = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$ , alors,  $\forall z \in \Xi$ , on

♡  $a$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad (4.18)$$

où

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho^a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad \forall \rho \text{ tel que } r < \rho < R, \quad (4.19)$$

et la série converge normalement dans toute couronne  $\Xi' = \{z \in \mathbb{C} \mid r' < |z - a| < R'\}$  où  $r < r' < R' < R$ .

Il s'agit donc d'une simple généralisation de la formule (4.15) qui fournit les coefficients du développement en série entière d'une fonction holomorphe dans un disque.

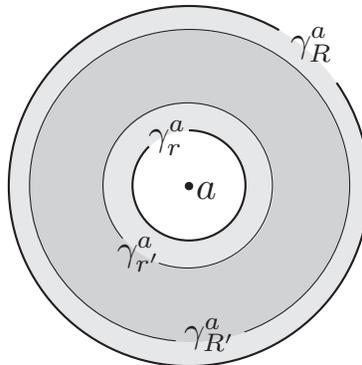


FIGURE 4.4 – Développement de Laurent

**DÉMONSTRATION.** Par changement de variable on se ramène au cas où  $a = 0$  en posant  $w = z - a$  et  $h(w) = f(z)$ .

▷ Comme  $\theta \rightarrow h(\rho e^{i\theta})$ , est continûment dérivable et périodique sur  $[0, 2\pi]$ , en vertu du corollaire 3.5, elle peut être développée en série de Fourier uniformément convergente ; on aura alors

$$h(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\rho) e^{in\theta} \text{ où } a_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Si on pose  $g(\rho, \theta) = h(\rho e^{i\theta})$ , on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = i\rho e^{i\theta} h'(\rho e^{i\theta}) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = e^{i\theta} h'(\rho e^{i\theta}) = -\frac{i}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta),$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} a'_n(\rho) &= -\frac{i}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} g(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta - \frac{i}{2\pi\rho} [g(\rho, \theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} \\ &= \frac{n}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{\rho} a_n(\rho). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $a_n$  est de la forme

$$a_n(\rho) = c_n \rho^n,$$

soit

$$h(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \rho^n \text{ ou encore } h(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n w^n.$$

▷ La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n w^n$  est normalement convergente sur  $[0, R']$  dès que  $R' < R$ , en effet

$$\begin{aligned} |c_n \rho^n| &= |a_n(\rho)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq M(\rho) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |h(\rho e^{i\theta})|. \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| (R')^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| R^n \left(\frac{R'}{R}\right)^n \leq M(R) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n = \frac{M(R)}{1 - R'/R} = M(R) \frac{R}{R - R'}$$

▷ De même la série  $\sum_{n < 0} c_n w^n$  est normalement convergente sur  $[r', +\infty]$  dès que  $r' > r$  car

$$\sum_{n < 0} |c_n| (r')^n = \sum_{n \geq 1} |c_{-n}| r^{-n} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \leq M(r) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r'}{r}\right)^n = M(r) \frac{r/r'}{1 - r/r'} = M(r) \frac{r}{r' - r}$$

▷ En conclusion, on aura

$$f(z) = h(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n,$$

avec

$$c_n = a_n(\rho) \rho^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) (\rho e^{i\theta})^{-n} d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho^a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \text{ pour } r < \rho < R.$$

Q.E.D.

Un développement en série de Laurent  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$  se présente donc sous la forme de la somme de deux séries entières, l'une d'entre elles  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n$  convergeant dans le disque de rayon  $R$ , et l'autre  $\sum_{m > 0} c_{-m} (z - a)^{-m}$ , relative à la variable  $1/(z - a)$ , convergeant à l'extérieur du disque de rayon  $r$ . ♠



## Chapitre 5

# La théorie de Cauchy globale

Au chapitre précédent, la formule de Cauchy (4.14) a été obtenue comme le résultat d'un calcul explicite relatif à une intégrale sur un cercle. En fait on peut montrer que ce résultat s'étend à une grande variété de chemins, au prix de l'abandon du caractère explicite des calculs.

### 5.1 L'indice d'un point par rapport à un lacet

La formule (4.13) nous a montré que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < |z_0 - a| \\ 1 & \text{si } r > |z_0 - a| \end{cases}$$

De façon plus générale

**DÉFINITION 5.1** Pour  $a \notin \gamma$ , la quantité

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz \quad (5.1)$$

est un entier relatif appelé indice du point  $a$  par rapport au lacet  $\gamma$ .

**DÉMONSTRATION.** Selon le changement de variable  $w = z - a$  et avec  $\delta(s) = \gamma(s) - a$ , on aura  $n(\gamma; a) = n(\delta; 0)$ . Choisissons le paramétrage du lacet  $\delta$  de telle sorte que  $\delta(0) = \delta(1)$  et posons

$$g(t) = \int_0^t \frac{\delta'(s)}{\delta(s)} ds ;$$

on aura donc

$$g(1) = \int_0^1 \frac{\delta'(s)}{\delta(s)} ds = 2i\pi n(\delta; 0) \text{ et } g'(t) = \frac{\delta'(t)}{\delta(t)},$$

d'où

$$\frac{d}{dt} (e^{-g(t)} \delta(t)) = -\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} e^{-g(t)} \delta(t) + e^{-g(t)} \delta'(t) = 0.$$

Il en résulte que

$$\delta(0) = e^{-g(0)} \delta(0) = e^{-g(1)} \delta(1) = e^{-g(1)} \delta(0),$$

soit

$$e^{-g(1)} = 1,$$

et par conséquent  $2i\pi n(\delta; 0) = g(1) = 2i\pi k$ , où  $k$  est un entier relatif.

*Q.E.D.*

Dans le cas où  $\lambda = \bigvee_{i=1}^n \gamma_i$  est un cycle, on posera

$$n(\lambda; a) = \sum_{i=1}^n n(\gamma_i; a).$$

### 5.1.1 Calcul pratique de l'indice

En anglais, de façon tout-à-fait judicieuse l'indice s'appelle *winding number* (nombre d'enroulement). Dans l'appendice C on montre qu'une méthode pratique de calcul de l'indice du point  $a$  par rapport au lacet  $\gamma$  est la suivante :

On trace une droite  $\Delta$  passant par  $a$ , on repère les intersections  $m_i$  de  $\Delta$  avec  $\gamma$ , à chacune desquelles on associe le nombre  $+1$  si, vu de  $a$ ,  $\gamma$  est parcourue dans le sens direct au voisinage de  $m_i$ , et le nombre  $-1$  si  $\gamma$  est parcourue dans le sens rétrograde. L'indice est alors la demi-somme de tous ces nombres.

PROPOSITION 5.2 Soit  $\gamma$  un lacet

- (i)  $n(\gamma; a)$  est constant sur chaque composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ .
- (ii) Si  $D$  est la composante connexe non bornée de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ , alors  $\forall a \in D$ , on a  $n(\gamma; a) = 0$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Soient  $D$  l'une des composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$  et  $a \in D$ . Notons  $f(x) = n(\gamma; x)$  et posons

$$H = \{x \in D \mid f(x) = f(a)\} ;$$

l'ensemble  $H$  est fermé, puisque  $f$  est continue, mais si  $y \in H$ , toujours par continuité,  $\exists r$  tel que  $|f(y) - f(x)| \leq 1/2$ ,  $\forall x \in B_r(y)$ . En fait comme  $f$  ne prend que des valeurs entières, on aura  $f(x) = f(y)$ ,  $\forall x \in B_r(y)$ , ce qui prouve que  $B_r(y) \subset H$ , et par conséquent que  $H$  est ouvert. Par connexité de  $D$  il en résulte que  $H = D$ , c'est-à-dire que  $f$  est constante sur chaque composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ , et en particulier sur celle qui contient l'extérieur d'un quelconque disque contenant  $\gamma$ .

▷ Comme  $\gamma$  est continue, son image est bornée, elle est donc contenue dans un disque, soit  $\Delta$ . Si  $a$  appartient au complémentaire de  $\Delta$ , la composante connexe  $D$  de  $a$  n'est pas bornée et contient l'extérieur de  $\Delta$ . C'est la seule composante connexe non bornée de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ , car d'une part toute autre composante non bornée rencontrerait l'extérieur de  $\Delta$  et d'autre part deux composantes connexes distinctes sont nécessairement disjointes.

▷ Soit  $z \in \Omega$ , on peut choisir  $b$  suffisamment grand pour que  $\pi|z - b| > \int_{\gamma} |d\zeta| = \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$  et par conséquent  $|n(\gamma; b)| < 1/2$ , il en résulte que  $n(\gamma; b) = 0$ , et comme l'indice est constant sur chaque composante connexe,  $n(\gamma; a) = 0 \forall a \in D$ .

Q.E.D.

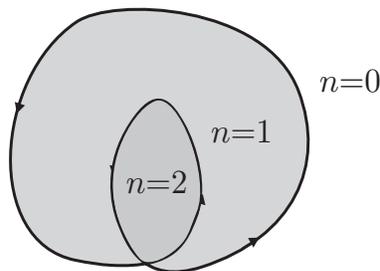


FIGURE 5.1 – trois composantes connexes

## 5.2 La formule de Cauchy globale

### DÉFINITION 5.3

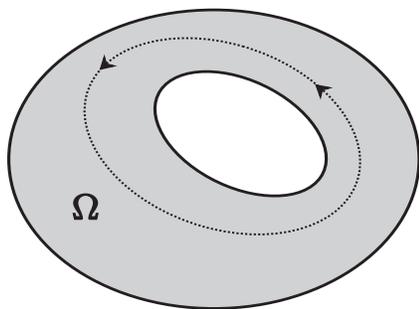
(i) Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets dans l'ouvert  $\Omega$ , on dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont homologues dans l'ouvert  $\Omega$  si  $n(\gamma_1; w) = n(\gamma_2; w)$  pour tout point  $w$  extérieur à  $\Omega$ .

(ii) On dit qu'un lacet  $\gamma$  est homologue à 0, s'il est homologue à un chemin constant, c'est-à-dire dont l'image est réduite à un point; c'est encore dire que  $n(\gamma; w) = 0, \forall w \notin \Omega$ .

On constate aisément que la relation d'homologie constitue une relation d'équivalence. Nonobstant la référence à Cauchy, la démonstration du théorème qui suit sous sa forme générale est récente.

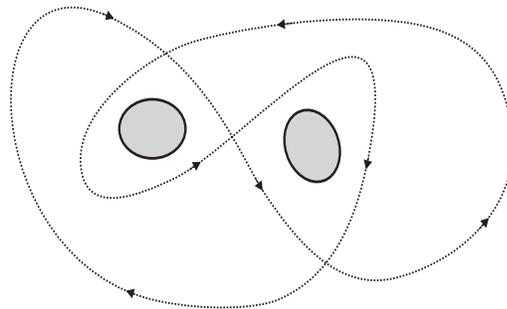
**THÉORÈME 5.4 (Formule de Cauchy : Dixon)** Soit  $\Omega$  un ouvert et  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega$ ; si  $\gamma$  est un lacet homologue à 0 dans  $\Omega$ , alors on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n(\gamma; a) f(a), \forall a \in \Omega \setminus \{\gamma\}. \quad (5.2) \quad \heartsuit$$



Chemin non homologue à 0

$\Omega$  est la zone grisée



Chemin homologue à 0.

$\Omega$  est le complémentaire de la zone grisée

DÉMONSTRATION.

▷ Posons

$$\varphi(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w \text{ et } \varphi(w, w) = f'(w);$$

la fonction  $\varphi$  est continue et holomorphe en  $z$  en dehors de la diagonale, mais de plus

$$\begin{aligned} \varphi(z, w) - \varphi(w, w) &= \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \\ &= \frac{f'(w)(z - w) + f''(w)(z - w)^2/2 + o(z - w)^2}{z - w} - f'(w) \\ &= \frac{f''(w)}{2}(z - w) + o(z - w), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $z \rightarrow \varphi(z, w)$  est dérivable, et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, w) = \frac{f''(w)}{2}.$$

Par ailleurs, pour  $z \neq w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, w) &= \frac{f'(z)(z-w) - (f(z) - f(w))}{(z-w)^2} \\ &= \frac{f'(w)(z-w) + f''(w)(z-w)^2 - f'(w)(z-w) - f''(w)(z-w)^2/2 + o(z-w)^2}{(z-w)^2} \\ &= \frac{f''(w)}{2} + \frac{o(z-w)^2}{(z-w)^2}, \end{aligned}$$

puisque  $f$  est indéfiniment dérivable d'après le corollaire 4.11. Il en résulte que  $z \rightarrow \varphi(z, w)$  est continûment dérivable, c'est-à-dire holomorphe.

► On pose alors

$$H = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} \mid n(\gamma; w) = 0\},$$

c'est une union de composantes connexes de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$  d'après la proposition 5.2, et donc un ouvert de  $\mathbb{C}$ , d'après le

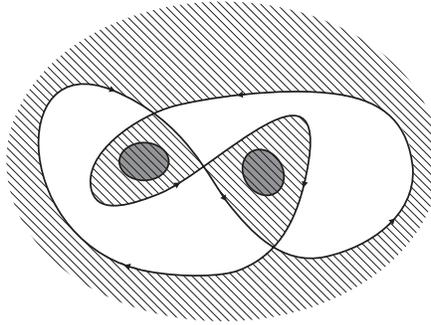


FIGURE 5.2 – L'ensemble  $H$

corollaire D.12, puisque  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ ; de plus  $\mathbb{C} = H \cup \Omega$ , puisque  $n(\gamma; w) = 0$  dans  $\overline{\Omega}^c$ . Posons

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, w) dw, \quad z \in \Omega \text{ et } g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in H,$$

définition dont la cohérence mérite d'être vérifiée pour  $z \in \Omega \cap H$ . C'est bien le cas car si  $z \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi(z, w) dw &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dw = f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{z-w} - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z-w} dw \\ &= -f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= -2i\pi n(\gamma; z) f(z) + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\gamma} \varphi(z, w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \text{ pour } z \in \Omega \cap H.$$

► La fonction  $g$  est analytique dans  $\Omega$  et dans  $H$ , et c'est par conséquent une fonction entière; elle tend vers 0 au voisinage de l'infini car ce dernier est inclus dans  $H$ , elle est donc nulle d'après le théorème de Liouville 4.13. C'est dire que

$$0 = g(a) = \int_{\gamma} \frac{f(a) - f(z)}{a-z} dz = f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{a-z} - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{a-z} dz, \quad \forall a \in \Omega \setminus \{\gamma\},$$

soit

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi n(\gamma; a) f(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \{\gamma\}.$$

Q.E.D.

En appliquant le théorème précédent à la fonction  $g(z) = (z - a)f(z)$ , on obtient le

**COROLLAIRE 5.5 (Théorème de Cauchy)** Soit  $\Omega$  un ouvert et  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega$ . Si  $\gamma$  est un lacet homologue à 0 dans  $\Omega$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Notons qu'une démonstration tout-à-fait analogue montre que les théorèmes précédents s'appliquent également à des cycles composés d'un nombre fini de lacets. Une autre expression du théorème de Cauchy est la suivante : l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un lacet ne dépend que de la classe d'homologie de ce lacet.

Remarquons par ailleurs que la formule de Cauchy (5.2) nous permet également d'accéder aux dérivées de  $f$  par dérivation sous le signe somme :

$$n(\gamma; a)f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (5.3)$$

Voici maintenant un résultat remarquable, réciproque du théorème de Cauchy 5.5, particulièrement utile lorsqu'il s'agit de démontrer qu'une fonction est holomorphe.

**PROPOSITION 5.6 (Théorème de Morera)** Si  $\Omega$  est un ouvert, et  $f$  une fonction continue sur  $\Omega$ , alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  dès que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \quad (5.4)$$

pour tout triangle  $T$  contenu dans  $\Omega$ .

Notons bien que  $f$  peut être holomorphe dans  $\Omega$  sans que (5.4) soit vérifiée, cela dépend en fait des propriétés géométriques de  $\Omega$ , ainsi que nous le verrons plus précisément au paragraphe 5.5.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $a \in \Omega$ , il existe un disque  $B$  de centre  $a$  contenu dans  $\Omega$ . Notons  $[a, b]$  le chemin rectiligne joignant  $a$  à  $b$ . Pour  $z \in B$ , posons

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w) dw.$$

Si  $z_0 \in B$ , le triangle de sommets  $a$ ,  $z$  et  $z_0$  est inclus dans  $B$  et par hypothèse, on aura

$$\int_{[a,z] \cup [z,z_0] \cup [z_0,a]} f(w) dw = 0, \text{ d'où } F(z) = \int_{[a,z_0] \cup [z_0,z]} f(w) dw.$$

Il en résulte que le quotient différentiel de  $F$  en  $z_0$  a pour expression

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f(w) dw,$$

d'où

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(w) - f(z_0)) dw,$$

puisque

$$\frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} dw = \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 (z - z_0) dt = 1.$$

Par conséquent

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \sup_{w \in [z_0, z]} |f(w) - f(z_0)|,$$

d'où

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \rightarrow f(z_0) \text{ quand } z \rightarrow z_0.$$

Nous avons donc montré que  $F$  était dérivable, avec pour dérivée  $f$ , par hypothèse continue. Il en résulte que  $F$  est holomorphe et par conséquent indéfiniment dérivable ; il en est donc bien sûr de même de sa dérivée  $f$ .

Q.E.D.

**LEMME 5.7 (Cantor)** *Si les  $\Delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forment une suite de fermés non vides emboîtés dans un espace métrique complet et si  $\text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$ , alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$  se compose d'un point unique.*

**DÉMONSTRATION.** Considérons une suite  $x_n \in \Delta_n$ , elle est de Cauchy et converge par conséquent, soit vers  $x$ , et il est clair que  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ . Supposons qu'il existe un autre point  $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$  ;  $\forall \varepsilon$  on aura  $d(x, y) < \varepsilon$ , d'où  $y = x$ .

Q.E.D.

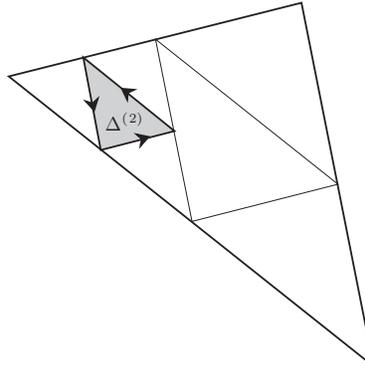


FIGURE 5.3 – Triangles emboîtés

**PROPOSITION 5.8 (Théorème de Goursat)** *Si  $\Omega$  est un ouvert, et si  $f$  est dérivable dans  $\Omega$ , alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .*

**DÉMONSTRATION.** Nous démontrerons que  $f'$  est continue au voisinage de tout point de  $\Omega$  à l'aide du théorème de Morera 5.6.

► Soit donc  $\Delta$  un triangle dans le disque  $D \subset \Omega$  et  $\delta$  son bord. A l'aide des points milieux sur chaque côté de  $\Delta$ , on peut le subdiviser en quatre triangles égaux  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 4$ , de bords  $\delta_i$  ; si on décide de parcourir chaque  $\delta_i$  dans le même sens que  $\delta$ , on a

$$\int_{\delta} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\delta_i} f(z) dz,$$

ainsi que  $|\delta_i| = |\delta|/2$  et  $\text{diam } \Delta_i = \text{diam } \Delta/2$ . Soit alors  $\delta^{(1)}$  l'un des  $\delta_i$  tel que

$$\left| \int_{\delta^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \left| \int_{\delta_i} f(z) dz \right|, i = 1, 4,$$

on aura

$$\left| \int_{\delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\delta^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

En réitérant le processus (voir la figure 5.3), on construit une suite de triangles  $\Delta^{(n)}$  de bords  $\delta^{(n)}$  vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots \supset \Delta^{(n)} \supset \dots \\ \text{diam } \Delta^{(n)} = 2^{-n} \text{diam } \Delta, \quad |\delta^{(n)}| = 2^{-n} |\delta| \\ \left| \int_{\delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\delta^{(n)}} f(z) dz \right| \end{aligned}$$

Selon le lemme 5.7, il en résulte que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^{(n)}$  est réduite à un point unique, soit  $z_0$ .

▷ Soit alors  $\varepsilon > 0$ , comme  $f$  est dérivable en  $z_0$  il existe  $\eta$  tel que pour  $0 < |z - z_0| < \eta$ , on ait

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Pour  $n$  suffisamment grand, on aura  $\text{diam } \Delta^{(n)} < \eta$ , et comme  $z_0 \in \Delta^{(n)}$ , il en résulte que  $\Delta^{(n)} \subset B_\eta(z_0)$ . On aura

$$\int_{\delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\delta^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz$$

car d'après le corollaire 5.5, comme  $\delta^{(n)}$  est homologue à 0 dans  $\Omega$ ,

$$0 = \int_{\delta^{(n)}} dz = \int_{\delta^{(n)}} z dz.$$

▷ Il en résulte que

$$\left| \int_{\delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \int_{\delta^{(n)}} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \text{diam } \Delta^{(n)} |\delta^{(n)}| \leq \varepsilon 4^{-n} |\delta| \text{diam } \Delta,$$

et par conséquent

$$\left| \int_T f(z) dz \right| \leq \varepsilon |T| \text{diam } \Delta,$$

d'où  $\int_{\delta} f(z) dz = 0$ . D'après la proposition 5.6, il en résulte que  $f$  est holomorphe.

Q.E.D.

On constate donc qu'en fait *il est tout-à-fait possible de définir une fonction holomorphe comme étant dérivable, sans hypothèse de continuité de la dérivée*; c'est d'ailleurs un choix fréquent dans la littérature. L'avantage de la présentation que nous avons choisie réside dans le fait qu'elle permet de disjointre la démonstration du théorème de Cauchy de celle du théorème de Goursat, dont l'utilité est d'ailleurs plus théorique que pratique. ♠

**REMARQUE 5.9** *On doit noter que lors de la preuve de la Proposition 5.8 les deux résultats qui sont intervenus dans la démonstration sont d'une part le théorème de Cauchy 5.5 appliqué à la fonction constante et à la fonction  $f(z) = z$ , qui sont à l'évidence analytiques, ainsi que le théorème de Morera qui ne nécessite que la continuité de  $f$ , et qu'il n'a donc pas été utilisé de résultat faisant intervenir la continuité de la dérivée de  $f$ .*

### 5.3 Le principe de symétrie

Notons  $P^+$  et  $P^-$  les demi-plans respectifs des complexes dont la partie imaginaire est positive ou négative.

PROPOSITION 5.10 Soit  $U$  un ouvert de  $P^+$ , dont le bord contient une partie ouverte  $\beta$  de l'axe réel. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $U$ , continue sur l'adhérence de  $U$ , et telle que  $f(\beta)$  soit réel. Soit enfin  $\widehat{U}$  le symétrique de  $U$  par rapport à l'axe réel, alors la fonction  $g$  définie selon

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in \widehat{U}$$

prolonge la fonction  $f$  en une fonction holomorphe définie sur  $U \cup \delta \cup \widehat{U}$ .

DÉMONSTRATION. Montrons que  $g(z)$  est holomorphe dans  $\widehat{U}$ . On aura en effet

$$\left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, -\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right),$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + i \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

en vertu des relations de Cauchy-Riemann (4.4). Comme de plus  $g(z) = f(z)$ , pour  $z \in \beta$ , le lemme 5.11 ci-dessous permet de conclure.

Q.E.D.

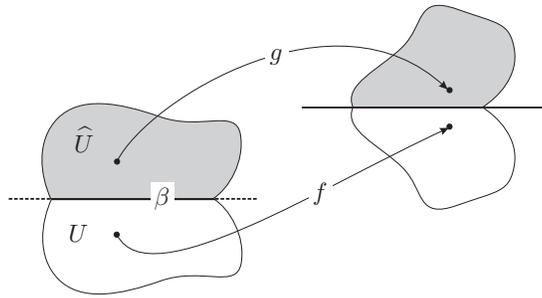


FIGURE 5.4 – Le principe de symétrie

LEMME 5.11 Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et si la fonction  $f$  est continue et séparément holomorphe dans  $\Omega \cap P^+$  et  $\Omega \cap P^-$ , alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION. Soit donc un point  $z_0$  de  $\Omega$  situé sur l'axe réel, nous montrerons que  $f$  est holomorphe au voisinage de  $z_0$ . Considérons un disque  $B(z_0)$  de centre  $z_0$  inclus dans  $\Omega$ , selon le théorème de Morera 5.6, il suffit de montrer que l'intégrale de  $f$  le long du bord de tout triangle inclus dans  $B(z_0)$  est nulle. Les seuls triangles intéressants sont ceux qui ne sont pas inclus dans  $P^+$  ou  $P^-$ . Soit donc  $\Delta$  un triangle,  $\Delta^+ = P^+ \cap \Delta$  et  $\Delta^- = P^- \cap \Delta$ , on aura

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta^+} f(z) dz + \int_{\partial \Delta^-} f(z) dz,$$

car les contributions respectives du bord  $\beta$  se compensent. Comme  $f$  est séparément holomorphe dans  $B(z_0) \cap P^+$  et  $B(z_0) \cap P^-$ , en vertu du théorème de Cauchy on aura  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  pour tout lacet inclus dans l'un de ces deux ensembles. En vertu de la continuité de  $f$ , il en résulte que

$$\int_{\partial \Delta^+} f(z) dz = \int_{\partial \Delta^-} f(z) dz = 0,$$

et la conclusion.

Q.E.D.

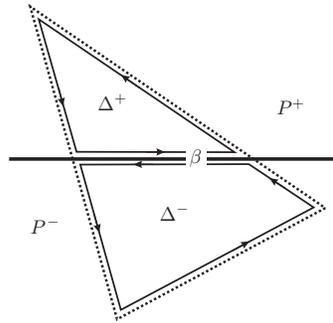


FIGURE 5.5 – Symétrie par rapport à une droite

Ce résultat se généralise aisément au cas d'une symétrie par rapport à un cercle

**LEMME 5.12** Notons  $J_R(a)$  l'inversion de pôle  $a$  et de puissance  $R$ ,  $j$  la symétrie  $j(z) = \bar{z}$ ,  $C$  la transformation de Cayley (voir l'annexe **G**), et  $S_R(a)$  la similitude définie par  $S_R(a)(z) = Rz + a$ . On aura

$$S_R(a) \circ C \circ j \circ C^{-1} \circ (S_R(a))^{-1} = J_R(a)$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que

$$J_R(a)(z) = a + \frac{R^2(z-a)}{|z-a|^2} = a + \frac{R^2}{(\bar{z}-\bar{a})}$$

et

$$C(z) = \frac{z-i}{z+i} \text{ et } C^{-1}(z) = -i \frac{z+1}{z-1}.$$

On a tout d'abord

$$C \circ j \circ C^{-1} = J_1(0),$$

en effet

$$\frac{i(\bar{z}+1)/(\bar{z}-1)-i}{i(\bar{z}+1)/(\bar{z}-1)+i} = \frac{2}{2\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

D'autre part

$$S_R(a) \circ J_1(0) \circ (S_R(a))^{-1} = \frac{R^2}{(\bar{z}-\bar{a})} + a = J_R(a).$$

Q.E.D.

**THÉORÈME 5.13** Soient  $B_1 = B_{\rho_1}(a_1)$  et  $B_2 = B_{\rho_2}(a_2)$  deux disques de bords respectifs  $C_1$  et  $C_2$ ,  $U$  un ouvert de  $B_1$ , dont le bord contient un arc  $\alpha$  du cercle  $C_1$ ,  $f$  une application holomorphe de  $U$ , continue sur  $\bar{U}$ , telle que  $f(\alpha)$  soit contenu dans  $C_2$ . Alors la fonction

$$g(z) = J_{\rho_2}(a_2) \circ f \circ J_{\rho_1}(a_1)(z), \quad z \in J_{\rho_1}(a_1)(U)$$

prolonge la fonction  $f$  à  $\hat{U} = J_{\rho_1}(a_1)(U)$  en une fonction holomorphe sur  $U \cup \alpha \cup \hat{U}$ .

DÉMONSTRATION. On posera  $h_1 = S_{\rho_1}(a_1) \circ C$  et  $h_2 = S_{\rho_2}(a_2) \circ C$  et

$$\varphi = h_2^{-1} \circ f \circ h_1.$$

De la proposition **G.9** on déduit que  $\varphi$  est une application holomorphe de  $V = h_1^{-1}(U) \subset P^+$  dans  $P^+$ , qui prend des valeurs réelles aux points de  $\beta = h_1^{-1}(\alpha)$ , et est par conséquent susceptible de la proposition **5.10** : elle se prolonge à  $\widehat{V}$  selon

$$\gamma = j \circ \varphi \circ j$$

en une application holomorphe. Il ne reste plus pour conclure qu'à poser

$$\begin{aligned} g &= h_2 \circ \gamma \circ h_1^{-1} = h_2 \circ j \circ \varphi \circ j \circ h_1^{-1} \\ &= h_2 \circ j \circ h_2^{-1} \circ f \circ h_1 \circ j \circ h_1^{-1} \\ &= J_{\rho_2}(a_2) \circ f \circ J_{\rho_1}(a_1), \end{aligned}$$

d'après le lemme **5.12**.

Q.E.D.

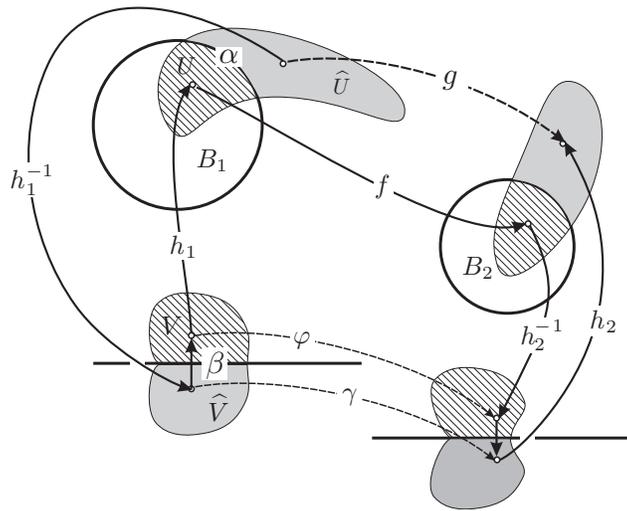


FIGURE 5.6 – Symétrie par rapport à un cercle

Il s'agit donc d'un résultat essentiellement similaire à celui de la proposition **5.10** où la symétrie par rapport à l'axe réel a été remplacée par l'inversion.

## 5.4 Le bord orienté d'un compact

Pour certains cycles simples mais fréquemment rencontrés la détermination de l'indice est particulièrement facile et la démonstration du théorème de Cauchy peut s'effectuer à partir de la formule de Green.

**LEMME 5.14** *Si  $\gamma$  est un chemin continûment différentiable, et si sa dérivée  $\gamma'$  ne s'annule pas, alors l'application  $t \rightarrow \gamma(t)$  est injective au voisinage de chaque valeur du paramètre  $t$ , et son image partage localement le plan en deux régions.*

**DÉMONSTRATION.** Fixons  $t$  et supposons non nulle l'application linéaire  $\gamma'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . On aura alors

$$\gamma'(t) \cdot h = z_0 h, \text{ où } z_0 \neq 0.$$

Notons  $\xi$  un nombre complexe non colinéaire à  $z_0$  et définissons  $\varphi : ]a, b[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par la formule  $\varphi(t, u) = \gamma(t) + u\xi$  ; en particulier on aura  $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$ . La dérivée de  $\varphi$  est un isomorphisme car tout nombre complexe

s'exprime d'une façon et d'une seule comme combinaison linéaire à coefficients réels de  $z_0$  et  $\xi$ , et le théorème d'inversion locale nous montre alors qu'il existe des voisinages ouverts,  $V$  et  $W$  respectifs de  $(t, 0)$  et  $\gamma(t)$  tels que  $\varphi$  soit un difféomorphisme  $V \rightarrow W$ . On peut réduire  $V$  à une boule centrée en  $(t, 0)$  et choisir (par exemple)  $\xi$  de telle façon que le jacobien de  $\varphi$  soit positif, c'est-à-dire que  $\varphi$  conserve l'orientation, ou encore  $\Im(\overline{z_0}\xi) > 0$ . Si  $V^+$  et  $V^-$  sont les intersections respectives de  $V$  avec  $]a, b[ \times \mathbb{R}^+$  et  $]a, b[ \times \mathbb{R}^-$ , alors leurs images respectives  $W^+$  et  $W^-$  par  $\varphi$  sont des ouverts connexes disjoints tels que  $W = W^+ \cup W^- \cup (\gamma \cap W)$ . C'est bien dire que localement  $\gamma$  sépare le plan en deux régions.

Q.E.D.

**DÉFINITION 5.15** Soit  $K$  un compact dont le bord est formé d'une union finie de lacets  $\gamma_i, i = 1, n$  continûment différentiables par morceaux. On dit que le cycle  $\lambda = \sum_{i=1}^n \gamma_i$  est le bord orienté du compact  $K$  (Figure 5.7) si

- (i) les  $\gamma_i$  n'admettent pas de points doubles et ne se recoupent pas entre eux.
- (ii) les  $\gamma_i'$  ne s'annulent pas
- (iii) la tangente à  $\gamma_i$  orientée dans le sens de parcours s'obtient par rotation de  $\pi/2$  à partir de la normale extérieure.

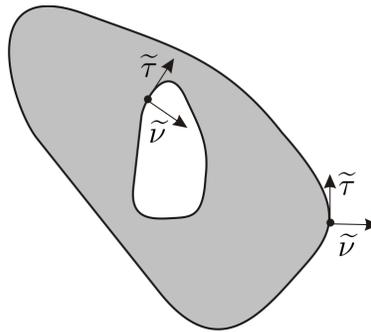


FIGURE 5.7 – Le bord orienté d'un compact

Il s'agit en fait d'hypothèses raisonnablement contraignantes relatives à la géométrie de  $K$  qui permettent d'utiliser la formule de Green. Nous allons voir au passage que dans ce contexte, le théorème et la formule de Cauchy en découlent aisément.

**PROPOSITION 5.16** Soient  $\gamma$  le bord orienté du compact  $K$ , et  $f$  holomorphe dans l'ouvert  $\Omega \supset K$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a), \forall a \in \overset{\circ}{K},$$

**DÉMONSTRATION.** On suppose que  $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ , où  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}, b_i > a_i$ .

▷ Posons  $c(x, y) = x + iy, \gamma = c \circ \tilde{\gamma}, K = c(\tilde{K}), \tilde{f} = f \circ c$ ; d'après la formule de Green, si  $\tilde{\nu}_j$  est la normale extérieure à  $\tilde{K}$ , de composantes  $(\tilde{\nu}_j)_x$  et  $(\tilde{\nu}_j)_y$ , comme l'élément de longueur le long de  $\tilde{\gamma}_j$  n'est autre que  $d\tilde{\sigma}_j = \|\tilde{\gamma}'_j(t)\| dt$ ,

$$\int_{\tilde{K}} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_j(t) \left( (\tilde{\nu}_j)_x(t) + i(\tilde{\nu}_j)_y(t) \right) \|\tilde{\gamma}'_j(t)\| dt.$$



Par conséquent, selon la relation de Cauchy-Riemann (4.4), comme la tangente à  $\tilde{\gamma}_j$  s'obtient par rotation de  $\pi/2$  à partir de  $\tilde{\nu}_j$  on aura

$$0 = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_j(t) \left( (\tilde{\tau}_j)_x(t) - i(\tilde{\tau}_j)_y(t) \right) \left\| \tilde{\gamma}'_j(t) \right\| dt.$$

Notons alors que  $\tilde{\tau}_j = \tilde{\gamma}'_j(t) / \left\| \tilde{\gamma}'_j(t) \right\|$ , d'où

$$\begin{aligned} 0 &= -i \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_j(t) \left( i(\tilde{\tau}_j)_y(t) + (\tilde{\tau}_j)_x(t) \right) \left\| \tilde{\gamma}'_j(t) \right\| dt \\ &= -i \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} f \circ \gamma_j(t) \gamma'_j(t) dt = -i \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz, \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.5)$$

▷ Avec  $f(z) = 1/(z - b)$ , il en résulte en particulier que  $n(\lambda; b) = 0$  dès que  $b$  est extérieur à  $K$ .

▷ Soit  $a \in \overset{\circ}{K}$ , et  $r$  suffisamment petit pour que le disque  $D$  de rayon  $r$  et de centre  $a$  soit inclus dans  $K$ . Notons  $\lambda_r^a$  le cercle de rayon  $r$  et de centre  $a$  parcouru dans le sens *rétrograde* (Figure boriente\_cauchy) soit

$$\lambda_r^a(t) = a + r e^{-2i\pi t}.$$

On pose  $K' = K \setminus D$ , ce qui fait de  $\gamma \vee \lambda_r^a$  le bord orienté de  $K'$  ; selon (5.5) on aura

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_r^a} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

soit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^1 f(a + r e^{-2i\pi t}) dt,$$

et ceci  $\forall r$  ; il en résulte que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

Q.E.D.

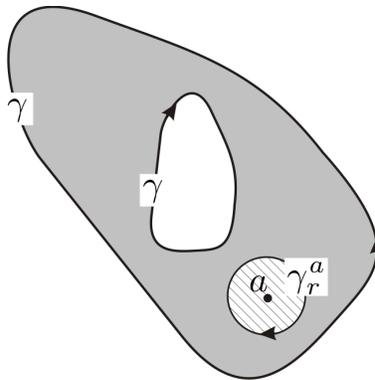


FIGURE 5.8 – La formule de Cauchy

Par comparaison avec la formule (5.2) on en déduit le

COROLLAIRE 5.17 Soit  $\lambda$  le bord orienté d'un compact  $K$ , on a

$$n(\lambda; w) = 1, \forall w \in \overset{\circ}{K} \text{ et } n(\lambda; w) = 0, \forall w \in K^c = \mathbb{C} \setminus K. \quad (5.6)$$

### 5.4.1 Développement en série de Laurent

Revenons un instant sur la démonstration de la formule (4.18). On notera  $\Gamma_a$  le cercle de rayon  $R$  et de centre  $a$  parcouru dans le sens direct et  $\gamma_a$ , le cercle de rayon  $r$  également parcouru dans le sens direct. D'après la proposition 5.16, on a, pour  $r < |z| < R$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{g(w)}{w - z_0} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} \frac{g(w)}{w - z_0} dw, \end{aligned}$$

où  $w = \zeta - a$ ,  $g(w) = f(\zeta)$  et  $z_0 = z - a$ . Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z_0} &= \frac{1}{w} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - z_0/w} = \frac{1}{w} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{z_0}{w}\right)^n, \quad |z_0| < |w| \\ \frac{1}{w - z_0} &= -\frac{1}{z_0 - w} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - w/z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{w}{z_0}\right)^n \\ &= -\frac{1}{z_0} \sum_{n \leq 0} \left(\frac{z_0}{w}\right)^n = -\frac{1}{z_0} \sum_{n \leq -1} \left(\frac{z_0}{w}\right)^{n+1}, \quad |z_0| > |w|; \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma_0} \frac{g(w)}{w} \left(\frac{z_0}{w}\right)^n dw + \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \leq -1} \int_{\gamma_0} \frac{g(w)}{z_0} \left(\frac{z_0}{w}\right)^{n+1} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma_a} f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \leq -1} \int_{\gamma_a} f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \end{aligned}$$

soit

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^n (z-a),$$

où

$$c_n = \int_{\Gamma_a} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n \geq 0 \text{ et } c_n = \int_{\gamma_a} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n < 0. \quad (5.7)$$

Il s'agit là encore du développement de  $f$  en série de Laurent, dont l'expression des coefficients semble moins générale que (4.19); ce n'est en fait qu'une apparence en vertu du lemme 4.7. Nous allons voir ci-dessous que cette propriété d'invariance vis-à-vis du chemin n'est pas limitée aux cercles concentriques. ♠

## 5.5 Le théorème de Cauchy homotopique

Selon le contexte, le théorème de Cauchy prend des formes diverses, l'une des plus utiles nous indique quelles sont les conditions pour que l'intégrale d'une fonction analytique le long d'un chemin ne dépende que des extrémités de ce chemin. C'est en particulier dans ce cadre que l'on peut étudier la question du *prolongement analytique*. ♠

**DÉFINITION 5.18**

(i) On dit que le chemin  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  est homotope à  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  s'il existe une application continue  $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  telle que

$$\begin{aligned}\varphi(0, t) &= \gamma_0(t) \text{ et } \varphi(1, t) = \gamma_1(t), \\ \varphi(u, 0) &= \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \text{ et } \varphi(u, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1).\end{aligned}$$

(ii) On dit que le lacet lacets  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  est homotope à  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  s'il existe une application continue  $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  telle que

$$\varphi(0, t) = \gamma_0(t), \quad \varphi(1, t) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(u, 0) = \varphi(u, 1).$$

(iii) En particulier on dit que le lacet  $\gamma_0$  est homotope à un point (ou à 0) s'il est homotope à un lacet constant.

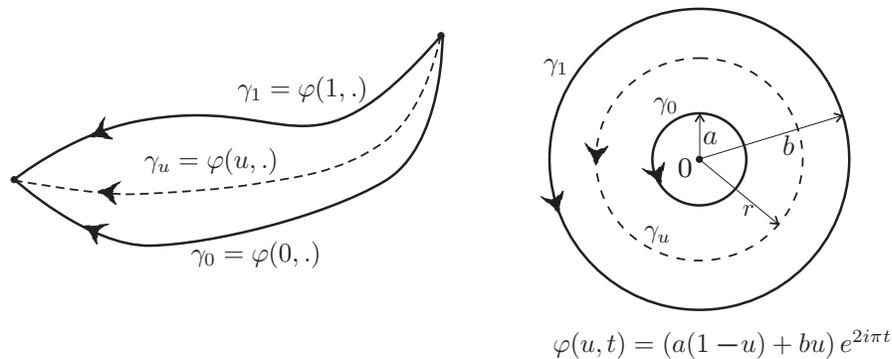


FIGURE 5.9 – Homotopie

**PROPOSITION 5.19** La relation d'homotopie est une relation d'équivalence

**DÉMONSTRATION.**

- ▷ Tout d'abord  $\gamma$  est homotope à lui-même par l'application  $\varphi(u, t) = \gamma(t)$ .
- ▷ De plus si  $\gamma_1$  est homotope à  $\gamma_0$  par  $\varphi(u, t)$ , alors  $\gamma_0$  est homotope à  $\gamma_1$  par  $\varphi'(u, t) = \varphi(1-u, t)$ .
- ▷ Enfin, si  $\gamma_0$  est homotope à  $\gamma_1$  par  $\varphi$  et  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$  par  $\psi$ , alors  $\gamma_0$  est homotope à  $\gamma_2$  par  $\theta$  où

$$\theta(u, t) = \begin{cases} \varphi(2u, t) & \text{pour } 0 \leq u \leq 1/2 \\ \psi(2u-1, t) & \text{pour } 1/2 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Q.E.D.

On parlera donc de lacets homotopes entre eux. On note  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ .

**DÉFINITION 5.20** On dit qu'un ouvert  $\Omega$  est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet dans  $\Omega$  est homotope à un point.

▷ Ainsi que le vocabulaire peut le laisser penser, il existe une étroite relation entre connexité et simple connexité. On démontre en effet à l'aide du théorème de Runge **10.16**, qu'un ouvert connexe est simplement connexe si et seulement si son complémentaire sur la sphère de Riemann (voir le chapitre **10**) est connexe. Cette constatation ouvre la voie à la notion de n-connexité : on dit qu'un ouvert connexe est n-connexe si son complémentaire comporte  $n$  composantes connexes.

▷ Il existe également une relation entre l'homotopie et l'homologie, on démontre en effet au chapitre 12 qu'un ouvert connexe est simplement connexe si et seulement si les lacets y sont tous homologues à 0.

THÉORÈME 5.21 Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux lacets homotopes dans  $\Omega$  et si  $f$  y est holomorphe, alors



$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \tag{5.8}$$

Il en résulte en particulier que deux lacets homotopes sont homologues, il suffit à cet effet de choisir  $f(z) = 1/(z - \alpha)$ , où  $\alpha \in \Omega^c$ ; le contraire est faux en général. ♠

DÉMONSTRATION.

▷ La démonstration est particulièrement simple lorsque l'homotopie  $\varphi$  est deux fois continûment dérivable. Posons

$$g(u) = \int_0^1 f \circ \varphi(u, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, t) dt,$$

on aura

$$g(0) = \int_0^1 f \circ \varphi(0, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) dt = \int_{\gamma_0} f(z) dz \text{ et } g(1) = \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_0^1 \left[ f' \circ \varphi(u, t) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, t) + f \circ \varphi(u, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial t}(u, t) \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( f \circ \varphi(u, t) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) dt = \left[ f \circ \varphi(u, t) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right]_{t=0}^{t=1} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

▷ Dans le cas général, l'idée consiste à réaliser une succession de chemins polygonaux intermédiaires entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Notons que  $\varphi$  est uniformément continue, que  $K = \varphi([0, 1]^2)$  est compact, et maillons  $[0, 1]^2$  selon une grille carrée de pas  $1/n$ , en choisissant  $n$  suffisamment grand pour que

$$\|(u, t) - (u', t')\| < 2/n \implies |\varphi(u, t) - \varphi(u', t')| < r = d(K, \Omega^c).$$

On note

$$J_{j,k} = \left[ \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$$

les mailles de la grille et

$$Z_{j,k} = \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right).$$

On aura  $\text{diam } J_{j,k} = \sqrt{2}/n < 2/n$ , et par conséquent  $\text{diam } \varphi(J_{j,k}) < r$  d'où  $P_{j,k} = \varphi(J_{j,k}) \subset B_r(Z_{j,k}) \subset \Omega$ . Soit  $[Z_{j,k}, Z_{j,k+1}, Z_{j+1,k+1}, Z_{j+1,k}, Z_{j,k}]$ , le polygone dont les sommets sont les images de ceux de  $J_{j,k}$ , il est tout entier contenu dans  $B_r(Z_{j,k})$ . Comme le complémentaire de  $B_r(Z_{j,k})$  est connexe, selon la proposition 5.2, l'indice de  $\partial P_{j,k}$  par rapport à tout point de ce complémentaire est nul. et on aura

$$\int_{\partial P_{j,k}} f(z) dz = 0$$

pour toute fonction  $f$  analytique dans  $\Omega$  (voir la figure 5.10).

▷ Considérons maintenant le chemin  $Q_j = [Z_{j,0}, Z_{j,1}, \dots, Z_{j,n-1}, Z_{j,n} = Z_{j,0}]$ , c'est un lacet, et on aura

$$0 = \sum_{k=0, n-1} \int_{\partial P_{j,k}} f(z) dz = \int_{Q_j} f(z) dz - \int_{Q_{j+1}} f(z) dz,$$

soit

$$\int_{Q_0} f(z) dz = \int_{Q_n} f(z) dz$$

▷ Posons maintenant  $\sigma_k(t) = \gamma_0(t)$  pour  $k/n < t < (k+1)/n$ , le chemin  $\sigma_k$  a pour extrémités  $Z_{0,k}$  et  $Z_{0,k+1}$  et le cycle  $\sigma_k \vee [Z_{0,k+1}, Z_{0,k}]$  étant inclus dans le disque  $B_r(Z_{0,k})$  est homologue à 0. Il en résulte que

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=0, n-1} \int_{\sigma_k} f(z) dz = \sum_{k=0, n-1} \int_{[Z_{0,k}, Z_{0,k+1}]} f(z) dz = \int_{Q_0} f(z) dz$$

On aura de même

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = \int_{Q_n} f(z) dz$$

et par conséquent

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{Q_0} f(z) dz = \int_{Q_n} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Q.E.D.

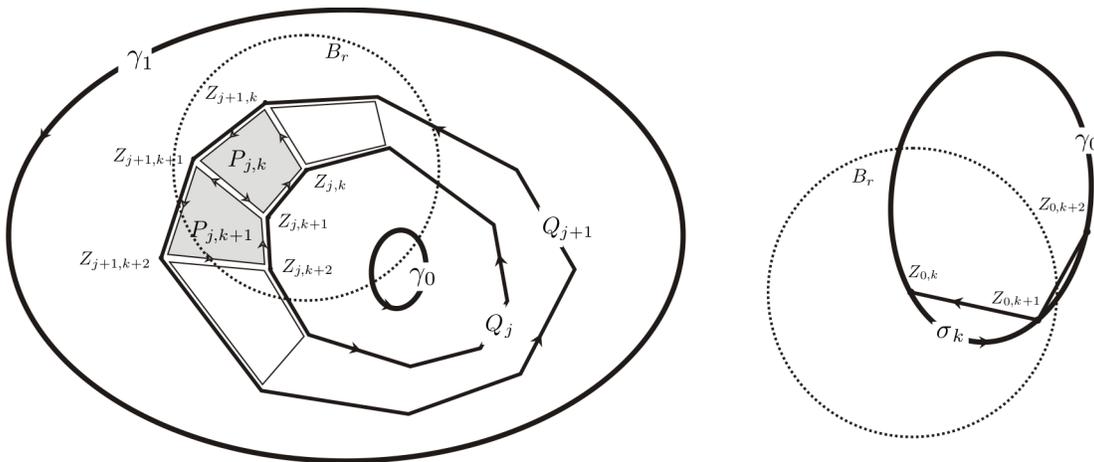


FIGURE 5.10 – Invariance par homotopie

Comme un lacet constant est homologue à 0, le corollaire suivant s'en déduit :

**COROLLAIRE 5.22**

♥ (i) Si  $\gamma$  est un lacet homotope à un point dans  $\Omega$  et si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

(ii) Si  $\Omega$  est simplement connexe, alors tout lacet dans  $\Omega$  est homologue à 0 et par conséquent pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega$ , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Le théorème relatif aux chemins se déduit de celui relatif aux lacets :

♥ COROLLAIRE 5.23 Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux chemins homotopes dans l'ouvert  $\Omega$  et si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (5.9)$$

DÉMONSTRATION. Nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= \gamma_0(t), \quad \varphi(1, t) = \gamma_1(t) \\ \varphi(u, 0) &= \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \text{ et } \varphi(u, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{aligned}$$

Définissons le lacet  $\gamma$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0(3t), \quad 0 \leq t \leq 1/3 \\ \gamma(t) &= \gamma_0(1) = \gamma_1(1), \quad 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ \gamma(t) &= \gamma_1(3(1-t)), \quad 2/3 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

soit en fait un aller le long de  $\gamma_0$  suivi d'un arrêt puis d'un retour le long de  $\gamma_1$ . On aura donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Posons

$$\begin{aligned} \psi(u, t) &= \varphi(0, 3t(1-u)), \quad 0 \leq t \leq 1/3 \\ \psi(u, t) &= \varphi(3t-1, 1-u), \quad 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ \psi(u, t) &= \varphi(1, 3(1-t)(1-u)), \quad 2/3 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

on aura

$$\psi(0, t) = \gamma(t) \text{ et } \psi(1, t) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0),$$

d'où il résulte que  $\gamma$  est homotope à un point, et par conséquent

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Q.E.D.

## 5.6 Primitives

La situation est là encore différente du cas des fonctions d'une variable réelle, en effet dans ce cas, si  $f$  est intégrable, et si on pose

$$F(x) = C + \int_a^x f(t) dt,$$

alors  $F' = f$  presque partout. Nous allons voir que dans le cas d'une variable complexe, l'existence d'une primitive dans l'ouvert  $\Omega$  dépend dans une large mesure des propriétés topologiques de  $\Omega$ . ♠

Rappelons que

DÉFINITION 5.24 On dit que  $f$  admet une primitive dans l'ouvert  $\Omega$ , s'il existe une fonction dérivable  $F$  définie dans  $\Omega$  telle que  $F' = f$ .

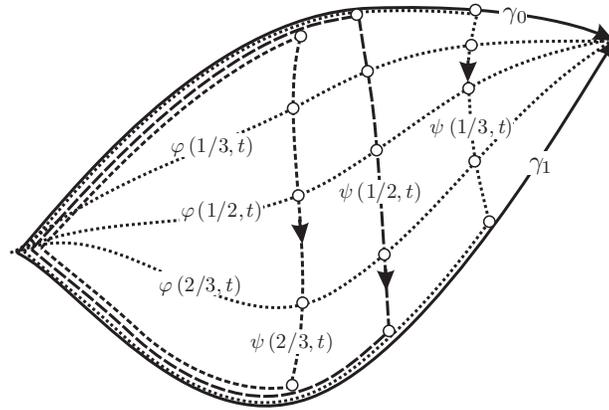


FIGURE 5.11 – Invariance par homotopie de chemins

**PROPOSITION 5.25** Si  $f$  admet une primitive  $F$  dans  $\Omega$ , alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

**DÉMONSTRATION.** En effet, la fonction  $F$  étant dérivable est holomorphe en vertu du théorème de Goursat 5.8, elle est donc indéfiniment dérivable d'après le corollaire 4.11, ainsi bien entendu que sa dérivée  $f$ . ♡

Q.E.D.

**PROPOSITION 5.26**

- ♡ (i) Si  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ , alors  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  pour tout lacet  $\gamma$  dans  $\Omega$ .  
 (ii) Si  $f$  est continue sur l'ouvert connexe  $\Omega$ , et si  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  pour tout lacet  $\gamma$  dans  $\Omega$ , alors  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ .

**DÉMONSTRATION.**

▷ Si  $f$  admet une primitive, et si  $\gamma$  est un lacet on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b F' \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = [F \circ \gamma]_a^b = 0.$$

▷ Réciproquement, choisissons  $z_0 \in \Omega$ , et notons  $\lambda$  un chemin d'origine  $z_0$  et d'extrémité  $z$ . Posons alors

$$F(z) = \int_{\lambda} f(w)dw.$$

Cette définition est indépendante du chemin, car si  $\mu$  est un tel autre chemin,  $\gamma = \lambda \vee (-\mu)$  est un lacet, et par conséquent, d'après l'hypothèse,

$$\int_{\lambda} f(w)dw - \int_{\mu} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw = 0$$

Soit alors  $\Delta$ , un disque de rayon  $r$  centré en  $z$  inclus dans  $\Omega$  et  $|h|$  assez petit pour que  $z+h \in \Delta$ . Dans ce disque, en vertu de la proposition 1.28, comme  $f$  est analytique en vertu du théorème de Morera, elle admet une primitive soit  $G(z)$ . Pour tout chemin  $\nu(h)$ , d'origine  $z$  et d'extrémité  $z+h$  dans  $\Delta$ , on aura donc  $\int_{\nu(h)} f(w)dw = G(z+h) - G(z)$ , et par conséquent

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\lambda \vee \nu(h)} f(w)dw - \int_{\lambda} f(w)dw = \int_{\nu(h)} f(w)dw = G(z+h) - G(z)$$

d'où

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h} = G'(z) = f(z).$$

Q.E.D.

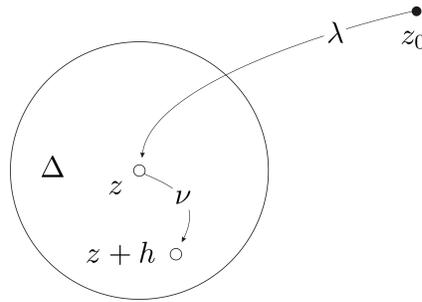


FIGURE 5.12 – Primitive

**COROLLAIRE 5.27** Si  $f$  est holomorphe dans l'ouvert  $\Omega$  simplement connexe, alors  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ . ♥

**DÉMONSTRATION.** En effet d'après le corollaire 5.22, on aura  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  pour tout lacet, et d'après la proposition précédente 5.26,  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ .

Q.E.D.

Si on applique en particulier ce corollaire à la fonction  $1/z$ , on voit que *le Logarithme admet une détermination holomorphe dans tout ouvert simplement connexe ne contenant pas l'origine*. Notons bien que  $f$  peut être holomorphe sans admettre de primitive. C'est par exemple le cas de  $f(z) = 1/(z-a)$  dans le disque pointé  $\dot{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$  (qui n'est pas simplement connexe !) puisque ♥  
♠

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = n(\gamma; a).$$

On touche là du doigt la différence entre primitive locale et primitive globale puisque  $1/(z-a)$  n'est autre que la dérivée de  $\text{Log}(z-a)$ , fonction dont nous avons démontré par ailleurs qu'elle n'admet pas de détermination continue dans le disque pointé. Bien entendu, une fonction peut admettre une primitive dans  $\Omega$ , même si ce dernier n'est pas simplement connexe, c'est en particulier le cas de ♠

$$(z-a)^k, \quad k \neq -1,$$

dont une primitive n'est autre que

$$\frac{1}{k+1} (z-a)^{k+1}.$$

On voit donc que la validité du théorème de Cauchy est soumise à des conditions diverses et indépendantes : ♠

- ♦ Relative à la fonction  $f$  : l'existence d'une primitive
- ♦ Relative au lacet  $\gamma$  : qu'il soit homologue à zéro
- ♦ Relative à l'ouvert  $\Omega$  : qu'il soit simplement connexe

Ces conditions ne sont ni équivalentes entre elles ni indépendantes et ne rendent pas compte de toutes les situations. Cependant on montre au chapitre 12 que les conditions suivantes sont équivalentes dans un ouvert connexe : ♠

- (i)  $\Omega$  est simplement connexe
- (ii) Toute fonction analytique dans  $\Omega$  y admet une primitive
- (iii) Tout chemin dans  $\Omega$  est homologue à 0.

Dans le chapitre suivant nous aborderons le cas non simplement connexe dans le cadre de la formule des résidus.

# Chapitre 6

## Le principe du maximum

La formule de Cauchy locale (4.14) témoigne d'une considérable solidarité entre les valeurs d'une fonction holomorphe en divers points, dont le principe du maximum sous les diverses formes décrites ci-dessous constitue l'une des conséquences.

**DÉFINITION 6.1 (Propriété de moyenne)** Soit  $f$  continue dans l'ouvert  $\Omega$ . On dit que  $f$  possède la propriété de moyenne dans  $\Omega$  si pour tout disque fermé  $\overline{B}_r(a)$  inclus dans  $\Omega$ , on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

**LEMME 6.2 (Principe du maximum I)** Si  $f$  possède la propriété de moyenne dans l'ouvert  $\Omega$  et si  $|f|$  possède un maximum relatif en  $a \in \Omega$ , soit  $|f(a)| \geq |f(z)|$  dès que  $|z - a|$  est assez petit, alors  $f$  est constante dans un voisinage de  $a$ .

**DÉMONSTRATION.** Le résultat est évident si  $f(a) = 0$ , supposons donc que ce n'est pas le cas et posons  $g(z) = f(z)/f(a)$ . Selon la propriété de moyenne,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(g(a + re^{i\theta})) d\theta,$$

d'où

$$0 = \int_0^{2\pi} (1 - \Re(g(a + re^{i\theta}))) d\theta.$$

Comme de plus pour  $|z - a|$  assez petit  $|f(a)| \geq |f(z)|$  d'où  $1 \geq |g(z)| \geq \Re(g(z))$ , on a  $1 \geq \Re(g(a + re^{i\theta}))$  dès que  $r$  est assez petit. Il en résulte que  $\Re(g(a + re^{i\theta})) = 1$ ; de même  $\Im(g(a + re^{i\theta})) = 0$ , d'où  $g(z) = 1$  au voisinage de  $a$ , soit  $f(z) = f(a)$ .

*Q.E.D.*

### THÉORÈME 6.3 (Principe du maximum II)

- (i) Une fonction holomorphe possède la propriété de moyenne ♥
- (ii) Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $f$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$ . Si  $|f|$  possède un maximum relatif en  $a \in \Omega$ , alors  $f$  est constante.

**DÉMONSTRATION.**

▷ Soit  $\overline{B}_r(a)$  un disque centré en  $a$  de rayon  $r$  inclus dans  $\Omega$ , d'après la formule (4.14), on aura

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r^a} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

▷ Selon le lemme 6.2,  $f$  est constante au voisinage de  $a$ , et en vertu du principe du prolongement analytique (corollaire 2.5), il en résulte que  $f$  est constante dans  $\Omega$ .

Q.E.D.

REMARQUE 6.4 On peut donner de 6.3 (ii) une démonstration plus élégante : en effet si  $f$  n'est pas constante, selon le théorème 8.5  $f(\Omega)$  est ouvert, d'où il existe une boule de centre  $f(a)$  contenue dans  $f(\Omega)$ , et par conséquent un point  $\zeta$  (au moins !) tel que  $|f(\zeta)| > |f(a)|$ . De même on peut trouver  $\zeta$  tel que  $|\Re f(\zeta)| > |\Re f(a)|$ , ce qui prouve qu'une fonction analytique dont le module ou la valeur absolue de la partie réelle (ou imaginaire !) est maximal en un point est constante.

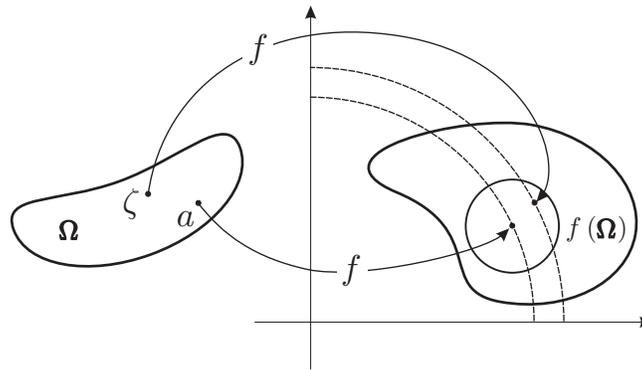


FIGURE 6.1 – Le principe du maximum

## 6.1 En domaine borné

COROLLAIRE 6.5 Si  $\Omega$  est un ouvert relativement compact de  $\mathbb{C}$ , si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et continue sur  $\heartsuit \overline{\Omega}$ , alors elle atteint son maximum sur  $\partial\Omega$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $\overline{\Omega}$  est compact,  $f$  y atteint son maximum soit en  $a$ . Supposons que  $a \in \Omega$  et notons  $C$  la composante connexe de  $a$  dans  $\Omega$ , c'est un ouvert en vertu du corollaire D.12, et par conséquent d'après le théorème 6.3,  $f$  est constante dans  $C$  ; elle atteint donc (en particulier) son maximum sur  $\partial C$ .

▷ Soit  $x \in \partial C$ , on ne peut avoir  $x \in \Omega$ , car si tel était le cas, il existerait un voisinage connexe  $V$  de  $x$  dans  $\Omega$ , ce voisinage aurait une intersection non vide avec  $C$  puisque  $x$  appartient à l'adhérence de  $C$ , et ne serait pas inclus dans  $C$  puisque  $x$  n'appartient pas à  $C$ . L'ensemble  $C$  serait alors strictement inclus dans  $C \cup V$ , ce qui constitue une contradiction puisque selon la proposition D.4,  $C \cup V$  est connexe. Par ailleurs  $\overline{C} \subset \overline{\Omega}$ , et par conséquent  $\partial C \subset \partial\Omega$  ; le résultat annoncé en découle.

Q.E.D.

Le principe du maximum admet quelques raffinements permettant de se faire une image très précise des fonctions holomorphes bornées ou de partie réelle bornée dans un disque.

**COROLLAIRE 6.6 (Lemme de Schwarz)**

(i) Si  $f$  est analytique dans le disque  $B_r$  de rayon  $r$  centré à l'origine et si

$$f(0) = 0 \text{ et } |f(z)| \leq M, \forall z \in B_r,$$

alors

$$|f(z)| \leq M |z| / r, \forall z \in B_r.$$

(ii) Si de plus

$$\exists a \in B_r, a \neq 0, \text{ tel que } |f(a)| = M |a| / r,$$

alors

$$f(z) = Mz/r, \forall z \in B_r.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Considérons la fonction  $g(z) = f(z)/z$ , pour  $z \in \dot{B}_r = B_r \setminus \{0\}$  ; elle est holomorphe dans la boule pointée  $\dot{B}_r$  et vérifie  $zg(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 0$ . D'après le lemme 7.1, il en résulte qu'elle se prolonge en une fonction holomorphe dans  $B_r$ . On pourra donc poser  $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = (f(z) - f(0))/z = f'(0)$ .

▷ Si on suppose que  $|g(z_0)| > M/r$  pour un certain  $z_0 \in B_r$ , on peut choisir  $\varepsilon > 0$  tel que  $|z_0| \leq r - \varepsilon$  et  $|g(z_0)| > M/(r - \varepsilon)$ , soit en fait  $0 < \varepsilon < \min(r - |z_0|, r - M/|g(z_0)|)$ . Mais par hypothèse, si  $|z| = r - \varepsilon$ , on a  $|g(z)| \leq M/(r - \varepsilon)$ , et par conséquent en vertu du corollaire 6.5 du principe du maximum,  $|g(z)| \leq M/(r - \varepsilon) \forall |z| \leq r - \varepsilon$ , ce qui constitue une contradiction. Il en résulte que  $|g(z)| \leq M/r \forall |z| < r$ , soit  $|f(z)| \leq M|z|/r \forall |z| \in B_r$ .

▷ Si  $|f(a)| = M|a|/r$  pour un certain  $a \in B_r$ , alors  $|g(a)| = M/r$ , c'est dire que  $g$  possède un maximum en  $a$ , d'où il résulte d'après le principe du maximum 6.3, que  $g$  est constante, soit  $f(z) = \lambda z$  où  $|\lambda| = M/r$ .

Q.E.D.

**COROLLAIRE 6.7 (Carathéodory)** Si  $f$  est analytique dans le disque ouvert  $B_r$  de rayon  $r$  centré à l'origine et si  $\exists A > 0$  tel que

$$f(0) = 0 \text{ et } \Re f(z) \leq A, \forall z \in B_r,$$

alors

$$|f(z)| \leq 2A|z|/(r - |z|), \forall z \in B_r.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Pour  $z$  tel que  $\Re z \leq A$  on a  $\Re z \leq 2A - \Re z = \Re(2A - z)$ , et comme de plus  $\Re(2A - z) \geq -\Re z$ , on a  $|\Re(2A - z)| \geq |\Re z|$ . Par ailleurs  $\Im(2A - z) = -\Im z$ , d'où  $|\Im(2A - z)| = |\Im z|$  ; il en résulte que  $|2A - z| \geq |z|$ .

▷ Considérons maintenant la transformation homographique

$$u(z) = \frac{z}{2A - z} \text{ qui a pour fonction réciproque } v(\zeta) = \frac{2A\zeta}{1 + \zeta}.$$

▷ Pour  $|\zeta| \leq 1$ , posons

$$\varphi(\zeta) = u \circ f(r\zeta),$$

c'est une fonction holomorphe qui vérifie  $\varphi(0) = 0$ . Comme  $r\zeta \in B_r$ , on aura  $\Re f(r\zeta) \leq A$  d'où en vertu du premier item  $|\varphi(\zeta)| \leq 1$ . Selon le lemme de Schwarz 6.6 on aura donc  $|\varphi(\zeta)| \leq |\zeta|$ .

▷ Avec  $\xi = rz$ , on aura

$$f(\xi) = v \circ \varphi(\xi/r) = \frac{2A\varphi(\xi/r)}{1 + \varphi(\xi/r)},$$

d'où, comme  $|1 + \varphi(\xi/r)| \geq 1 - |\varphi(\xi/r)|$  et  $|\varphi(\xi/r)| \leq |\xi/r|$ ,

$$|f(\xi)| \leq \frac{2A|\xi/r|}{1 - |\xi/r|} = \frac{2A|\xi|}{r - |\xi|}.$$

Q.E.D.

**COROLLAIRE 6.8 (Hadamard)** Soit  $m \in \mathbb{N}$ , si  $f$  est une fonction entière telle que

$$\Re f(z) \leq A|z|^m, \quad \forall z,$$

alors  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m$ .

En particulier une fonction entière dont la partie réelle est bornée est constante.

DÉMONSTRATION.

▷ On aura  $|f(z)| \leq |f(0)| + |f(z) + f(0)|$  et pour  $|z| < r$ ,  $\Re f(z) \leq A|z|^m \leq Ar^m$ , d'où  $\Re(f(z) + f(0)) \leq 2Ar^m$ ; par conséquent, d'après le corollaire 6.7,  $|f(z)| \leq |f(0)| + 4Ar^m|z|/(r - |z|)$ .

▷ Choisissons alors  $r = 2|z|$ , on aura

$$|f(z)| \leq |f(0)| + 2^{m+2}A|z|^m,$$

et le résultat d'après le théorème de Liouville 4.13.

Q.E.D.

## 6.2 En domaine non borné

Dans le cas de certains ouverts non bornés, on peut obtenir des résultats analogues au corollaire 6.5, sous réserve de conditions adéquates sur le comportement à l'infini de la fonction considérée.

**THÉORÈME 6.9 (Phragmén-Lindelöf I)** Soient

$$\mathcal{S}_\alpha = \{z = re^{i\theta} \mid r > 0, |\theta| < \pi/2\alpha\}, \quad \alpha > 1/2$$

ainsi que  $f$  continue sur  $\overline{\mathcal{S}_\alpha}$  et holomorphe dans  $\mathcal{S}_\alpha$ . Si  $f$  est bornée sur  $\partial\mathcal{S}_\alpha$  et si pour  $|z|$  suffisamment grand,

$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha,$$

alors

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_\alpha} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\mathcal{S}_\alpha} |f(z)|.$$

DÉMONSTRATION. On note  $M = \sup_{z \in \partial D_\alpha} |f(z)|$ .

▷ Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma \in ]\beta, \alpha[$ ,  $\alpha[$ ,  $\gamma > 0$ , et  $F_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon z^\gamma} f(z)$ , où, pour  $z = \rho e^{i\theta}$ , la détermination de  $z^\gamma$  est choisie de la façon suivante :  $z^\gamma = \rho^\gamma e^{i\gamma\theta}$ ,  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ ; on aura

$$|F_\varepsilon(z)| = |f(z)| e^{-\varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta}.$$

▷ Si  $z \in \partial \mathcal{S}_\alpha$ , on a  $|\theta| = \pi/2\alpha$ , d'où  $|\gamma\theta| < \alpha|\theta| = \pi/2$  et par conséquent  $\cos \gamma\theta > 0$ . Il en résulte que

$$|F_\varepsilon(z)| \leq |f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \partial \mathcal{S}_\alpha.$$

▷ Si  $z \in \mathcal{S}_\alpha$ , et  $|z|$  est assez grand, on a

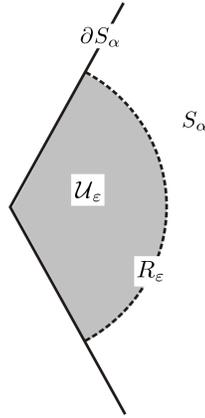
$$|F_\varepsilon(z)| \leq C e^{-\varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta} e^{\rho^\beta} = C e^{\rho^\beta - \varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta},$$

or

$$\rho^\beta - \varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta \leq \rho^\beta - \varepsilon \rho^\gamma \cos \pi\gamma/2\alpha = \rho^\gamma (\rho^{\beta-\gamma} - \varepsilon \cos \pi\gamma/2\alpha),$$

qui tend vers  $-\infty$  quand  $\rho \rightarrow \infty$ . Il en résulte que pour  $z \in \mathcal{S}_\alpha$ , assez grand, soit  $|z| \geq R_\varepsilon$ , on a  $|F_\varepsilon(z)| \leq M$ .

▷ Notons alors  $\mathcal{U}_\varepsilon$  l'intersection de  $\mathcal{S}_\alpha$  et du disque ouvert de rayon  $R_\varepsilon$ . Si  $z \in \partial \mathcal{U}_\varepsilon$ , on a  $|F_\varepsilon(z)| \leq M$ , et par



conséquent sur  $\mathcal{U}_\varepsilon$  tout entier en vertu du corollaire 6.5, puisque  $\mathcal{U}_\varepsilon$  est relativement compact. Il en résulte que  $|F_\varepsilon(z)| \leq M, \forall z \in \mathcal{S}_\alpha$ ; c'est dire que

$$|f(z)| = |F_\varepsilon(z)| e^{\varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta} \leq M e^{\varepsilon \rho^\gamma \cos \gamma\theta}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

et par conséquent  $\sup_{z \in \mathcal{S}_\alpha} |f(z)| \leq M = \sup_{z \in \partial \mathcal{S}_\alpha} |f(z)|$ .

Q.E.D.

**THÉORÈME 6.10 (Phragmén-Lindelöf II)** Soit  $f$  holomorphe dans la bande

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{z \mid a < \Re z < b\}$$

et continue sur  $\overline{\mathcal{B}_{a,b}}$ . Si  $f$  est bornée sur  $\partial \mathcal{B}_{a,b}$  et si pour  $|z|$  assez grand,

$$|f(z)| \leq C e^{|z|^\beta}, \quad \beta \geq 0,$$

alors

$$\sup_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial \mathcal{B}_{a,b}} |f(z)|.$$

DÉMONSTRATION.

▷ On pose  $M = \sup_{z \in \partial \mathcal{B}_{a,b}} |f(z)|$  et  $F_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^n} f(z)$ , où  $\varepsilon > 0$ ,  $n > b$ ,  $n = 2 \pmod{4}$ . Avec  $z = \rho e^{i\theta}$  on a alors

$$|F_\varepsilon(z)| = |f(z)| e^{\varepsilon \rho^n \cos n\theta}.$$

▷ Quand  $|z| = \rho \rightarrow \infty$ ,  $|\theta| \rightarrow \pi/2$ , et par conséquent  $n\theta \rightarrow \pm\pi \pmod{2\pi}$ , soit  $\cos n\theta \rightarrow -1$ . Il en résulte que  $\rho^{b-n} + \varepsilon \cos n\theta \rightarrow -\varepsilon$  et par conséquent  $|F_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$ . Si  $\mathcal{U}_\varepsilon$  est l'intersection de  $\mathcal{B}_{a,b}$  et de la boule de rayon  $R_\varepsilon$ , pour  $R_\varepsilon$  assez grand on aura donc  $\sup_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |F_\varepsilon(z)| = \sup_{z \in \mathcal{U}_\varepsilon} |F_\varepsilon(z)|$ .

▷ D'après le corollaire 6.5 on a  $\sup_{z \in \mathcal{U}_\varepsilon} |F_\varepsilon(z)| = \sup_{z \in \partial \mathcal{U}_\varepsilon} |F_\varepsilon(z)|$ , et par conséquent  $\sup_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |F_\varepsilon(z)| = \sup_{z \in \partial \mathcal{B}_{a,b} \cap \mathcal{U}_\varepsilon} |F_\varepsilon(z)| = M_\varepsilon$ .

▷ Soit alors  $z \in \mathcal{B}_{a,b}$ ,  $\varepsilon_k$  une suite qui tend vers 0 et  $\zeta_k$  un point de  $\partial \mathcal{B}_{a,b} \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_k}$  où  $M_{\varepsilon_k}$  est atteint, on a donc  $\forall k$  assez grand

$$|F_{\varepsilon_k}(z)| \leq |F_{\varepsilon_k}(\zeta_k)| = |f(\zeta_k)| |e^{\varepsilon_k(\zeta_k)^n}| \leq M |e^{\varepsilon_k(\zeta_k)^n}|,$$

et par conséquent, avec  $\zeta_k = r_k e^{i\tau_k}$ ,

$$|f(z)| = |F_{\varepsilon_k}(z)| e^{-\varepsilon_k \rho^n \cos n\theta} \leq M e^{\varepsilon_k \rho^n ((r_k/\rho)^n \cos n\tau_k - \cos n\theta)}.$$

▷ Si la suite  $\zeta_k$  n'est pas bornée, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle tend vers l'infini, d'où comme précédemment  $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos n\tau_k = -1$ , d'où il résulte que  $(r_k/\rho)^n \cos n\tau_k \rightarrow -\infty$ , et par conséquent que  $\varepsilon_k \rho^n ((r_k/\rho)^n \cos n\tau_k - \cos n\theta)$  est négatif au-delà d'un certain  $k$ , d'où  $|f(z)| \leq M$ .

▷ Si la suite  $\zeta_k$  est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, soit vers  $\zeta = r e^{i\tau}$ , et on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \rho^n ((r_k/\rho)^n \cos n\tau_k - \cos n\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \rho^n ((r/\rho)^n \cos n\tau - \cos n\theta) = 0$$

, d'où  $|f(z)| \leq M$ .

▷ On a donc démontré que, dans tous les cas,

$$|f(z)| \leq M = \sup_{z \in \partial \mathcal{B}_{a,b}} |f(z)|.$$

Q.E.D.

**THÉORÈME 6.11 (Le théorème des trois droites d'Hadamard)** Soit  $f$  holomorphe dans la bande  $\mathcal{B}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re z < b\}$ , continue et bornée sur  $\overline{\mathcal{B}_{a,b}}$ . La fonction  $\text{Log } M(x)$  où  $M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$  est convexe sur l'intervalle  $[a, b]$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Remarquons tout d'abord que si  $M(a)$  (par exemple) est nul, alors le principe de symétrie de Schwartz 5.10 nous assure que  $f$  se prolonge et une fonction holomorphe sur la bande  $[-b + 2a, b]$ , d'où la nullité de  $f$  en vertu du principe des zéros isolés 2.8.

▷ On peut donc supposer que  $M(a)$  et  $M(b)$  ne sont pas nuls; notons  $C = \sup_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |f(z)|$ . Posons  $z = x + iy$  et

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}},$$

on aura

$$M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} = e^{\frac{b-x}{b-a} \text{Log } M(a)} = e^{\frac{b-x}{b-a} \text{Log } M(a)} e^{\frac{-iy}{b-a} \text{Log } M(a)}$$

d'où

$$|g(z)| = M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}},$$

et en particulier  $|g(a + iy)| = M(a)$  et  $|g(b + iy)| = M(b)$ .

▷ La fonction  $\text{Log } |g|$  est une combinaison convexe de  $\text{Log } M(a)$  et  $\text{Log } M(b)$ , elle prend donc ses valeurs entre  $\text{Log } M(a)$  et  $\text{Log } M(b)$ , et comme le Logarithme est une fonction croissante, il en résulte que  $\inf_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |g(z)| = \min(M(a), M(b))$ . Posons  $h = f/g$ , on aura

$$|h(a + iy)| = \frac{|f(a + iy)|}{M(a)} \leq 1 \text{ et } |h(b + iy)| = \frac{|f(b + iy)|}{M(b)} \leq 1,$$

d'où  $|h(z)|_{\partial \mathcal{B}_{a,b}} \leq 1$  ; comme de plus

$$|h(z)|_{\mathcal{B}_{a,b}} \leq \frac{C}{\inf_{z \in \mathcal{B}_{a,b}} |g(z)|} = \frac{C}{\min(M(a), M(b))}$$

il résulte du théorème 6.10 que  $|h(z)|_{\mathcal{B}_{a,b}} \leq 1$ .

▷ On a donc démontré que  $|f(z)| \leq M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}} \forall z \in \mathcal{B}_{a,b}$ , d'où  $M(x) \leq M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}$  ou encore  $\text{Log } M(x) \leq \frac{b-x}{b-a} \text{Log } M(a) + \frac{x-a}{b-a} \text{Log } M(b)$ .

Q.E.D.

REMARQUE 6.12 Notons qu'il suffit que  $f$  soit bornée sur  $\partial \mathcal{B}_{a,b}$  et vérifie les hypothèses du théorème 6.10 pour que les hypothèses du théorème 6.11 soient vérifiées.

COROLLAIRE 6.13 (Le théorème des trois cercles d'Hadamard) Soit  $f$  holomorphe dans la couronne  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < |z| < \beta\}$ , continue sur  $\overline{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$ . La fonction  $\text{Log } N(r)$  où  $N(r) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\theta})|$  est une fonction convexe de  $\text{Log } r$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $z = x + iy = re^{i\theta}$  et considérons la fonction  $F(z) = f(e^z)$ , on a  $e^z = e^x e^{iy}$  soit  $r = e^x$  et  $\theta = y \pmod{2k\pi}$  et par conséquent  $\alpha < |e^z| = r < \beta$  si et seulement si  $\text{Log } \alpha < x < \text{Log } \beta$ . Dans cette bande  $f$  est holomorphe et bornée ; en vertu du théorème 6.11, avec

$$\nu(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(z)| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\theta})| = N(r),$$

on aura

$$\nu(\text{Log } \alpha) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(e^{\text{Log } \alpha} e^{iy})| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\alpha e^{i\theta})| = N(\alpha)$$

d'où

$$N(r) \leq \frac{\text{Log } \beta - \text{Log } r}{\text{Log } \beta - \text{Log } \alpha} N(\alpha) + \frac{\text{Log } r - \text{Log } \alpha}{\text{Log } \beta - \text{Log } \alpha} N(\beta).$$

Q.E.D.



# Chapitre 7

## Singularités des fonctions analytiques

Jusqu'ici c'est essentiellement par l'intermédiaire de l'hypothèse d'homologie à 0 des chemins que nous avons pu prendre en compte les régions dans lesquelles les fonctions considérées n'admettaient pas de prolongement analytique. Le chapitre qui suit est consacré à une étude détaillée des fonctions présentant des singularités ponctuelles. On notera cependant que la notion d'indice d'un point par rapport à un lacet correspond déjà à la prise en compte d'une fonction présentant une singularité ponctuelle du premier ordre.

### 7.1 Singularités isolées

Rappelons que  $\dot{B}_r(a)$  note le *disque pointé* de centre  $a$  et de rayon  $r$ , soit

$$\dot{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}.$$

LEMME 7.1 Si  $f$  est holomorphe dans  $\dot{B}_r(a)$  et si

$$(z - a)f(z) \rightarrow 0 \text{ quand } z \rightarrow a,$$

alors elle se prolonge en une fonction holomorphe dans  $B_r(a)$ . On dit que  $f$  possède une singularité fictive en  $a$ .

Les hypothèses du lemme sont vérifiées en particulier quand  $f$  est bornée dans  $\dot{B}_r(a)$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $h(z) = (z - a)^2 f(z)$ ,  $z \neq a$  et  $h(a) = 0$ , la fonction  $h$  est dérivable dans  $B_r(a)$  et vérifie  $h'(a) = 0$ , d'où il résulte qu'elle se développe en série entière selon

$$h(z) = \sum_{n \geq 2} c_n (z - a)^n = (z - a)^2 \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{m+2} (z - a)^m.$$

C'est dire que  $f$  admet  $\sum_{m \in \mathbb{N}} c_{m+2} (z - a)^m$  pour prolongement analytique dans  $B_r(a)$ .

Q.E.D.

En conséquence si la singularité n'est pas fictive, c'est-à-dire si  $f$  n'est pas holomorphe dans  $B_r(a)$ , alors elle n'est pas bornée en  $a$  ; c'est là une importante différence avec le cas réel comme le montre la fonction  $|x|$ .

THÉORÈME 7.2 Soit  $\Omega$  un ouvert,  $a \in \Omega$  et  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \{a\}$ , alors on se trouve dans l'un et un seul des trois cas suivants :

- (i)  $f$  possède une singularité fictive en  $a$ .  
(ii) Il existe  $m \geq 1$  et des  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  où  $c_m \neq 0$ , tels que

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k} \quad (7.1)$$

possède une singularité fictive en  $a$ .

On dit alors que  $f$  possède un pôle d'ordre  $m$  en  $a$ , et on note

$$m = \pi(f; a).$$

**REMARQUE 7.3** Dire que  $(z-a)^m f(z)$  est bornée au voisinage de  $a$ , c'est précisément dire que  $f$  possède en  $a$  un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $m$  (ou pas de pôle du tout !)

- (iii) Si  $r > 0$  est assez petit pour que  $B_r(a) \subset \Omega$ , alors  $f(\dot{B}_r(a))$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .

On dit alors que  $f$  possède en  $a$  une singularité essentielle.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons que (iii) ne soit pas vérifié, alors  $\exists r, w \in \mathbb{C}$  et  $\delta$  tels que  $B_\delta(w)$  ne rencontre pas  $f(\dot{B}_r(a))$ , soit  $|f(z) - w| > \delta \forall z \in \dot{B}_r(a)$ . Posons

$$g(z) = 1/(f(z) - w), \quad z \in \dot{B}_r(a), \quad (7.2)$$

on aura  $|g(z)| < 1/\delta$ , d'où il résulte d'après le lemme 7.1 que  $g$  se prolonge analytiquement à  $B_r(a)$ ; notons encore  $g$  ce prolongement.

▷ Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  d'après (7.2) et par conséquent se prolonge en une fonction holomorphe, soit (i).

▷ Si  $g(a) = 0$ , comme  $g$  n'est pas identiquement nulle, selon la proposition 2.8 elle possède en  $a$  un zéro isolé, disons d'ordre  $m \geq 1$  :

$$g(z) = (z-a)^m h(z),$$

où la fonction holomorphe  $h$  ne s'annule ni en  $a$ , ni dans  $\dot{B}_r(a)$  en vertu de (7.2). La fonction  $u(z) = 1/h(z)$  est donc holomorphe dans  $B_r(a)$  et ne s'y annule pas. On aura par conséquent

$$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z-a)^n, \quad \text{où } b_0 \neq 0,$$

d'où

$$f(z) - w = (z-a)^{-m} u(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z-a)^{n-m},$$

soit (ii).

Q.E.D.

COROLLAIRE 7.4 Soit  $a$  appartenant à l'ouvert  $\Omega$ ,  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \{a\}$  et

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z - a)^n$$

son développement en série de Laurent au voisinage de  $a$ .

(i)  $f$  admet une singularité fictive en  $a$  si et seulement si  $b_n = 0 \forall n < 0$  : le développement de Laurent ne comporte que des termes d'ordre  $n \geq 0$ .

(ii)  $f$  admet un pôle d'ordre  $m$  en  $a$  si et seulement si  $b_n = 0 \forall n < -m < 0$ , et  $b_{-m} \neq 0$  : le développement de Laurent ne comporte qu'un nombre fini  $m$  de termes d'ordre négatif.

(iii)  $f$  admet une singularité essentielle en  $a$  si et seulement si  $\forall n, \exists m < n$ , tel que  $b_m \neq 0$  : le développement de Laurent comporte un nombre infini de termes d'ordre  $n < 0$ .

Il pourrait sembler que le théorème 7.2 (iii) nous décrive une singularité essentielle comme quelque peu monstrueuse et donc rarissime, il n'en est rien comme en témoigne la fonction  $e^{1/z}$ , sujette à une singularité essentielle en 0, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Le théorème de Picard nous montre qu'en fait, au voisinage d'une singularité essentielle, la fonction  $f$  prend une infinité de fois toutes les valeurs complexes, sauf peut-être une. La fonction  $e^{1/z}$ , qui ne s'annule pas, nous prouve la nécessité de cette restriction. ♠

### 7.1.1 Fonctions méromorphes

#### DÉFINITION 7.5

(i) La fonction  $f$  est dite méromorphe dans l'ouvert  $\Omega$  si elle est holomorphe dans  $\Omega \setminus \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  est un sous-ensemble de  $\Omega$  sans point d'accumulation, et si  $f$  possède un pôle en chaque point de  $\mathcal{P}$ . ♡

(ii) Le coefficient  $b_{-1}$  du développement en série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $p \in \mathcal{P}$  est appelé résidu de  $f$  en  $p$  et noté  $\text{Res}(f; p)$ .

En vertu du théorème de Bolzano-Weierstraß, il est clair que pour toute boule  $B(0, n)$ ,  $\mathcal{P} \cap B(0, n)$  est un ensemble fini, et par conséquent que  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

Soient  $f$  et  $g$  analytiques dans l'ouvert  $\Omega$ . Posons  $h(z) = f(z)/g(z)$ , si  $g$  n'est pas identiquement nulle, en vertu de la proposition 2.8 (ii),  $h(z)$  est définie sauf peut-être en un ensemble de points isolés, soit  $z_0$  l'un de ces points. Si  $a_k$  et  $b_{k'}$  sont respectivement les premiers coefficients non nuls des développements de  $f$  et  $g$  au voisinage de  $z_0$ , on aura

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z) \text{ et } g(z) = (z - z_0)^{k'} g_1(z)$$

où  $f_1$  et  $g_1$  sont analytiques au voisinage de  $z_0$  et ne s'annulent pas en  $z_0$  ni, par continuité, au voisinage de  $z_0$ . Dans un tel voisinage, on aura

$$h(z) = (z - z_0)^{k-k'} h_1(z) \text{ avec } h_1(z) = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}.$$

Selon les propositions 1.24 et 1.33  $h_1(z)$  est analytique au voisinage de  $z_0$  et ne s'y annule pas. Deux cas se présentent alors

(i) si  $k \geq k'$ ,  $(z - z_0)^{k-k'} h_1(z)$  est analytique au voisinage de  $z_0$  et y coïncide avec  $h(z)$  en dehors de  $z_0$ , la singularité de  $h$  en  $z_0$  est alors fictive.

(ii) si  $k < k'$ , la fonction  $h(z)$  est méromorphe et  $z_0$  en constitue un pôle de multiplicité  $k' - k$ . On aura alors  $\lim_{z \rightarrow z_0} |h(z)| = +\infty$ .

## 7.2 Le théorème des résidus

La formule de Cauchy est relative à l'intégrale de fonctions de la forme  $f(z)/(z-p)$ , où  $f$  est holomorphe, soit en fait de fonctions de la forme  $g(z)$ , holomorphes en dehors de  $p$  où elles admettent un pôle simple. Le théorème des résidus en constitue une généralisation, valable pour les fonctions méromorphes.

Le théorème des résidus fournit un outil de calcul très puissant de certaines intégrales définies pour lesquelles on ne dispose pas de primitives ; on trouvera dans l'appendice I un certain nombre d'exemples à cet égard. C'est également un outil théorique important, aux applications diverses, en particulier à la théorie spectrale.

LEMME 7.6 Soient  $\gamma$  un lacet dans l'ouvert  $\Omega$  et

$$Q_p(z) = \sum_{k=1}^m b_{-k} (z-p)^{-k},$$

alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} Q_p(z) dz = b_{-1} n(\gamma; p).$$

DÉMONSTRATION. En effet  $(z-p)^{-k}$  admet une primitive pour  $k \neq 1$ , et par conséquent selon 5.26

$$\int_{\gamma} Q_p(z) dz = b_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-p} = 2i\pi b_{-1} n(\gamma; p).$$

Q.E.D.

THÉORÈME 7.7 (des résidus) Soient  $f$  une fonction méromorphe dans l'ouvert  $\Omega$ , et  $\mathcal{P}$  l'ensemble de ses pôles, si  $\gamma$  est un cycle homologue à 0 dans  $\Omega$ , qui ne rencontre pas  $\mathcal{P}$ , alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} n(\gamma; p) \operatorname{Res}(f; p). \quad (7.3)$$

DÉMONSTRATION.

► Commençons par remarquer que la somme du second membre de (7.3) est en fait finie ; en effet  $n(\gamma; w) = 0$  dans la composante connexe non bornée de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ . Si on note alors  $\mathcal{B} = \{p \in \mathcal{P} \mid n(\gamma; p) \neq 0\}$ , on constate que  $\mathcal{B}$ , étant borné et ne possédant pas de point d'accumulation, est fini.

► Notons  $Q_p(z)$  la partie singulière du développement en série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $p$ . Posons

$$g(z) = f(z) - \sum_{p \in \mathcal{B}} Q_p(z),$$

elle possède en chaque point de  $\mathcal{B}$  une singularité fictive et se prolonge donc à  $\Omega$  en une fonction holomorphe. On aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \sum_{p \in \mathcal{B}} \int_{\gamma} Q_p(z) dz = \sum_{p \in \mathcal{B}} n(\gamma; p) \operatorname{Res}(f; p),$$

d'après le théorème de Cauchy 5.5 et le lemme 7.6.

Q.E.D.



Rappelons qu'en vertu du théorème 5.21, les hypothèses du théorème 7.7 sont vérifiées en particulier si le lacet  $\gamma$  est homotope à un point.

REMARQUE 7.8 La formule des résidus (7.3) reste en fait valable si  $f$  possède une singularité essentielle aux points de  $\mathcal{B}$ . En effet la partie singulière  $Q_p(z)$  du développement en série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $p$  est alors une série qui converge uniformément dans  $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ , ce qui permet encore d'écrire

$$\int_{\gamma} Q_p(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k \geq 1} b_{-k} (z-p)^{-k} dz = \sum_{k \geq 1} b_{-k} \int_{\gamma} (z-p)^{-k} dz = b_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-p} = 2i\pi b_{-1} n(\gamma; p).$$

### 7.2.1 Calcul pratique des résidus

#### Cas d'un pôle simple

Si  $p$  est un pôle simple, au voisinage de  $p$  on a  $f(z) = h(z) + b_{-1}/(z-p)$ , où  $b_{-1} \neq 0$  et  $h(z)$  est holomorphe,

$$\lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z) = b_{-1} = \text{Res}(f; p). \quad (7.4)$$

En particulier, si  $f(z) = u(z)/v(z)$ , où  $u$  et  $v$  sont holomorphes au voisinage de  $p$ , zéro simple de  $v$ , on aura

$$\text{Res}\left(\frac{u(z)}{v(z)}; p\right) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{u(z)}{v(z)/(z-p)} = u(p) / \lim_{z \rightarrow p} \frac{v(z) - v(p)}{z-p} = \frac{u(p)}{v'(p)}. \quad (7.5)$$

#### Cas d'un pôle multiple

Si  $p$  est un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $m$ , on a  $f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^m b_{-k}/(z-p)^k$  où  $h(z)$  est holomorphe. Soit

$$g(z) = (z-p)^m f(z) = (z-p)^m h(z) + \sum_{k=1}^m b_{-k} (z-p)^{m-k}$$

On constate que  $b_{-1}$  est le coefficient d'ordre  $m-1$  dans le développement de Taylor de  $g$  au voisinage de  $p$  et par conséquent

$$\text{Res}(f; p) = a_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow p} ((z-p)^m f(z))^{(m-1)}. \quad (7.6)$$

### 7.2.2 Le résidu à l'infini

Selon la formule de changement de variable (4.11), on a

$$\int_{\gamma} \underline{g} \circ \psi(z) \psi'(z) dz = \int_{\psi \circ \gamma} \underline{g}(\zeta) d\zeta,$$

soit  $\underline{\gamma} = \psi \circ \gamma$ , et  $g(z) = \underline{g} \circ \psi(z) \psi'(z)$ ,

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\underline{\gamma}} \underline{g}(\zeta) d\zeta, \quad (7.7)$$

En particulier, si on choisit  $\psi(z) = 1/z = \psi^{-1}(z)$ , on aura

$$g(z) = -\frac{1}{z^2} \underline{g}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ ou encore } \underline{g}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2} g\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

d'où l'on déduit que

$$\int_{\gamma} g(z) dz = - \int_{\psi \circ \gamma} \frac{1}{\zeta^2} g\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta. \quad (7.8)$$

Sous réserve de déterminer un domaine  $\Omega'$  où  $\underline{\gamma} = \psi \circ \gamma$  soit homologue à 0 et  $\zeta^{-2}g(\zeta^{-1})$  méromorphe, l'application de la formule des résidus au second membre de (7.8) constitue une méthode alternative pour le calcul de  $\int_{\gamma} g(z) dz$ .

### Indices

L'utilisation de la méthode des résidus repose tout d'abord sur la détermination d'un domaine dans lequel  $\underline{\gamma}$  soit homologue à 0, et donc sur un calcul d'indice. On aura

$$n(\gamma; 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{1}{\zeta^2} \zeta d\zeta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{1}{\zeta} d\zeta = -n(\underline{\gamma}; 0), \quad (7.9)$$

et pour  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 1/\alpha$ ,

$$\begin{aligned} n(\gamma; \alpha) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \alpha} dz = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{1/\zeta - 1/\beta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{\beta}{\zeta(\zeta - \beta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{1}{\zeta - \beta} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

soit

$$n(\gamma; \alpha) = n(\gamma; \beta) - n(\underline{\gamma}; 0) \text{ et de même } n(\underline{\gamma}; \beta) = n(\gamma; \alpha) - n(\gamma; 0) \quad (7.10)$$

Il en résulte en particulier que si  $\gamma$  est le bord orienté d'un compact  $K \subset \mathbb{C}$  ne contenant pas l'origine, il en est de même de  $\underline{\gamma}$ , bord de  $\psi(K)$  (voir la Figure 7.1). La situation est différente si  $K$  contient l'origine, dans ces conditions en effet comme  $n(\gamma; 0) = 1$ ,  $n(\gamma; \beta) = n(\gamma; \alpha) - 1$  et par conséquent  $n(\underline{\gamma}; 0) = -1$ . Si  $n(\gamma; \alpha) = 1$ ,  $n(\gamma; \beta) = 0$ , les points de  $\psi(K)$ , qui n'est pas compact, ont donc pour indice 0, tandis que les points extérieurs ont pour indice  $-1$  (voir la Figure 7.2).

### Résidus

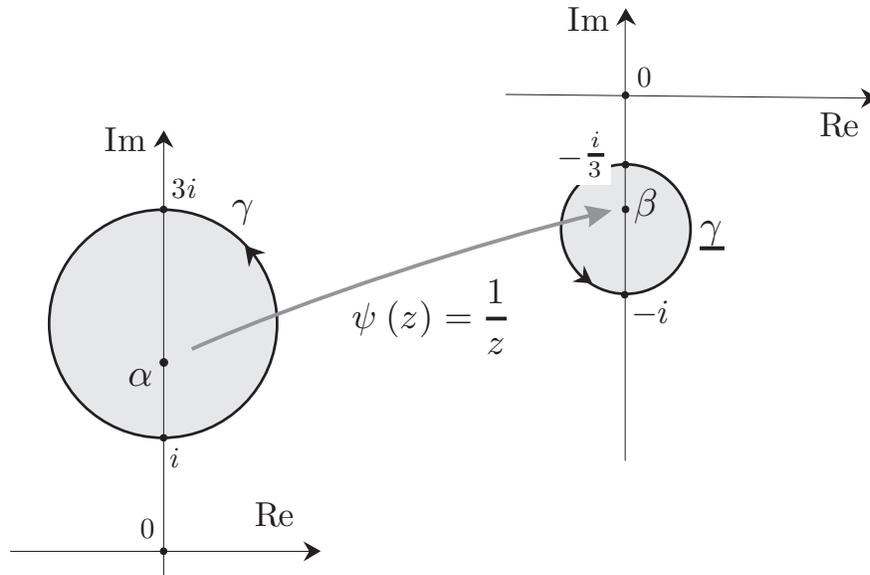
Notons maintenant que les pôles de  $g$  se composent des images par  $\psi$  des pôles non nuls de  $g$ , soit en fait des  $\beta = 1/\alpha$ , où  $\alpha \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ , ainsi qu'éventuellement de 0. Déterminons les résidus associés.

(i) Supposons que  $\zeta \rightarrow g(\zeta)$  soit développable en série de Laurent à l'extérieur d'un certain disque de rayon  $R$ , (on dit encore que  $g$  est développable en série de Laurent au voisinage de l'infini), soit

$$g(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \xi^n, \text{ ou encore au voisinage de } 0, g(1/z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-n} z^n, \quad (7.11)$$

d'où

$$\underline{g}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \zeta^{-n} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \zeta^{-n-2}, \quad (7.12)$$

FIGURE 7.1 –  $K$  ne contient pas l'origine

qui constitue le développement de Laurent de  $g$  au voisinage de 0. Si de plus le développement de  $g$  ne contient qu'un nombre fini de coefficients  $a_n > 0$ , alors  $z \rightarrow g(1/z)$  est méromorphe en 0 ; on dira que  $g$  est *méromorphe à l'infini*. On peut donc calculer le résidu de  $\underline{g}$  en 0, également appelé *résidu de  $g$  à l'infini* :

$$\text{Res}(g; 0) = -a_{-1} = \text{Res}(g; \infty). \quad (7.13)$$

(ii) Soit maintenant un pôle non nul  $\alpha$  de  $g$ , et le développement suivant de  $g$  au voisinage de  $\alpha$

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z - \alpha)^n = \frac{b_{-1}}{z - \alpha} + \sum_{n \neq -1} b_n (z - \alpha)^n = \frac{b_{-1}}{z - \alpha} + h(z).$$

La fonction  $h$  est méromorphe, elle n'admet donc pas d'autre pôle que  $\alpha$  dans un disque  $B_r(\alpha)$  suffisamment petit. Comme de plus son résidu est nul en  $\alpha$ , son intégrale sur tout lacet dans  $\dot{B}_r(\alpha)$  est nulle ; elle y admet par conséquent une primitive, soit  $F$ , en vertu de la proposition 5.26. On aura

$$g(z) = \frac{b_{-1}}{z - \alpha} + F'(z)$$

et, avec  $\varphi = \psi^{-1}$ ,

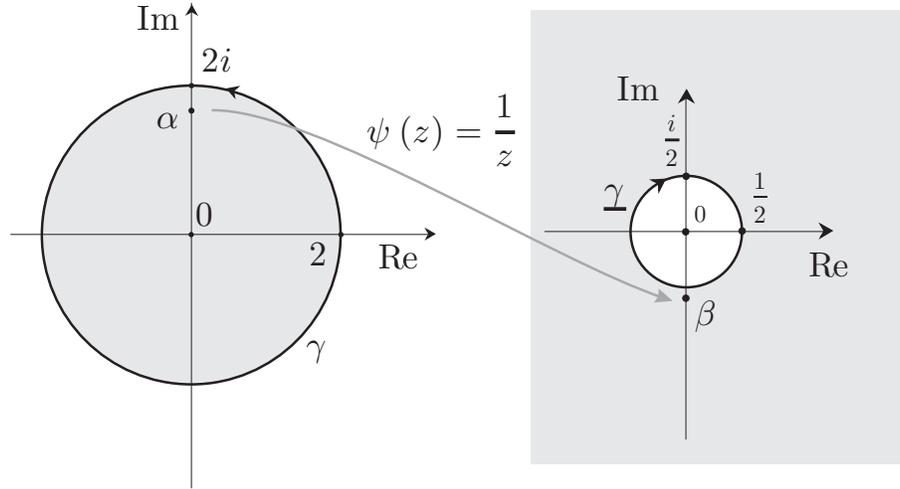
$$\underline{g}(\zeta) = g \circ \varphi(\zeta) \varphi'(\zeta) = b_{-1} \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \alpha} + \varphi'(\zeta) F'(\varphi(\zeta)) = b_{-1} \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \varphi(\beta)} + (F \circ \varphi(\zeta))'.$$

Soit alors  $\underline{\gamma}$  un lacet dans  $\psi(\dot{B}_r(\alpha))$ , on aura

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} (F \circ \varphi(\zeta))' d\zeta = n(\underline{\gamma}, \beta) \text{Res}((F \circ \varphi)'; \beta),$$

et par conséquent

$$\text{Res}(\underline{g}; \psi(\alpha)) = b_{-1} \text{Res}\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \varphi(\beta)}; \beta\right) = \text{Res}(g; \alpha) \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi'(\beta)},$$

FIGURE 7.2 –  $K$  contient l'origine

en vertu de (7.5), puisque  $\alpha$  est un pôle simple de  $\varphi'(\zeta)/(\varphi(\zeta) - \alpha)$ , soit

$$\text{Res}(\underline{g}; \psi(\alpha)) = \text{Res}(g; \alpha), \quad (7.14)$$

c'est-à-dire

$$\text{Res}(\underline{g}; 1/\alpha) = \text{Res}(g; \alpha). \quad (7.15)$$

Ainsi qu'on a déjà eu l'occasion d'y faire allusion, la notion adéquate n'est pas celle de fonction mais de forme différentielle : ce qui se conserve, ce n'est pas le résidu de la fonction  $g(z)$ , mais celui de la forme différentielle  $g(z) dz$  ; nous aurons l'occasion d'y revenir ultérieurement.

### Le théorème des résidus

Supposons maintenant  $g$  méromorphe dans  $\Omega$ , contenant toutes les composantes connexes de  $\gamma^c$ , hormis celle de 0, avec  $n(\gamma; 0) \neq 0$  (voir la Figure 7.3). Le chemin  $\gamma$  n'est alors pas homologue à 0, ce qui n'autorise pas le calcul de  $\int_{\gamma} g(w) dw$  à l'aide du théorème des résidus. Cependant pour  $z \notin \Omega$ , c'est-à-dire pour  $z$  appartenant à la composante connexe de 0, on a

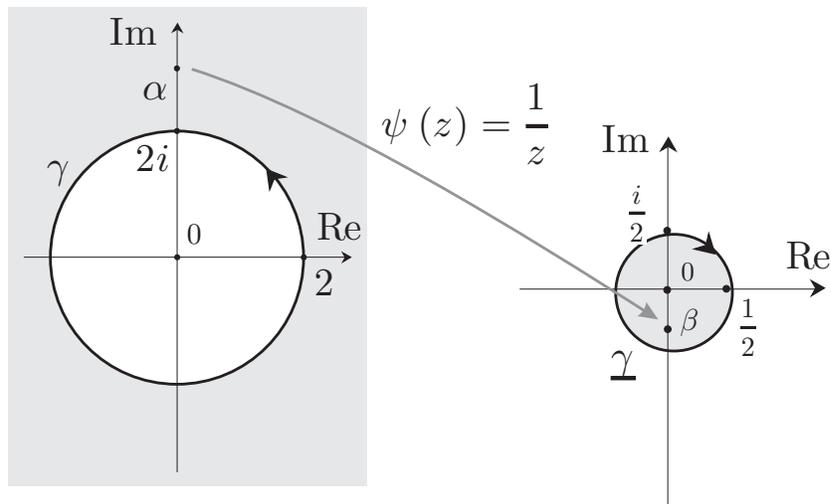
$$n(\underline{\gamma}; 1/z) = -n(\gamma; 0) + n(\gamma; z) = 0,$$

en vertu de la proposition 5.2 qui nous assure de l'invariance de l'indice dans chaque composante connexe de  $\gamma^c$  ; il en résulte que  $\underline{\gamma}$  est homologue à 0 dans  $\psi(\Omega)$ . Notons que  $\Omega$  contient la composante à l'infini de  $\gamma^c$  puisque l'indice des points de cette composante est nul, toujours selon 5.2 ; si nous supposons alors que  $g$  est méromorphe à l'infini et si nous notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des pôles de  $g$  dans  $\Omega$ , nous pourrions écrire

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \underline{g}(w) dw = \sum_{\beta \in \psi(\mathcal{B})} n(\underline{\gamma}; \beta) \text{Res}(\underline{g}; \beta) + n(\underline{\gamma}; 0) \text{Res}(\underline{g}; 0),$$

soit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} (n(\gamma; \alpha) - n(\gamma; 0)) \text{Res}(g; \alpha) - n(\gamma; 0) \text{Res}(g; \infty). \quad (7.16)$$

FIGURE 7.3 –  $g$  n'est pas holomorphe au voisinage de 0

Un cas particulier intéressant est celui où  $\Omega = \mathbb{C}$ , c'est-à-dire où  $g$  est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  tout entier, y compris à l'infini; la formule (7.16) représente alors une alternative à (7.3), qui peut se révéler tout-à-fait intéressante en raison du fait que  $n(\gamma; \alpha) - n(\gamma; 0)$  s'annule pour tous les pôles de la composante connexe de 0 de  $\gamma^c$ .

Notons qu'on aura alors

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} n(\gamma; \alpha) \operatorname{Res}(g; \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} (-n(\gamma; 0) + n(\gamma; \alpha)) \operatorname{Res}(g; \alpha) - n(\gamma; 0) \operatorname{Res}(g; \infty),$$

où  $\mathcal{P}$  note l'ensemble des pôles de  $g$ , soit

$$n(\gamma; 0) \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(g; \alpha) + n(\gamma; 0) \operatorname{Res}(g; \infty) = 0,$$

d'où, si l'on a pris soin de choisir  $\gamma$  tel que  $n(\gamma; 0) \neq 0$ ,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(g; \alpha) + \operatorname{Res}(g; \infty) = 0, \quad (7.17)$$

c'est encore dire que *la somme de tous les résidus, y compris le résidu à l'infini est nulle.*



## Chapitre 8

# Le principe de l'argument

L'utilisation de la dérivée logarithmique, d'où l'expression 'Principe de l'argument', combinée avec le théorème des résidus conduit à une formule explicitant la relation entre les pôles et les zéros d'une fonction méromorphe.

**PROPOSITION 8.1 (Principe de l'argument)** Soit  $f$  méromorphe dans l'ouvert connexe  $\Omega$  et  $g$  analytique dans  $\Omega$ . Nous noterons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pôles de  $f$ ,  $\mathcal{R}$  celui de ses racines, et nous supposons que le cycle  $\gamma$  dans  $\Omega$  est homologue à 0 et qu'il ne passe par aucun pôle ou racine de  $f$ . Alors ♥

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{q \in \mathcal{R}} n(\gamma; q) \zeta(f; q) g(q) - \sum_{p \in \mathcal{P}} n(\gamma; p) \pi(f; p) g(p), \quad (8.1)$$

où  $\pi(f; p)$  est l'ordre du pôle de  $f$  en  $p$  et  $\zeta(f; q)$  celui du zéro de  $f$  en  $q$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  sont disjoints car si  $f$  s'annule en  $q$ , elle est bornée et donc holomorphe au voisinage de  $q$ .

▷ Considérons la dérivée logarithmique  $f'(z)/f(z)$ , elle est holomorphe au voisinage de tout point qui n'est ni un zéro ni un pôle de  $f$ . Si  $q$  est un zéro d'ordre  $\zeta(f; q) = r$  de  $f$ , on aura  $f(z) = (z - q)^r h(z)$ , où  $h$  est analytique au voisinage de  $q$  et  $h(q) \neq 0$ ; il en résulte que

$$f'(z) = (z - q)^r h'(z) + r(z - q)^{r-1} h(z),$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{r}{z - q}.$$

Comme  $h'(z)/h(z)$  est holomorphe en  $q$ , il en résulte que

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \operatorname{Res} \left( g(z) \frac{r}{z - q}; q \right) = \lim_{z \rightarrow q} r g(z) = \zeta(f; q) g(q)$$

▷ Si  $p$  est un pôle d'ordre  $\pi(f; p) = s$  de  $f$ , on aura de même

$$f(z) = (z - p)^{-s} h(z),$$

où  $h$  est analytique au voisinage de  $p$  et  $h(p) \neq 0$ , et par conséquent

$$f'(z) = (z - p)^{-s} h'(z) - s(z - p)^{-s-1} h(z),$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{s}{z - p},$$

et

$$\operatorname{Res} \left( g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}; p \right) = -\pi(f; p) g(p).$$

▷ En appliquant le théorème des résidus 7.7, on obtient le résultat annoncé.

Q.E.D.

## 8.1 Localisation des zéros

La résolution des équations dans le plan complexe est considérablement plus difficile que sur la droite réelle où la notion d'ordre joue un rôle essentiel. L'outil principal à cet égard est le théorème de Rouché qui permet de réaliser des comparaisons entre les racines de deux équations posées dans une même portion du plan complexe.

**THÉORÈME 8.2 (de Rouché)** Soient  $f$  et  $g$  méromorphes dans l'ouvert connexe  $\Omega$ , sans pôle ni racine sur le cycle  $\gamma$  homologue à zéro. Si  $R_f$  et  $R_g$  notent respectivement l'ensemble des zéros de  $f$  et  $g$ , ainsi que  $P_f$  et  $P_g$  l'ensemble de leurs pôles, et si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \text{ sur } \gamma,$$

alors

$$\sum_{q \in \mathcal{R}_f} n(\gamma; q) \zeta(f; q) - \sum_{p \in \mathcal{P}_f} n(\gamma; p) \pi(f; p) = \sum_{q \in \mathcal{R}_g} n(\gamma; q) \zeta(g; q) - \sum_{p \in \mathcal{P}_g} n(\gamma; p) \pi(g; p). \quad (8.2)$$

Bien entendu l'hypothèse peut encore se lire

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \text{ sur } \gamma.$$

C'est une hypothèse au premier abord peu contraignante car l'inégalité large est acquise.

DÉMONSTRATION. On a

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| = \left| \frac{f(z) + g(z)}{g(z)} \right| < \frac{|f(z)| + |g(z)|}{|g(z)|} = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} + 1$$

sur  $\gamma$  ; d'où  $h(z) = f(z)/g(z) \notin [0, +\infty[$  ; en effet si  $t \in [0, +\infty[$ ,  $|t+1| = ||t|+1| = |t|+1$ . Il en résulte que quand  $z$  décrit  $\gamma$ ,  $h(z)$  décrit un cycle dans  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ . Choisissons alors la détermination principale du logarithme :

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z,$$

en mesurant les angles entre 0 et  $2\pi$  ; c'est une détermination continue dans  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ , d'où par conséquent

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \text{Log } h(z) dz = 0.$$

Mais par ailleurs

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{f(z)g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)},$$

d'où

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz,$$

et le résultat d'après la proposition 8.1.

Q.E.D.

♥ Dans le cas où  $f$  et  $g$  sont analytiques dans l'ouvert connexe  $\Omega$ , et  $\gamma$  le bord orienté d'un compact  $K$  dans  $\Omega$ , alors le théorème de Rouché 8.2 nous indique que  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $\overset{\circ}{K}$ , pourvu qu'on les compte avec leur multiplicité.

## 8.2 Inversion des fonctions analytiques

Il faut prêter attention à la signification du vocable 'inversion' : il est ici relatif à l'inversion pour la composition des fonctions c'est-à-dire à l'existence et aux propriétés de la fonction réciproque d'une fonction holomorphe.

### 8.2.1 Le problème local

PROPOSITION 8.3 Soient  $g$  analytique dans l'ouvert connexe  $\Omega$  contenant l'origine, et  $r$  assez petit pour que  $B_r = \{z \mid |z| \leq r\} \subset \Omega$ . On pose  $M = \sup_{|z|=r} |g(z)|$ , alors  $\forall |w| < r/M$ ,

(i) l'équation

$$wg(z) = z \quad (8.3)$$

Pour  $w$  suffisamment petit, la fonction wadmet une solution et une seule :  $z = h(w)$  dans  $\overset{\circ}{B}_r$ .

(ii) La fonction  $h$  est analytique dans le disque  $\{w \mid |w| < r/M\}$ , et si  $F$  est analytique dans  $\overset{\circ}{B}_r$ , on a

$$F \circ h(w) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (F'(z)g^n(z)) \right)_{|z=0}.$$

En particulier,  $h$  admet le développement en série entière suivant, dit formule d'inversion de Lagrange :

$$h(w) = \sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g^n(z) \right)_{|z=0}. \quad (8.4)$$

On peut encore énoncer ce résultat de la façon suivante : pour  $w$  suffisamment petit, la fonction  $z \rightarrow wg(z)$  admet un point fixe et un seul, noté  $h(w)$  dans  $\overset{\circ}{B}_r$ . DÉMONSTRATION.

▷ On commence par comparer les fonctions  $z$  et  $z - wg(z)$  : pour  $|w| < r/M$  et  $z \in B_r$ , on a

$$|(wg(z) - z) + z| = |w| |g(z)| < \frac{r}{M} |g(z)| \leq r,$$

d'où, pour  $|z| = r$ ,

$$|(wg(z) - z) + z| < |wg(z) - z| + |z|,$$

ce qui implique d'après le théorème de Rouché 8.2, que dans  $\overset{\circ}{B}_r$  l'équation (8.3) possède une racine et une seule, de multiplicité 1, soit  $z = h(w)$ .

▷ Selon le principe de l'argument 8.1

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{(1 - wg'(z))F(z)}{z - wg(z)} dz = F \circ h(w).$$

De plus

$$\frac{1}{z - wg(z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - wg(z)/z} = \frac{1}{z} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{wg(z)}{z} \right)^k,$$

série normalement convergente sur  $\gamma_r$ , puisqu'alors  $|wg(z)/z| = |g(z)||w|/r \leq M|w|/r < 1$ . Il en résulte que

$$F \circ h(w) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} w^k \int_{\gamma_r} \frac{(1 - wg'(z)) g^k(z) F(z)}{z^{k+1}} dz$$

c'est dire que  $F \circ h$  est analytique au voisinage de l'origine en tant que somme d'une série entière.

Selon la formule (5.3)

$$\begin{aligned} F \circ h(w) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{w^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left( (1 - wg'(z)) g^k(z) F(z) \right)_{|z=0} \\ &= F(z)_{|z=0} + \sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (g^k(z) F(z))_{|z=0} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{w^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (wg'(z) g^k(z) F(z))_{|z=0} \end{aligned}$$

or pour  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{w^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (g^k(z) F(z)) &= \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (k g^{k-1}(z) g'(z) F(z)) + \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^k(z) F'(z)) \\ &= \frac{w^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^{k-1}(z) g'(z) F(z)) + \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^k(z) F'(z)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} F \circ h(w) &= F(0) + \sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^{k-1}(z) g'(z) F(z))_{|z=0} \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^k(z) F'(z))_{|z=0} \\ &\quad - \sum_{\ell \geq 1} \frac{w^\ell}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}} (g'(z) g^{\ell-1}(z) F(z))_{|z=0} \end{aligned}$$

et finalement

$$F \circ h(w) = F(0) + \sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (g^k(z) F'(z))_{|z=0}$$

Q.E.D.

Notons que dans le cas d'une variable réelle l'équation (8.3) s'écrit  $wg(x) = x$ , et que si on choisit par exemple  $w > 0$ , l'existence d'une racine découle du fait que  $r/w > M \geq g(r)$  et  $-r/w < -M \leq g(-r)$ , d'où  $wg(r) < r$  et  $wg(-r) > -r$ .

**COROLLAIRE 8.4 (Théorème d'inversion locale)** Si  $f$  est analytique dans  $B_r(a)$  et vérifie  $f'(a) \neq 0$ , alors  $\heartsuit$  il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et un voisinage  $W$  de  $f(a)$  tels que  $\forall w \in W$ , l'équation

$$f(z) = w \tag{8.5}$$

ait une racine et une seule  $z = h(w)$  dans  $V$ . La fonction  $h$  est alors analytique dans  $W$  et

$$h'(w) = \frac{1}{f'(h(w))}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ La fonction

$$u(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

admet en  $z = a$  une singularité fictive selon le lemme 7.1, et ne s'y annule pas puisque  $f'(a) \neq 0$ . En vertu du principe des zéros isolés 2.8, elle est donc inversible (au sens du produit !) au voisinage de  $a$ , et son inverse  $g$  y est analytique :

$$g(z) = \frac{z - a}{f(z) - f(a)} \text{ pour } z \neq a, \text{ et } g(a) = \frac{1}{f'(a)}.$$

▷ Montrons maintenant que les équations (8.5) et

$$g(z)(w - f(a)) = z - a \tag{8.6}$$

ont, au voisinage de  $a$ , les mêmes racines.

▷ Supposons tout d'abord que  $\zeta$  soit racine de (8.5). Alors

$$g(\zeta)(w - f(a)) = g(\zeta)(f(\zeta) - f(a)) = \zeta - a.$$

ce qui fait de  $\zeta$  une racine de (8.6).

▷ Réciproquement, si  $\xi$  vérifie  $g(\xi)(w - f(a)) = \xi - a$ , alors  $w - f(a) = (\xi - a)/g(\xi) = f(\xi) - f(a)$ , d'où  $w = f(\xi)$ .

▷ Si on pose  $\lambda = z - a$ ,  $v = w - f(a)$  et  $h(\lambda) = g(\lambda + a) = g(z)$ , l'équation (8.6) prend la forme

$$h(\lambda)v = \lambda \tag{8.7}$$

et la conclusion découle de la proposition 8.3.

Q.E.D.

## 8.2.2 Le problème global

**THÉORÈME 8.5 (Théorème d'inversion globale)** Soit  $f$  holomorphe dans l'ouvert connexe  $\Omega$ .

(i) Si  $f$  n'est pas constante,  $f(\Omega)$  est ouvert dans  $\mathbb{C}$ . On dit alors que l'application  $f$  est ouverte. ♥

(ii) Si de plus  $f$  est injective, on a  $f'(z) \neq 0$  dans  $\Omega$  et il existe une fonction et une seule  $g$ , analytique dans  $f(\Omega)$  telle que  $f \circ g(w) = w \forall w \in \Omega$ , c'est dire que  $f$  est un isomorphisme  $\Omega \rightarrow f(\Omega)$ . De plus

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}. \tag{8.8}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $a \in \Omega$ , la fonction  $f(z) - f(a)$  présente un zéro en  $a$ , d'où selon la proposition 2.8, comme  $f$  n'est pas constante,  $f(z) - f(a) = (z - a)^k g(z)$ , où  $k \geq 1$ ,  $g(z)$  est holomorphe et  $g(a) \neq 0$ . D'après la continuité de  $g$ ,  $\exists r > 0$  tel que  $B_r(a) \subset \Omega$  et

$$\|g(z) - g(a)\| \leq |g(z) - g(a)| \leq |g(a)|/2, \forall z \in B_r(a),$$

d'où  $|g(z)| \geq |g(a)|/2$ .

▷ Notons que l'équation  $f(z) = w$  s'écrit aussi  $(z - a)^k g(z) + f(a) - w = 0$ , Si nous nous restreignons à des  $w$  tels que  $|w - f(a)| < r^k |g(a)|/2$ , on a

$$|(z - a)^k g(z) + f(a) - w - (z - a)^k g(z)| = |f(a) - w| < r^k |g(a)|/2$$

d'où pour  $|z - a| = r$ ,

$$|(z - a)^k g(z) + f(a) - w - (z - a)^k g(z)| < |(z - a)^k g(z)|.$$

Selon le théorème de Rouché 8.2,  $u(z) = (z - a)^k g(z) + f(a) - w$  et  $v(z) = |(z - a)^k g(z)|^k$  admettent donc le même nombre de racines dans  $B_r(a)$ , soit en fait  $k$  compte tenu de leur multiplicité. C'est dire qu'il existe un voisinage  $W$  de  $f(a)$  tel que  $\forall w \in W$ , l'équation  $f(z) = w$  admet au moins une racine; c'est dire que  $W \subset f(\Omega)$  et par conséquent que  $f(\Omega)$  est ouvert.

▷ Supposons maintenant que  $f'(a) = 0$ , alors on aura  $k \geq 2$ , et comme  $f$  n'est pas constante, en vertu du principe de zéros isolés 2.8, il existe  $r'$  tel que  $f'(z) \neq 0$  pour  $0 < |z - a| < r'$ . Nous venons de voir que pour  $w$  assez proche de  $f(a)$ , l'équation  $f(z) = w$  possède  $k$  racines dans  $B_{r'}(a)$ . Dès que  $w \neq f(a)$  ces racines sont différentes de  $a$  et  $f'$  ne s'y annule pas ; elles sont donc de multiplicité 1 et par conséquent toutes distinctes (voir la Figure 8.1). C'est là une contradiction avec l'hypothèse d'injectivité et par conséquent  $f'(a) \neq 0$  ; il en résulte que  $f'$  ne s'annule pas dans  $\Omega$ .

▷ Comme  $f$  est injective,  $\forall w \in f(\Omega)$ ,  $\exists ! z \in \Omega$  tel que  $f(z) = w$ . Posons  $z = h(w)$ , on aura  $f(h(w)) = w$  et  $f'(h(w)) \neq 0$  et il résulte alors du corollaire 8.4 que  $h$  est analytique dans  $f(\Omega)$  et vérifie  $h'(w) = 1/f'(h(w))$ .

Q.E.D.

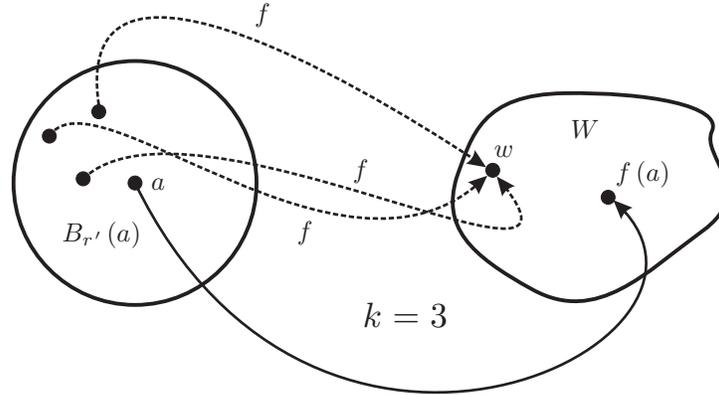


FIGURE 8.1 – Si  $f'(a) = 0$

Notons bien que pour obtenir un théorème global nous avons dû faire l'hypothèse de l'injectivité de  $f$ , dans le cas contraire des difficultés supplémentaires se présentent, ainsi d'ailleurs que nous avons pu l'entrevoir lors de l'étude de la fonction Logarithme. Notons également ce que ce résultat a de remarquable ; de l'hypothèse d'injectivité de  $f$  on a déduit le fait que  $f'$  ne s'annule pas, ce qui n'est pas possible de façon générale pour les applications entre espaces de Banach et pas même pour les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 8.2.3 Coupures et déterminations

De nombreuses fonctions telles la racine ou le Logarithme sont définies comme les inverses de fonctions plus simples, que ce soit dans le domaine réel ou complexe. Le fait que ces fonctions ne soient définies dans le cas de la variable réelle que pour des valeurs positives de l'argument constitue la trace d'une difficulté plus importante dans le domaine complexe, qui se traduit par l'apparition de coupures et la nécessité de choisir entre plusieurs déterminations. Bien que d'aspect un peu technique, ce paragraphe est particulièrement important car l'apparition de coupures est bien souvent le prix à payer pour bénéficier des avantages découlant du passage à la variable complexe.

#### La fonction racine

On cherche à déterminer une fonction  $h$  telle que  $(h(w))^2 = w$ . Il est clair que pour  $\Omega = \mathbb{C}$ , on ne se trouve pas dans les conditions d'application du théorème précédent, puisque  $(-z)^2 = z^2$ . On peut malgré tout se poser la question de savoir si les conditions du théorème 8.5 sont nécessaires. Supposons donc que  $h$  soit continue sur  $\mathbb{C}$  et vérifie  $(h(w))^2 = w$ . Posons  $\theta = \text{Arg}(w)$  où  $w \in \mathbb{T}$ , le cercle unité ; on aura  $w = e^{i\theta}$ , et  $|h(w)|^2 = |w| = 1$ , d'où  $h(e^{i\theta}) = e^{i\varphi(\theta)}$ , où  $\varphi$  est une fonction continue de  $\theta$ . De plus  $e^{2i\varphi(\theta)} = (h(e^{i\theta}))^2 = e^{i\theta}$ , d'où  $\varphi(\theta) = k\pi + \theta/2$  et par conséquent  $\varphi(-\pi) = k\pi - \pi/2$  et

$\varphi(\pi) = k\pi + \pi/2$ , dont la différence est égale à  $\pi$ . Il n'est donc pas possible de trouver une détermination continue de la racine dans  $\mathbb{C}$  tout entier.

Notons qu'il suffit de réduire  $\Omega$  de telle sorte que  $z$  et  $-z$  ne puissent simultanément en faire partie pour permettre l'utilisation du théorème 8.5. En effet, si  $w = re^{i\tau}$ ,  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $w^2 = z^2$ , alors  $\rho = r$  et  $e^{2i\theta} = e^{2i\tau}$ , soit  $e^{2i(\tau-\theta)} = 1$  ou encore  $\tau - \theta = k\pi$ , soit  $w = \pm z$ .

De nombreux choix sont alors possibles, notons par exemple  $H^0$  le demi-plan ouvert  $\{z \mid \Re z > 0\}$ , et  $f(z) = z^2$ , on aura  $f(H^0) = \mathbb{C} \setminus D^\pi$ , où  $D^\pi = \{z \mid \Re z \leq 0 \text{ et } \Im z = 0\}$  est la demi-droite des réels négatifs ou nuls. On dit que  $D^\pi$  réalise une coupure dans le plan complexe, l'extrémité de la coupure prend la dénomination de *point de branchement*. Il ne s'agit pas d'une singularité isolée de la racine complexe, et son étude échappe donc aux résultats qui précèdent.

Il reste à déterminer l'inverse  $h^0 : \mathbb{C} \setminus D^\pi \rightarrow H^0$ , de  $f$ . On aura  $h^0(\rho e^{i\theta}) = re^{i\tau}$  avec  $r = \sqrt{\rho}$ , et  $\tau = \theta/2$  si  $-\pi < \theta < \pi$ ; plus généralement

◊ Si  $(4k-1)\pi < \theta < (4k+1)\pi$  alors  $\tau = \theta/2 + 2m\pi$

◊ Si  $(4k-3)\pi < \theta < (4k-1)\pi$  alors  $\tau = \theta/2 + (2m+1)\pi$

Le long de la coupure cette fonction est discontinue et a pour saut  $\sqrt{\rho}(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) = 2i\sqrt{\rho}$ . (voir la Figure 8.2). Mais il se trouve que  $\mathbb{C} \setminus D^\pi$  est également l'image par  $f$  de  $H^\pi = \{z \mid \Re z < 0\}$ , et qu'il est

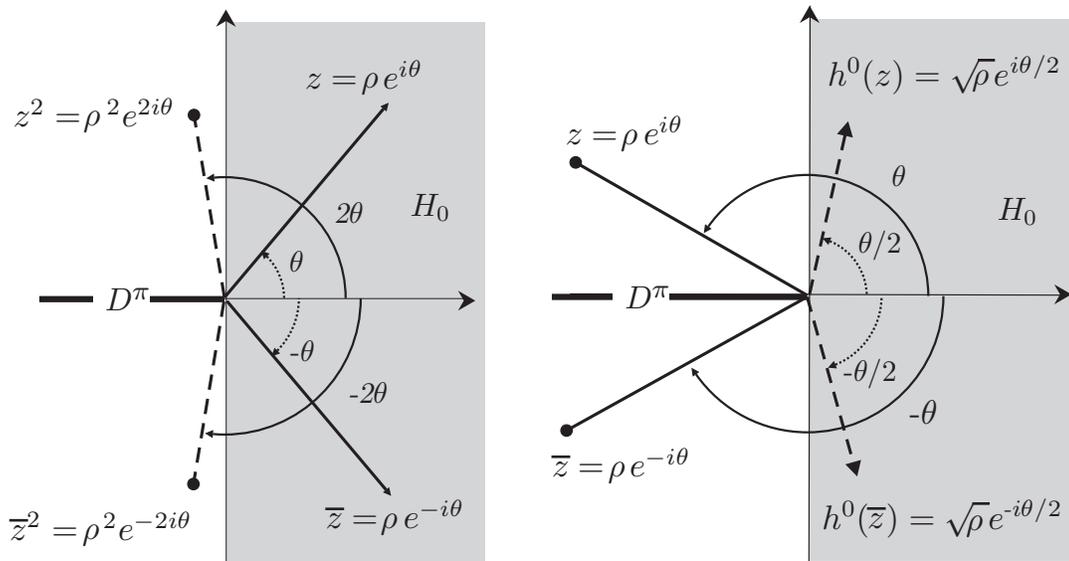


FIGURE 8.2 – Détermination principale de la racine

donc possible de trouver un inverse  $h^\pi : \mathbb{C} \setminus D^\pi \rightarrow H^\pi$  de  $f$ . On aura de même  $h^\pi(\rho e^{i\theta}) = re^{i\tau}$  avec  $r = \sqrt{\rho}$ , et  $\tau = \theta/2 + \pi$  si  $-\pi < \theta < \pi$ ; et de façon plus générale

◊ Si  $(4k-1)\pi < \theta < (4k+1)\pi$  alors  $\tau = \theta/2 + (2m+1)\pi$

◊ Si  $(4k-3)\pi < \theta < (4k-1)\pi$  alors  $\tau = \theta/2 + 2m\pi$

On a donc trouvé deux déterminations de la racine, elles vérifient  $h^\pi(w) = -h^0(w)$  et on les distingue généralement par les valeurs qu'elles prennent au point 1 :  $h^0(1) = 1$  et  $h^\pi(1) = -1$ . (voir la figure 8.3).

Plus généralement on aurait pu considérer le demi-plan ouvert  $H^\alpha = e^{i\alpha}H^0$  dont l'image par  $f$  n'est autre que  $e^{2i\alpha}(\mathbb{C} \setminus D^\pi) = \mathbb{C} \setminus D^{\pi+2\alpha}$ , soit le plan complexe muni d'une coupure selon la demi droite

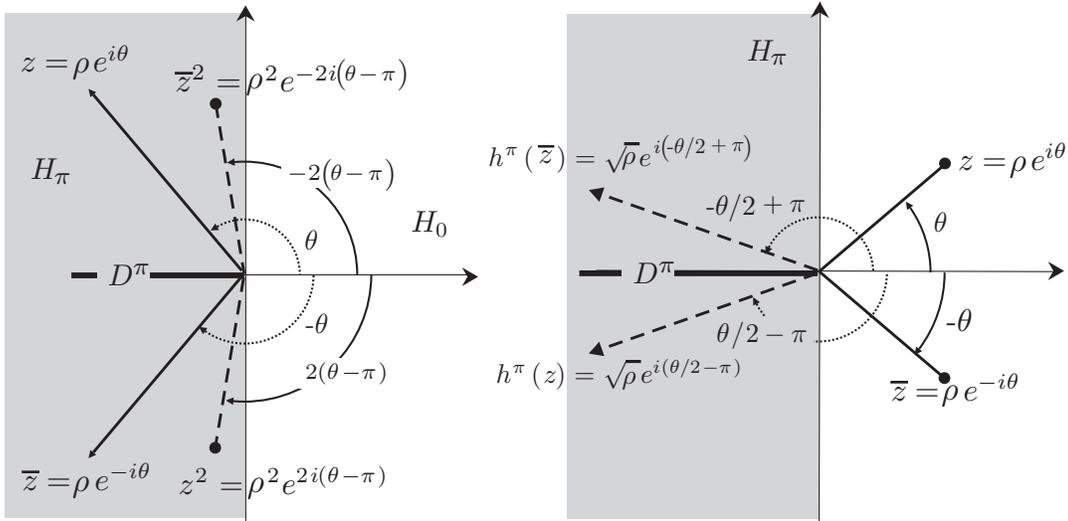


FIGURE 8.3 – Une seconde détermination de la racine

d'angle  $\pi + 2\alpha$  (voir la figure 8.4) Là encore, pour chaque valeur de  $\alpha$ , on trouve deux déterminations de la racine, soit  $h^\alpha(\rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{i\tau}$  avec

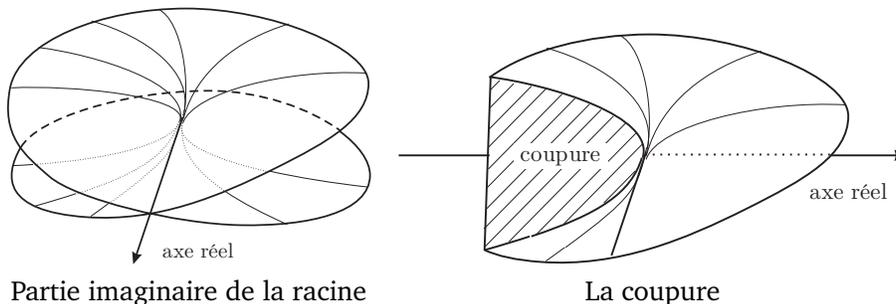
$$\begin{aligned} \tau &= \theta/2 + 2m\pi \text{ si } (4k-1)\pi + 2\alpha < \theta < (4k+1)\pi + 2\alpha \\ \tau &= \theta/2 + (2m+1)\pi \text{ si } (4k-3)\pi + 2\alpha < \theta < (4k-1)\pi + 2\alpha, \end{aligned}$$

et  $h^{\pi+\alpha}(\rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{i\tau}$  où

$$\begin{aligned} \tau &= \theta/2 + (2m+1)\pi \text{ si } (4k-1)\pi + 2\alpha < \theta < (4k+1)\pi + 2\alpha \\ \tau &= \theta/2 + 2m\pi \text{ si } (4k-3)\pi + 2\alpha < \theta < (4k-1)\pi + 2\alpha. \end{aligned}$$

Pour  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ , on aura  $h^\alpha(1) = 1$  et  $h^{\pi+\alpha}(1) = -1$ . C'est dire que la détermination associée à  $h^\alpha$  est la même que celle associée à  $h^0$ , et que celles respectivement associées à  $h^{\pi+\alpha}$  et  $h^\pi$  coïncident.

De façon générale, on montre que dans tout ensemble simplement connexe ne contenant pas l'origine, il existe deux déterminations continues de la racine. On sent bien que cette situation n'est pas parfaitement satisfaisante compte tenu de l'arbitraire sur le choix du domaine. C'est la théorie des surfaces de Riemann qui permet de donner une forme définitive à cette question. De façon imagée on peut se représenter la partie imaginaire de la racine complexe comme prenant en tout point deux valeurs opposées, hormis sur le demi axe réel positif où elle s'annule.



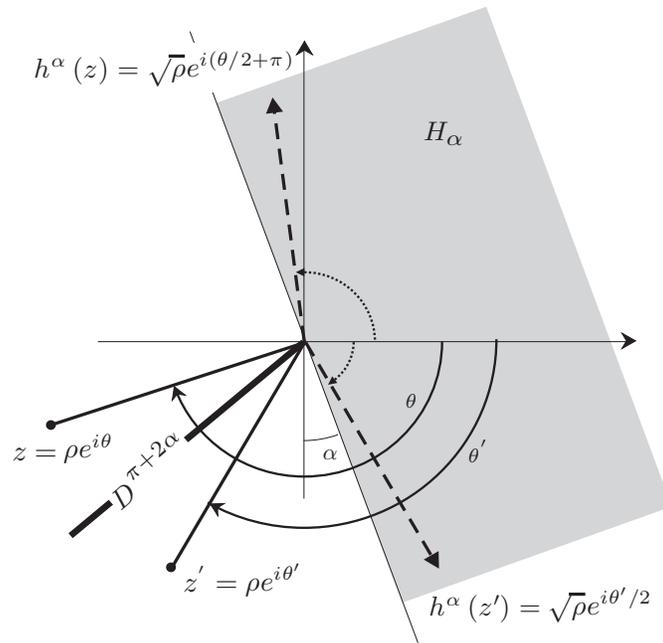


FIGURE 8.4 – Déplacement de la coupure

La coupure n'apparaît plus alors que comme une façon artificielle de rendre à la fonction racine son caractère univoque.

**La fonction logarithme**

Les mêmes considérations peuvent être développées pour l'inverse de l'exponentielle, dont nous avons déjà démontré qu'il n'existait pas de détermination continue dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Pour que  $e^z = e^w$ , il faut et il suffit que  $z - w = 2ik\pi$ , ce qui fait de l'exponentielle une fonction injective dans la bande  $B^0 = -\pi < \Im z < \pi$ , dont l'image n'est autre que  $\mathbb{C} \setminus D^\pi$ , et nous autorise à inverser la fonction exponentielle  $B^0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus D^\pi$ . La détermination du logarithme qui en découle n'est autre que la *détermination principale* puisqu'alors  $\text{Log}(1) = 0$

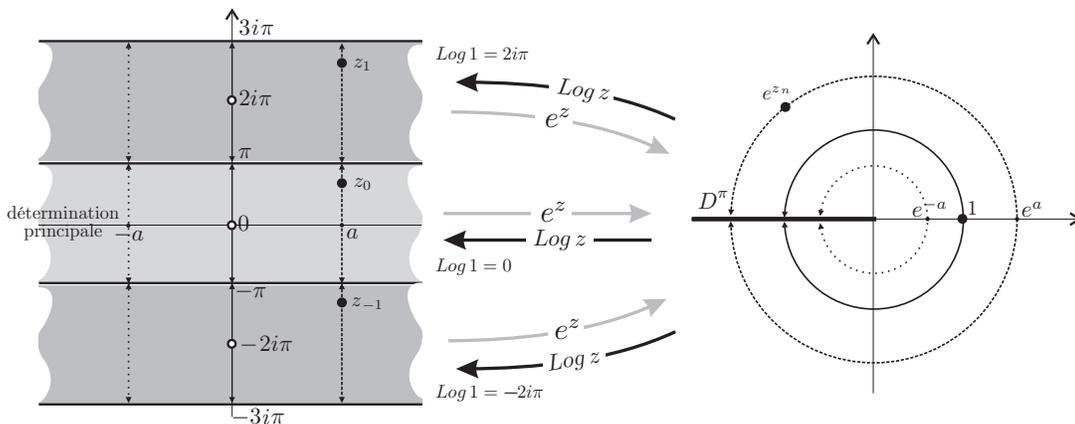


FIGURE 8.5 – Coupure du Logarithme

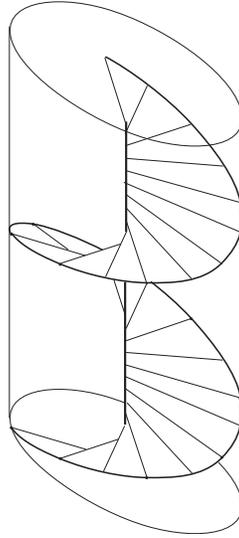


FIGURE 8.6 – Le logarithme

Mais  $\mathbb{C} \setminus D^\pi$  est également l'image de  $B^k = (2k - 1)\pi < \Im z < (2k + 1)\pi$ , ce qui fournit une infinité d'autres déterminations du logarithme qui vérifient respectivement  $\text{Log}(1) = 2ik\pi$  (voir la figure 8.5)

Bien entendu on n'est pas obligé de placer la coupure le long de  $D^\pi$ , il suffit pour lui faire opérer une rotation de faire subir une translation au système de bandes que nous venons de définir. De même que pour la racine, une représentation plus adéquate de la partie imaginaire du Logarithme complexe telle celle de la Figure 8.6 permet de mettre en évidence le fait que la coupure constitue un artifice dont la position est tout-à-fait arbitraire.

### La fonction puissance

On posera

$$z^\lambda = e^{\lambda \text{Log} z}, \quad (8.9)$$

où la détermination principale du logarithme sera à l'origine de la détermination principale de la fonction puissance (voir la figure 8.7) Les autres déterminations sont données par

$$e^{\lambda(\text{Log} z + 2ik\pi)} = z^\lambda e^{2ik\lambda\pi}.$$

On voit alors que la situation dépend du fait que  $\lambda$  soit ou non rationnel : si  $\lambda = p/q$  où  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, alors  $k/q$  prend  $q$  valeurs distinctes (mod 1),  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui fait que  $e^{2ik\lambda\pi}$  prend  $q$  valeurs distinctes et que la fonction puissance possède donc  $q$  déterminations distinctes. Pour  $p/q = 1/2$ , on retrouve bien les résultats précédents relatifs à la racine.

### Le cas de plusieurs points de branchement

Prenons le cas particulier de la fonction  $z \rightarrow \sqrt{z-a}\sqrt{z+a}$ , où  $a$  est réel positif, c'est le produit des fonctions réciproques  $h_a$  de  $f_a : z \rightarrow a + z^2$  et  $h_{-a}$  de  $f_{-a} : z \rightarrow -a + z^2$  (voir la figure 8.8) Choisissons  $H^0$  comme domaine des fonctions  $h_a$  et  $h_{-a}$ , ce qui fixe la détermination des racines, soit pour  $|\theta| < \pi$ ,

$$h_a^0(a + \rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} = h_{-a}^0(-a + \rho e^{i\theta}).$$

Considérons la fonction  $h_a^0$  au voisinage du point  $-b$

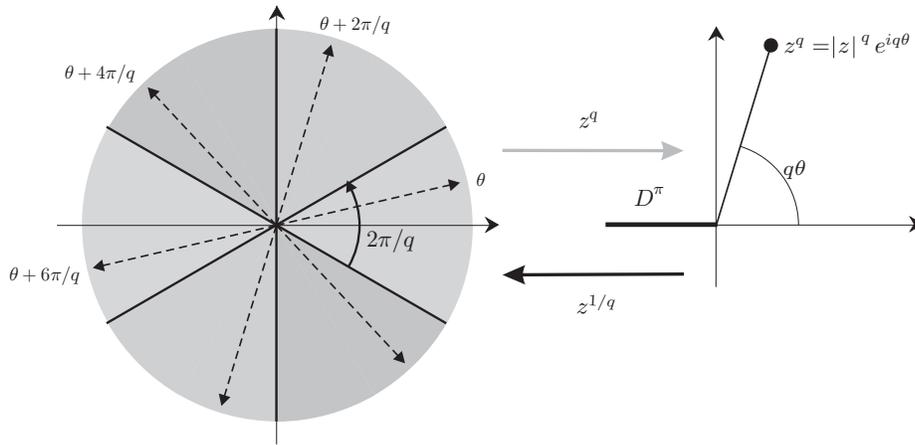


FIGURE 8.7 – Coupure de la fonction puissance

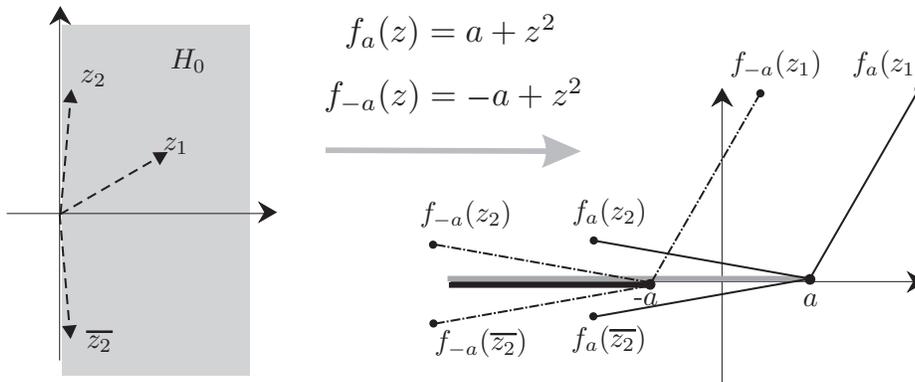


FIGURE 8.8 – Produit de deux racines

(i) Si  $b$  est réel supérieur à  $a$ , on a

$$-b = a + (b + a)e^{\pm i\pi} = -a + (b - a)e^{\pm i\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} h_a^0(-b + 0^\pm i) &= h_a^0(a + (b + a)e^{\pm i\pi}) = \pm i\sqrt{b + a}, \\ h_{-a}^0(-b + 0^\pm i) &= h_{-a}^0(-a + (b - a)e^{\pm i\pi}) = \pm i\sqrt{b - a}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$h_a^0(-b + 0^+ i) h_{-a}^0(-b + 0^+ i) = -\sqrt{b + a}\sqrt{b - a} = -\sqrt{b^2 - a^2} = h_a^0(-b + 0^- i) h_{-a}^0(-b + 0^- i).$$

Ce qui fait de la fonction  $\sqrt{z - a}\sqrt{z + a}$  une fonction continue sur la demi-droite réelle  $]-\infty, -a]$  ; il en est de même sur  $[a, +\infty[$ . En vertu du principe de symétrie 5.10, il s'agit donc d'une fonction holomorphe en dehors du segment réel  $[-a, a]$ .

(ii) Si  $|b| < |a|$ , on a toujours

$$h_a^0(-b + 0^\pm i) = h_a^0(a + (b + a)e^{\pm i\pi}) = \pm i\sqrt{b + a},$$

mais

$$h_{-a}^0(-b + 0^{\pm}i) = h_{-a}^0(-a + a - b) = \sqrt{a - b},$$

et par conséquent

$$h_a^0(-b + 0^+i) h_{-a}^0(-b + 0^+i) = i\sqrt{b+a}\sqrt{a-b} = i\sqrt{a^2 - b^2} = -h_a^0(-b + 0^-i) h_{-a}^0(-b + 0^-i). \tag{8.10}$$

(voir les figures 8.9 et 8.10) On peut décider de prendre  $H^{-\pi/2}$  comme domaine de  $f_a$  ; la coupure est alors

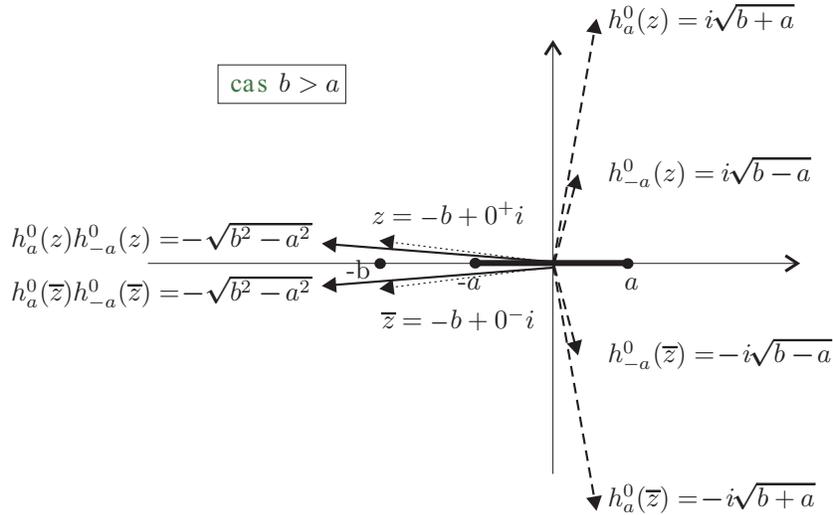


FIGURE 8.9 – Déterminations hors coupure

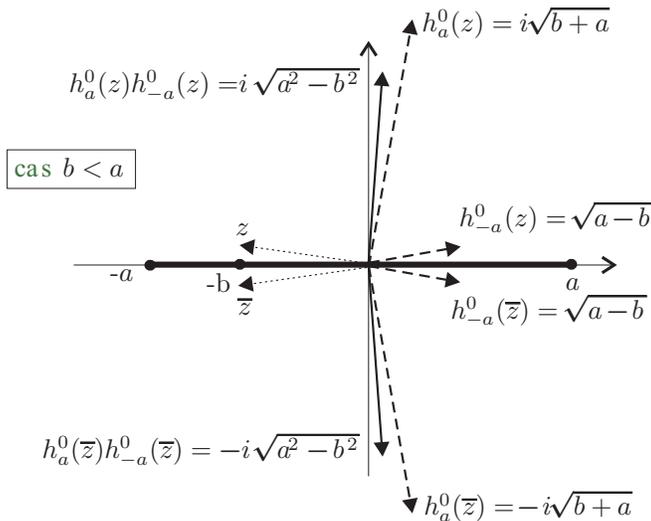


FIGURE 8.10 – Déterminations sur la coupure

disposée le long du demi axe des réels supérieurs à  $a$ , et il est facile de voir que  $h_a^{-\pi/2}(a+w) = -h_a^0(a+w)$  pour  $\Im w > 0$  et  $h_a^{-\pi/2}(a+w) = h_a^0(a+w)$  pour  $\Im w < 0$ . Dans ces conditions, la fonction  $\sqrt{z-a}\sqrt{z+a}$  est holomorphe en dehors de l'union des demi axes réels  $]-\infty, a]$  et  $[a, +\infty[$ .

# Chapitre 9

## La transformation de Laplace

### 9.1 Transformée de Laplace des fonctions

L'étude de la transformation de Laplace est en fait celle des avantages que procure le fait d'appliquer la transformation de Fourier à une famille particulière de fonctions : celles de la forme  $e^{-\xi x} f$ , où  $\text{Supp } f \subset [0, +\infty]$  et  $x \rightarrow e^{-\xi x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Bien entendu, une simple translation permet d'y ramener le cas plus général des fonctions dont le support est limité dans la direction des abscisses négatives.

**LEMME 9.1** Soient  $f$  vérifiant  $\text{Supp } f \subset [0, +\infty]$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ , tels que  $e^{-\xi x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\forall \xi_1 > \xi$ ,  $e^{-\xi_1 x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ .

**DÉMONSTRATION.** On aura en effet  $|e^{-\xi_1 x} f(x)| \leq |e^{-\xi x} f(x)|$ , d'où le résultat en vertu du théorème de convergence dominée.

Q.E.D.

En conséquence  $\{\xi \in \mathbb{R} \mid e^{-\xi x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})\}$  est soit l'axe réel tout entier, soit une demi-droite, selon le cas ouverte ou fermée, contenant le point  $+\infty$ . Nous noterons  $\xi_0$  l'origine de cette demi-droite et nous l'appellerons *abscisse de convergence* de la transformée de Laplace de  $f$ , ou plus simplement de  $f$ . On notera

$$S_+^1(\mathbb{R}) = \{f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \mid \text{Supp } f \subset [0, +\infty] \text{ et } \exists \xi \in \mathbb{R}, e^{-\xi x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})\}$$

**LEMME 9.2** Soit  $f \in S_+^1(\mathbb{R})$ , son abscisse de convergence est la même que celle de  $xf(x)$ , et par conséquent que celle de  $x^m f(x)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

**DÉMONSTRATION.** En effet d'une part, pour  $x > 1$ ,  $|e^{-\xi x} f(x)| < |e^{-\xi x} x f(x)|$ , d'où il résulte que l'abscisse de convergence de  $f$  est inférieure à celle de  $xf(x)$ . Réciproquement soient  $\xi > \xi_0$ , abscisse de convergence de  $f$ , et  $0 < \varepsilon < \xi - \xi_0$ . Pour  $x$  suffisamment grand,  $|e^{-\xi x} x f(x)| < |e^{-(\xi-\varepsilon)x} f(x)|$ , avec  $\xi - \varepsilon > \xi_0$ . On en déduit que l'abscisse de convergence de  $xf(x)$  est inférieure à  $\xi_0$ .

Q.E.D.

Rappelons que si  $g$  est intégrable, sa transformée de Fourier  $\widehat{g}$  est donnée par

$$\widehat{g}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\eta x} dx.$$

**DÉFINITION 9.3 (transformée de Laplace)** Soit  $f \in S_+^1(\mathbb{R})$ , d'abscisse de convergence  $\xi_0$  et  $p = \xi + i\eta$ ,  $\xi > \xi_0$ , on pose

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sqrt{2\pi} \widehat{e^{-\xi x} f}_\eta = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx. \quad (9.1)$$

$\mathcal{L}(f)$  est appelée *transformée de Laplace* de  $f$ , elle est définie dans une bande semi-infinie du plan complexe, située à droite de l'abscisse de convergence, dite *demi-plan de convergence*; la transformée de Laplace est en fait une famille à 1 paramètre réel ( $\xi$ ) de transformées de Fourier. Notons bien que *la variable de Fourier est la partie imaginaire de  $p$* .

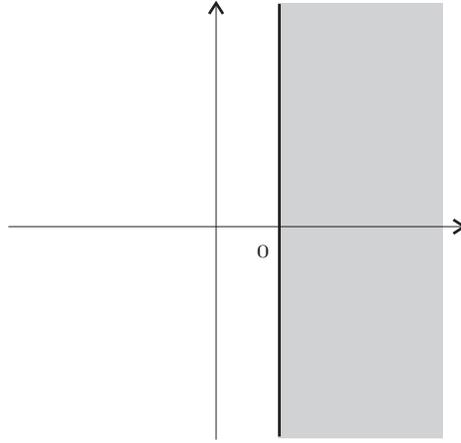


FIGURE 9.1 – Abscisse de convergence

### 9.1.1 Analyticité

Il s'agit en fait de la propriété essentielle sur laquelle repose l'intérêt de la transformation de Laplace.

**LEMME 9.4** Soit  $u_h(x) = (e^{-hx} - 1)/h + x$ , alors pour  $h$  assez petit  $|u_h(x)| \leq C|h|x^2$  et  $|u'_h(x)| \leq C|h||x|$ .

DÉMONSTRATION.

Selon la formule de Taylor avec reste intégral

$$e^{-hx} = 1 + \sum_{k=1, p-1} \frac{1}{k!} (-hx)^k + (-hx)^p \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} e^{-\zeta hx} d\zeta, \quad (9.2)$$

soit

$$u_h(x) = (e^{-hx} - 1)/h + x = hx^2 \int_0^1 (1-\zeta) e^{-\zeta hx} d\zeta \quad (9.3)$$

$$u'_h(x) = 1 - e^{-hx} = hx \int_0^1 e^{-\zeta hx} d\zeta$$

et par conséquent

$$|u_h(x)| \leq C|h|x^2 \text{ et } |u'_h(x)| \leq C|h||x|. \quad (9.4)$$

Q.E.D.

**THÉORÈME 9.5** *La transformée de Laplace est une fonction analytique dans le demi-plan de convergence.*



**DÉMONSTRATION.** On calcule le quotient différentiel

$$\frac{\mathcal{L}(f)(p+h) - \mathcal{L}(f)(p)}{h} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{e^{-hx} - 1}{h} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-px} (u_h(x) - x) f(x) dx,$$

où  $\xi = \Re p > \xi_0$ . Selon le lemme 9.4,

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-px} u_h(x) f(x) dx \right| \leq C |h| \int_0^{\infty} |e^{-\xi x} x^2 f(x)| dx.$$

D'après le lemme 9.2, on en déduit que  $\mathcal{L}(f)$  est dérivable et que

$$\mathcal{L}'(f)(p) = - \int_0^{\infty} e^{-px} x f(x) dx = -\mathcal{L}(xf)(p). \quad (9.5)$$

*Q.E.D.*

### 9.1.2 Propriétés élémentaires

Elles découlent essentiellement de celles de la transformation de Fourier mais peuvent se démontrer directement à partir de la formule (9.1).

#### Dérivation

Si  $f \in S_+^1(\mathbb{R})$ , est continue sur  $[0, \infty[$  et dérivable sur  $]0, \infty[$  et si le prolongement  $f'$  de cette dérivée par 0 à  $] -\infty, 0[$  appartient  $S_+^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x) dx = p \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx + [e^{-px} f(x)]_0^{+\infty} = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

Ce résultat reste valable sous des hypothèses plus larges :

**PROPOSITION 9.6** *Si  $f \in S_+^1(\mathbb{R})$  est continue sur  $[0, \infty]$ , et si sa dérivée au sens des distributions est de la forme  $f' = g + f(0)\delta$  où  $g \in S_+^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$\mathcal{L}(g)(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0). \quad (9.6)$$

**DÉMONSTRATION.** On aura

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x) dx = p \int_0^{+\infty} e^{-px} \left( \int_0^x g(t) dt \right) dx$$

et d'après le lemme 9.7 ci-dessous

$$\mathcal{L}(g)(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-px} (f(x) - f(0)) dx = p(\mathcal{L}(f)(p) - f(0)\mathcal{L}(Y)(p))$$

d'où le résultat en vertu de (9.11).

*Q.E.D.*

LEMME 9.7 Si  $f$  est continue sur  $[0, \infty]$ , et si sa dérivée au sens des distributions est de la forme  $f' = g + f(0)\delta$  où  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , on a

$$\int_0^x g(t) dt = f(x) - f(0) \quad (9.7)$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$h(x) = \int_0^x g(t) dt,$$

et notons  $h'$  sa dérivée  $h$  au sens des distributions. Pour  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \langle h', \varphi \rangle &= -\langle h, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \left( \int_0^x g(t) dt \right) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_0^{+\infty} g(t) \left( \int_t^{+\infty} \varphi'(x) dx \right) dt = \int_0^{+\infty} g(t) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

d'où  $h' = g = f' - f(0)\delta$ . Il en résulte que, sur  $]0, \infty[$ ,  $h = f + C$  et comme de plus  $h(0) = 0$ , que  $h(x) = f(x) - f(0)$ .

Q.E.D.

### Translation

Si  $s \in \mathbb{R}^+$ , avec  $p = \xi + i\eta$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(\tau_s f)(p) = \mathcal{F}(e^{-\xi x} \tau_s f(x))_\eta = e^{-s\xi} \mathcal{F}(\tau_s(e^{-\xi x} f(x)))_\eta = e^{-s\xi} e^{-is\eta} \widehat{e^{-\xi x} f(x)}_\eta,$$

et de même

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(e^{i\beta x} f(x))(p) = \mathcal{F}(e^{i\beta x} e^{-\xi x} f(x))_\eta = \tau_\beta \widehat{e^{-\xi x} f(x)}_\eta,$$

ainsi que, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \xi - \xi_0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(e^{\alpha x} f(x))(p) = \mathcal{F}(e^{\alpha x} e^{-\xi x} f(x))_\eta = \mathcal{F}(e^{(\alpha-\xi)x} f(x))_\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(f)(p - \alpha),$$

soit

$$\mathcal{L}(\tau_s f)(p) = e^{-ps} \mathcal{L}(f)(p) \text{ et } \mathcal{L}(e^{qx} f(x))(p) = \mathcal{L}(f)(p - q), \quad \Re q < \Re p - \xi_0. \quad (9.8)$$

### Homothétie

Posons

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \text{ d'où } \widehat{f}_\lambda = \frac{1}{|\lambda|} \widehat{f}_{1/\lambda}.$$

Par conséquent, si  $\lambda > 0$ , avec  $p = \xi + i\eta$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(f_\lambda)(p) = \mathcal{F}(e^{-\xi x} f_\lambda)_\eta = \mathcal{F}((e^{-\xi x/\lambda} f)_\lambda)_\eta = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(e^{-\xi x/\lambda} f)\left(\frac{\eta}{\lambda}\right),$$

soit

$$\mathcal{L}(f_\lambda)(p) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (9.9)$$

### 9.1.3 Quelques transformées de Laplace usuelles

On utilise fréquemment la notation suivante :

$$f \sqsupset U(p) \text{ pour } U(p) = \mathcal{L}(f)(p). \quad (9.10)$$

On dit alors que  $f$  est l'original de  $U$ , expression qui sera pleinement justifiée par le théorème 9.26, qui nous en garantit l'unicité de l'inverse. En appliquant les formules précédentes, et en notant  $Y$  la fonction de Heaviside, on obtient

$$\begin{aligned} Y &\sqsupset \frac{1}{p} & Y e^{qx} &\sqsupset \frac{1}{(p-q)} & Y x^n &\sqsupset \frac{n!}{p^{n+1}} \\ Y e^{i\omega x} &\sqsupset \frac{1}{(p-i\omega)} & Y \sin \omega x &\sqsupset \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)} & Y \cos \omega x &\sqsupset \frac{p}{(p^2 + \omega^2)} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Détaillons quelques-uns de ces calculs.

(i) Calcul de  $\mathcal{L}(Y)$

$$\mathcal{L}(Y) = \int_0^\infty e^{-px} dx = \left[ -\frac{1}{p} e^{-px} \right]_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

(ii) Calcul de  $\mathcal{L}(Y x^n)$

$$\frac{1}{p} \mathcal{L}(Y x^n)(p) = \frac{1}{n+1} \mathcal{L}(Y x^{n+1})(p) \text{ d'où } \frac{1}{p^{n+1}} \mathcal{L}(Y)(p) = \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{L}(Y x^{n+1})(p),$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}(Y x^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Bien entendu, il existe des tables de transformées de Laplace qui bien souvent permettent d'éviter de réaliser soi-même ces calculs.

### 9.1.4 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

PROPOSITION 9.8 Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $S_+^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \mathcal{L}(g)(p), \quad (9.12) \quad \heartsuit$$

où  $\xi_0(f * g) \leq \max(\xi_0(f), \xi_0(g))$ .

DÉMONSTRATION. Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $S_+^1(\mathbb{R})$ , leurs supports sont convolutifs, et  $f * g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ . On aura

$$\int e^{-\xi y} f(y) e^{-\xi(x-y)} g(x-y) dy = e^{-\xi x} \int f(y) g(x-y) dy = e^{-\xi x} (f * g)_x$$

d'où si  $p = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(p) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(e^{-\xi x} (f * g)_x)_\eta = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}((e^{-\xi x} f * e^{-\xi x} g))_\eta \\ &= 2\pi \mathcal{F}(e^{-\xi x} f)_\eta \mathcal{F}(e^{-\xi x} g)_\eta \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \mathcal{L}(g)(p).$$

Q.E.D.

### 9.1.5 Transformées de Laplace des fonctions à croissance lente

On s'intéresse ici au lien entre la régularité de la fonction  $f$  et le comportement à l'infini de sa transformée de Laplace  $\mathcal{L}(f)$ . Rappelons la définition de la fonction Eulérienne de seconde espèce  $\Gamma$  :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (9.13)$$

PROPOSITION 9.9

(i) Si  $f$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et si  $\exists M, n$  et  $\rho$  tels que

$$|f(t)| \leq M t^n, \quad \forall t > \rho, \quad (9.14)$$

alors

$$\mathcal{L}(f)(p) \rightarrow 0 \text{ quand } \Re p \rightarrow \infty.$$

(ii) Si de plus  $f$  est continue sur  $[0, \infty[$  et si pour  $t \leq R$

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^N c_n t^{n+\alpha} \right| \leq M_N t^{N+1+\Re \alpha}, \text{ où } \Re \alpha > -1, \quad (9.15)$$

alors  $\forall \varepsilon > 0, \forall \Re p > \varepsilon$

$$\left| \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N c_n \Gamma(n+1+\alpha) p^{-n-1-\alpha} \right| \leq K_N (\Re p)^{-N-2-\Re \alpha}. \quad (9.16)$$

(iii) En particulier si  $f$  admet au voisinage de 0 un développement asymptotique de la forme  $\sum_{n=0}^N c_n t^n$ , alors  $\mathcal{L}(f)(p)$  admet  $\sum_{n=0}^N c_n \Gamma(n+1) p^{-n-1}$  pour développement asymptotique lorsque  $\Re p \rightarrow \infty$ .

DÉMONSTRATION.

► Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\xi = \Re p$  que l'on choisit de telle sorte que  $\xi > \varepsilon$ . On aura  $t^n < e^{\varepsilon t}$  dès que  $t / \text{Log } t > n / \varepsilon$ . Il en résulte que pour  $t$  suffisamment grand, disons  $t > R$ , on a  $|f(t)| \leq M e^{\varepsilon t}$ , et par conséquent

$$\left| \int_R^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq M \int_R^{\infty} e^{(\varepsilon - \xi)t} dt = M \frac{e^{(\varepsilon - \xi)R}}{\xi - \varepsilon}. \quad (9.17)$$

► Par ailleurs

$$\left| \int_0^R f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^R |f(t)| e^{-t\xi} dt,$$

et comme  $|f(t)| e^{-t\xi} \leq |f(t)|$ , en vertu du théorème de convergence dominée,

$$\int_0^R f(t) e^{-pt} dt \rightarrow 0$$

quand  $\xi \rightarrow \infty$  ; il en résulte que  $\mathcal{L}(f)(p) \rightarrow 0$ .

► On écrira

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( f(t) - \sum_{n=0}^N c_n t^{n+\alpha} \right) e^{-pt} dt &= \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N c_n \int_0^{\infty} t^{n+\alpha} e^{-pt} dt \\ &= \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{p^{n+1+\alpha}} \int_0^{\infty} \tau^{n+\alpha} e^{-\tau} d\tau \\ &= \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{p^{n+1+\alpha}} \Gamma(n+1+\alpha). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'estimation (9.17), négligeant les termes exponentiellement petits, il nous suffira de préciser le comportement de

$$\int_0^R \left( f(t) - \sum_{n=0}^N c_n t^{n+\alpha} \right) e^{-pt} dt,$$

soit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \left( f(t) - \sum_{n=0}^N c_n t^{n+\alpha} \right) e^{-pt} dt \right| &\leq M_N \int_0^\infty t^{N+1+\Re \epsilon \alpha} e^{-t\xi} dt \\ &= \frac{M_N}{\xi} \int_0^\infty \left( \frac{\tau}{\xi} \right)^{N+1+\Re \epsilon \alpha} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{M_N}{\xi^{N+2+\Re \epsilon \alpha}} \int_0^\infty \tau^{N+1+\Re \epsilon \alpha} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{M_N \Gamma(N+2+\Re \epsilon \alpha)}{\xi^{N+2+\Re \epsilon \alpha}}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

### 9.1.6 Transformées de Laplace des fonctions analytiques de type exponentiel dans un secteur

**DÉFINITION 9.10** On dit que  $f$  est analytique de type exponentiel dans le secteur ouvert  $\Sigma$  si il existe  $C, r > 0$  tels que

$$\exists C, r > 0, \text{ tels que } |f(z)| \leq C e^{r|z|}, \quad \forall z \in \Sigma, \tag{9.18}$$

Pour  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on notera

$$P_\theta^r = \{p \mid \Re(p e^{i\theta}) > r\} = \{p = \rho e^{i\varphi} \mid \rho \cos(\theta + \varphi) > r\}, \tag{9.19}$$

il s'agit en fait du demi-plan ouvert ne contenant pas le disque  $B_r$ , limité par la droite perpendiculaire à  $e^{-i\theta}$  qui passe par le point  $r e^{-i\theta}$ . On aura  $-\pi/2 - \theta < \varphi < \pi/2 - \theta \pmod{2\pi}$

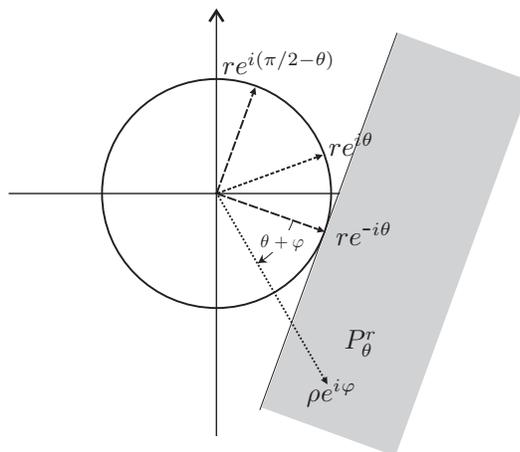


FIGURE 9.2 – Fonction de type exponentiel

**PROPOSITION 9.11** Soit  $f$  analytique de type exponentiel dans le secteur ouvert  $\Sigma$  et  $e^{i\theta} \in \Sigma$

(i) la fonction

$$L_\theta(f)(p) = \int_{\text{Arg}z=\theta} f(z)e^{-pz} dz \quad (9.20)$$

est analytique dans le demi-plan  $P_\theta^r$ .

(ii) la fonction  $L_\theta(f)$  est la restriction à  $P_\theta^r$  d'une fonction analytique  $L(f)$  définie dans  $\bigcup_{e^{i\theta} \in \Sigma} P_\theta^r$ .

DÉMONSTRATION.

▷ On a tout d'abord

$$L_\theta(f)(p+h) - L_\theta(f)(p) = e^{i\theta} \int_0^\infty f(te^{i\theta})e^{-pte^{i\theta}} (e^{-hte^{i\theta}} - 1) dt$$

or d'après la formule (9.3) du lemme 9.4.

$$e^{-hte^{i\theta}} - 1 + hte^{i\theta} = h^2 t^2 e^{2i\theta} \int_0^1 (1-\zeta) e^{-\zeta hte^{i\theta}} d\zeta,$$

d'où

$$\begin{aligned} L_\theta(f)(p+h) - L_\theta(f)(p) &= -he^{2i\theta} \int_0^\infty f(te^{i\theta})e^{-pte^{i\theta}} t dt \\ &\quad + h^2 e^{3i\theta} \int_0^\infty f(te^{i\theta})e^{-pte^{i\theta}} t^2 \int_0^1 (1-\zeta) e^{-\zeta hte^{i\theta}} d\zeta dt \end{aligned}$$

pourvu du moins que  $f(te^{i\theta})e^{-pte^{i\theta}} t$  soit intégrable. Mais en fait, comme par hypothèse  $|f(te^{i\theta})| \leq Ce^{rt}$  pour  $t \geq 0$ , on aura

$$\left| \int_0^\infty f(te^{i\theta})e^{-pte^{i\theta}} t dt \right| \leq C \int_0^\infty |e^{t(r-pe^{i\theta})}| t dt \leq C \int_0^\infty e^{t(r-\Re(pe^{i\theta}))} t dt ;$$

l'analyticité de  $L_\theta(f)$  en découle, pour  $r - \Re(pe^{i\theta}) < 0$ , soit  $p \in P_\theta^r$ .

▷ Soient  $R > \rho > 0$ , ainsi que  $\theta_1, \theta_2 \in \Sigma$ . Dans un premier temps nous choisirons  $\Sigma$  d'amplitude strictement inférieure à  $\pi$ . On note  $\gamma_\rho^R$  le contour fermé formé des segments radiaux  $\gamma_{\theta_1}(t) = te^{i\theta_1}$ ,  $t \in [\rho, R]$ , et  $\gamma_{\theta_2}(t) = (R + \rho - t)e^{i\theta_2}$ ,  $t \in [r, R]$ , ainsi que des arcs de cercle  $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , et  $\gamma_\rho(\theta) = \rho e^{i(\theta_1 + \theta_2 - \theta)}$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . On aura

$$0 = \int_{\gamma_\rho^R} f(z)e^{-pz} dz = \int_{\gamma_{\theta_1}} f(z)e^{-pz} dz + \int_{\gamma_R} f(z)e^{-pz} dz + \int_{\gamma_{\theta_2}} f(z)e^{-pz} dz + \int_{\gamma_\rho} f(z)e^{-pz} dz,$$

et

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)e^{-pz} dz \rightarrow 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0$$

puisque  $f$  est bornée au voisinage de 0.

▷ Par ailleurs

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)e^{-pz} dz \right| \leq R \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(Re^{i\theta})e^{-pRe^{i\theta}}| d\theta \leq CR \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{(r-\Re(pe^{i\theta}))R} d\theta,$$

Soit alors  $p = \tau e^{i\varphi} \in P_{\theta_1}^r \cap P_{\theta_2}^r$ ; pour  $j = 1, 2$ , on aura  $\Re(pe^{i\theta_j}) > r$ , soit  $\cos(\theta_j + \varphi) > r/\tau > 0$  et par conséquent  $-\pi/2 < \theta_j + \varphi < \pi/2$ . Comme la fonction  $\cos$  est concave sur  $]-\pi/2, \pi/2[$ , on aura  $\cos(\theta + \varphi) \geq \min(\cos(\theta_1 + \varphi), \cos(\theta_2 + \varphi))$ . En conséquence  $\exists \eta > 0$ , tel que  $\Re(pe^{i\theta}) = \tau \cos(\theta + \varphi) \geq r + \eta$ ,  $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , d'où

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)e^{-pz} dz \right| \leq CR \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\eta R} d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

▷ Pour  $p \in P_{\theta_1}^r \cap P_{\theta_2}^r$ , on a donc

$$L_{\theta_1}(f)(p) - L_{\theta_2}(f)(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left( \int_{\gamma_{\theta_1}} f(z)e^{-pz} dz + \int_{\gamma_{\theta_2}} f(z)e^{-pz} dz \right) = 0 ; \quad (9.21)$$

c'est dire que  $L_{\theta_1}(f)$  et  $L_{\theta_2}(f)$  coïncident sur  $P_{\theta_1}^r \cap P_{\theta_2}^r$  et donc sur  $P_{\theta_1}^r \cup P_{\theta_2}^r$  en vertu du principe du prolongement analytique. Il en résulte que  $L_{\theta}(f)$  est la restriction à  $P_{\theta}^r$  d'une fonction analytique  $L(f)$  définie dans  $\bigcup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} P_{\theta}^r$ . Le résultat annoncé en découle, quitte à réitérer l'opération de proche en proche si l'ouverture du secteur  $\Sigma$  est supérieure à  $\pi$ .

Q.E.D.

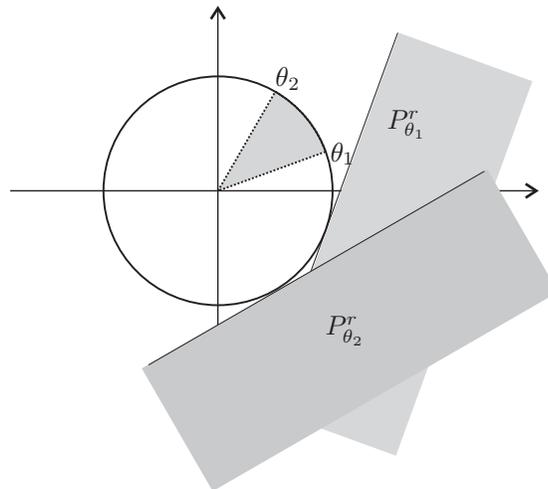


FIGURE 9.3 – Domaine d'analyticité

**COROLLAIRE 9.12** Si  $f$  est analytique de type exponentiel dans un secteur ouvert  $\Sigma$  contenant  $\mathbb{R}^+$ , sa transformée de Laplace  $\mathcal{L}(f)(p) = L_0(f)(p)$  se prolonge analytiquement à  $\bigcup_{e^{i\theta} \in \Sigma} P_{\theta}^r$ .

### 9.1.7 Transformées de Laplace des fonctions entières de type exponentiel

**DÉFINITION 9.13** On dit que  $f$  est entière de type exponentiel si il existe  $C, r > 0$  tels que

$$\exists C, r > 0, \text{ tels que } |f(z)| \leq Ce^{r|z|}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad (9.22)$$

**COROLLAIRE 9.14** Si  $f$  est entière de type exponentiel

- (i) sa transformée de Laplace se prolonge analytiquement à tout l'extérieur du disque  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ ,
- (ii) elle y a pour développement de Laurent

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(0)p^{-n-1}. \quad (9.23)$$

**DÉMONSTRATION.**

▷ Le résultat de prolongement découle immédiatement du corollaire 9.12.

▷ Avec  $\varphi = \text{Arg } p$ , on aura en particulier, en vertu de la proposition 9.11 (ii)

$$\mathcal{L}(f)(p) = L_0(f)(p) = L_{-\varphi}(f)(p) = \int_{\text{Arg } z = -\varphi} f(z)e^{-pz} dz = e^{-i\varphi} \int_0^\infty f(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt,$$

d'où, pour  $|p| > r$ ,

$$|\mathcal{L}(f)(p)| \leq \int_0^\infty |f(te^{-i\varphi})| e^{-|p|t} dt \leq C \int_0^\infty e^{(r-|p|)t} dt = \frac{C}{|p| - r}. \quad (9.24)$$

Il en résulte que  $\mathcal{L}(f)(p) \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow \infty$ , c'est encore dire que  $g(p) = \mathcal{L}(f)(1/p)$  est bornée au voisinage de 0 et par conséquent d'après le théorème 7.2 qu'elle possède en 0 une singularité fictive; on dit que  $\mathcal{L}(f)$  est holomorphe à l'infini.

▷ Notons

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

le développement en série entière de  $f$  en 0. Soit alors

$$g_N(z) = \sum_{n=N+1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

le reste de la série, on aura

$$|g_N(z)| \leq |z|^{N+1} \sum_{n=N+1}^\infty \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| |z|^{n-N-1},$$

et par conséquent  $\forall A > 0, \forall N, \exists M_N$  tel que

$$|g_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \right| \leq M_N |z|^{N+1}, \quad \forall |z| \leq A. \quad (9.25)$$

▷ Selon (9.11) on aura

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(g_N)(p) + \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g_N)(p) &= \int_0^\infty g_N(t)e^{-pt} dt = e^{-i\varphi} \int_0^\infty g_N(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt \\ &= e^{-i\varphi} \int_0^A g_N(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt \\ &\quad + e^{-i\varphi} \int_A^\infty f(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt - e^{-i\varphi} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_A^\infty (te^{-i\varphi})^n e^{-|p|t} dt. \end{aligned}$$

Estimons ces divers termes : d'après (9.25),

$$\begin{aligned} \left| e^{-i\varphi} \int_0^A g_N(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt \right| &\leq M_N \int_0^A |(te^{-i\varphi})^{N+1}| e^{-|p|t} dt \\ &\leq M_N \int_0^\infty t^{N+1} e^{-|p|t} dt = M_N \mathcal{L}(t^{N+1})(|p|) = M_N \frac{(N+1)!}{|p|^{N+2}} \end{aligned}$$

ainsi que, d'après (9.24)

$$\left| e^{-i\varphi} \int_A^\infty f(te^{-i\varphi})e^{-|p|t} dt \right| \leq C \int_A^\infty e^{(r-|p|)t} dt = \frac{C}{|p| - r} e^{(r-|p|)A},$$

enfin pour  $A$  suffisamment grand, on aura  $\forall n \leq N, \forall t \geq A, t^n \leq e^t$  et par conséquent selon (9.24)

$$\int_A^\infty t^n e^{-|p|t} dt \leq \frac{1}{|p|-1} e^{(1-|p|)A}$$

d'où

$$\left| e^{-i\varphi} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_A^\infty (te^{-i\varphi})^n e^{-|p|t} dt \right| \leq e^{-|p|A} \frac{e^A}{|p|-1} \sum_{n=0}^N \frac{|f^{(n)}(0)|}{|p|^{n+1}} = K_N e^{-A|p|}.$$

Pour  $|p|$  assez grand les termes exponentiellement décroissants sont négligeables, et on aura alors

$$\left| \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} \right| = |\mathcal{L}(g_N)(p)| \leq \frac{M'_N}{|p|^{N+2}}. \quad (9.26)$$

▷ Comme  $\mathcal{L}(f)(p) \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow \infty$ , son développement en série de Laurent est de la forme

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{p^{n+1}}.$$

Supposons alors  $\exists N$  tel que  $b_n = f^{(n)}(0), \forall n < N$  et  $b_N \neq f^{(N)}(0)$ , on aura

$$\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{p^{n+1}} - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{b_N - f^{(N)}(0)}{p^{N+1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{p^{n+1}},$$

ce qui contredit l'inégalité (9.26). Il en résulte que le développement de  $\mathcal{L}(f)(p)$  en série de Laurent s'écrit

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}.$$

Q.E.D.

REMARQUE 9.15 Notons que sous les hypothèses du corollaire, en vertu des inégalités de Cauchy (4.16) appliquées à

$$\mathcal{L}(f)(1/p) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) p^{n+1},$$

dès que  $R > r, \exists M$  tel que  $\forall n$

$$|f^{(n)}(0)| \leq MR^{n+1}. \quad (9.27)$$

En effet comme  $S(p) = \mathcal{L}(f)(1/p)$ , converge dans le disque de rayon  $1/r$ , on aura  $|S^{(n)}(0)| \leq MR^n n!$ , or  $S(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} S^{(n)}(0) p^n / n! = \sum_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(0) p^{n+1}$ , d'où  $f^{(n)}(0) = S^{(n+1)}(0) / (n+1)!$  et le résultat annoncé.

## 9.2 Transformée de Laplace des distributions

De même que la transformation de Fourier peut être étendue aux distributions tempérées, ce qui permet d'une part de l'appliquer à des fonctions qui ne sont ni intégrables ni de carré intégrable, et d'autre part de démontrer un théorème d'inversion assorti d'une expression explicite de l'inverse, de même la transformation de Laplace peut être étendue aux distributions, ou du moins à une classe spécifique de celles-ci.

On note

$$\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \mid \exists \xi \in \mathbb{R}, \text{ tel que } e^{-\xi x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}. \quad (9.28)$$

Rappelons que  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  note l'ensemble des distributions dont le support est inclus dans  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  l'ensemble des distributions tempérées. Notons bien qu'il n'y a pas de hiérarchie entre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , en effet d'une part on accorde un comportement à l'infini plus rapidement croissant du côté des  $x$  positifs aux distributions de  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , et d'autre part on exige de leur support qu'il ne s'étende pas du côté des  $x$  négatifs. ♠

**LEMME 9.16** Soient  $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ , tels que  $e^{-\xi x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , alors  $\forall \xi_1 > \xi$ ,  $e^{-\xi_1 x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

En conséquence et de même qu'à la suite du lemme 9.1,  $\{\xi \in \mathbb{R} \mid e^{-\xi x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}$  est soit l'axe réel tout entier, soit une demi-droite, selon le cas ouverte ou fermée, contenant le point  $+\infty$ .

DÉMONSTRATION. Selon la topologie de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $\exists \ell, C$  tels que  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\left| \langle e^{-\xi x} S, \varphi \rangle \right| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{j \leq \ell, m \leq \ell} |x|^j |\varphi^{(m)}(x)|,$$

d'où

$$\left| \langle e^{-\xi_1 x} S, \varphi \rangle \right| = \left| \langle e^{-\xi x} S, e^{(\xi - \xi_1)x} \varphi(x) \rangle \right| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{j \leq \ell, m \leq \ell} |x|^j \left| (e^{(\xi - \xi_1)x} \varphi(x))^{(m)} \right|.$$

En vertu de la formule de Leibniz

$$(e^{(\xi - \xi_1)x} \varphi(x))^{(m)} = \sum_{n \leq m} \binom{m}{n} (\xi - \xi_1)^{m-n} e^{(\xi - \xi_1)x} \varphi^{(n)}(x),$$

et comme  $\text{Supp } S \subset \mathbb{R}^+$ , il en résulte que

$$\left| \langle e^{-\xi_1 x} S, \varphi \rangle \right| \leq C' \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{j \leq \ell, n \leq \ell} |x|^j |\varphi^{(n)}(x)|;$$

c'est dire que  $e^{-\xi_1 x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Q.E.D.

**DÉFINITION 9.17 (transformée de Laplace)** Soit  $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , d'abscisse de convergence  $\xi_0$  et  $p = \xi + i\eta$ ,  $\xi > \xi_0$ , on pose

$$\mathcal{L}(S)(p) = \sqrt{2\pi} \widehat{e^{-\xi x} S}_\eta. \quad (9.29)$$

$\mathcal{L}(S)$  est la *transformée de Laplace* de la distribution  $S$ , c'est une famille à 1 paramètre réel ( $\xi$ ) de transformées de Fourier, qui a priori sont des distributions, de même que la transformée de Laplace d'une fonction, elle n'est définie que dans un demi-plan. La compatibilité entre la définition de la transformée de Laplace des fonctions donnée au paragraphe précédent, et celle ci-dessus relative aux distributions est assurée par celle entre transformée de Fourier des fonctions et des distributions.

On rappelle que pour  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \widehat{T}_\eta, \varphi(\eta) \rangle = \langle T_x, \widehat{\varphi}(x) \rangle = \left\langle T_x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\eta) e^{-i\eta x} d\eta \right\rangle.$$

Nous allons voir que l'on peut donner de la transformée de Laplace des distributions une expression proche de celle couramment utilisée dans le cas des fonctions :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx,$$

LEMME 9.18 Soient  $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\alpha(x) = 1$  pour  $|x| \leq 1$  et  $\alpha(x) = 0$  pour  $|x| \geq 2$  ; posons  $\alpha_k(x) = \alpha(x/k)$ . Si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $T_k = \alpha_k T$ , alors  $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  (ensemble des distributions à support compact) et  $T_k \rightarrow T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

DÉMONSTRATION. Pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on pose  $\varphi_k = \alpha_k \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , et en vertu de la formule de Leibniz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{j \leq \ell, m \leq \ell} |x|^j |\partial^m (\varphi - \varphi_k)| \leq C \sup_{x \geq k} \sup_{j \leq \ell, m \leq \ell} |x|^j |\partial^m \varphi(x)|,$$

qui tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ , puisque  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . C'est dire que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et par conséquent

$$|\langle T - T_k, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi - \varphi_k \rangle| \rightarrow 0,$$

soit  $T_k \rightarrow T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Q.E.D.

THÉORÈME 9.19 Soit  $S \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ ,  $\forall p = \xi + i\eta$  où  $\xi > \xi_1 > \xi_0$ , on a

$$\mathcal{L}(S)(p) = \langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle. \quad (9.30) \quad \heartsuit$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , d'après le lemme 9.18 il existe une suite  $S_k$  de distributions à support compact tendant vers  $S$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , soit

$$\langle \widehat{e^{-\xi x} S}, \psi_\eta \rangle = \langle e^{-\xi x} S, \widehat{\psi}_x \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{-\xi x} S_k, \widehat{\psi}_x \rangle.$$

Mais comme  $e^{-\xi x} S_k$  et  $\psi$  sont à support compact

$$\begin{aligned} \langle e^{-\xi x} S_k, \widehat{\psi}_x \rangle &= \langle e^{-\xi x} S_k, \langle \psi(\eta), e^{-i\eta x} \rangle \rangle \\ &= \langle e^{-\xi x} S_k \otimes \psi_\eta, e^{-i\eta x} \rangle = \langle \psi_\eta, \langle e^{-\xi x} S_k, e^{-i\eta x} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle e^{-\xi x} S_k, \widehat{\psi}_x \rangle &= \langle \psi_\eta, \langle e^{-\xi_1 x} S_k, e^{\xi_1 x} e^{-\xi x} e^{-i\eta x} \rangle \rangle \\ &= \langle \psi_\eta, \langle e^{-\xi_1 x} S_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

puisque  $S_k$  est à support compact. Mais comme de plus  $\xi_1 < \xi$ , alors  $e^{(\xi_1 - p)x} = e^{(\xi_1 - \xi)x} e^{-i\eta x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et  $\langle e^{-\xi_1 x} S_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \rightarrow \langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle$ , d'où

$$\langle \widehat{e^{-\xi x} S}, \psi_\eta \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \psi_\eta, \langle e^{-\xi_1 x} S_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \rangle.$$

Pour  $k$  assez grand  $\text{Supp}(S - S_k) \subset [k, \infty[$ , et par conséquent

$$|\langle e^{-\xi_1 x} (S - S_k), e^{(\xi_1 - p)x} \rangle| \leq C \sup_{x \geq k} \sup_{j \leq \ell, |\beta| \leq \ell} |x|^j |\partial^\beta e^{(\xi_1 - p)x}|,$$

d'où, selon le théorème de convergence dominée  $\int \psi(\eta) \langle e^{-\xi_1 x} (S - S_k), e^{(\xi_1 - p)x} \rangle d\eta \rightarrow 0$ , et par conséquent

$$\langle \widehat{e^{-\xi x} S}, \psi_\eta \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi(\eta) \langle e^{-\xi_1 x} S_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle d\eta = \int \psi(\eta) \langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle d\eta.$$

On aura donc

$$\mathcal{L}(S)(p) = \widehat{e^{-\xi x} S}(\eta) = \langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle.$$

Q.E.D.

On voit déjà que, pour  $\Re p > \xi_0$ , la transformée de Laplace est une *fonction de  $p$* , et non pas seulement une famille à un paramètre de distributions tempérées ; c'est en fait c'est une *fonction holomorphe*. Prenons également conscience du progrès considérable que représente la formule (9.30) qui permet de calculer la valeur de la fonction  $\mathcal{L}(S)$  en tout point  $p$  tel que  $\Re p > \xi_0$ , par rapport à la définition (9.29).

On note fréquemment

$$\mathcal{L}(S)(p) = \langle S, e^{-px} \rangle, \quad (9.31)$$

mais ce n'est en général qu'une notation, dont la signification réelle est à chercher dans la formule (9.30). La formule (9.31) est pleinement justifiée si  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  et  $\Re p > 0$ , car alors le facteur de convergence  $e^{-\xi_1 x}$  peut être éliminé dans la formule (9.30).

### 9.2.1 Analyticité

**LEMME 9.20** Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\text{Supp } \varphi \subset [a, +\infty[$  et  $u_h(x) = (e^{-hx} - 1)/h + x$ , alors  $u_h \varphi \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  quand  $h \rightarrow 0$ .

DÉMONSTRATION.

Notons tout d'abord que

$$u'_h(x) = 1 - e^{-hx} \text{ et } u_h^{(p)}(x) = (-1)^p h^{p-1} e^{-hx}, \quad \forall p > 1,$$

La preuve découle alors des inégalités (9.4) et de la formule de Leibniz.

Q.E.D.

**THÉORÈME 9.21** La transformée de Laplace est une fonction analytique dans le demi-plan de convergence.



DÉMONSTRATION. On calcule le quotient différentiel

$$\frac{\mathcal{L}(S)(p+h) - \mathcal{L}(S)(p)}{h} = \left\langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1-p)x} \frac{e^{-hx} - 1}{h} \right\rangle = \langle e^{-\xi_1 x} S, e^{(\xi_1-p)x} (u_h - x) \rangle,$$

où  $\Re p > \xi_1 > \xi_0$ . D'après le lemme 9.20, on aura  $e^{(\xi_1-p)x} u_h(x) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ , dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Il en résulte que  $\mathcal{L}(S)(p)$  est dérivable avec

$$\mathcal{L}'(S)(p) = -\langle e^{-\xi_1 x} S, x e^{(\xi_1-p)x} \rangle = -\mathcal{L}(xS)(p) \quad (9.32)$$

Q.E.D.

**PROPOSITION 9.22** Si  $S \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ , avec  $\xi_0$  pour abscisse de convergence et si  $e^{-\xi_0 x} S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{e^{-\xi x} S} \rightarrow \widehat{e^{-\xi_0 x} S}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  quand  $\xi \rightarrow \xi_0$ ,  $\xi > \xi_0$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $\xi = \xi_0 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , alors pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \widehat{e^{-\xi x} S}, \varphi \rangle - \langle \widehat{e^{-\xi_0 x} S}, \varphi \rangle = \langle (e^{-\varepsilon x} - 1) e^{-\xi_0 x} S, \widehat{\varphi}(x) \rangle = -\langle e^{-\xi_0 x} S, u'_\varepsilon(x) \widehat{\varphi}(x) \rangle.$$

Du lemme 9.20 il résulte que  $u'_\varepsilon(x) \widehat{\varphi}(x) \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et par conséquent que  $\widehat{e^{-\xi x} S} - \widehat{e^{-\xi_0 x} S} \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Q.E.D.

COROLLAIRE 9.23 En particulier si  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , on a



$$\widehat{S}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{L}(S)(p), \text{ la limite s'entendant au sens de } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (9.33)$$

ce qui peut constituer un excellent moyen de calculer  $\widehat{S}$ .

Il faut prendre garde au fait que, bien que limite d'une suite de fonctions très régulières,  $\mathcal{L}(S)(p_0)$  où  $p_0 = \xi_0 + \eta$ , peut très bien n'être même pas une fonction (voir par exemple la formule (9.40)). Ce qu'on espère en fait malgré tout c'est que la fonction  $\mathcal{L}(S)(p)$  soit susceptible d'un prolongement méromorphe au-delà du demi-plan de convergence.

### 9.2.2 Propriétés élémentaires

Elles découlent essentiellement de celles de la transformation de Fourier *des distributions*.

#### Dérivation

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(S')(p) &= \widehat{e^{-\xi x} S'}(\eta) = \widehat{\xi e^{-\xi x} S}(\eta) + \widehat{(e^{-\xi x} S)'}(\eta) \\ &= \widehat{\xi e^{-\xi x} S}(\eta) + i\eta \widehat{e^{-\xi x} S}(\eta) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(S)(p), \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{L}(S')(p) = p \mathcal{L}(S)(p) \text{ et } \mathcal{L}'(S)(p) = -\mathcal{L}(xS)(p), \quad (9.34)$$

selon la formule (9.32). Notons qu'il s'agit bien ici de la dérivation *au sens des distributions* et que par conséquent, si  $S$  est la restriction à  $\mathbb{R}^+$  d'une fonction qui ne s'annule pas à l'origine, sa dérivée comporte une masse de Dirac (voir la formule (9.6)). ♠

#### Translation

Si  $s \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(\tau_s S)(p) = \mathcal{F}(e^{-\xi x} \tau_s S)(\eta) = e^{-s\xi} \mathcal{F}(\tau_s(e^{-\xi x} S))(\eta) = e^{-s\xi} e^{-is\eta} \widehat{e^{-\xi x} S}(\eta),$$

et de même

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(e^{i\beta x} S)(p) = \mathcal{F}(e^{i\beta x} e^{-\xi x} S)(\eta) = \tau_\beta \widehat{e^{-\xi x} S}(\eta),$$

ainsi que, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \xi - \xi_0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(e^{\alpha x} S)(p) = \mathcal{F}(e^{\alpha x} e^{-\xi x} S)(\eta) = \mathcal{F}(e^{(\alpha-\xi)x} S)(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(S)(p-\alpha),$$

soit

$$\mathcal{L}(\tau_s S)(p) = e^{-ps} \mathcal{L}(S)(p) \text{ et } \mathcal{L}(e^{\alpha x} S)(p) = \mathcal{L}(S)(p-\alpha), \quad \Re \alpha < \Re p - \xi_0. \quad (9.35)$$

**Homothétie**

Posons

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x) \text{ et } \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{|\lambda|} \langle T, \varphi_{1/\lambda} \rangle,$$

on a

$$\langle \widehat{T}_\lambda, \varphi \rangle = \langle T_\lambda, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{|\lambda|} \langle T, \widehat{\varphi}_{1/\lambda} \rangle = \langle T, \widehat{\varphi}_\lambda \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi_\lambda \rangle = \frac{1}{|\lambda|} \langle \widehat{T}_{1/\lambda}, \varphi \rangle,$$

d'où  $|\lambda| \widehat{T}_\lambda = \widehat{T}_{1/\lambda}$ . Par conséquent, si  $\lambda > 0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(T_\lambda)(p) = \mathcal{F}(e^{-\xi x} T_\lambda)(\eta) = \mathcal{F}((e^{-\xi x/\lambda} T)_\lambda)(\eta) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(e^{-\xi x/\lambda} T)\left(\frac{\eta}{\lambda}\right),$$

soit

$$\mathcal{L}(T_\lambda)(p) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}(T)\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (9.36)$$

**9.2.3 Quelques transformées de Laplace de distributions**

$$\delta^{(m)} \sqsupset p^m \quad \text{Pf} \frac{Y(x)}{x} \sqsupset \gamma - \text{Log } p \quad (9.37)$$

Détaillons ces calculs.

(i) Calcul de  $\mathcal{L}(\delta^{(m)})$

$$\mathcal{L}(\delta^{(m)}) = \mathcal{L}(Y^{(m+1)}) = p^{m+1} \mathcal{L}(Y) = p^m$$

(ii) Calcul de  $\mathcal{L}\left(\text{Pf} \frac{Y(x)}{x}\right)$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Pf} \frac{Y(x)}{x}, \varphi(x) \right\rangle &= \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \varphi(0) \text{Log } a, \text{ où } \text{Supp } \varphi \subset ]-a, a[ \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \text{Log } a \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x} \right) + \varphi(0) \text{Log } a \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \text{Log } \varepsilon \right). \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \langle (Y(x) \text{Log } x)', \varphi \rangle &= -\langle Y(x) \text{Log } x, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \text{Log } x \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \text{Log } x \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx - [\text{Log } x \varphi(x)]_\varepsilon^\infty \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \text{Log } \varepsilon \varphi(0) + \text{Log } \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) \right) \\ &= \left\langle \text{Pf} \frac{Y(x)}{x}, \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\frac{Y(x)}{x}\right)(p) = p\mathcal{L}(Y(x)\text{Log } x)(p) = p\langle Y(x)\text{Log } x, e^{-px} \rangle = p \int_0^\infty e^{-px} \text{Log } x dx.$$

La fonction  $e^{-pz} \text{Log } z$  étant holomorphe en dehors de la coupure  $]-\infty, 0]$  sur l'axe réel négatif, et très décroissante quand  $|z| \rightarrow \infty$ , selon le lemme I.1 on peut remplacer le chemin  $[0, \infty[$  par  $\Gamma(t) = t/p$ ,  $t = 0, \infty$ , (voir la figure 9.4) et on aura

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px} \text{Log } x dx &= \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-t} \text{Log}(t/p) dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-t} \text{Log } t dt - \frac{\text{Log } p}{p} \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{p} (\gamma - \text{Log } p), \end{aligned}$$

où  $\gamma$  note la constante d'Euler :

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-t} \text{Log } t dt.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\frac{Y(x)}{x}\right)(p) = \gamma - \text{Log } p.$$

On voit à quel point l'analyticité joue dans ce calcul un rôle essentiel.

### 9.2.4 Application au calcul de transformées de Fourier

En application du corollaire 9.23,

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Pf}\frac{Y(x)}{x}}(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\xi \rightarrow 0} (\gamma - \text{Log}(\xi + i\eta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \gamma - \lim_{\xi \rightarrow 0} \text{Log}(\xi + i\eta) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\gamma - \text{Log}(i\eta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\gamma - \text{Log}(|\eta| e^{i\pi/2 \text{sgn } \eta})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\gamma - \text{Log } |\eta| - \text{Log } e^{i\pi/2 \text{sgn } \eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \gamma - \text{Log } |\eta| - i\frac{\pi}{2} \text{sgn } \eta \right). \end{aligned} \tag{9.38}$$

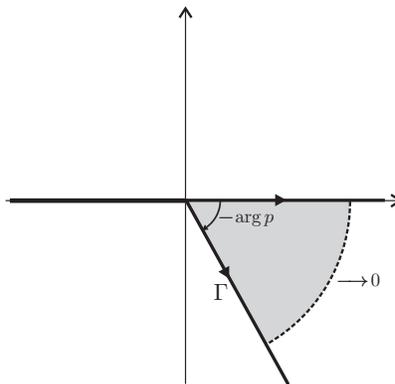


FIGURE 9.4 – Partie finie

Mais également

$$\widehat{\text{Pf} \frac{Y(-x)}{-x}}(\eta) = \widehat{\text{Pf} \frac{Y(x)}{x}}(-\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \gamma - \text{Log} |\eta| + i \frac{\pi}{2} \text{sgn} \eta \right)$$

or

$$\text{vp} \frac{1}{x} = \text{Pf} \frac{Y(x)}{x} + \text{Pf} \frac{Y(-x)}{x}$$

d'où

$$\widehat{\text{vp} \frac{1}{x}}(\eta) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sgn} \eta. \quad (9.39)$$

De même

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\eta - i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i} \left( \text{vp} \frac{1}{\eta} + i\pi\delta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \pi\delta - i \text{vp} \frac{1}{\eta} \right). \end{aligned} \quad (9.40)$$

### 9.2.5 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

PROPOSITION 9.24 Si  $T$  et  $S$  appartiennent à  $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ , alors



$$\mathcal{L}(T * S)(p) = \mathcal{L}(T)(p) \mathcal{L}(S)(p), \quad (9.41)$$

où  $\xi_0(T * S) \leq \max(\xi_0(T), \xi_0(S))$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $T$  et  $S$  appartiennent à  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , leurs supports sont convolutifs, et  $S * T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ . De plus pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on aura

$$\begin{aligned} \langle e^{-\xi x} T * e^{-\xi x} S, \varphi \rangle &= \langle e^{-\xi x} T_x \otimes e^{-\xi y} S_y, \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle e^{-\xi(x+y)} T_x \otimes S_y, \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle T_x \otimes S_y, e^{-\xi(x+y)} \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle (T * S)_s, e^{-\xi s} \varphi(s) \rangle = \langle e^{-\xi s} (T * S)_s, \varphi(s) \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $(e^{-\xi x} T * e^{-\xi x} S)_s = e^{-\xi s} (T * S)_s$ .

▷ Le lemme 9.18 nous permet alors de remplacer respectivement  $T$  et  $S$  par  $T_k$  et  $S_k$  à supports compacts tels que  $e^{-\xi_1 s} T_k$  et  $e^{-\xi_1 s} S_k$  convergent respectivement vers  $e^{-\xi_1 s} T$  et  $e^{-\xi_1 s} S$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On aura alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T_k * S_k)(p) &= \langle e^{-\xi_1 s} (T_k * S_k), e^{\xi_1 s} e^{-ps} \rangle \\ &= \langle (e^{-\xi_1 x} T_k * e^{-\xi_1 y} S_k)_s, e^{(\xi_1 - p)s} \rangle \\ &= \langle e^{-\xi_1 x} T_k, \langle e^{-\xi_1 y} S_k, e^{(\xi_1 - p)(x+y)} \rangle \rangle \\ &= \langle e^{-\xi_1 x} T_k, e^{(\xi_1 - p)x} \langle e^{-\xi_1 y} S_k, e^{(\xi_1 - p)y} \rangle \rangle \\ &= \langle e^{-\xi_1 x} T_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \langle e^{-\xi_1 y} S_k, e^{(\xi_1 - p)y} \rangle. \end{aligned}$$

▷ Il se trouve maintenant qu'en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, le produit de convolution est séquentiellement continu  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} \langle e^{-\xi_1 s} (T * S), e^{\xi_1 s} e^{-ps} \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{-\xi_1 s} (T_k * S_k), e^{\xi_1 s} e^{-ps} \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{-\xi_1 x} T_k, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{-\xi_1 y} S_k, e^{(\xi_1 - p)y} \rangle \\ &= \langle e^{-\xi_1 x} T, e^{(\xi_1 - p)x} \rangle \langle e^{-\xi_1 y} S, e^{(\xi_1 - p)y} \rangle = \mathcal{L}(T)(p) \mathcal{L}(S)(p), \end{aligned} \quad (9.42)$$

Selon le théorème 9.26 ci-dessous,  $\mathcal{L}(T)$  et  $\mathcal{L}(S)$  appartiennent à  $\mathcal{H}_+$ , ainsi par conséquent que leur produit ; c'est donc la transformée de Laplace d'une distribution de  $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ , et comme cette dernière est unique, la formule (9.42) nous apporte la preuve que  $e^{-\xi_1 s}(T * S) \in \mathcal{S}'_+$  et que  $\mathcal{L}(T * S)(p) = \mathcal{L}(T)(p)\mathcal{L}(S)(p)$ .

Q.E.D.

### 9.3 Inversion de la transformation de Laplace

On considère l'ensemble  $\mathcal{H}_+$  des fonctions  $U(p)$  qui pour un certain  $r \in \mathbb{R}$  sont analytiques dans  $P_0^r = \{p \mid \Re p > r\}$  et à croissance au plus polynômiale.

$$\mathcal{H}_+ = \{U \text{ à croissance lente} \mid \exists r, U(p) \text{ analytique pour } \Re p > r\}.$$

On admettra le lemme (non trivial) suivant :

LEMME 9.25 Si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $\exists f$  continue, à croissance lente, et  $m \in \mathbb{N}$  tels que  $T = f^{(m)}$ .

Si de plus  $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , on peut choisir  $f$  de telle sorte que  $\text{Supp } f \subset \mathbb{R}^+$ . En effet comme  $\text{Supp } f^{(m)} \subset \mathbb{R}^+$ ,  $f$  coïncide sur  $\mathbb{R}^-$  avec une fonction dont les dérivées sont nulles à partir de l'ordre  $m$ , soit en fait un polynôme  $Q$  de degré  $m-1$  au plus. Posons alors  $g = f - Q$ , on aura  $\text{Supp } g \subset \mathbb{R}^+$  et  $g^{(m)} = f^{(m)} - Q^{(m)} = f^{(m)} = T$ .

THÉORÈME 9.26 La transformation de Laplace est une bijection  $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_+$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $S \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ , en vertu du lemme 9.25, on pourra écrire  $e^{-\xi\eta}S_\eta = g^{(m)}$ , où  $\text{Supp } g \subset \mathbb{R}^+$  et par conséquent, d'après les formules (9.34) et (9.35),

$$\mathcal{L}(S)(p) = \mathcal{L}(e^{-\xi\eta}S_\eta)(p - \xi) = \mathcal{L}(g^{(m)})(p - \xi) = p^m \mathcal{L}(g)(p - \xi).$$

Comme selon la proposition (9.9),  $\mathcal{L}(g)(q) \rightarrow 0$  quand  $\Re q \rightarrow \infty$ , on aura  $|\mathcal{L}(g)(p - \xi)| \leq 1$  pour  $\Re p$  suffisamment grand, et par conséquent  $|\mathcal{L}(S)(p)| \leq |p|^m$ .

▷ Réciproquement, étant donné une fonction  $U(p) \in \mathcal{H}_+$  ; pour  $\zeta = \Re p > r$  fixé, c'est vis-à-vis de  $\tau = \Im p$  une distribution tempérée, qui admet donc une transformée de Fourier inverse tempérée  $T_\zeta$ . On peut être plus précis en remarquant que si pour  $m$  suffisamment grand on pose  $V(p) = U(p)/p^m$ , on aura  $|V(p)| \leq M/|p|^2$ , fonction intégrable vis-à-vis de  $\tau$ . Avec  $V_\zeta(\tau) = V(\zeta + i\tau)$ , on écrira donc

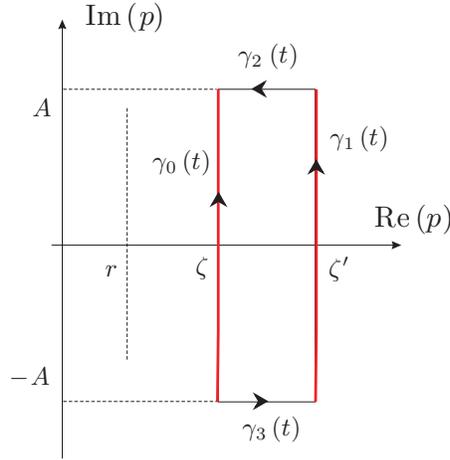
$$\mathcal{F}^{-1}(V_\zeta)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\zeta + i\tau) e^{ix\tau} d\tau.$$

Posons alors  $v_\zeta(x) = e^{\zeta x} \mathcal{F}^{-1}(V_\zeta)(x)$ , on aura

$$v_\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\zeta + i\tau) e^{(\zeta+i\tau)x} d\tau = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} V(q) e^{qx} dq. \quad (9.43)$$

▷ En fait la fonction  $v_\zeta(x)$  est indépendante de  $\zeta$ , ce qui dans la suite nous permettra de la noter  $v$ . Soit en effet  $\zeta' > \zeta$  et  $\gamma(t)$  le chemin rectangulaire formé des segments suivants (voir la Figure 9.5)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \zeta' + it, \quad t \in [-A, +A] \\ \gamma_2(t) &= (\zeta' + \zeta - t) + iA, \quad t \in [\zeta, \zeta'] \\ \gamma_0(t) &= \zeta - it, \quad t \in [-A, +A] \\ \gamma_3(t) &= t - iA, \quad t \in [\zeta, \zeta'], \end{aligned}$$

FIGURE 9.5 – Indépendance de  $\zeta$ 

On aura

$$0 = \int_{\gamma} V(p) e^{px} dp = - \int_{\zeta-iA}^{\zeta+iA} V(q) e^{qx} dq + \int_{\zeta'-iA}^{\zeta'+iA} V(q) e^{qx} dq + \int_{\gamma_2} V(p) e^{px} dp + \int_{\gamma_3} V(p) e^{px} dp,$$

mais

$$|V(p) e^{px}| \leq |V(p)| e^{x \operatorname{Re} p} \leq \frac{M}{|p|^2} e^{x \operatorname{Re} p},$$

d'où

$$\left| \int_{\gamma_2} V(p) e^{px} dp \right| \leq M \int_{\zeta}^{\zeta'} \frac{e^{tx}}{t^2 + A^2} dt.$$

Il en résulte que  $\int_{\gamma_2} V(p) e^{px} dp \rightarrow 0$  quand  $A \rightarrow \infty$ , ainsi de même que  $\int_{\gamma_3} V(p) e^{px} dp$ , et par conséquent

$$v_{\zeta}(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\zeta'-i\infty}^{\zeta'+i\infty} V(p) e^{px} dp = v_{\zeta'}(x) = v(x). \quad (9.44)$$

► On a donc démontré que, pour  $p = \xi + i\eta$ ,  $U(p) = p^m V(p) = p^m \widehat{e^{-\xi x} v(x)}(\eta)$ . Montrons que  $v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  : nous avons vu que

$$v(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\zeta'-i\infty}^{\zeta'+i\infty} V(p) e^{px} dp,$$

d'où

$$|v(x)| \leq M \frac{e^{\zeta' x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|\zeta'|^2 + t^2} = M \frac{e^{\zeta' x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{|\zeta'|} = M \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\zeta' x}}{|\zeta'|}.$$

Si maintenant, pour  $x < 0$  on fait tendre  $\zeta'$  vers l'infini, on constate que  $v(x) = 0$ .

► On aura par conséquent

$$U(p) = p^m \widehat{e^{-\xi x} v(x)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p^m \mathcal{L}(v)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(v^{(m)})(p), \quad (9.45)$$

C'est dire que  $U$  est la transformée de Laplace de la distribution  $S = v^{(m)}/\sqrt{2\pi}$ . On peut également écrire  $U(\xi + i\eta) = \sqrt{2\pi} \widehat{e^{-\xi x} S}_{\eta}$ , ce qui prouve l'unicité de  $S$ .

Q.E.D.

Notons que les formules (9.45) et (9.43) fournissent une expression explicite de la transformée de Laplace inverse :

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p^m \mathcal{L}(v)(p) = \frac{p^m}{2i\pi} \mathcal{L} \left( \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \frac{U(q)}{q^m} e^{qx} dq \right) (p), \quad (9.46)$$

en particulier, si  $U(\zeta + i\tau)$  est intégrable vis-à-vis de  $\tau$ , on aura

$$U(p) = \frac{1}{2i\pi} \mathcal{L} \left( \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} U(q) e^{qx} dq \right) (p)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{Y(x)}{2i\pi} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} U(q) e^{qx} dq \supset U. \quad (9.47)$$

### 9.3.1 Calcul pratique

La formule (9.47), ne présente pas d'avantage manifeste par rapport à une transformée de Fourier, la supériorité de la transformation de Laplace se manifestera si cette intégrale est susceptible d'être calculée à l'aide du théorème des résidus.

PROPOSITION 9.27 Si  $U$  est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  et s'il existe une suite  $R_n$  telle que  $M_n = \sup_{|q|=R_n} |U(q)| \rightarrow 0$  quand  $R_n \rightarrow \infty$ , alors

$$Y(x) \sum_{d \in D} \text{Res}(U(q) e^{qx}; d) \supset U(p). \quad (9.48)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $A_n = \sqrt{R_n^2 - \xi^2}$ ,  $R_n > |\xi|$  et  $\alpha_n = \text{Arctg}(A_n/\xi)$ , considérons le chemin  $\gamma_n$  (dit *contour de Bromwich*), (voir la Figure 9.6) union de

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= \xi + it, \quad t \in [-A_n, A_n] \\ \sigma_n(t) &= R_n e^{i\theta}, \quad \theta \in [\alpha_n, 2\pi - \alpha_n], \end{aligned}$$

et notons  $\Delta_n$  le domaine borné qu'il entoure. On aura d'une part

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} U(q) e^{qx} dq = \sum_{d \in D \cap \Delta_n} \text{Res}(U(q) e^{qx}; d),$$

et d'autre part  $\int_{\sigma_n} U(q) e^{qx} dp \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ; en effet

$$\left| \int_{\sigma_n} U(q) e^{qx} dq \right| \leq M_n R_n \int_{[\alpha_n, \pi/2] \cup [\pi/2, 3\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi - \alpha_n]} e^{R_n x \cos \theta} d\theta$$

▷ En ce qui concerne le premier terme, comme il ne fait intervenir que les  $x > 0$ , on aura

$$R_n \int_{\alpha_n}^{\pi/2} e^{R_n x \cos \theta} d\theta \leq R_n \int_{\alpha_n}^{\pi/2} e^{R_n x (\pi/2 - \theta)} d\theta = \frac{1}{x} (e^{R_n x (\pi/2 - \alpha_n)} - 1),$$

et comme  $\pi/2 - \alpha_n = \text{Arctg}(\xi/A_n) \leq \xi/A_n$ , on obtient

$$R_n \int_{\alpha_n}^{\pi/2} e^{R_n x \cos \theta} d\theta \leq \frac{1}{x} (e^{\xi x \sqrt{1 + (\xi/A_n)^2}} - 1),$$

qui reste bornée quand  $n \rightarrow \infty$ . Il en est de même pour le troisième terme

▷ Enfin, on a

$$R_n \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{R_n x \cos \theta} d\theta = R_n \int_0^\pi e^{-R_n x \sin \tau} d\tau,$$

qui est borné d'après le lemme de Jordan **I.2**, formule (I.1).

▷ Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} U(q) e^{qx} dq &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda_n} U(q) e^{qx} dq \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} U(q) e^{qx} dq = \sum_{d \in D} \text{Res}(U(q) e^{qx}; d) \end{aligned}$$

Q.E.D.

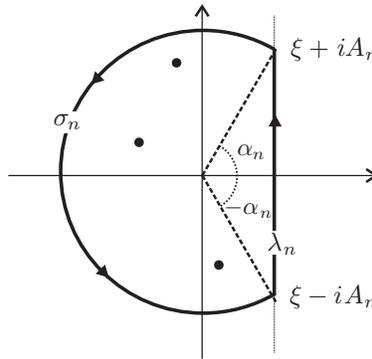


FIGURE 9.6 – Contour de Bromwich

On peut traiter des cas plus généraux, *en particulier présentant des coupures*, dont par exemple le calcul de l'original de  $p^\nu$  pour  $\nu$  complexe. On utilise alors un contour de Hankel (voir la Figure 9.7) comprenant un demi-cercle de rayon  $\varepsilon$  centré sur l'origine dans le plan des parties réelles positives et des deux bords de la coupure que nous choisissons le long de l'axe réel négatif.

Prenons  $-1 < \Re \nu < 0$  ; dans ces conditions la formule (9.47) s'applique, et comme à la proposition **9.27**, l'intégrale le long de la droite  $\xi + it$ ,  $t \in [-\infty, +\infty]$  est égale à celle le long du contour de Hankel, et l'intégrale le long du demi-cercle s'annule quand  $\xi \rightarrow 0$ . On aura donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(p^\nu)(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} p^\nu e^{px} dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{\nu \text{Log} p} e^{px} dp \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\nu(\text{Log} t - i\pi)} e^{tx} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\nu(\text{Log} t + i\pi)} e^{tx} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-i\nu\pi} e^{\nu \text{Log} |t|} e^{tx} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\nu\pi} e^{\nu \text{Log} |t|} e^{tx} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\nu\pi} - e^{-i\nu\pi}}{2i} e^{\nu \text{Log} |t|} e^{tx} dt = -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_{-\infty}^0 |t|^\nu e^{tx} dt \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty s^\nu e^{-sx} ds = -\frac{\sin \nu\pi}{\pi x^{\nu+1}} \int_0^\infty \tau^\nu e^{-\tau} d\tau = \frac{\sin(-\nu\pi)}{\pi x^{\nu+1}} \Gamma(\nu+1) \end{aligned}$$

soit

$$Y(x) \frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} \supset p^\nu, \quad (9.49)$$

puisque

$$\frac{\pi}{\sin(-\nu\pi)} = \Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1). \quad (9.50)$$

Les formules relatives aux autres  $\nu$  non entiers s'obtiennent alors par dérivation.

Posons  $\mu = -\nu$ , la formule (9.49) s'écrit

$$Y(x) \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \supset \frac{1}{p^\mu} \quad (9.51)$$

et reste valable pour les  $\mu$  tels que  $\Re \mu > 0$ , par dérivation de la transformée de Laplace et compte tenu du fait que  $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$ .

Les formules relatives aux  $\nu$  de partie réelle positive s'obtiennent de façon similaire à partir de (9.49), par dérivation de l'original et font intervenir les dérivées des  $x^{-\nu-1}$ , soit en fait des parties finies et des masses de Dirac à l'origine pour  $\Re \nu \geq 1$ . Si on se contente d'en observer la trace sur  $]0, -\infty[$ , on constate que pour  $\nu$  non entier, de partie réelle positive, la formule (9.49) reste valable.

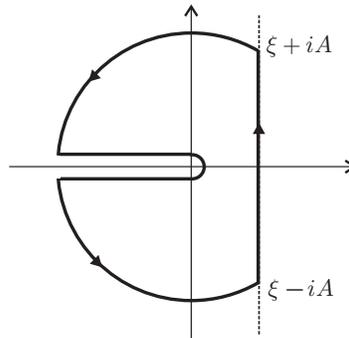


FIGURE 9.7 – En présence d'une coupure

### 9.3.2 Développements asymptotiques

Quitte à être moins exigeant, et à se limiter à un développement asymptotique de l'original, on peut se contenter d'hypothèses moins restrictives relatives à  $U$ .

**PROPOSITION 9.28** *Si  $U$  est méromorphe dans le demi-plan  $\{p \mid \Re p > \xi_0\}$ , avec un nombre fini de pôles  $q_i$ ,  $i = 1, n$ , et y vérifie  $|U(p)| \leq M/|p|^2$  pour  $|p|$  suffisamment grand, alors  $U$  est la transformée de Laplace d'une fonction  $u(x)$  admettant pour  $x \rightarrow \infty$  le développement asymptotique suivant :*

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \text{Res}(U(p)e^{px}; q_i) + v(x), \quad (9.52)$$

où  $v(x)$  est négligeable devant  $e^{q_n x}$  si les pôles sont rangés dans l'ordre des parties réelles décroissantes.

DÉMONSTRATION. Pour  $\xi' > \Re q_1$  on aura

$$u(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi'-i\infty}^{\xi'+i\infty} U(p) e^{px} dp.$$

Si on choisit  $\xi_0 < \xi < \Re q_n < \xi'$ , à l'aide du contour rectangulaire  $\gamma(t)$  formé des quatre segments

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \xi + it, \quad t \in [-A, +A] \\ \gamma_2(t) &= (\xi' + \xi - t) + iA, \quad t \in [\xi', \xi] \\ \gamma_0(t) &= \xi' - it, \quad t \in [-A, +A] \\ \gamma_3(t) &= t - iA, \quad t \in [\xi', \xi] \end{aligned}$$

comme lors de la démonstration du théorème 9.26 (voir la Figure 9.5), on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} U(p) e^{px} dp = u(x) - \sum_{i=1}^n \text{Res} (U(p) e^{px}; q_i),$$

soit

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \text{Res} (U(p) e^{px}; q_i) + \frac{e^{\xi x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi + i\eta) e^{i\eta x} d\eta.$$

Q.E.D.

### 9.3.3 Equations de convolution

Le principe consiste à utiliser la formule (9.41) de telle sorte que l'équation  $f * u = g$  soit transformée en une équation algébrique, soit  $\mathcal{L}(f) \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(g)$ . Etudions par exemple l'équation d'Abel

$$g(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\nu} dt = (Y(s)s^{-\nu} * Y(s)u(s))(x), \quad \Re \nu < 1. \quad (9.53)$$

On aura

$$\mathcal{L}(Yg) = \Gamma(1-\nu) \mathcal{L}\left(Y(s) \frac{s^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\right) \mathcal{L}(Y(s)u(s)),$$

soit d'après (9.49),  $\mathcal{L}(Yg)(p) = \Gamma(1-\nu)p^{\nu-1} \mathcal{L}(Y(s)u(s))$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y(s)u(s)) &= \frac{\mathcal{L}(Yg)(p)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{p^{\nu-1}} = \frac{1}{p^\nu} \frac{\mathcal{L}(Yg)(p)}{\Gamma(1-\nu)} \\ &= \frac{1}{p^\nu} \frac{\mathcal{L}((Yg)')}{\Gamma(1-\nu)} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{p^\nu} \mathcal{L}(g(0)\delta + Y[g']) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{p^\nu} (g(0) + \mathcal{L}[Yg']) = \frac{g(0) + \mathcal{L}[Yg']}{\Gamma(1-\nu)} \mathcal{L}\left(Y(s) \frac{s^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right) \\ &= \frac{g(0) + \mathcal{L}[Yg']}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \mathcal{L}(Y(s)s^{\nu-1}) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} (g(0) + \mathcal{L}[Yg']) \mathcal{L}(Y(s)s^{\nu-1}), \end{aligned}$$

puisque  $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \pi / \sin \nu\pi$ , d'où

$$Y(s)u(s) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} (g(0)Y(s)s^{\nu-1} + [Yg'] * (Y(s)s^{\nu-1})),$$

et finalement

$$u(s) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \left( g(0)s^{\nu-1} + \int_0^s g'(t)(s-t)^{\nu-1} dt \right), \quad s > 0 \quad (9.54)$$

### 9.3.4 Equations différentielles

On cherche  $T$  solution de

$$\sum_{j=0}^n a_j T^{(j)} = S, \quad (9.55)$$

où il s'agit de *dérivées au sens des distributions*. On aura alors

$$\mathcal{L}(YS) = \left( \sum_{j=0}^n a_j p^j \right) \mathcal{L}(YT) \text{ d'où } \mathcal{L}(YT) = \frac{\mathcal{L}(YS)}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}.$$

Cette formule peut servir à calculer la solution élémentaire : si  $S = \delta$ , par décomposition en éléments simples,

$$\mathcal{L}(YT) = \frac{1}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \sum_k \frac{A_k}{(p - \alpha_k)^{\beta_k}} = \sum_k A_k \mathcal{L} \left( Y(x) e^{\alpha_k x} \frac{x^{\beta_k - 1}}{(\beta_k - 1)!} \right) \quad (9.56)$$

d'où

$$T = Y(x) \sum_k A_k e^{\alpha_k x} \frac{x^{\beta_k - 1}}{(\beta_k - 1)!}. \quad (9.57)$$

On cherche maintenant à résoudre une équation différentielle aux valeurs initiales, soit à trouver  $f$ ,  $j$  fois dérivable telle que

$$\sum_{j=0}^n a_j f^{(j)}(x) = s(x), \quad x \geq 0 \quad (9.58)$$

$$f^{(j)}(0) = f_j, \quad j = 0, n-1.$$

Comme les formules relatives à la transformation de Laplace portent sur les *dérivées au sens des distributions*, on est conduit à poser  $T = T_{Y(x)f(x)}$ , d'où

$$T^{(j)} = \sum_{\ell=0}^{j-1} \delta^{(\ell)} f^{(j-1-\ell)}(0) + f^{(j)},$$

et par conséquent

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left( T^{(j)} - \sum_{\ell=0}^{j-1} \delta^{(\ell)} f^{(j-1-\ell)}(0) \right),$$

ou encore

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{\ell=0}^{j-1} \delta^{(\ell)} f^{(j-1-\ell)}(0) + s,$$

soit

$$\mathcal{L}(T) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{\ell=0}^{j-1} p^\ell f^{(j-1-\ell)}(0)}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} + \frac{\mathcal{L}(Ys)}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}. \quad (9.59)$$

Il ne reste plus qu'à opérer une décomposition en élément simple de ces fractions rationnelles selon le modèle de l'équation (9.56) pour en déduire  $T$ . Le premier terme correspond à la solution de l'équation sans second membre, et le second à une solution particulière de l'équation avec second membre, en fait celle correspondant à des données initiales nulles. *Cette façon d'opérer est beaucoup plus efficace que celle consistant à utiliser la méthode de variation de la constante.*

### 9.3.5 Equations aux dérivées partielles

On peut par exemple également de cette façon résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x, t > 0 \quad (9.60)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0 \text{ donnée initiale}$$

$$u(0, t) = \theta, \quad u(\infty, t) = 0 \quad t > 0 \text{ conditions aux limites}$$

Comme  $u$  s'annule en  $t = 0$ ,  $\partial u / \partial t$  ne se distingue pas de la dérivée au sens des distributions, et en opérant une transformation de Laplace en la variable  $t$ , on aura comme précédemment,

$$p \mathcal{L}(u_x)(p) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u_x)(p)}{\partial x^2},$$

et par conséquent  $\mathcal{L}(u_x)(p) = \lambda(p)e^{\sqrt{p}x} + \mu(p)e^{-\sqrt{p}x}$ . Si on se limite à chercher  $u_x \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ , on devra avoir  $\mathcal{L}(u_x) \in \mathcal{H}_+$  d'où  $\lambda(p) = 0$ , la condition aux limites imposant

$$\mu(p) = \mathcal{L}(u_0)(p) = \theta \mathcal{L}(Y)(p) = \frac{\theta}{p}.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{L}(u_x)(p) = \frac{\theta}{p} e^{-\sqrt{p}x}.$$

Or selon les bonnes tables de transformées de Laplace

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \supset \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}, \quad \text{où } \operatorname{erfc}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (9.61)$$

d'où finalement

$$u(x, t) = u_x(t) = \theta \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad x > 0. \quad (9.62)$$

# Chapitre 10

## Espaces de fonctions holomorphes

Jusqu'ici, les seules notions de convergence que nous ayons utilisées de façon systématique sont celles relatives aux séries entières. Le chapitre qui suit vise à définir et étudier une topologie adaptée à l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert quelconque  $\Omega$  du plan complexe, ce sera là un outil essentiel pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence.

### 10.1 Topologie

**LEMME 10.1** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , il existe une suite de compacts  $K_n \subset \Omega$ , dite exhaustive, telle que  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .*

**DÉMONSTRATION.** Considérons l'ensemble des disques fermés contenus dans  $\Omega$ , dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels ; c'est un ensemble dénombrable que l'on peut ranger selon une suite  $D_n$ . La suite des  $K_n = \bigcup_{k=1, n} D_k$ , est croissante et constituée de compacts et les  $\overset{\circ}{D}_n$  forment un recouvrement ouvert de  $\Omega$ . Il en résulte que tout compact  $K$  de  $\Omega$  est contenu dans une union finie de  $D_k$  et donc dans un certain  $K_n$  ; en particulier tout point  $\{z\}$  de  $\Omega$ .

*Q.E.D.*

Nous munirons  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, c'est-à-dire celle qui est engendrée par la famille dénombrable de semi-normes

$$p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|.$$

Nous savons qu'il s'agit là d'une topologie métrisable, qui fait de  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  un espace complet, soit en fait un espace de Fréchet. Notons  $\mathcal{H}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ .

**PROPOSITION 10.2 (Weierstraß)**  *$\mathcal{H}(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ .*

C'est dire que  $\mathcal{H}(\Omega)$  muni de la famille de semi-normes  $p_n$  est également un espace de Fréchet.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f_n$  une suite convergente de fonctions de  $\mathcal{H}(\Omega)$ , soit vers  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ . En vertu du théorème de Cauchy 5.5, si  $T$  est un triangle inclus dans  $\Omega$ , on aura

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0 \quad \text{d'où} \quad \int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

et par conséquent, d'après le théorème de Morera 5.6,  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

*Q.E.D.*



**PROPOSITION 10.3** *La dérivation est une application continue sur  $\mathcal{H}(\Omega)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit en effet  $D$  un disque compact inclus dans  $\Omega$ , de rayon  $r$ . On notera  $D_0$ , de bord  $\gamma_0$ , un disque de même centre et de rayon  $r_0 > r$ , également inclus dans  $\Omega$ . Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ , d'après la formule (5.3), on aura

$$f'_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz \text{ et } f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz, \forall a \in D,$$

d'où il résulte que  $f'_n \rightarrow f'$  uniformément sur  $D$ , et par conséquent sur tout compact  $K$ .

Q.E.D.

**PROPOSITION 10.4** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , si la suite de fonctions holomorphes  $f_n$  converge vers  $f$  et si  $f$  possède un zéro d'ordre  $m$  en  $a \in \Omega$ , alors*

(i) *Dans tout voisinage de  $a$  suffisamment petit, à partir d'un certain rang  $N$  (dépendant du voisinage) les  $f_n$  possèdent  $m$  zéros comptés avec leur multiplicité.*

(ii) *Si  $n > N$  et si  $f_n$  s'annule en  $a$ , alors  $f_n$  possède un zéro d'ordre  $m$  en  $a$ .*

**DÉMONSTRATION.**

▷ La fonction  $f$  est holomorphe et ses éventuels zéros sont isolés en vertu de la proposition 2.8. Selon la proposition 8.1, si  $\gamma$  est un cercle suffisamment petit centré en  $a$ ,

$$\zeta(f; a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{q \in \mathcal{R}_n} \zeta(f_n; q),$$

où  $\zeta(f; a)$  est l'ordre du zéro de  $f$  en  $a$  et  $\mathcal{R}_n$  est l'ensemble des zéros de  $f_n$  dans le disque limité par  $\gamma$ .

▷ Comme les zéros de  $f_n$  sont également isolés, quitte à réduire le rayon de  $\gamma$ , on aura  $\mathcal{R}_n = \{a\}$  et  $\zeta(f; a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(f_n; a)$ , d'où  $\zeta(f_n; a) = \zeta(f; a)$  pour  $n > N$ .

Q.E.D.

**COROLLAIRE 10.5** *Si  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ , si la suite de fonctions holomorphes  $f_n$  converge vers  $f$ , et s'il n'existe pas de rang  $N$  au-delà duquel les  $f_n$  s'annulent dans  $\Omega$ , alors  $f$  ne s'y annule pas non plus.*

**COROLLAIRE 10.6** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et si la suite  $f_n$  de fonctions holomorphes injectives converge vers  $f$  non constante dans  $H(\Omega)$ , alors  $f$  est injective.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $f(a) = f(b) = \lambda$ , où  $a \neq b$ . La fonction  $f(z) - \lambda$  s'annule en  $a$  et  $b$ ; en vertu du corollaire 10.5 au delà d'un certain rang la fonction  $f_n(z) - \lambda$  s'annule au voisinage de  $a$  et au voisinage de  $b$ , ce qui constitue une contradiction.

Q.E.D.

**COROLLAIRE 10.7** *Si  $\Omega$  est un ouvert, si  $f$  possède un zéro d'ordre  $m$  en  $a \in \Omega$ , et si  $\theta_n \rightarrow 0$ ,  $\theta_n \neq 0$ , alors à partir d'un certain rang, la fonction  $f_n = f - \theta_n$  possède  $m$  zéros simples au voisinage de  $a$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $f'$  s'annule en  $a$ , dans un voisinage  $V$  assez petit de  $a$  en vertu du principe des zéros isolés,  $f'$  ne s'annule qu'en  $a$ ; or  $f'_n = f'$  et par conséquent les zéros de  $f_n$  dans  $V \setminus \{a\}$  sont simples. Mais  $f_n$  ne s'annule pas en  $a$ ; il en résulte que les zéros de  $f_n$  sont simples dans  $V$  et au nombre de  $m$  d'après la proposition 10.4.

Q.E.D.

On dit qu'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{H}(\Omega)$  est borné, s'il est absorbé par tout voisinage de 0, c'est-à-dire s'il est contenu dans l'un des homothétiques de tout voisinage de 0. Bien entendu, on sait que dans un espace topologique séparé, les compacts sont fermés et bornés, ici la réciproque est vraie, c'est le théorème de Montel. Rappelons que  $H \subset \mathcal{C}^0(\Omega; F)$  est équicontinu sur  $\Omega$  si

$$\forall z \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_z > 0 \text{ tel que } (|t - z| < \eta_z) \implies (|f(t) - f(z)| < \varepsilon, \forall f \in H),$$

ainsi que le théorème d'Ascoli :

**THÉORÈME 10.8 (Ascoli)** Soit  $H \subset \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C})$ , équicontinu; si  $\forall z \in \Omega$ ,

$$H(z) = \{f(z) \mid f \in H\}$$

est relativement compact dans  $\mathbb{C}$ , alors  $H$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C})$ .

**THÉORÈME 10.9 (Montel)** Dans  $\mathcal{H}(\Omega)$  les bornés sont relativement compacts.

DÉMONSTRATION. Soit donc  $H \subset \mathcal{H}(\Omega)$  borné, alors  $\forall n, \sup_{f \in H} p_n(f) < \infty$ . Il en résulte en particulier que  $H(z)$  est borné et donc relativement compact dans  $\mathbb{C}$ . Pour appliquer le théorème d'Ascoli il suffit donc de montrer que  $H$  est équicontinu. Soit  $a \in \Omega$ , notons  $D_\rho$  le cercle de centre  $a$  et de rayon  $\rho$  et choisissons  $r$  de telle sorte que  $D_{2r}$  soit inclus dans  $\Omega$ . Pour  $z \in D_r$ , et  $\gamma = \partial D_{2r}$ , on aura

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z} du,$$

d'où

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(u) \left( \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-a} \right) du = \frac{z-a}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)(u-a)} du,$$

et par conséquent

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{|z-a|}{4\pi r} \int_\gamma \frac{|f(u)|}{|u-z|} d|u| \leq \frac{|z-a|}{2r} M, \text{ où } M = \sup_{u \in \gamma} |f(u)|.$$

Q.E.D.

### 10.1.1 Propagation de la convergence

En vertu du lemme d'Abel, nous savons déjà que si une série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge en un point  $s \neq 0$ , alors elle converge normalement dans tout disque de rayon inférieur à  $|s|$ , soit en fait selon la topologie de  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{C})$ , où  $D$  est le disque de convergence. Le théorème qui suit en constitue une généralisation valable dans des cas beaucoup plus généraux, on notera sa similitude avec le théorème des zéros isolés.

**THÉORÈME 10.10 (Vitali)** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $z_p \in \Omega$  une suite qui converge vers  $z \in \Omega$ , si  $f_n$  est une suite de fonctions holomorphes formant un ensemble borné dans  $\mathcal{H}(\Omega)$  et si  $\forall p, f_n(z_p)$  converge, alors  $f_n$  converge dans  $\mathcal{H}(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION. La suite des  $f_n$  étant bornée est relativement compacte d'après le théorème de Montel 10.9, elle possède donc une sous-suite  $f_{n'}$  convergente, soit vers  $g$ . On aura

$$g(z_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n'}(z_p),$$

d'où l'unicité de  $g$  en vertu du principe des zéros isolés 2.8. Supposons alors que la suite  $f_n$  ne converge pas vers  $g$ , il existe alors une distance  $\varepsilon$  et une sous-suite  $f_{n''}$  telles que  $d(g, f_{n''}) > \varepsilon$ , mais comme on peut extraire de  $f_{n''}$  une sous-suite convergente, celle-ci convergera nécessairement vers  $g$ , ce qui constitue une contradiction.

Q.E.D.

### 10.1.2 Séries de fonctions méromorphes

**DÉFINITION 10.11** On dira que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  où les  $f_n$  sont des fonctions méromorphes dans  $D \subset \mathbb{C}$ , est uniformément convergente dans  $D$ , s'il existe  $I \subset \mathbb{N}$  fini tel que

- (i) Pour  $n \notin I$ ,  $f_n$  n'a pas de pôle dans  $D$
- (ii) La série  $\sum_{n \notin I} f_n$  converge uniformément dans  $D$

**THÉORÈME 10.12** Soient  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions méromorphes convergeant dans  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ , c'est-à-dire convergeant uniformément sur tout compact inclus dans  $\Omega$ .

- (i) Sa somme  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\Omega$ .
- (ii) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$  converge vers  $f'$ .

DÉMONSTRATION.

▷ Sur tout ouvert  $U \subset \Omega$  relativement compact,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  est la somme d'une fonction méromorphe  $\sum_{n \in I} f_n$  et d'une série de fonctions holomorphes  $\sum_{n \notin I} f_n$  convergeant dans  $\mathcal{C}^0(U)$ , c'est donc une fonction méromorphe dans  $U$  en vertu de la proposition 10.2. Il en résulte que l'ensemble des points singuliers de  $f$  dans  $\Omega$  n'a pas de point d'accumulation, et par conséquent que  $f$  est méromorphe dans  $\Omega$ .

▷ De même  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$  est une fonction méromorphe dans  $\Omega$ , dont la somme n'est autre que  $f'$ , en vertu de la proposition 10.3.

Q.E.D.

#### Un exemple

Considérons la série de fonctions méromorphes de terme général

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-2},$$

elle converge dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$ , en effet d'une part  $f_n$  n'admet qu'un nombre fini de pôles dans chaque disque compact. D'autre part  $|z - n|^{-2} \leq |\Re z - n|^{-2}$ , et par conséquent, dans chaque ouvert  $-\gamma < \Re z < \gamma$ , pour  $|n| > \gamma$ , on a  $|z - n|^{-2} \leq |\gamma - n|^{-2}$ , d'où la convergence normale de la série  $\sum_{|n| > \beta} (z - n)^{-2}$ . Il en résulte que la série de fonctions méromorphes  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-2}$  converge dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$ , sa somme  $f$  est donc une fonction méromorphe d'après le théorème 10.12.

D'autre part  $f$  est périodique de période réelle 1 :  $f(z+1) = f(z)$ , il nous suffira donc de l'étudier sur la bande  $\mathcal{B} = -\beta < \Re z < \beta$  avec  $\beta = 2/3$  (par exemple !). Quand  $\Im z \rightarrow \infty$ ,  $f(z) \rightarrow 0$ , uniformément vis-à-vis de  $\Re z$ . Soit en effet  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tel que  $\sum_{|n| > N} |\beta - n|^{-2} < \varepsilon/2$ , d'où  $\left| \sum_{|n| > N} (z - n)^{-2} \right| < \varepsilon/2$   $\forall z \in \mathcal{B}$ . Par ailleurs

$$\left| \sum_{|n| \leq N} (z - n)^{-2} \right| \leq \sum_{|n| > N} |\Im z|^{-2} = \frac{2N+1}{|\Im z|^2} < \varepsilon/2$$

pour  $|\Im z|$  suffisamment grand.

Les pôles de  $f$  sont les entiers rationnels en effet  $f(z) = z^{-2} + \sum_{|n| \geq 1} (z - n)^{-2}$ , ce qui fait de 0 un pôle d'ordre 2 de  $f$ , et le seul, dans la bande  $-\beta < \Re z < \beta$ .

Posons maintenant  $g(z) = \pi^2 / \sin^2(\pi z)$ . C'est également une fonction périodique de période 1 dont les pôles sont les entiers rationnels, elle est de plus exponentiellement décroissante vis-à-vis de  $\Im z$ . Au voisinage de l'origine on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} &= \pi^2 \left( \frac{1}{\pi z - \pi^3 z^3/6 + O(z)^5} \right)^2 = \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{1 - \pi^2 z^2/6 + O(z)^4} \right)^2 \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + \pi^2 z^2/6 + O(z)^4)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + O(z)^2, \end{aligned} \quad (10.1)$$

et par conséquent  $f - g$  est une fonction méromorphe et bornée, c'est donc une fonction entière d'après le lemme 7.1. Selon le théorème de Liouville 4.13,  $f$  et  $g$  diffèrent donc d'une constante, qui se trouve être nulle puisqu'elles tendent toutes deux vers 0 quand  $|\Im z| \rightarrow \infty$ . Nous avons donc finalement montré que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}. \quad (10.2)$$

Posons alors  $k(z) = f(z) - 1/z^2$ , il en résulte en particulier que

$$k(0) = 2 \sum_{n \geq 1} n^{-2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{\pi^2}{3},$$

d'après (10.1). On obtient finalement la formule miraculeuse due à Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} n^{-2}. \quad (10.3)$$

### 10.1.3 Produits infinis de fonctions holomorphes

**THÉORÈME 10.13** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(z)|$  converge dans  $\mathcal{H}(\Omega)$ , c'est-à-dire uniformément sur tout compact de  $\Omega$ , alors*

(i) *le produit infini*

$$f(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} f_n(z) \text{ où } f_n = 1 + u_n$$

*converge dans  $\mathcal{H}(\Omega)$*

(ii) *la fonction  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$*

(iii) *L'ensemble des zéros de  $f$  est l'union des ensembles respectifs des zéros des  $f_n$ , les ordres de multiplicité s'additionnant.*

(iv) *La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n/f_n$  converge dans  $\mathcal{H}(\Omega)$  et sa somme est égale à la dérivée logarithmique  $f'/f$ .*

**DÉMONSTRATION.**

▷ Soit  $K$  un compact de  $\Omega$ , par hypothèse  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(z)|$  converge uniformément sur  $K$ , soit vers  $g(z)$ , et par conséquent  $|u_{k+1}(z)| \leq g(z) - \sum_{n \leq k} |u_n(z)|$  tend uniformément vers 0 sur  $K$ . On en déduit qu'il existe  $N$  tel que  $|u_n(z)| \leq 1/2$ ,  $\forall n > N$ ,  $\forall z \in K$ .

▷ La fonction  $\text{Log}(1+t)/t$  possédant une détermination holomorphe dans le disque de centre 1 et de rayon 1, elle est bornée dans le disque de centre 1 et de rayon 1/2 et on posera  $M = \sup_{|t| \leq 1/2} |\text{Log}(1+t)/t|$ . Il en résulte que pour  $n > N$ ,  $|\text{Log} f_n(z)| \leq M |u_n(z)|$  et par conséquent que la série  $\sum_{k \geq N+1} \text{Log} f_k(z)$  converge uniformément sur  $K$ .

▷ Pour  $n \geq N$ , posons alors

$$p_n(z) = \prod_{k \leq n} f_k(z) = p_N(z) \prod_{N+1 \leq k \leq n} f_k(z) = p_N(z) \exp \left( \sum_{N+1 \leq k \leq n} \operatorname{Log} f_k(z) \right),$$

qui converge lorsque  $n \rightarrow \infty$  uniformément vers  $f(z) = p_N(z) \exp \left( \sum_{k \geq N+1} \operatorname{Log} f_k(z) \right)$  sur  $K$ . Selon le théorème 10.2, la fonction  $f$  est alors holomorphe dans  $\Omega$ .

▷ Comme la suite  $f_n - 1$  converge uniformément vers 0, à partir d'un certain rang soit  $n$ ,  $f_n$  ne s'annule pas, d'où la conclusion relative aux zéros de  $f$ .

▷ Sur tout compact  $K$  de  $\Omega$ , nous avons donc

$$\frac{f(z)}{p_N(z)} = \exp \left( \sum_{k \geq N+1} \operatorname{Log} f_k(z) \right),$$

et par conséquent, d'après le théorème 10.12,

$$\frac{f'(z)p_N(z) - f(z)p_N'(z)}{p_N^2(z)} = \exp \left( \sum_{k \geq N+1} \operatorname{Log} f_k(z) \right) \sum_{k \geq N+1} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)},$$

d'où

$$\frac{f(z)}{p_N(z)} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{p_N'(z)}{p_N(z)} \right) = \frac{f(z)}{p_N(z)} \sum_{k \geq N+1} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)},$$

soit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p_N'(z)}{p_N(z)} + \sum_{k \geq N+1} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} = \sum_{k \geq 0} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

*Q.E.D.*

### Exemple

Considérons le produit infini  $f(z) = z \prod_{n>0} (1 - z^2/n^2)$ , d'après le théorème 10.13, il converge uniformément sur tout compact, car il en est de même de la série  $\sum_{n>0} z^2/n^2$ . D'après le théorème 10.13, il en résulte que  $f(z)$  est holomorphe, que ses zéros sont les entiers rationnels, qu'ils sont simples, et que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n>0} \frac{2z}{n^2 - z^2} = F(z).$$

On aura

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n} + \sum_{n>0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{z}{n(z-n)}. \end{aligned}$$

La série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{z}{n(z-n)}$$

convergeant normalement sur tout compact, il résulte du théorème 10.12 que  $F$  est une fonction méromorphe ; de plus

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{n(z-n) - nz}{n^2(z-n)^2} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} \\ &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}, \end{aligned}$$

d'après (10.2). On aura donc  $F'(z) = (\pi / \operatorname{tg} \pi z)'$ , et par conséquent

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z},$$

puisque  $F$  et  $\pi / \operatorname{tg} \pi z$  sont impaires. Il en résulte que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z},$$

d'où  $\operatorname{Log} f = \operatorname{Log} \sin \pi z + C$ , soit  $f(z) = c \sin \pi z$ . Mais quand  $z \rightarrow 0$ ,  $\sin \pi z / z \rightarrow \pi$  et  $f(z)/z = \prod_{n>0} (1 - z^2/n^2) \rightarrow 1$ , d'où  $c = 1/\pi$ , soit

$$\prod_{n>0} (1 - z^2/n^2) = \frac{f(z)}{z} = \frac{\sin \pi z}{\pi z}. \quad (10.4)$$

### Approximation par des fractions rationnelles

Nous verrons ultérieurement un théorème général d'approximation des fonctions holomorphes par des fractions rationnelles, qui a pour défaut de ne pas être constructif. Dans certains cas il est possible, selon une méthode due à Cauchy d'obtenir des décompositions explicites et par là même des formules tout aussi miraculeuses que (10.3) ou (10.4).

Soit donc  $f$  une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$ , n'ayant pas 0 comme pôle. Nous noterons  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$  la suite de ses pôles, rangés par ordre de module croissant, et nous aurons au voisinage de  $\alpha_n$  le développement de Laurent suivant :

$$f(u) = \sum_{Q \geq q > 0} \frac{r_q}{(u - \alpha_n)^q} + \sum_{p=0}^{\infty} d_p (u - \alpha_n)^p = R_n(u) + D_n(u).$$

Pour  $k \geq 1$  donné nous noterons  $H_n(u)$  la somme des termes de degré  $k-1$  au plus dans le développement de  $R_n$  au voisinage de l'origine. Soient maintenant  $\rho > 0$  tel que  $\rho \neq |\alpha_\ell|$ ,  $\forall \ell$  et  $z$  tel que  $|z| < \rho$ , à l'aide de la méthode des résidus on obtient le résultat suivant :

**LEMME 10.14**

$$f(z) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p + \sum_{\{n \mid |\alpha_n| < \rho\}} (R_n(z) - H_n(z)) + \int_{\gamma_\rho} \frac{z^k f(u)}{u^k u - z} du. \quad (10.5)$$

où  $\gamma_\rho$  note le cercle de rayon  $\rho$  parcouru dans le sens direct et centré à l'origine.

**DÉMONSTRATION.** Les pôles de l'intégrand sont respectivement  $u = z$ ,  $u = 0$  et  $u = \alpha_n$ , pour  $|\alpha_n| < \rho$ .

(i) Commençons par remarquer que, selon (7.5) on a

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z^k f(u)}{u^k u - z}; z \right) = f(z).$$

(ii) Par ailleurs, au voisinage de l'origine

$$\frac{z^k f(u)}{u^k u - z} = -\frac{z^{k-1}}{u^k} \left( \sum_{\ell \geq 0} \frac{u^\ell}{z^\ell} \right) \left( \sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} u^p \right),$$

dont le terme en  $u^{-1}$  est égal à

$$-\sum_{p=0}^{k-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \frac{z^{k-1}}{z^{k-p-1}} = -\sum_{p=0}^{k-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p = \operatorname{Res} \left( \frac{z^k f(u)}{u^k u - z}; 0 \right).$$

(iii) Enfin, on peut remarquer qu'au voisinage de  $\alpha_n$ , à une fonction holomorphe près, on a

$$\frac{z^k f(u)}{u^k u - z} = \frac{z^k R_n(u)}{u^k u - z} = g(u),$$

ce qui montre que leurs résidus sont égaux. Comme  $g$  est une fraction rationnelle, elle est méromorphe sur la sphère de Riemann et nous savons que la somme de ses résidus y est nulle. Comme  $g$  possède à l'infini un zéro d'ordre 2 au minimum, le résidu à l'infini est nul, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{z^k f(u)}{u^k u - z}; \alpha_n \right) &= \operatorname{Res} (g(u); \alpha_n) = -\operatorname{Res} (g(u); z) - \operatorname{Res} (g(u); 0) \\ &= -R_n(z) + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{R_n^{(p)}(0)}{p!} z^p = H_n(z) - R_n(z), \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

*Q.E.D.*

Si on suppose alors  $k$  assez grand pour qu'il existe une suite  $\rho_s$  croissante qui tend vers l'infini telle que

$$\varepsilon_s = \sup_{\{u \mid |u| = \rho_s\}} |f(u)u^{-k}| \rightarrow 0,$$

alors, comme

$$\left| \int_{\gamma_s} \frac{z^k f(u)}{u^k u - z} du \right| \leq \varepsilon_s |z|^k \int_{\gamma_s} \frac{du}{|u - z|} \leq \frac{\varepsilon_s |z|^k}{\rho_s - |z|} \int_{\gamma_s} du = 2\pi \varepsilon_s |z|^k \frac{\rho_s}{\rho_s - |z|},$$

selon la formule (10.5) on aura

$$f(z) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\{n \mid |\alpha_n| < \rho_s\}} (R_n(z) - H_n(z)). \quad (10.6)$$

Considérons par exemple la fonction

$$f(z) = \cotg z - \frac{1}{z},$$

à laquelle nous appliquerons la formule (10.6) en remplaçant les cercles  $\gamma_s$  par des carrés centrés à l'origine, de côtés parallèles aux axes et les recoupant respectivement en  $(s + 1/2)\pi$ ,  $-(s + 1/2)\pi$ ,  $i(s + 1/2)\pi$ , et  $-i(s + 1/2)\pi$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Sur l'un de ces bords, par exemple

$$\delta = \{u = (s + 1/2)\pi + it \mid t \in [-(s + 1/2)\pi, (s + 1/2)\pi]\},$$

on aura

$$|\cotg u| = \left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right|, \text{ où } \zeta = e^{2iu} = e^{2i(s+1/2)\pi} e^{-2t} = -e^{-2t},$$

soit

$$|\cotg u| = \left| \frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2t} + 1} \right| \leq 1;$$

il nous suffira donc de prendre  $k = 1$ . Notons maintenant que les pôles de  $\cotg u$  sont les zéros de  $\sin u$ , et que ceux de  $f$  sont donc de la forme  $u = n\pi$ , avec  $n \neq 0$ , soit

$$\text{Res}(f(u); n\pi) = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1$$

et par conséquent

$$R_n(z) = \frac{1}{z - n\pi} \text{ et } H_n(z) = -\frac{1}{n\pi}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \cotg z &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty, +\infty \\ n \neq 0}} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)' / \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right) \text{ et } \cotg z = (\sin z)' / \sin z,$$

et posons

$$h(z) = z \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right).$$

on aura

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\left( \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right) \right)'}{\prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{\left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)'}{\left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)} = \cotg z = \frac{(\sin z)'}{\sin z}$$

omme  $h(z)$  et  $\sin z$  ont la même dérivée logarithmique elles sont proportionnelles, et en fait égales car  $\sin z/z$  et  $h(z)/z$  tendent vers 1 quand  $z \rightarrow 0$ ; on obtient donc finalement

$$\sin z = z \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right).$$

Rien de nouveau certes, mais contrairement à l'exemple précédent il ne s'agit pas d'une simple vérification mais d'une méthode constructive permettant de découvrir beaucoup d'autres formules de même nature.

### La fonction $\Gamma$

On pose

$$g_n(z) = zn^{-z} \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) = \frac{zn^{-z}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} (k+z).$$

Pour  $n \geq 2$ , on aura

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \frac{\frac{zn^{-z}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} (k+z)}{\frac{z(n-1)^{-z}}{(n-1)!} \prod_{n-1 \geq k > 0} (k+z)} \\ &= \frac{n^{-z}}{(n-1)^{-z}} \frac{n+z}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour  $|z| < n$ ,

$$\text{Log } f_n(z) = z \text{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \text{Log} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \sim z \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2}\right),$$

d'où,

$$|\text{Log } f_n(z)| \sim \frac{\max(|z|, |z|^2)}{n^2},$$

et la convergence normale de la série  $\sum_{n > |z|} \text{Log } f_n(z)$  sur tout compact dans la boule  $\overset{\circ}{B}(0, |z|)$ . C'est dire que  $g_1(z) \prod_{n \geq 2} f_n(z)$  converge normalement sur tout compact, et par conséquent d'après le théorème 10.13 que sa limite  $g$  est une fonction holomorphe dont les zéros, de multiplicité 1, sont les entiers négatifs. On pose

$$\Gamma(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{g(z+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{zn^{-z}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} (k+z)}{\frac{(z+1)n^{-(z+1)}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} (k+z+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(1+z)}{(z+1)n^{-1}(n+z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{(n+z+1)} = z, \end{aligned}$$

et que

$$g(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1}(n+1)!}{n!} = 1.$$

On pourra donc écrire

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 g_n(z)g_n(1-z) &= zn^{-z} \frac{(1-z)n^{z-1}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \prod_{n \geq k > 0} (k+1-z) \\
 &= z \frac{n^{-1}}{n!} \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \prod_{n \geq k \geq 0} (k+1-z) \\
 &= z \frac{n^{-1}}{n!} (n+1-z) \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \prod_{n-1 \geq k \geq 0} (k+1-z) \\
 &= z \frac{n^{-1}}{n!} (n+1-z) \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \prod_{n \geq k > 0} (k-z) \\
 &= z \frac{n^{-1}}{n!} (n+1-z) \prod_{n \geq k > 0} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \prod_{n \geq k > 0} k \prod_{n \geq k > 0} \left(1 - \frac{z}{k}\right) \\
 &= zn^{-1} (n+1-z) \prod_{n \geq k > 0} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),
 \end{aligned}$$

d'où

$$g(z)g(1-z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)g_n(1-z) = z \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

d'après (10.4), ce que l'on écrit

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (10.7)$$

## 10.2 Approximation des fonctions holomorphes

On pourrait être tenté d'appliquer le théorème de Stone-Weierstraß, qui s'énonce ainsi

**THÉORÈME 10.15 (Stone)** *Si  $K$  est compact, une sous-algèbre auto-adjointe unitaire de  $\mathcal{C}^0(K)$  qui sépare les points, est dense dans  $\mathcal{C}^0(K)$ .*

Rappelons qu'une algèbre  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel muni d'une structure d'anneau compatible, qu'elle est dite unitaire si elle contient l'élément neutre  $\mathbf{1}$  de la multiplication et auto-adjointe si  $h \in \mathcal{A} \implies \bar{h} \in \mathcal{A}$ . Bien entendu, on a  $\mathcal{C}^0(K) \supset \mathcal{H}(K)$ , mais la condition relative au caractère auto-adjoint de  $\mathcal{A}$  nous retient d'appliquer le théorème de Stone avec pour  $\mathcal{A}$  l'ensemble des polynômes. Nous savons cependant qu'une fonction holomorphe dans un disque  $D$  peut y être développée en série entière, dont la convergence uniforme sur tout compact est acquise, d'où la densité de l'ensemble des polynômes dans  $\mathcal{H}(D)$ . Par contre, c'est en série de Laurent qu'une fonction holomorphe dans une couronne peut être développée, c'est donc la limite d'une suite de fractions rationnelles (au nombre desquelles les polynômes) dont les pôles sont situés au centre de la couronne. Nous allons voir ci-dessous que la densité de l'espace des polynômes dans  $\mathcal{H}(\Omega)$  dépend en fait de la géométrie de  $\Omega$ , le théorème général étant le suivant :

**THÉORÈME 10.16 (de Runge : Grabiner)** *Soient  $K$  compact dans  $\mathbb{C}$ , et  $\Omega$  un ouvert contenant  $K$ . Si  $E \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus K$  (voir le chapitre 11) rencontre toutes les composantes connexes de  $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$ , alors une fonction analytique dans  $\Omega$  peut être approchée uniformément sur  $K$  par une suite de fractions rationnelles dont les seuls pôles appartiennent à  $E$ .*

Notons qu'une fraction rationnelle dont le pôle est à l'infini est en fait un polynôme. DÉMONSTRATION. Notons  $R(K, E)$  l'adhérence dans  $\mathcal{C}^0(K)$  de l'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles appartiennent à  $E$ . En vertu du théorème de Hahn-Banach, il nous suffira de montrer que toute mesure de Radon sur  $K$  qui s'annule sur  $R(K, E)$ , s'annule également sur l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\Omega$ .

▷ Supposons donc que  $\mu$  est une mesure sur  $K$  nulle sur  $R(K, E)$ , et que  $g$  est analytique au voisinage de  $K$ . Si  $\mathcal{C}$  est un cycle dans  $\Omega \setminus K$  pour lequel tout point de  $K$  est d'indice 1 (voir le lemme 10.18 ci-dessous), pour  $z \in K$ , on aura

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Par conséquent, comme d'après le lemme 10.17 ci-dessous,  $h(\zeta) = \int_K |z - \zeta|^{-1} d|\mu|(z)$  est intégrable; d'après le théorème de Fubini, avec

$$f(\zeta) = \int_K (z - \zeta)^{-1} d\mu(z)$$

on aura

$$\int_K g(z) d\mu(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g(\zeta) d\zeta \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (10.8)$$

▷ Dans chaque composante connexe bornée  $U$  de  $\Omega \setminus K$ , il existe  $\zeta_U \in E$  et on aura

$$f^{(n)}(\zeta_U) = n! \int_K \frac{d\mu(z)}{(z - \zeta_U)^{n+1}}$$

comme la mesure  $\mu$  s'annule sur les fractions rationnelles dont les pôles appartiennent à  $E$ ,  $f^{(n)}(\zeta_U) = 0 \forall n$ . Comme  $U$  est inclus dans le complémentaire de  $K$ ,  $f$  est analytique sur  $U$ . Il en résulte d'après le théorème 2.4 que  $f$  est nulle dans un voisinage de  $\zeta_U$ , et par conséquent que  $f$  est nulle sur  $U$ .

▷ Au voisinage de l'infini, le développement de l'intégrand en série de Neumann nous montre que

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \int_K \frac{d\mu(z)}{1 - z/\zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_K \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\mu(z) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta^{-n-1} \int_K z^n d\mu(z), \quad (10.9)$$

Il en résulte que  $f(\zeta) \rightarrow 0$  lorsque  $\zeta \rightarrow \infty$  et que  $f$  est holomorphe au voisinage du point à l'infini. On peut alors prendre pour  $\zeta_U$  le point à l'infini, d'où  $\int_K z^n d\mu(z) = 0$ , ce qui prouve que  $f$  est nulle au voisinage de l'infini et par conséquent dans sa composante connexe.

▷ Nous avons donc démontré que  $f(\zeta) = 0 \forall \zeta \in \mathcal{C}$  et donc en vertu de la formule (10.8) que  $\int_K g(z) d\mu(z) = 0$  pour toute fonction  $g$  holomorphe dans  $\Omega$ .

Q.E.D.

LEMME 10.17 Si  $\mu$  est une mesure sur  $K$ , si  $\lambda$  est la mesure surfacique et  $z \in K$ , alors la fonction

$$h(\zeta) = \int_K \frac{d|\mu|(z)}{|z - \zeta|} \quad (10.10)$$

est intégrable relativement à  $\lambda$  sur tout disque  $B_R(0)$ ,

DÉMONSTRATION.

▷ On appliquera à cet effet le théorème de Fubini. Pour  $\rho$  assez grand, on aura

$$\int_{B_R(0)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} \leq \int_{B_\rho(z)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho dr d\theta = 2\pi\rho.$$

Il en résulte que

$$\int_K d|\mu|(z) \int_{B_R(0)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z - \zeta|} \leq 2\pi\rho \|\mu\|,$$

et l'intégrabilité de  $f$  d'après les théorèmes de Tonelli et Fubini.

Q.E.D.

LEMME 10.18 Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}$  inclus dans l'ouvert  $\Omega$ , alors il existe un cycle  $\Gamma$  formé d'un nombre fini de segments de droite, inclus dans  $\Omega \setminus K$  tel que,  $\forall z \in K$ , pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

DÉMONSTRATION.

▷ Posons  $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)/2$ , et considérons une grille de maille  $\delta$ , par compacité de  $K$ , ce dernier ne coupe qu'un nombre fini  $Q_\ell$ ,  $\ell = 1, L$  des carrés qui la composent. Compte tenu du choix de  $\delta$ , on aura

$$K \subset Q = \bigcup_{\ell=1, L} Q_\ell \subset \Omega,$$

(voir la Figure 10.1.)

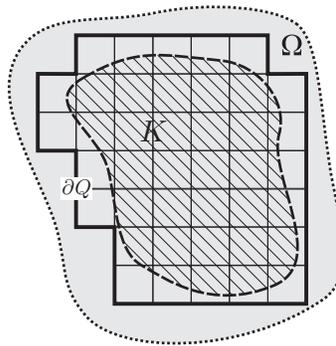


FIGURE 10.1 –  $K \subset Q \subset \Omega$

▷ Notons  $\gamma_n$ ,  $n = 1, N$  les segments formant le bord de  $Q$ , aucun des  $\gamma_n$  ne coupe  $K$ , car si tel était le cas, deux carrés de la grille partageraient  $\gamma_n$ , ce qui contredit le fait que  $\gamma_n \in \partial Q$ .

▷ Soit maintenant  $z \in \overset{\circ}{Q}_k$ , on aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\ell=1, L} \int_{\partial Q_\ell} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

d'où, pour un point  $z$  quelconque de  $K$ , et par continuité

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Q.E.D.

COROLLAIRE 10.19 Si  $K$  est compact et  $\mathbb{C} \setminus K$  connexe, alors toute fonction holomorphe au voisinage de  $K$  peut être uniformément approchée sur  $K$  par une suite de polynômes.



C'est en particulier dans le cadre de ce corollaire que s'inscrit la remarque que nous faisons ci-dessus relativement à la possibilité d'approcher par des polynômes une fonction analytique définie dans un disque et par des fractions rationnelles une fonction analytique définie à l'extérieur d'un disque.



# Chapitre 11

## La sphère de Riemann

De même qu'on définit la droite achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  de façon à traiter commodément des suites tendant vers l'infini, il est souvent recommandé de faire intervenir le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{C}$ , qui prend dans ce contexte le nom de droite projective complexe ou plus fréquemment de sphère de Riemann.

### 11.1 Compactification

On rajoute à  $\mathbb{C}$  un point supplémentaire noté  $\infty$ , dont la signification concrète n'a pour l'instant pas d'importance, elle découlera en fait de la topologie dont nous munirons  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Dans  $\overline{\mathbb{C}}$  les voisinages d'un point  $z \in \mathbb{C}$  sont les ensembles contenant un disque ouvert de  $\mathbb{C}$  centré en  $z$ , tandis que les voisinages de  $\infty$  sont les ensembles contenant le complémentaire d'un disque fermé de  $\mathbb{C}$  centré à l'origine. La topologie induite par celle de  $\overline{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{C}$  est la topologie usuelle de  $\mathbb{C}$ . Considérons maintenant un recouvrement ouvert  $U_i, i \in I$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ , l'un d'entre eux au moins, soit  $U_0$  contient le point  $\infty$ , et donc l'extérieur d'un compact  $K$ . Il suffit donc d'un nombre fini  $n$  de  $\mathbb{C} \cap U_i$  pour recouvrir  $K$ , soit  $\mathbb{C} \cap U_i, i = 1, n$ , et par conséquent, les  $U_i, i = 0, n$  forment un recouvrement de  $\overline{\mathbb{C}}$ . C'est dire que  $\overline{\mathbb{C}}$  est compact, c'est le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{C}$ .

Cette construction admet des réalisations plus géométriques, qui ont l'avantage de se présenter naturellement sous la forme de variétés analytiques.

### 11.2 La droite projective complexe

On note  $P^1(\mathbb{C})$ , le quotient de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par la relation d'équivalence  $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2) = \lambda(z_1, z_2)$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$  est différent de 0. On note  $\pi$  la projection canonique  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ .  $P^1(\mathbb{C})$  est une variété analytique qui peut être décrite par les deux cartes suivantes :

$$\begin{aligned} \zeta &: (z_1, z_2) \rightarrow z_1/z_2, \text{ si } z_2 \neq 0 \\ \underline{\zeta} &: (z_1, z_2) \rightarrow z_2/z_1, \text{ si } z_1 \neq 0 \end{aligned}$$

il est facile de voir que  $z_1/z_2$  et  $z_2/z_1$  ne dépendent pas du représentant choisi dans  $(z_1, z_2)$ . De plus les fonctions  $\zeta$  et  $\underline{\zeta}$  sont injectives car si  $z_1/z_2 = t_1/t_2$ , alors  $(z_1, z_2) = \lambda(t_1, t_2)$ , où  $\lambda = z_2/t_2$ . Enfin l'application de changement de carte

$$\psi = \underline{\zeta} \circ \zeta^{-1}$$

est holomorphe car  $\zeta^{-1}(z) = (z, 1)$ , d'où si  $z \neq 0$ ,  $\zeta \circ \zeta^{-1}(z) = \zeta(z, 1) = 1/z$ . On peut alors munir  $P^1(\mathbb{C})$  de la topologie finale engendrée par  $\pi$ , qui n'est autre que celle engendrée par les cartes  $\zeta$  et  $\underline{\zeta}$ , soit en fait la moins forte qui les rende continues. On constate alors que les domaines respectifs  $U$  et  $\underline{U}$  des cartes  $\zeta$  et  $\underline{\zeta}$  sont des ouverts de  $P^1(\mathbb{C})$  homéomorphes à  $\mathbb{C}$ , qui recouvrent complètement  $P^1(\mathbb{C})$  à l'exception de  $(z_1, 0)$  pour  $U$  qu'on notera (par exemple)  $\infty$ , et de  $(0, z_2)$  pour  $\underline{U}$ . Il en résulte que  $U \cap \underline{U}$  est homéomorphe à  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  et que  $P^1(\mathbb{C})$  peut être identifié à  $\overline{\mathbb{C}} = \zeta(U) \cup \{(z_1, 0)\}$ .

### 11.3 Projection stéréographique

Il existe une autre façon classique, plus imagée, de représenter la droite projective complexe, elle repose sur la description de la sphère  $S^2 = \{(s_1, s_2, s_3) \mid \sum_{i=1,3} s_i^2 = 1\}$  à l'aide des deux cartes suivantes :

$$\eta : (s_1, s_2, s_3) \rightarrow \frac{s_1 + is_2}{1 - s_3}, \text{ si } s_3 < 1$$

$$\underline{\eta} : (s_1, s_2, s_3) \rightarrow \frac{s_1 - is_2}{1 + s_3}, \text{ si } s_3 > -1$$

La fonction  $\eta$  est la projection stéréographique relative au pôle nord  $(0, 0, 1)$  (voir la Figure 11.1), et  $\underline{\eta}$  découle par symétrie de celle relative au pôle sud  $(0, 0, -1)$ , de telle sorte que l'atlas qu'elles forment soit analytique. Pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , on aura en effet

$$\eta^{-1}(z) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\psi(z) = \underline{\eta} \circ \eta^{-1}(z) = \frac{s_1 - is_2}{1 + s_3} = \frac{2}{1 + |z|^2} \frac{x - iy}{|z|^2 / (1 + |z|^2)} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z^{-1}.$$

Il n'est pas difficile d'expliciter l'homéomorphisme qui fait passer de  $P^1(\mathbb{C})$  à  $S^2$ , on aura en effet

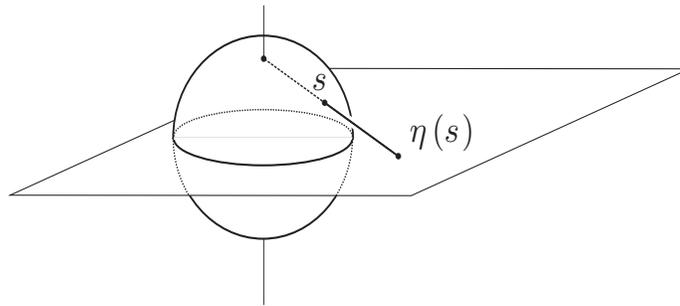


FIGURE 11.1 – La projection stéréographique

$$(s_1 + is_2) = \frac{2z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

$$s_3^2 = 1 - \frac{4|z_1|^2|z_2|^2}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2} = \frac{(|z_1|^2 - |z_2|^2)^2}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2} \text{ soit } s_3 = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2},$$

ce qui met en correspondance le point  $\infty$  avec le pôle nord.

Ces représentations sont donc équivalentes et en général on n'éprouve pas le besoin de préciser davantage de laquelle il s'agit. Désormais, nous parlerons de la sphère de Riemann, que nous noterons  $P^1(\mathbb{C})$ , et nous noterons  $\infty$  l'image réciproque de 0 par  $\underline{\eta}^{-1}$  ou  $\underline{\zeta}^{-1}$ .

## 11.4 Fonctions holomorphes

On dira qu'une fonction  $f : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe sur la sphère de Riemann si  $g = f \circ \underline{\zeta}^{-1}$  et  $\underline{g} = f \circ \underline{\zeta}^{-1}$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ , ou de façon équivalente  $f \circ \underline{\eta}^{-1}$  et  $f \circ \underline{\eta}^{-1}$ . Comme  $g = f \circ \underline{\zeta}^{-1} = \underline{g} \circ \underline{\zeta} \circ \underline{\zeta}^{-1}$ , on aura en fait  $g(z) = \underline{g}(1/z)$ . De façon un peu raccourcie, on dit alors qu'une fonction est holomorphe sur la sphère de Riemann si elle est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que la fonction qui s'en déduit par le changement de variable  $z = 1/z'$ .

De même, une fonction  $f$  est méromorphe sur  $P^1(\mathbb{C})$  si  $g$  et  $\underline{g}$  le sont. Soit alors  $A$  l'ensemble des pôles de  $f$ , il ne peut posséder de point d'accumulation, et il est par conséquent fini, puisque  $P^1(\mathbb{C})$  est compact. Sous cette forme, il est bien clair que les fonctions méromorphes (respectivement holomorphes) sur  $P^1(\mathbb{C})$  constituent une classe particulière des fonctions analogues dans  $\mathbb{C}$ . L'introduction de la carte  $\underline{\zeta}'$  nous a permis de préciser quels comportements à l'infini nous autorisons pour  $g$ . Il s'agit en fait d'une fraction rationnelle, puisque ses pôles étant en nombre et de multiplicités finies, il existe un polynôme  $Q$  tel que  $h = Qg$  soit bornée à distance finie, et par conséquent holomorphe, d'après le lemme 7.1. Mais  $h$  reste méromorphe dans  $P^1(\mathbb{C})$ , et par conséquent son développement de Laurent à l'infini, soit celui de  $\underline{h}$  en 0, ne comporte qu'un nombre fini de termes d'indice négatif, il en résulte que pour un certain  $n$ ,  $(z')^n \underline{h}(z')$  est bornée en 0, soit  $h(z)/z^n$  à l'infini. D'après le théorème de Liouville 4.13, il en résulte que  $h$  est un polynôme, et par conséquent  $g$  une fraction rationnelle.

On peut également parler de fonctions holomorphes  $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  : on dira que  $f$  est holomorphe  $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  si  $\underline{\zeta} \circ g$ ,  $\underline{\zeta} \circ \underline{g}$ ,  $\underline{\zeta} \circ \underline{g}$  et  $\underline{\zeta} \circ \underline{g}$  sont holomorphes  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . C'est dire en fait que  $\underline{\zeta} \circ g(z)$  et  $\underline{\zeta} \circ \underline{g}(z)$  sont holomorphes, ainsi que  $1/(\underline{\zeta} \circ g(z))$  et  $1/(\underline{\zeta} \circ \underline{g}(z))$  respectivement en dehors de  $\underline{\zeta} \circ g(z) = 0$  et  $\underline{\zeta} \circ \underline{g}(z) = 0$ .

## 11.5 Le théorème des résidus

Il importe tout d'abord de rappeler que *ce que l'on intègre sur une variété ce ne sont pas des fonctions mais des formes différentielles*. Soit  $\omega(x; h)$  une forme différentielle de degré 1 sur  $P^1(\mathbb{C})$ , c'est en chaque point  $x \in P^1(\mathbb{C})$ , une forme linéaire  $h \rightarrow \omega(x; h)$  sur  $T'_x$ , espace tangent à  $P^1(\mathbb{C})$  en  $x$ . Cet espace tangent est de dimension complexe 1, chaque carte permet d'en construire une base, ici un élément, soit respectivement  $d\underline{\zeta}$  et  $d\underline{\zeta}$ , qui sont reliés par la relation  $d\underline{\zeta} = \psi' d\underline{\zeta}$ , où  $\psi = \underline{\zeta} \circ \underline{\zeta}^{-1}$ . Une forme différentielle admet donc une représentation relativement à chaque carte aux points de laquelle elle est définie, soit

$$\omega = g \circ \underline{\zeta}(x) d\underline{\zeta} = \underline{g} \circ \underline{\zeta}(x) d\underline{\zeta}.$$

Soit alors  $\delta$  un chemin dans  $P^1(\mathbb{C})$ , posons  $\gamma = \underline{\zeta} \circ \delta$  et  $\underline{\gamma} = \underline{\zeta} \circ \delta$ , par définition, on aura

$$\int_{\delta} \omega = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\underline{\gamma}} \underline{g}(z') dz'. \quad (11.1)$$

Il nous faut bien entendu vérifier la seconde égalité, on aura en effet

$$g \circ \zeta(x) d\zeta = \underline{g} \circ \underline{\zeta}(x) \psi' d\zeta = \underline{g} \circ \psi \circ \zeta(x) \psi' d\zeta,$$

soit encore

$$g(z) = \underline{g} \circ \psi(z) \psi'(z),$$

d'où, selon (7.7),

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\underline{\gamma}} \underline{g}(z') dz'.$$

Dans le cas où le chemin  $\delta$  n'est pas tout entier situé dans le domaine d'une carte, on définit  $\int_{\delta} \omega$  à l'aide d'une partition de l'unité.

Dans ce cadre, il est possible de définir le résidu d'une forme différentielle méromorphe en un point  $x_k$  où elle admet un pôle : si  $x_k$  appartient au domaine de l'une des cartes, soit par exemple  $\zeta$ , ce sera le résidu de  $g$  en  $\zeta(x_k)$ . Encore faut-il vérifier que cette définition ne conduit pas à une incompatibilité dans le cas où  $x_k$  appartient simultanément aux domaines des cartes  $\zeta$  et  $\underline{\zeta}$ , c'est-à-dire

$$\text{Res}(g; \zeta(x_k)) = \text{Res}(\underline{g}; \underline{\zeta}(x_k)) = \text{Res}(\omega; x_k), \quad (11.2)$$

ce qui n'est en fait rien d'autre que la formule (7.14).

Notons par ailleurs que les formules (7.10) et (7.9) nous permettent d'écrire

$$n(\gamma; \zeta(x)) = n(\underline{\gamma}; \underline{\zeta}(x)) - n(\underline{\gamma}; 0) \text{ ou encore } n(\underline{\gamma}; \underline{\zeta}(x)) = n(\gamma; \zeta(x)) - n(\gamma; 0),$$

il est donc clair que l'indice d'un point par rapport à un lacet ne constitue pas une quantité intrinsèque sur la sphère de Riemann. Cependant si on considère un domaine  $\Omega \subset P^1(\mathbb{C})$ , ne contenant ni l'origine ni le point à l'infini, et un chemin  $\delta$  dans  $\Omega$  tel que  $\gamma = \eta \circ \delta$  soit homologue à 0 dans  $\eta(\Omega)$ , alors

$$n(\gamma; \eta(x)) = n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(x)) = n(\delta; x),$$

ce qui montre d'ailleurs que  $\underline{\gamma}$  est également homologue à 0 dans  $\underline{\eta}(\Omega)$  (voir la Figure 11.2 où  $\gamma$  et  $\underline{\gamma}$  sont en outre tous deux le bord orienté d'un compact) Si les  $x_k$  sont les pôles de  $\omega$  dans  $\Omega$ , on aura alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \omega &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma; \eta(x_k)) \text{Res}(g; \eta(x_k)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\underline{\gamma}} \underline{g}(z') dz' = \sum_{k=1}^n n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(x_k)) \text{Res}(\underline{g}; \underline{\eta}(x_k)), \end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \omega = \sum_{k=1}^n n(\delta; x_k) \text{Res}(\omega; x_k). \quad (11.3)$$

Considérons maintenant le cas où  $\omega$  est méromorphe dans l'ouvert  $\Omega \subset P^1(\mathbb{C})$  et  $\delta$  est le bord d'un compact  $K \subset \Omega$ . Si  $\Omega$  ne contient pas le point à l'infini, nous orienterons  $\delta$  de telle sorte que  $\gamma$  soit le bord orienté du compact  $\eta(K)$ , on aura alors

$$n(\gamma; \eta(x)) = 1, \forall x \in \overset{\circ}{K} \text{ et } n(\gamma; \eta(y)) = 0, \forall y \in K^c,$$

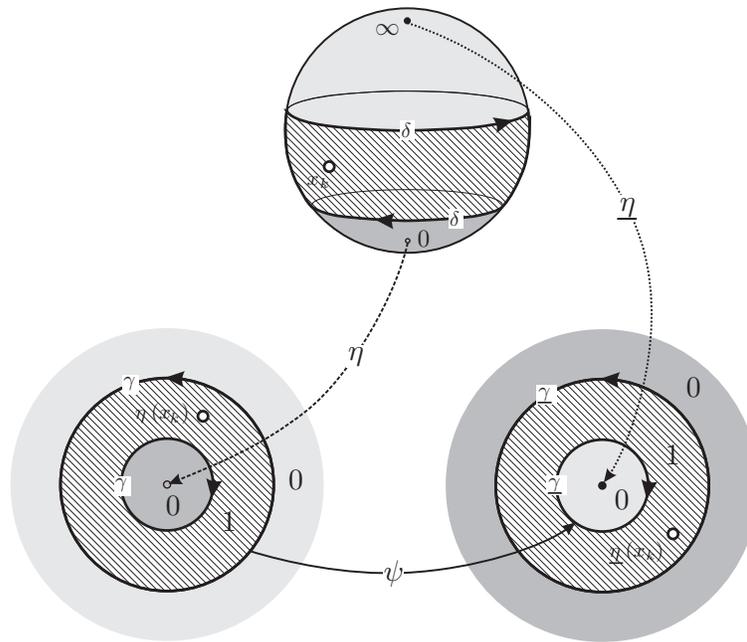


FIGURE 11.2 –  $\Omega$  ne contient ni l'origine ni le point à l'infini

(voir la Figure 11.3) et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \omega = \sum_{k=1}^n \text{Res}(\omega; x_k), \quad x_k \in K. \quad (11.4)$$

Comme  $n(\gamma; 0) = 1$ , il en résulte que

$$n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(x)) = 0, \forall x \in \overset{\circ}{K} \text{ et } n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(y)) = -1, \forall y \in K^c,$$

De même si  $\Omega$  contient le point à l'infini et pas l'origine, nous orienterons  $\delta$  de telle sorte que  $\gamma$  soit le bord orienté de  $\underline{\eta}(K)$ . On aura alors  $n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(y_\ell)) = 1$ , où les  $y_\ell, \ell = 1, p$  sont les pôles de  $\omega$  situés dans  $K$ , d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \omega = \sum_{\ell=1}^p \text{Res}(\omega; y_\ell), \quad y_\ell \in K. \quad (11.5)$$

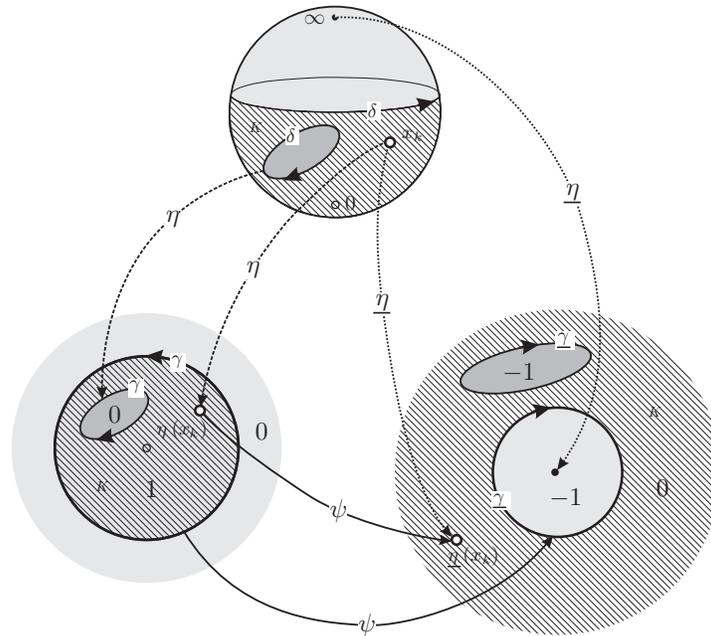
(Voir la Figure 11.4)

Dans le cas où  $\omega$  est méromorphe sur  $P^1(\mathbb{C})$  tout entier, si  $K$  contient l'origine et pas le point à l'infini, alors  $(\overset{\circ}{K})^c$  contient le point à l'infini et pas l'origine. Si  $\delta$  est orienté (par exemple) de telle sorte que  $\gamma$  soit le bord orienté du compact  $\eta(K)$ , alors

$$n(\gamma; \eta(x)) = 1, \forall x \in \overset{\circ}{K} \text{ et } n(\gamma; \eta(y)) = 0, \forall y \in K^c.$$

Comme  $n(\gamma; 0) = 1$ , il en résulte que

$$n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(x)) = 0, \forall x \in \overset{\circ}{K} \text{ et } n(\underline{\gamma}; \underline{\eta}(y)) = -1, \forall y \in K^c,$$

FIGURE 11.3 –  $K$  contient l'origine et pas le point à l'infini

d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \omega = \sum_{k=1}^n \text{Res}(\omega; x_k) = - \sum_{\ell=1}^p \text{Res}(\omega; y_{\ell}),$$

où les  $x_k$ ,  $k = 1, n$  sont les pôles de  $\omega$  situés dans  $\overset{\circ}{K}$ , et les  $y_{\ell}$ ,  $\ell = 1, p$  ceux situés dans  $K^c$ , (voir la Figure 11.5) Il en résulte en particulier que la somme des résidus de  $\omega$  sur la sphère de Riemann est nulle, ce qui n'est rien d'autre que la formule (7.17). Plus généralement, une fonction  $f$  est méromorphe  $\Omega \subset P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  si  $F = h^{-1} \circ f \circ k$  est méromorphe  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $h$  et  $k$  sont deux cartes de domaines respectifs  $U$  et  $f(U)$ .

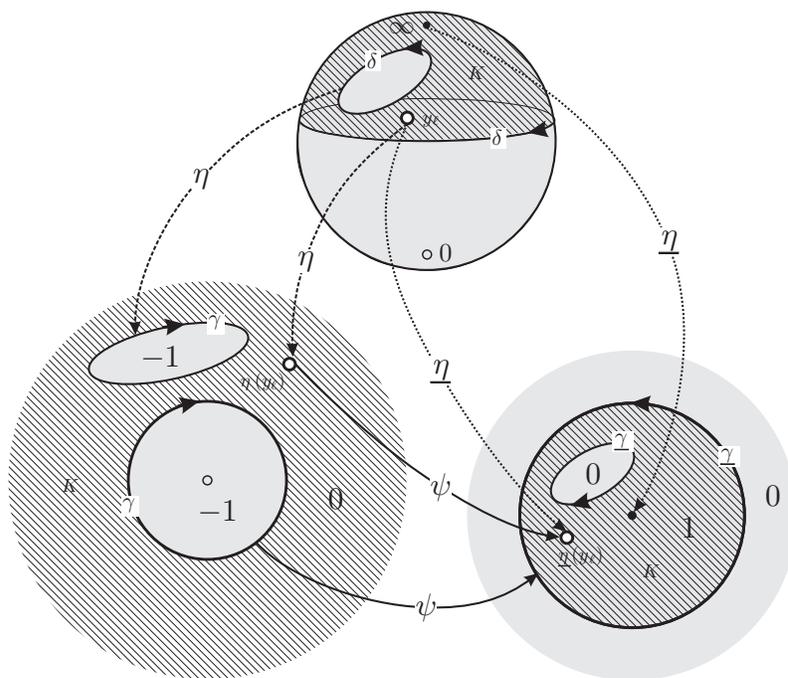


FIGURE 11.4 –  $K$  contient le point à l’infini et pas l’origine

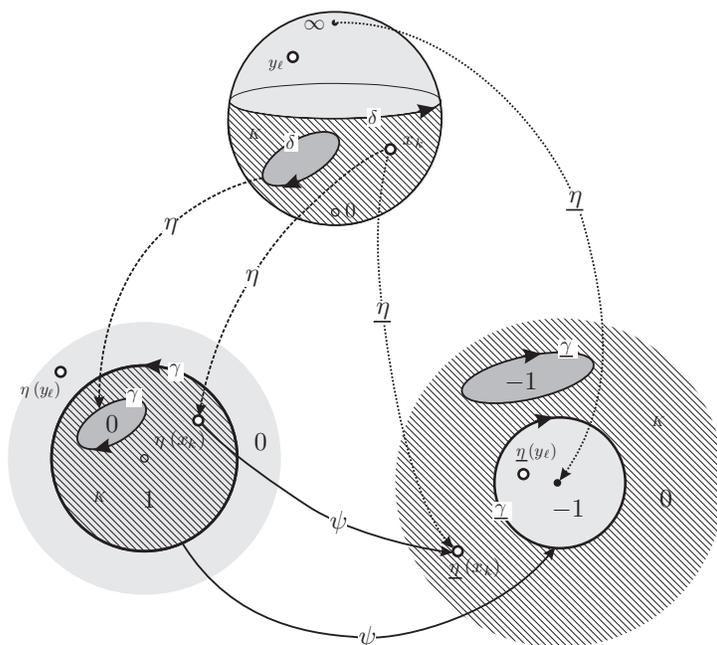


FIGURE 11.5 – Forme différentielle méromorphe sur  $P^1(\mathbb{C})$



# Chapitre 12

## Transformations conformes

Etant donnés deux ouverts  $\Omega$  et  $\Theta$  de  $P^1(\mathbb{C})$ , on va chercher à savoir s'il existe un isomorphisme  $f$  de  $\Omega$  sur  $\Theta$ , c'est-à-dire une application holomorphe, inversible et d'inverse holomorphe :  $\Omega \rightarrow \Theta$ . Si c'est le cas, on dira que  $\Omega$  est conformément équivalent à  $\Theta$ . Commençons par étudier les applications holomorphes.

### 12.1 Applications holomorphes

Soit  $f$  holomorphe telle que  $f'(z_0) = c \neq 0$ . Posons  $t_0 = f(z_0)$ , si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins différentiables tels que  $\gamma_1(0) = z_0$  et  $\gamma_2(0) = z_0$  et si  $\delta_i = f \circ \gamma_i$ , alors

$$\text{Log} \frac{\delta_2'}{\delta_1'} = \text{Log} \frac{(f \circ \gamma_2)'}{(f \circ \gamma_1)'} = \text{Log} \frac{c\gamma_2'}{c\gamma_1'} = \text{Log} \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}$$

C'est encore dire que l'angle formé par les vecteurs  $\delta_1'$  et  $\delta_2'$  en  $t_0$  est le même que celui formé par  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2'$ , ce qui est à l'origine de l'expression *transformation conforme de  $U$  dans  $V$  pour qualifier les isomorphismes de  $U$  sur  $V$* .

Réciproquement, si  $T$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui conserve les angles, alors elle est de la forme  $T(z) = cz$ . Posons en effet  $T(1) = re^{i\theta}$  et  $S(z) = r^{-1}e^{-i\theta}z$ , la transformation  $S \circ T$  conservera également les angles, et de plus  $S \circ T(1) = 1$ ; il en résulte que  $S \circ T(i) = \alpha i$ , où  $\alpha$  est réel, et comme par linéarité  $S \circ T(1+i) = 1 + \alpha i$ , on aura également  $(1+i) = \beta(1+i)$  où  $\beta$  est réel. Il en résulte que  $\beta = \alpha = 1$ , d'où  $T = S^{-1}$ , soit  $T(z) = re^{i\theta}z$ .

Supposons maintenant que  $f'(z_0) = 0$ ,  $f$  n'étant pas identiquement nulle au voisinage de  $z_0$ . Localement  $f$  est développable en série entière selon

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n, \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

d'où  $a_1 = 0$ , et il existe  $p$  tel que  $a_k = 0$ ,  $k < p$ ,  $a_p \neq 0$ . On pourra alors écrire

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p \sum_{n \geq p} a_n (z - z_0)^{n-p}, \text{ où } p \geq 2.$$

Posons  $\zeta = z - z_0$ ,  $f(z) - f(z_0) = h(\zeta)$ , et  $g(\zeta) = h(\zeta) / (\zeta^p a_p) = 1 + \sum_{n \geq p+1} b_n \zeta^{n-p}$ , où  $b_n = a_n / a_p$ . On peut trouver  $c$  tel que  $a_p = c^p$ , et par conséquent

$$h(\zeta) = c^p \zeta^p g(\zeta),$$

où  $g(0) = 1$  et  $g$  est holomorphe au voisinage de 0. Au voisinage de  $\zeta = 0$ , en vertu du corollaire 5.27,  $1/g(\zeta)$  admet une primitive :  $\text{Log } g(\zeta)$ , et on pourra donc écrire  $h(\zeta) = (v(\zeta))^p$ , où  $v(\zeta) = c \zeta e^{1/p \text{Log } g(\zeta)}$  est holomorphe. On aura de plus  $v(0) = 0$  et

$$v'(\zeta) = c e^{1/p \text{Log } g(\zeta)} + c \zeta e^{1/p \text{Log } g(\zeta)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)},$$

d'où  $v'(0) = c$ . Il en résulte que  $h = w \circ v$ , où  $w(z) = z^p$ , et  $v$  conserve les angles.

Considérons maintenant la transformation  $w$ , avec  $\delta_i = w \circ \gamma_i$ , en  $t = 0$  on aura

$$\text{Log} \frac{\delta_2'}{\delta_1'} = \text{Log} \frac{(w \circ \gamma_2)'}{(w \circ \gamma_1)'} = \text{Log} \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{p-1} = \text{Log} \left( \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \right)^p,$$

puisque

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(t) = \frac{t\gamma_2' + O(t^2)}{t\gamma_1' + O(t^2)} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}(0) + O(t),$$

ce qui montre que les angles sont multipliés par  $p$  dans la transformation  $w$  et par conséquent dans la transformation  $h$ , ou de façon équivalente par  $f$ .

## 12.2 Groupes d'automorphismes

### DÉFINITION 12.1

- (i) On dit qu'un groupe  $G$  d'automorphismes  $X \rightarrow X$  est transitif, si  $\forall (x, y) \in X^2, \exists g \in G$  tel que  $y = g(x)$
- (ii) On appelle sous-groupe d'isotropie de  $x_0 \in X$ , dans  $G$ , le sous-groupe des éléments de  $G$  qui conservent  $x_0$ , soit  $\{f \in G \mid f(x_0) = x_0\}$

**PROPOSITION 12.2** Soit  $\Gamma(X)$ , le groupe des automorphismes de  $X$  et  $G$  un sous-groupe transitif de  $\Gamma(X)$ . Si  $\exists z_0 \in X$  tel que le sous-groupe d'isotropie de  $z_0$  dans  $\Gamma(X)$  soit contenu dans  $G$ , alors  $G = \Gamma(X)$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit en effet  $s \in \Gamma(X)$ , comme  $G$  est transitif, il existe  $t \in G$  tel que  $t(z_0) = s(z_0)$ , d'où  $t^{-1} \circ s(z_0) = z_0$ , ce qui prouve que  $t^{-1} \circ s$  fait partie du groupe d'isotropie de  $z_0$ , et par conséquent de  $G$ . Il en résulte que  $s = t \circ t^{-1} \circ s \in G$ .

Q.E.D.

### 12.2.1 Automorphismes de $\mathbb{C}$

**THÉORÈME 12.3** Le groupe  $\Gamma(\mathbb{C})$  des automorphismes de  $\mathbb{C}$  est de la forme suivante :

$$\Gamma(\mathbb{C}) = \{f(z) = az + b \mid a \neq 0\}.$$

**DÉMONSTRATION.**

- ▷ Il est tout d'abord clair que les automorphismes de  $\mathbb{C}$  forment un groupe.
- ▷ Soit  $f$  un isomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans lui-même, c'est une fonction holomorphe, et par conséquent la fonction  $g(z) = f(1/z)$  n'admet d'éventuelle singularité qu'en 0. Il s'agit donc d'une singularité isolée, qui ne peut être qu'un point singulier essentiel ou un pôle, en vertu du théorème 7.2.
- ▷ Supposons qu'il s'agisse d'un point singulier essentiel, alors selon le théorème 7.2 l'image par  $g$  du disque ouvert  $\{z \mid |z| < 1\}$  est dense dans  $\mathbb{C}$  et rencontre par conséquent l'ouvert image par  $f$  de ce même disque ouvert. C'est dire qu'il existe  $z$  tel que  $f(z) = g(z) = f(1/z)$ , ce qui est incompatible avec l'injectivité de  $f$ .

▷ Nous avons donc montré que 0 est un pôle de  $g$ , et par conséquent, selon le corollaire 7.4 que le développement de Laurent de  $g$  au voisinage de 0 ne comporte qu'un nombre fini de termes d'indice négatif, soit en fait que le développement en série entière de  $f$  ne comporte qu'un nombre fini de termes ; c'est dire que  $f$  est un polynôme. Selon le corollaire 4.15 du théorème de d'Alembert, on aura  $f(z) = c \prod_{i=1}^m (z - \alpha_i)^{k_i}$ , où  $k = \sum_{i=1, m} k_i$  est le degré du polynôme et  $\alpha_i$  ses racines, de multiplicités respectives  $k_i$ . Comme  $f$  est supposée injective, elle ne peut avoir qu'une racine  $\alpha$ , de multiplicité  $k$ , soit  $f(z) = c(z - \alpha)^k$ , mais alors l'équation  $f(z) = c$  possède  $k$  racines :  $\beta_k = \alpha + e^{2i\pi n/k}$ . Pour que  $f$  soit injective, il est donc nécessaire (et suffisant) que  $f$  soit de degré 1, soit

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

Q.E.D.

### 12.2.2 Automorphismes de $P^1(\mathbb{C})$

On démontre à l'annexe G, proposition G.2 que les transformations de Möbius

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

ou du moins leurs prolongements  $\tau$  à la sphère de Riemann (voir le chapitre 11), définis par

$$\zeta \circ \tau \circ \zeta^{-1}(z) = w(z), \quad z \neq -\frac{d}{c} \text{ si } c \neq 0$$

et prolongés selon

$$\begin{aligned} \tau(\infty) &= \zeta^{-1} \circ w \circ \underline{\zeta} \circ \underline{\zeta}^{-1} \circ \zeta(\infty) = \zeta^{-1} \circ w \circ \underline{\zeta}(0) = \zeta^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \text{ si } c \neq 0 \\ \tau(\infty) &= \underline{\zeta}^{-1} \circ \underline{\zeta} \circ \zeta^{-1} \circ w \circ \underline{\zeta}(0) = \underline{\zeta}^{-1}(0) = \infty \text{ si } c = 0 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\tau \circ \zeta^{-1}\left(-\frac{d}{c}\right) = \zeta^{-1} \circ w\left(-\frac{d}{c}\right) = \underline{\zeta}^{-1} \circ \underline{\zeta} \circ \zeta^{-1} \circ w\left(-\frac{d}{c}\right) = \underline{\zeta}^{-1}(0) = \infty \text{ si } c \neq 0.$$

sont des bijections de  $P^1(\mathbb{C})$ .

Montrons maintenant que les prolongements des transformations de Möbius sont des automorphismes de  $P^1(\mathbb{C})$ . Dans les cartes  $\zeta$  et  $\underline{\zeta}$ , on aura

$$\begin{aligned} \underline{\zeta} \circ \tau \circ \zeta^{-1}(z) &= \frac{1}{w(z)}, \quad z \neq -\frac{b}{a} \text{ si } a \neq 0 \\ \zeta \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}(z) &= w\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \neq 0, \quad z \neq -\frac{c}{d} \text{ si } d \neq 0, \text{ et } \zeta \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}(0) = \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0 \\ \underline{\zeta} \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}(z) &= 1/w\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \neq 0, \quad z \neq -\frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0, \text{ et } \underline{\zeta} \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}(0) = \frac{c}{a} \text{ si } a \neq 0 \end{aligned}$$

(voir la Figure 12.1) Au voisinage de  $z = -d/c$ ,

$$\underline{\zeta} \circ \tau \circ \zeta^{-1}(z) = 1/w(z) = \frac{cz + d}{az + b} \text{ et } \underline{\zeta} \circ \tau \circ \zeta^{-1}\left(-\frac{d}{c}\right) = 0$$

ainsi que

$$\frac{1}{z + d/c} \frac{1}{w(z)} = \frac{1}{z + d/c} \frac{cz + d}{az + b} = \frac{c}{az + b} \rightarrow -\frac{c^2}{ad - bc},$$

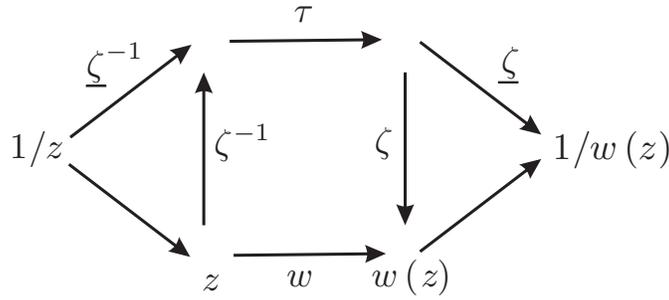


FIGURE 12.1 – Prolongement de la transformation de Möbius

ce qui prouve que  $\underline{\zeta} \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}$  est holomorphe. De même, au voisinage de 0, si  $c \neq 0$

$$\underline{\zeta} \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}(z) = w(1/z) = \frac{a/z + b}{c/z + d}$$

d'où

$$\frac{1}{z} w(1/z) = \frac{1}{z} \frac{a/z + b}{c/z + d} = \frac{a/z + b}{c + dz} \rightarrow \frac{b}{c},$$

ce qui montre que  $\underline{\zeta} \circ \tau \circ \underline{\zeta}^{-1}$  est holomorphe. Ces fonctions sont donc des automorphismes de  $\mathbb{C}$  en vertu du théorème d'inversion globale 8.5, d'où il résulte que  $\tau$  est un automorphisme de  $P^1(\mathbb{C})$ .



Désormais et sauf nécessité absolue, nous confondrons  $w$  et son prolongement  $\tau$  à la sphère de Riemann.

**THÉORÈME 12.4** *Le groupe  $\Gamma(P^1(\mathbb{C}))$  des automorphismes de  $P^1(\mathbb{C})$  est de la forme suivante :*

$$\Gamma(P^1(\mathbb{C})) = \left\{ w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0 \right\} = H$$

**DÉMONSTRATION.** Notons  $G$  le sous-groupe de  $H$  des transformations vérifiant  $c = 0, d \neq 0$ . Comme  $ad - bc \neq 0$  on aura  $a \neq 0$ , et par conséquent selon 12.3,  $G$  est le groupe des automorphismes de  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire le sous-groupe des automorphismes de  $P^1(\mathbb{C})$  laissant invariant le point à l'infini; c'est dire que  $G \subset H$  est le sous-groupe d'isotropie de l'infini. De plus il est facile de vérifier que  $H$  est transitif dans  $P^1(\mathbb{C})$ , d'où la conclusion d'après la proposition 12.2.

Q.E.D.

### 12.2.3 Automorphismes du demi-plan supérieur

On note  $P$  le demi-plan supérieur et  $D$  le disque unité.

**PROPOSITION 12.5**

- (i) *Le sous-groupe  $T$  des homographies à coefficients réels vérifiant  $ad - bc > 0$  est transitif dans  $P$*
- (ii) *Le sous-groupe d'isotropie de  $i$  dans  $\Gamma(P)$  est inclus dans  $T$ .*

**DÉMONSTRATION.**

▷ Tout d'abord si  $z = \alpha + i\beta$ ,  $\beta > 0$ , alors on peut trouver  $w_z \in T$  tel que  $w_z(i) = z$ , soit d'après (G.1), en choisissant de prendre  $ad - bc = 1$ ,

$$\alpha + i\beta = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{i + d/c} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{-i + d/c}{1 + d^2/c^2} = \frac{a}{c} - \frac{-i + d/c}{c^2 + d^2},$$

d'où

$$\alpha = \frac{a}{c} - \frac{d/c}{c^2 + d^2} \text{ et } \beta = \frac{1}{c^2 + d^2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{c}(a - d\beta).$$

On prendra par exemple  $c = \beta^{-1/2}$ ,  $d = 0$ ,  $a = c\alpha$  et  $b = -1/c$ .

▷ Dans un second temps, on construit un élément  $v$  de  $T$  tel que  $v(z_1) = z_2$  où  $z_1, z_2 \in P$  en composant  $w_{z_2}$  et  $(w_{z_1})^{-1}$ .

▷ Selon la proposition G.9, la transformation de Cayley  $C$  est une bijection  $P \rightarrow D$ , et par conséquent elle réalise une bijection  $\Gamma(P) \rightarrow \Gamma(D)$  selon la formule

$$\delta \circ C = C \circ \pi, \quad (12.1)$$

où  $\pi \in \Gamma(P)$  et  $\delta \in \Gamma(D)$ . Comme de plus elle transforme  $i$  en 0, elle transforme le groupe d'isotropie de 0 dans  $\Gamma(D)$  en celui de  $i$  dans  $\Gamma(P)$ . En vertu du lemme 12.6 ci-dessous et de la formule (G.2), c'est dire que

$$\begin{aligned} \pi &= i \frac{1 + e^{i\theta}(z-i)(z+i)^{-1}}{1 - e^{i\theta}(z-i)(z+i)^{-1}} = i \frac{e^{i\theta}(z-i) + (z+i)}{(z+i) - e^{i\theta}(z-i)} = i \frac{(1 + e^{i\theta})z + i(1 - e^{i\theta})}{(1 - e^{i\theta})z + i(1 + e^{i\theta})} \\ &= i \frac{i(1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})^{-1} + z}{z(1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})^{-1} + i} = - \frac{i(1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})^{-1} + z}{iz(1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})^{-1} - 1} \\ &= - \frac{z + i(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) / (2(1 + \cos \theta))}{-1 + iz(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) / (2(1 + \cos \theta))} \\ &= - \frac{z - \sin \theta / (1 + \cos \theta)}{-1 - z \sin \theta / (1 + \cos \theta)} = \frac{z - \operatorname{tg} \theta / 2}{z \operatorname{tg} \theta / 2 + 1}, \end{aligned}$$

qui appartient à  $T$ .

Q.E.D.

LEMME 12.6 *Le sous-groupe d'isotropie de 0 dans  $\Gamma(D)$  est formé des rotations  $z \rightarrow e^{i\theta}z$ .*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme de Schwarz 6.6, si  $f$  est un automorphisme de  $D$  laissant 0 fixe, on aura  $|f(z)| < 1$  et  $f(0) = 0$ , d'où  $|f(z)| \leq |z|$ , et de même pour  $f^{-1}(z)$ . Il en résulte que  $|f(z)| = |z|$ , et toujours d'après le lemme de Schwarz que  $f(z) = e^{i\theta}z$ .

Q.E.D.

En vertu de la proposition 12.2, il résulte de la proposition 12.5 que

THÉORÈME 12.7 *Le groupe  $\Gamma(P)$  des automorphismes du demi-plan supérieur  $P$  est de la forme suivante :*

$$\Gamma(P) = T = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc > 0 \text{ et } a, b, c, d \text{ réels} \right\}$$

### 12.2.4 Automorphismes du disque unité $D$ .

Grâce à la transformation de Cayley, de la formule (12.1) on peut déduire  $\Gamma(D)$  de  $\Gamma(P)$  : si  $\delta \in \Gamma(D)$ , on a

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{-i + (b + ai(z+1)(1-z)^{-1}) / (d + ci(z+1)(1-z)^{-1})}{i + (b + ai(z+1)(1-z)^{-1}) / (d + ci(z+1)(1-z)^{-1})} \\ &= \frac{(b + ai(z+1)(1-z)^{-1}) - i(d + ci(z+1)(1-z)^{-1})}{(b + ai(z+1)(1-z)^{-1}) + i(d + ci(z+1)(1-z)^{-1})},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{(ai(z+1) + b(1-z)) - i(ci(z+1) + d(1-z))}{(ai(z+1) + b(1-z)) + i(ci(z+1) + d(1-z))} \\ &= \frac{ai(z+1) + b(1-z) + c(z+1) - id(1-z)}{ai(z+1) + b(1-z) - c(z+1) + id(1-z)} \\ &= \frac{z((a+d)i + (c-b)) + ((a-d)i + (c+b))}{z((a-d)i - (c+b)) + ((a+d)i - (c-b))}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{((a+d)i + (c-b))}{((a+d)i - (c-b))} \frac{z + ((a-d)i + (c+b)) / ((a+d)i + (c-b))}{1 + z((a-d)i - (c+b)) / ((a+d)i - (c-b))} \\ &= e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z},\end{aligned}$$

où on rappelle que  $a, b, c$ , et  $d$  sont réels et où on a posé

$$e^{i\theta} = \frac{((a+d)i + (c-b))}{((a+d)i - (c-b))} \text{ et } z_0 = \frac{((a-d)i + (c+b))}{((a+d)i + (c-b))},$$

d'où

$$|z_0|^2 = \frac{(a-d)^2 + (c+b)^2}{(a+d)^2 + (c-b)^2} = \frac{(a+d)^2 + (c+b)^2 - 4ad}{(a+d)^2 + (c+b)^2 - 4cb},$$

et par conséquent  $|z_0|^2 < 1$ , car  $-ad < -bc$ .

**THÉORÈME 12.8** *Le groupe  $\Gamma(D)$  des automorphismes du disque unité  $D$  est de la forme suivante :*

$$\Gamma(D) = \left\{ f(z) = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z} \mid |z_0| < 1 \text{ et } \theta \text{ réel} \right\}$$

## 12.3 Représentation d'un ouvert simplement connexe

**THÉORÈME 12.9** *Soit  $U$  un ouvert simplement connexe non vide de  $P^1(\mathbb{C})$ ,  $F$  son complémentaire dans  $P^1(\mathbb{C})$ ,  $D$  le disque unité ouvert.*

- (i)  $P^1(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{C}$  et  $D$  ne sont pas conformément équivalents
- (ii) Si  $F$  contient un point et un seul, alors  $U$  est conformément équivalent à  $\mathbb{C}$
- (iii) Si  $F$  contient au moins deux points, alors  $U$  est conformément équivalent au disque unité  $D$ .

A une équivalence conforme près, il n'y a donc que trois ouverts  $P^1(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{C}$  et  $D$ , ceux dont nous venons justement de déterminer le groupe des automorphismes.

DÉMONSTRATION.

▷ Il est clair tout d'abord que  $P^1(\mathbb{C})$  n'est conformément équivalent ni à  $\mathbb{C}$  ni à  $D$ , qui ne sont compacts ni l'un ni l'autre. De plus si  $f$  est holomorphe  $\mathbb{C} \rightarrow D$ , alors elle est bornée, et par conséquent constante d'après le théorème de Liouville 4.13, et elle n'est donc pas surjective.

▷ Supposons maintenant que  $F$  est réduit à un point nous poserons

$$f_0(u) = \frac{\alpha\zeta(u) + \beta}{\zeta(u) - \zeta(u_0)} \text{ avec } \beta \neq -\alpha\zeta(u_0), \text{ si } F = \{u_0\}, u_0 \neq \infty.$$

et

$$f_0(u) = \alpha + \frac{\beta}{\zeta(u)} \text{ avec } \beta \neq 0, \text{ si } F = \{\infty\}$$

En vertu du théorème 12.4, ce sont des automorphismes de  $P^1(\mathbb{C})$  et par conséquent des isomorphismes de  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{u_0\}$  sur  $\mathbb{C}$ .

▷ Dans le cas où deux points  $u_0$  et  $u_1$  appartiennent à  $F$ , l'un au moins, soit  $u_0$  est différent de  $\infty$ , et comme  $f_0(u_1) \in \mathbb{C}$ , que  $u_1$  soit ou non infini, l'application  $f_0$  applique  $U$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{f_0(u_1)\}$ , et par conséquent  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $\mathcal{O}$  l'image de  $U$  par  $f_0$ , elle est simplement connexe puisque  $f_0$  est continue sur  $U$ . Le théorème 12.14 ci-dessous nous prouve alors que  $\mathcal{O}$  est conformément équivalent à  $D$ , il en est donc de même de  $U$ , puisque  $f_0$  est un isomorphisme de  $U$  sur  $\mathcal{O}$ .

Q.E.D.

Il ne faut pas cependant s'imaginer que dans le cas (iii) il soit facile de déterminer une telle transformation conforme, ce n'est possible explicitement que dans certains cas très particuliers, mais éventuellement importants. On trouvera un exemple en ce sens en annexe H.

**PROPOSITION 12.10** *Pour tout ouvert simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , distinct de  $\mathbb{C}$ , il existe un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ , relativement compact et un isomorphisme  $\Omega \rightarrow \mathcal{O}$ .*

DÉMONSTRATION.

▷ En vertu du corollaire 5.27, si  $a \notin \Omega$ , la fonction  $1/(z-a)$ , admet une primitive sur  $\Omega$ , c'est dire que  $\text{Log}(z-a)$  admet une détermination holomorphe dans  $\Omega$ , soit  $g(z)$ . La fonction  $g$  est injective, car si  $g(z) = g(z')$ , alors  $e^{g(z)} = e^{g(z')}$ , soit  $z-a = z'-a$ .

▷ Soit  $z_0 \in \Omega$ , la fonction  $g$  étant holomorphe, c'est au voisinage de  $z_0$  une application ouverte d'après le théorème 8.5, et par conséquent  $g(\Omega)$  contient un disque  $B_r = \{z \mid |z - g(z_0)| < r\}$ . Considérons le disque translaté  $B_r + 2i\pi$ , il ne contient aucun point de  $g(\Omega)$ , car dans le cas contraire, on aurait  $g(z) = g(z') + 2i\pi$ , et par conséquent  $e^{g(z)} = e^{g(z')}e^{2i\pi}$ , soit  $e^{g(z)} = e^{g(z')}$ , d'où  $z = z'$ , ce qui constitue une contradiction.

▷ Il en résulte que  $\forall z \in \Omega, |g(z) - (g(z_0) + 2i\pi)| \geq r > 0$ , et par conséquent que la fonction

$$h(z) = \frac{1}{g(z) - (g(z_0) + 2i\pi)}$$

est holomorphe injective et bornée dans  $\Omega$ . D'après le théorème 8.5, c'est donc un isomorphisme  $\Omega \rightarrow h(\Omega) = \mathcal{O}$ , où  $h(\Omega)$  est inclus dans le disque de rayon  $1/r$ .

Q.E.D.

REMARQUE 12.11 Dans l'énoncé de cette proposition, l'hypothèse de simple connexité de  $\Omega$  peut être remplacée par celle selon laquelle toutes les fonctions analytiques dans  $\Omega$  y admettent une primitive, où même simplement que  $\text{Log}(z - a)$  admet une détermination holomorphe dans  $\Omega$ .

LEMME 12.12 Soit  $\mathcal{O} \subset D$ , disque unité, un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , contenant l'origine,

$$\mathcal{A} = \{g \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) \mid g \text{ injective, } g(0) = 0, |g(z)| < 1, \forall z \in \mathcal{O}\},$$

et  $f \in \mathcal{A}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i)  $f(\mathcal{O}) = D$

(ii)

$$|f'(0)| \geq |g'(0)|, \forall g \in \mathcal{A} \quad (12.2)$$

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $g \in \mathcal{A}$ , d'après le théorème 8.5, c'est un isomorphisme  $\mathcal{O} \rightarrow g(\mathcal{O})$ . Soit également  $f$  un isomorphisme de  $\mathcal{O}$  sur le disque unité  $D$ , tel que  $f(0) = 0$ , posons alors  $h = g \circ f^{-1}$ , c'est un isomorphisme de  $D$  sur  $g(\mathcal{O})$  tel que  $h(0) = 0$  et  $|h(z)| \leq 1$ . D'après le lemme de Schwartz 6.6, on a  $|h(z)| \leq |z|$  et par conséquent  $|h'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} |h(z)| |z|^{-1} \leq 1$  d'où  $|g'(0)| = |f'(0)| |h'(0)| \leq |f'(0)|$ .

▷ Réciproquement, raisonnons par l'absurde et supposons que (ii) soit vérifié mais que (i) ne le soit pas, c'est-à-dire qu'il existe  $a \in D \setminus f(\mathcal{O})$ . La fonction  $f$  est un isomorphisme  $\mathcal{O} \rightarrow f(\mathcal{O}) \subset D$ , et comme  $|a| < 1$ , d'après le théorème 12.8, la fonction  $u(z) = (f(z) - a) / (1 - \bar{a}f(z))$  est également un isomorphisme  $\mathcal{O} \rightarrow u(\mathcal{O}) \subset D \setminus \{0\}$ . Comme  $u$  est continue,  $u(\mathcal{O})$  est simplement connexe et comme il ne contient pas l'origine, en vertu du corollaire 5.27 le Logarithme y admet une détermination continue et la fonction

$$F(z) = \text{Log} \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a}f(z)};$$

est holomorphe dans  $\mathcal{O}$ ; de plus elle est injective, et comme  $|u(z)| < 1$ , on aura  $\Re F(z) < 0$ .

▷ Posons alors

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}};$$

on aura  $\Re(F(z) + \overline{F(0)}) < 0$ , et par conséquent  $g$  est holomorphe, de plus  $g(0) = 0$  et  $g$  est injective, en effet si  $g(z) = g(z')$ , alors

$$(F(z) - F(0))(F(z') + \overline{F(0)}) = (F(z') - F(0))(F(z) + \overline{F(0)}),$$

d'où  $F(z)\overline{F(0)} - F(0)F(z') = F(z')\overline{F(0)} - F(0)F(z)$ , soit  $(F(z) - F(z'))(\overline{F(0)} + F(0)) = 0$ .

▷ Enfin, on a  $|g(z)| < 1$ , en effet, si  $F(z) = \alpha + i\beta$  et  $F(0) = \gamma + i\delta$ ,

$$\begin{aligned} |F(z) - F(0)|^2 &= |\alpha + i\beta - \gamma - i\delta|^2 = |\alpha - \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2 \\ \left| \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}} \right|^2 &= \frac{|\alpha + i\beta - \gamma - i\delta|^2}{|\alpha + i\beta + \gamma - i\delta|^2} = \frac{|\alpha - \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2}{|\alpha + \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2} \end{aligned}$$

or  $|\alpha - \gamma| \leq |\alpha| + |\gamma| = |\alpha + \gamma|$ , puisque  $\alpha$  et  $\gamma$  sont de même signe, l'égalité étant exclue puisque  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas nuls. Il en résulte que  $\left| \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}} \right|^2 > \frac{|\alpha - \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2}{|\alpha + \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2} > \frac{|\alpha - \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2}{|\alpha - \gamma|^2 + |\beta - \delta|^2} = 1$ , soit  $|g(z)| < 1$ .

▷ On a donc prouvé que  $g \in \mathcal{A}$ . Montrons enfin que  $|g'(0)| > |f'(0)|$ , ce qui constituera une contradiction. On aura

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{f'(z)(1 - \bar{a}f(z)) + \bar{a}f'(z)(f(z) - a)}{(1 - \bar{a}f(z))^2} \frac{1 - \bar{a}f(z)}{f(z) - a} \\ F'(0) &= -\frac{f'(0) - |a|^2 f'(0)}{a} = f'(0) \frac{|a|^2 - 1}{a} \end{aligned}$$

et

$$g'(z) = \frac{F'(z)(F(z) + \overline{F(0)}) - F'(z)(F(z) - F(0))}{(F(z) + \overline{F(0)})^2}$$

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0) + \overline{F(0)}} = f'(0) \frac{|a|^2 - 1}{a} \frac{1}{\text{Log} -a + \overline{\text{Log} -a}}$$

$$= f'(0) \frac{|a|^2 - 1}{a} \frac{1}{2 \text{Log} |a|} = f'(0) \frac{1 - |a|^2}{2a \text{Log} \frac{1}{|a|}}$$

d'où

$$\frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - |a|^2}{2|a| \text{Log} \frac{1}{|a|}} > 1,$$

car si

$$u(t) = \frac{1 - t^2}{t} - 2 \text{Log} \frac{1}{t}$$

alors

$$u'(t) = \frac{-t^2 - 1}{t^2} + \frac{2}{t} = -1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^2} (t^2 - 2t + 1) = -\frac{1}{t^2} (t - 1)^2 < 0$$

ce qui prouve que  $u$  est décroissante, or  $u(1) = 0$ , d'où  $u(t) > 0$  pour  $0 < t < 1$ .

Q.E.D.

**REMARQUE 12.13** De même qu'à la remarque 12.11 on peut remplacer l'hypothèse selon laquelle  $\mathcal{O}$  est simplement connexe par celle selon laquelle toute fonction analytique sur  $\mathcal{O}$  y admet une primitive. Il est simplement nécessaire d'en déduire que si  $u$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}$  sur son image, alors toute fonction analytique sur  $u(\mathcal{O})$  y admet également une primitive. Posons  $v = u^{-1}$ , et considérons la fonction  $\varphi$  analytique sur  $u(\mathcal{O})$ . La fonction  $\psi = \varphi \circ u$  est analytique sur  $\mathcal{O}$ , ainsi que  $h = \psi u'$ ; la fonction  $h$  admet donc une primitive, soit  $H$ . Considérons maintenant la fonction  $H \circ v$ , elle vérifie

$$(H \circ v)' = (H' \circ v) v' = (\psi u') \circ v v' = \psi \circ v u' \circ v v' = \psi \circ v (u \circ v)' = \varphi,$$

c'est donc une primitive de  $\varphi$ .

**THÉORÈME 12.14** Tout ouvert simplement connexe  $\mathcal{O}$ , distinct de  $\mathbb{C}$ , est isomorphe au disque unité  $D$ .

DÉMONSTRATION.

► Selon la proposition 12.10, nous savons déjà que  $\Omega$  est isomorphe à un ouvert relativement compact  $\mathcal{O}$ . D'après le lemme 12.12, quitte à opérer si nécessaire une translation, il nous suffira de prouver qu'il existe  $f \in \mathcal{A}$  telle que  $|f'(0)| \geq |g'(0)| \forall g \in \mathcal{A}$ . Considérons l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{A} \mid |f'(0)| \geq 1\}$$

- Il n'est pas vide car comme  $\mathcal{O} \subset D$ , la fonction  $\zeta : z \rightarrow z$  appartient à  $\mathcal{B}$ .
- Il est borné dans  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$  car  $\forall K \subset \mathcal{O}$ ,  $\sup_{z \in K} |f(z)| \leq 1$ ,  $\forall f \in \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$
- Il est fermé dans  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$  car tout d'abord, si  $f_n \rightarrow f$  alors  $f(0) = \lim f_n(0) = 0$ . De plus, d'après la proposition 10.3, on aura  $f'_n \rightarrow f'$ , d'où  $|f'(0)| = \lim |f'_n(0)| \geq 1$ . En vertu du corollaire 10.6, la fonction  $f$  est également injective, en effet les  $f_n$  sont injectives et  $f$  n'est pas constante puisque  $f'(0) \neq 0$ . Enfin comme  $|f_n(z)| < 1$  sur  $\mathcal{O}$ , on aura  $|f(z)| \leq 1$ , mais en vertu du principe du maximum 6.3, on ne peut avoir  $|f(z)| = 1$  pour un point  $z$  de  $\mathcal{O}$ , puisque  $f$  n'est pas constante, et on aura donc  $|f(z)| < 1$ .

► Du théorème de Montel 10.9, il résulte alors que  $\mathcal{B}$  est compact, et comme l'application  $g \rightarrow |g'(0)| : \mathcal{B} \subset \mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, elle atteint sa borne supérieure, ce qui termine la démonstration du théorème.

Q.E.D.



REMARQUE 12.15 *Ce que nous pouvons déduire des remarques 12.11 et 12.13, c'est que le théorème s'applique si l'hypothèse de simple connexité de  $\mathcal{O}$  est remplacée par celle selon laquelle toute fonction analytique sur  $\mathcal{O}$  admet une primitive ; c'est bien sûr une conséquence de la simple connexité en vertu du corollaire 5.27, mais c'est en réalité équivalent, ainsi que nous allons le voir au paragraphe 12.4.*

### 12.3.1 Prolongement au bord

Un aspect essentiel a été jusqu'ici négligé : si  $f$  est une transformation conforme du disque unité  $D$  sur l'ouvert  $\Omega$ , est-il possible de la prolonger en une application continue  $\bar{D} \rightarrow \bar{\Omega}$  ? C'est là une question difficile dont la réponse dépend crucialement de la géométrie de  $\partial\Omega$ .

THÉORÈME 12.16 (Carathéodory) *Pour que les transformations conformes du disque unité  $D$  sur l'ouvert  $\Omega$  borné se prolongent en des homéomorphismes  $\bar{D} \rightarrow \bar{\Omega}$ , il faut et il suffit que  $\partial\Omega$  soit localement connexe, c'est-à-dire que l'intersection de  $\partial\Omega$  avec tout disque de rayon suffisamment petit, soit connexe.*

## 12.4 Retour sur la simple connexité

PROPOSITION 12.17 *Soit  $\mathcal{O}$  ouvert simplement connexe, alors  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  est connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  ne soit pas connexe, c'est un fermé de  $P^1(\mathbb{C})$  et par conséquent l'union de deux fermés disjoints non vides  $A$  et  $B$  de  $P^1(\mathbb{C})$ . L'un d'entre eux, soit par exemple  $A$ , contient le point à l'infini de  $P^1(\mathbb{C})$ ,  $B$  est alors fermé et borné et donc compact dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\mathcal{O} \cup B = P^1(\mathbb{C}) \setminus A$ ,  $\mathcal{O} \cup B$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant  $B$ . Selon le lemme 10.18, il existe un nombre fini  $M$  de polygones  $Q_m$  tels que  $B \subset \bigcup_{m=1, M} Q_m \subset \mathcal{O} \cup B$  et

$$\frac{1}{2i\pi} \sum_{m=1, M} n(\partial Q_m; z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=1, M} \int_{\partial Q_m} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1 \quad \forall z \in \mathcal{O}.$$

Il en résulte que pour un  $m$  au moins  $n(\partial Q_m; z) \neq 0$ , ce qui implique que  $\mathcal{O}$  n'est pas simplement connexe. On a donc montré que si  $\mathcal{O}$  est simplement connexe, alors  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  est connexe.

Q.E.D.

PROPOSITION 12.18 *Si  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  est connexe, alors toute fonction analytique dans  $K$  admet une primitive.*

DÉMONSTRATION. Selon le corollaire 10.19 une fonction analytique  $f$  dans  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  est limite uniforme d'une suite  $p_n$  de polynômes. Soit alors un lacet  $\gamma$  dans  $K$ , comme  $p_n$  est analytique dans  $\mathbb{C}$ , selon le théorème de Cauchy 5.4  $\int_{\gamma} p_n(\zeta) d\zeta = 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$  et par conséquent  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{O}$ . Il en résulte d'après la proposition 5.26 que  $f$  admet une primitive dans  $\mathcal{O}$ .

Q.E.D.

PROPOSITION 12.19 *Si toute fonction analytique dans  $\mathcal{O}$  admet une primitive, alors  $\mathcal{O}$  est homéomorphe au disque unité  $D$ .*

DÉMONSTRATION. Dans le cas où  $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ , la fonction  $z(1 + |z|)^{-1}$  constitue un tel homéomorphisme, et dans le cas où  $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ , selon la remarque 12.15,  $\mathcal{O}$  est isomorphe à  $D$ .

Q.E.D.

PROPOSITION 12.20 *Si  $\mathcal{O}$  est homéomorphe au disque unité, alors il est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\gamma$  un lacet dans  $\mathcal{O}$ , et  $u$  un homéomorphisme :  $\mathcal{O} \rightarrow D$ , considérons le lacet  $\sigma = u \circ \gamma$  dans  $D$ , il est homotope à un point soit  $\lambda$  car  $D$  est simplement connexe. Il existe donc une application continue  $\Lambda : [0, 1]^2 \rightarrow D$  telle que  $\Lambda(s, 0) = \sigma(s)$  et  $\Lambda(s, 1) = \lambda$  pour  $s \in [0, 1]$  ainsi que  $\Lambda(0, t) = \Lambda(1, t) \forall t \in [0, 1]$ . Posons alors  $\Sigma = u^{-1} \circ \Lambda$ , on aura  $\Sigma(s, 0) = u^{-1} \circ \sigma(s) = \gamma(s)$  et  $\Sigma(s, 1) = u^{-1}(\lambda)$  pour  $s \in [0, 1]$  ainsi que  $\Sigma(0, t) = u^{-1} \circ \Lambda(0, t) = u^{-1} \circ \Lambda(1, t) = \Sigma(1, t) \forall t \in [0, 1]$ . Il en résulte que  $\gamma$  est homotope à  $u^{-1}(\lambda)$ .

*Q.E.D.*

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME 12.21 (i) *Si  $\mathcal{O}$  est connexe et si toute fonction analytique dans  $\mathcal{O}$  admet une primitive, alors  $\mathcal{O}$  est simplement connexe.*



(ii) *Si  $\mathcal{O}$  est connexe alors il est simplement connexe si et seulement si  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}$  est connexe.*



# Chapitre 13

## Les fonctions harmoniques

**DÉFINITION 13.1** On dit que la fonction  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique dans  $\Omega$  si  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ .

**PROPOSITION 13.2** La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f = P + iQ$ , holomorphe dans  $\Omega$ , on aura  $\partial \bar{f} / \partial \bar{z} = 0$ , et par conséquent d'après (4.7)

$$\Delta \tilde{P} + i \Delta \tilde{Q} = \Delta \tilde{f} = 4 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0,$$

d'où il résulte que  $\Delta \tilde{P} = \Delta \tilde{Q} = 0$ .

Q.E.D.

**THÉORÈME 13.3** Si une fonction  $\tilde{u}$  est harmonique dans un ouvert simplement connexe  $\Omega$ , alors c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

**DÉMONSTRATION.** Considérons la fonction  $\partial \tilde{u} / \partial z$ , elle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{1}{4} \Delta \tilde{u} = 0,$$

et par conséquent,  $\partial \tilde{u} / \partial z$  est holomorphe dans  $\Omega$ ; d'après le corollaire 5.27, elle y admet donc une primitive, soit  $f$ , holomorphe. On aura  $f = P + iQ$  et

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = f' = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y},$$

et par conséquent, qu'à une constante additive réelle près  $\tilde{u} = 2 \Re f$ .

Q.E.D.

Dans le cas d'un ouvert non simplement connexe, la situation est plus complexe.

**LEMME 13.4** Si la fonction  $u$  est harmonique dans l'ouvert  $\Omega$ , elle vérifie la propriété de moyenne.

**DÉMONSTRATION.** Soient  $a \in \Omega$ , et  $r > 0$  tels que  $B_r(a) \subset \Omega$ . D'après le théorème 13.3, il existe  $f$  holomorphe dans  $B_r(a)$ , dont  $u$  soit la partie réelle; en vertu du lemme 6.2,  $f$  vérifie la propriété de moyenne dans  $B_r(a)$ , et par conséquent sa partie réelle  $u$ . Il en résulte que  $u$  vérifie la propriété de moyenne dans  $\Omega$ .

Q.E.D.

### 13.1 Fonctions harmoniques dans un disque

Soit  $u$  harmonique dans le disque  $B_\rho$ , nous venons de voir au théorème 13.3 que

$$u = \Re g = \Re \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n z^n + \overline{a_n} \overline{z}^n),$$

où on peut bien entendu supposer  $a_0$  réel. Pour  $r < \rho$ , on aura

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n (a_n e^{in\theta} + \overline{a_n} e^{-in\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} r^n a_n e^{in\theta} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_0 + \overline{a_0}) + \frac{1}{2} \sum_{n \leq -1} r^{-n} \overline{a_{-n}} e^{in\theta} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(r) e^{in\theta} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} b_0(r) &= a_0 \\ b_n(r) &= \frac{r^n a_n}{2}, \quad n \geq 1 \\ b_n(r) &= \frac{r^{-n} \overline{a_{-n}}}{2}, \quad n \leq -1 \end{aligned}$$

Mais par ailleurs

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(r) e^{in\theta}, \quad \text{où } b_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) e^{-in\tau} d\tau$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) e^{-in\tau} d\tau \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) r^{-n} e^{-in\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) (re^{i\tau})^{-n} d\tau \end{aligned}$$

et par conséquent, pour  $|z| < r$ ,

$$\begin{aligned} g(z) &= a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n z^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) e^{-in\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} z^n \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) (re^{i\tau})^{-n} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{z}{re^{i\tau}} \right)^n \right) d\tau, \end{aligned}$$

On aura

$$1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{z}{re^{i\tau}} \right)^n = 1 + 2 \frac{z/(re^{i\tau})}{1 - z/(re^{i\tau})} = 1 + \frac{2z}{re^{i\tau} - z} = \frac{re^{i\tau} + z}{re^{i\tau} - z},$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) \frac{re^{i\tau} + z}{re^{i\tau} - z} d\tau,$$

et

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \Re \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) \frac{(re^{i\tau} + z)(re^{-i\tau} - \bar{z})}{|re^{i\tau} - z|^2} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\tau} - z|^2} d\tau. \end{aligned}$$

On note

$$P_r(\tau; z) = \Re \frac{re^{i\tau} + z}{re^{i\tau} - z} = \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\tau} - z|^2}, \quad (13.1)$$

$P_r$  est appelé *noyau de Poisson*. Nous avons donc démontré le

**THÉORÈME 13.5** Si  $u$  est harmonique dans le disque de rayon  $\rho > r$ ,  $\forall |z| < r$ , on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) P_r(\tau; z) d\tau. \quad (13.2)$$

Notons que si on prend pour  $u$  la fonction constante égale à 1, qui est bien harmonique, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\tau} - z|^2} d\tau = 1 \quad (13.3)$$

## 13.2 Problème de Dirichlet

Au paragraphe précédent, nous avons montré qu'une fonction harmonique dans un disque admettait une représentation à l'aide du noyau de Poisson, on peut se demander si, réciproquement il est possible de déterminer une fonction harmonique prenant des valeurs données sur le bord d'un disque.

**LEMME 13.6** Si une fonction  $u$  continue sur  $\overline{B_r}$  vérifie la propriété de moyenne et s'annule sur son bord  $C_r$ , elle est nulle dans  $B_r$ .

**DÉMONSTRATION.** Comme  $u$  vérifie la propriété de moyenne, elle est sujette au principe du maximum, d'après le lemme 6.2; de plus  $u$  étant continue,  $|u|$  l'est également sur le disque compact, et par conséquent y atteint son maximum, soit  $M$ . Si  $M \neq 0$ , c'est qu'il n'est pas atteint sur  $C_r$ , et par conséquent que  $|u|$  est constante, c'est-à-dire en fait nulle.

Q.E.D.

**THÉORÈME 13.7** Etant donnée une fonction  $g$  continue définie sur le cercle  $C_r$  de rayon  $r$  centré à l'origine, il existe une et une seule fonction harmonique  $u$  dans le disque  $B_r$ , continue sur  $\overline{B_r}$ , dont la trace sur  $C_r$  soit  $g$ .

**DÉMONSTRATION.**

▷ Commençons par démontrer l'unicité, et supposons à cet effet que  $u$  est harmonique dans  $B_r$  et nulle sur  $C_r$ . Selon le lemme 13.4,  $u$  vérifie la propriété de moyenne, et par conséquent est identiquement nulle d'après le lemme 6.2.

▷ Soit donc  $g(\theta)$  donnée continue sur  $C_r$ , si c'est la trace d'une fonction harmonique  $u(z)$  définie dans le disque, alors nécessairement, on aura

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) P_r(\tau; z) d\tau. \quad (13.4)$$

Le problème n'est cependant pas résolu, car il faut montrer qu'effectivement,  $u$  est bien harmonique et que  $u(re^{i\theta}) = f(\theta)$ .

▷ On sait tout d'abord que, selon (13.1)

$$P_r(\tau; z) = \Re e \frac{r e^{i\tau} + z}{r e^{i\tau} - z}$$

et que par conséquent  $u(z)$  est la partie réelle de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{r e^{i\tau} + z}{r e^{i\tau} - z} d\tau.$$

A l'évidence,  $f$  est holomorphe, et par conséquent, en vertu de la proposition 13.2,  $u$  est harmonique.

▷ On aura alors, en vertu de la formule (13.3),

$$\begin{aligned} u(z) - g(\tau_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\tau) - g(\tau_0)) P_r(\tau; z) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} (g(\tau) - g(\tau_0)) P_r(\tau; z) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau - \tau_0| > \eta} (g(\tau) - g(\tau_0)) P_r(\tau; z) d\tau \end{aligned}$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , on aura d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} (g(\tau) - g(\tau_0)) P_r(\tau; z) d\tau \right| &\leq \sup_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} |g(\tau) - g(\tau_0)| \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} P_r(\tau; z) d\tau \\ &\leq \sup_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} |g(\tau) - g(\tau_0)|, \end{aligned}$$

et comme  $g$  est continue, pour  $\eta$  suffisamment petit, on aura

$$\sup_{|\tau - \tau_0| \leq \eta} |g(\tau) - g(\tau_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais d'autre part,  $\eta$  ayant été fixé, on aura

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\tau - \tau_0| > \eta} (g(\tau) - g(\tau_0)) P_r(\tau; z) d\tau \right| \leq 2 \sup_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |g(\tau)| \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\tau - \tau_0| > \eta} P_r(\tau; z) d\tau \right|,$$

qui tend vers 0 quand  $z \rightarrow r e^{i\tau_0}$ , selon le lemme 13.8 ci-dessous. Il en résulte que  $u(r e^{i\tau_0}) = f(\tau_0)$ .

Q.E.D.

LEMME 13.8 On a

$$\lim_{z \rightarrow r e^{i\tau_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau - \tau_0| > \eta} P_r(\tau; z) d\tau.$$

DÉMONSTRATION. Avec  $z = \rho e^{i\alpha}$ ,  $\rho < r$  et  $|\alpha - \tau_0| \leq \eta/2$ , on aura  $|\alpha - \tau| \geq \eta/2$  dès que vérifie  $|\tau - \tau_0| > \eta$ . Il en résulte qu'alors

$$|r e^{i\tau} - z| = |r e^{i(\tau - \alpha)} - \rho| = |r \cos(\tau - \alpha) - \rho + i \sin(\tau - \alpha)| \geq r \sin |\alpha - \tau|,$$

d'où

$$P_r(\tau; z) \leq \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 \sin^2 \eta/2},$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\tau - \tau_0| > \eta} P_r(\tau; z) d\tau \leq \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 \sin^2 \eta/2},$$

qui tend vers 0 quand  $\rho \rightarrow r$ .

Q.E.D.

Soit alors  $\Omega$  un ouvert simplement connexe, dont la frontière est localement connexe, alors d'après le théorème **12.14**, nous savons qu'il existe une transformation conforme  $f : D \rightarrow \Omega$ , où  $D$  est le disque unité ouvert, et selon le théorème **12.16**, qu'elle se prolonge en une application continue :  $\bar{D} \rightarrow \bar{\Omega}$ . Comme  $f$  est bijective :  $D \rightarrow \Omega$ , il en résulte que  $f(\partial D) = \partial\Omega$ .

Donnons nous  $g$  continue sur  $\partial\Omega$ , et cherchons  $v$  harmonique dans  $\Omega$ , continue sur  $\bar{\Omega}$ , telle que  $v|_{\partial\Omega} = g$ . Selon le théorème **13.7**, à l'aide du noyau de Poisson nous savons tout d'abord déterminer  $u$  harmonique dans  $D$  vérifiant  $u|_{\partial D} = g \circ f|_{\partial D}$ , il suffit alors de poser  $v(\zeta) = u \circ f^{-1}(\zeta)$ . Plus précisément, selon la formule (13.4), on aura

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g \circ f(e^{i\tau}) P_1(\tau; f^{-1}(\zeta)) d\tau. \quad (13.5)$$

Sous réserve d'avoir déterminé la transformation conforme  $f$  on a donc trouvé une formule qui fournit la *solution explicite* du problème de Dirichlet dans un ouvert simplement connexe. 



## Application I

# Calculs d'intégrales

L'un des succès les plus apparents de l'introduction des fonctions de variable complexe réside dans la découverte de formules explicites pour certaines intégrales définies de variable réelle. On trouvera ci-dessous un certain nombre d'exemples à cet égard. De façon générale, trois types de difficulté se présentent : le calcul des résidus et la prise en compte des singularités sur le chemin d'intégration, la détermination du comportement à l'infini, le choix et le traitement des coupures.

### I.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ ,

On note  $R$  est une fonction rationnelle,  $\gamma_1$  le cercle centré à l'origine de rayon 1 parcouru dans le sens direct ; on suppose que  $R$  n'y a pas de pôle. On aura

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) ie^{it} dt \\ &= \int_{\gamma_1} R\left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\gamma_1} f(z) dz, \end{aligned}$$

où

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right).$$

Si on note  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des pôles de  $f(z)$  de module inférieur à 1, comme  $f$  n'a pas de pôle sur  $\gamma_1$ , selon le théorème des résidus,

$$I = 2\pi \sum_{p \in \mathcal{Q}} \text{Res}(f(z); p).$$

#### Exemple 1

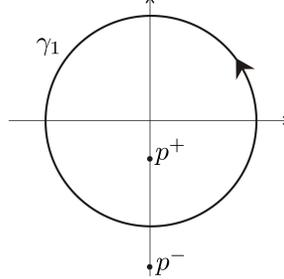
Un cas simple est le suivant :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = 2i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2ia + (e^{it} - e^{-it})} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{2iae^{it} + (e^{2it} - 1)} = 2 \int_{\gamma_1} \frac{dz}{2iaz + (z^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Supposons (par exemple) que  $a > 1$ , les racines de  $2iaz + (z^2 - 1)$  sont données par

$$p^\pm = -ia \pm i\sqrt{a^2 - 1},$$

dont seule  $p^+$  appartient au disque unité car  $a-1 < \sqrt{a^2-1} < a$ . Calculons le résidu en ce point : d'après



la formule (7.5),

$$\text{Res} \left( \frac{1}{2iaz + (z^2 - 1)}; p^+ \right) = \frac{1}{2ia + 2p^+} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2 - 1}},$$

d'où

$$I = 4i\pi \text{Res} \left( \frac{1}{2iaz + (z^2 - 1)}; p^+ \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

## I.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$

Soit  $R$  une fonction rationnelle sans pôle réel, intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} R(x) dx.$$

On note  $a$  le point  $(r, 0)$  et  $\sigma_a$  le segment qui relie  $-a$  à  $a$  parcouru dans le sens des réels croissants. On note également  $\delta_r^+$  le demi-cercle de diamètre  $\sigma_a$  situé dans le demi-plan des imaginaires positifs et parcouru dans le sens direct. On note enfin  $\delta_r^-$  le demi-cercle analogue situé dans le demi-plan des imaginaires négatifs, parcouru dans le sens rétrograde. En notant  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pôles de  $R$  et

$$\mathcal{Q}_r^\pm = \{p \in \mathcal{P} \mid |p| < r, \pm \Im p > 0\},$$

on aura

$$\int_{\sigma_a \cup \delta_r^\pm} R(z) dz = \pm 2i\pi \sum_{p \in \mathcal{Q}_r^\pm} \text{Res}(R(z); p)$$

d'où

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \pm 2i\pi \sum_{p \in \mathcal{Q}_r^\pm} \text{Res}(R(z); p) - \int_{\delta_r^\pm} R(z) dz \right).$$

On suppose alors qu'il est possible de choisir  $\eta = \pm$  de telle sorte que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\delta_r^\eta} R(z) dz = 0,$$

dans ces conditions on aura

$$I = 2i\pi\eta \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{p \in \mathcal{Q}_r^\eta} \text{Res}(R(z); p).$$

Le lemme suivant qui découle immédiatement du théorème de convergence dominée fournit en particulier des conditions suffisantes à cet effet :

LEMME I.1 Si les fonctions  $F_r(\theta) : \theta \rightarrow r |f(re^{i\theta})|$  sont majorées uniformément par une fonction intégrable sur  $]\theta_1, \theta_2[$  et si  $F_r(\theta) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$  pour presque tout  $\theta \in ]\theta_1, \theta_2[$ , alors

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r^{\theta_1, \theta_2}} f(z) dz = 0,$$

où  $\gamma_r^{\theta_1, \theta_2}$  est l'arc de cercle de rayon  $r$  dans le secteur limité par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Il existe bien entendu un lemme analogue pour  $r \rightarrow 0$ .

### Exemple 2

Calculons

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Les pôles sont les  $p_j = e^{i\pi(1+2j)/6}$ ,  $j = 0, 5$ , dont les trois premiers sont de partie imaginaire positive et on a

$$\text{Res} \left( \frac{1}{1+z^6}; p_j \right) = \frac{1}{6p_j^5} = \frac{1}{6} \frac{p_j}{p_j^6} = -\frac{p_j}{6}.$$

Choisissons alors  $\delta_r^+$ , on aura

$$\int_{\delta_r^+} \frac{dz}{1+z^6} = \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{1+r^6e^{6it}} dt \rightarrow 0 \text{ quand } r \rightarrow \infty,$$

d'où

$$\begin{aligned} J &= -\frac{i\pi}{6} \sum_{k=0,2} p_k = -\frac{i\pi}{6} (e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{5i\pi/6}) = -\frac{i\pi}{6} (e^{i\pi/6} + i - e^{-i\pi/6}) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \left( \frac{e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}}{2i} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Notons qu'on aurait pu indifféremment choisir  $\delta_r^-$ .

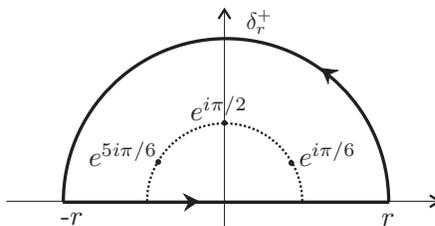


FIGURE I.1 – Exemple 2

**Exemple 3**

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2i\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{p \in \mathcal{Q}_r} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z^2 + 1)^3}; p \right);$$

Ici l'unique pôle de partie imaginaire positive est situé en  $z = i$ , mais c'est un pôle d'ordre 3, ce qui oblige à effectuer un développement en série de Laurent au voisinage de 0 pour la variable  $w = z - i$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + 1)^3} &= \frac{1}{((w + i)^2 + 1)^3} = \frac{1}{(w^2 + 2wi)^3} \\ &= \frac{1}{w^3(w + 2i)^3} = -\frac{1}{8iw^3} \left(1 + \frac{w}{2i}\right)^{-3} = \frac{i}{8w^3} \left(1 - 3\frac{w}{2i} - 3\frac{w^2}{2} + o(w^2)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z^2 + 1)^3}; i \right) = -\frac{3i}{16} \text{ et finalement } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

On peut également déterminer le résidu à l'aide de la formule (7.6) :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(z - i)^3}{(z^2 + i)^3} \right)^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(z + i)^3} \right)^{(2)} = \frac{-3}{2} \left( \frac{1}{(z + i)^4} \right)' = \frac{12}{2} \left( \frac{1}{(z + i)^5} \right)$$

d'où

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z^2 + 1)^3}; i \right) = \frac{12}{2} \left( \frac{1}{(2i)^5} \right) = \frac{6}{32} \left( \frac{1}{i} \right) = -\frac{3i}{16}$$

**I.3 Intégrales de la forme  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$** 

Le théorème de convergence dominée peut être insuffisant pour réaliser le passage à la limite relatif à la portion de contour tendant vers l'infini. Un résultat particulièrement utile à cet égard est le suivant :

**LEMME I.2 (de Jordan)** *Si  $f$  est holomorphe dans le demi-plan des complexes de partie imaginaire positive, si  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  et  $a > 0$ , alors*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r^+} f(z) e^{iaz} dz = 0, \text{ où } \gamma_r^+(t) = re^{it}, t = 0, \pi.$$

**DÉMONSTRATION.** Remarquons tout d'abord que

$$\left| \int_{\gamma_r^+} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_{\gamma_r^+} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| = \int_{\gamma_r^+} |f(z)| e^{-a \operatorname{Im} z} |dz|,$$

soit

$$\left| \int_{\gamma_r^+} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq 2 \sup_{t \in [0, \pi]} |f(re^{it})| \int_0^{\pi/2} e^{-ar \sin t} r dt,$$

mais  $\sin t$  est convexe sur  $[0, \pi/2]$ , et par conséquent  $\sin t \geq 2t/\pi$ , d'où

$$\int_0^{\pi/2} e^{-ar \sin t} r dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2art/\pi} r dt = \frac{\pi}{2a} \int_0^{ra} e^{-u} du = \frac{\pi}{2a} (1 - e^{-ra}) \leq \frac{\pi}{2a}. \quad (\text{I.1})$$

Q.E.D.

**Exemple 4**

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \Re \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx \\ &= \Re \left( i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2+1}; i \right) \right). \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2+1}; i \right) = \frac{1}{2ie}, \text{ d'où } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

**Exemple 5**Pour  $0 < \lambda < 1$ , calculons

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{ix} dx,$$

et notons

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [r, R], \text{ et } \gamma_2(t) = R e^{it}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma_3(t) = -it, \quad t \in [-R, -r] \text{ ainsi que } \gamma_4(t) = r e^{i(\pi/2-t)}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

En choisissant la détermination principale du logarithme (voir la formule (8.9)), la fonction  $z^{\lambda-1} e^{iz}$  possède une coupure le long de l'axe réel négatif, et comme elle n'a pas de pôle, on aura

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4} z^{\lambda-1} e^{iz} dz = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} z^{\lambda-1} e^{iz} dz &= \int_r^R t^{\lambda-1} e^{it} dt \\ \int_{\gamma_3} z^{\lambda-1} e^{iz} dz &= \int_{\gamma_3} e^{(\lambda-1)\operatorname{Log} z} e^{iz} dz = -i \int_{-R}^{-r} e^{(\lambda-1)(\operatorname{Log}|t|+i\pi/2)} e^t dt \\ &= -i \int_r^R e^{(\lambda-1)(\operatorname{Log} s+i\pi/2)} e^{-s} ds = -ie^{i(\lambda-1)\pi/2} \int_r^R s^{\lambda-1} e^{-s} ds \\ &= -e^{\lambda i\pi/2} \int_r^R s^{\lambda-1} e^{-s} ds, \end{aligned}$$

Or quand  $r \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim \int_{\gamma_1} z^{\lambda-1} e^{iz} dz &= \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{it} dt \\ \lim \int_{\gamma_3} z^{\lambda-1} e^{iz} dz &= -e^{\lambda i\pi/2} \int_0^{\infty} s^{\lambda-1} e^{-s} ds \\ \lim \int_{\gamma_2} z^{\lambda-1} e^{iz} dz &= \lim \int_{\gamma_4} z^{\lambda-1} e^{iz} dz = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{ix} dx = e^{\lambda i \pi / 2} \int_0^{\infty} s^{\lambda-1} e^{-s} ds = e^{\lambda i \pi / 2} \Gamma(\lambda).$$

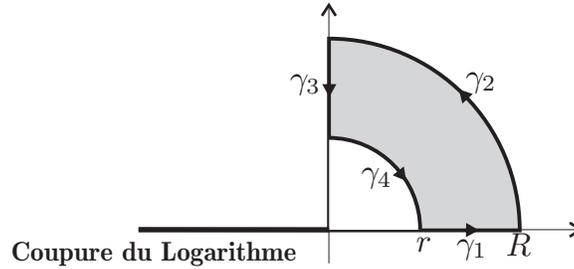


FIGURE I.2 – Exemple 5

### Exemple 6

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= \frac{1}{4i} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_r^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{4i} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix} + e^{ix}}{x} dx + \int_r^{+\infty} \frac{e^{ix} + e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right), \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t, \quad t \in [r, R] \text{ et } \gamma_2(t) = R e^{it}, \quad t \in [0, \pi] \\ \gamma_3(t) &= t, \quad t \in [-R, -r] \text{ ainsi que } \gamma_4(t) = r e^{i(\pi-t)}, \quad t \in [0, \pi], \text{ et} \\ \gamma_5(t) &= r e^{i(\pi-t)}, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

et on aura

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

d'où, en vertu du lemme de Jordan I.2,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \int_{\gamma_1 \vee \gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\frac{1}{2i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{z} = \sum_{n \geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!},$$

est bornée (et même holomorphe) d'où

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz, \text{ et comme } -2i\pi = \int_{\gamma_5} \frac{1}{z} dz = 2 \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz,$$

en vertu de la formule du changement de variable (4.11), on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

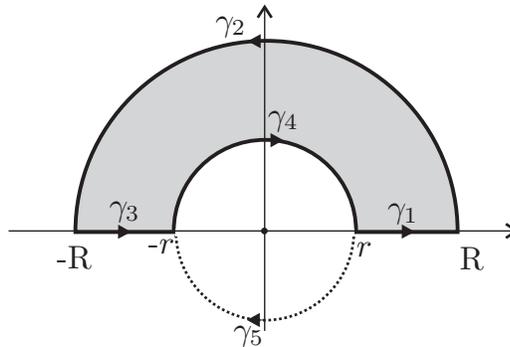


FIGURE I.3 – Exemple 6

**Exemple 7**

Soit à calculer

$$I = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{tZ}}{t - \nu} dt,$$

avec  $\Re \nu > 0, \Im \nu > 0, \Re Z < 0, \Im Z > 0$ . On pose

$$\gamma_1(t) = t, t = 0, R \text{ et } \gamma_2(\tau) = R e^{i\tau}, \tau = 0, \theta \text{ ainsi que } \gamma_3(t) = -t e^{i\theta}, t = -R, 0,$$

où

$$0 < \theta < \pi/2, \operatorname{tg} \theta > \Im \nu / \Re \nu, R > |\nu|$$

On aura

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3} \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta - \nu} d\zeta = 2i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta - \nu}; \nu \right) = 2i\pi e^{\nu Z}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta - \nu} d\zeta &= \int_0^R \frac{e^{tZ}}{t - \nu} dt \\ \int_{\gamma_2} \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta - \nu} d\zeta &= i \int_0^{\theta} \frac{R e^{i\tau Z}}{R e^{i\tau} - \nu} e^{i\tau} d\tau \rightarrow 0 \text{ car } \Im Z > 0 \\ \int_{\gamma_3} \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta - \nu} d\zeta &= -e^{i\theta} \int_{-R}^0 \frac{e^{-te^{i\theta} Z}}{-te^{i\theta} - \nu} dt = -e^{i\theta} \int_0^R \frac{e^{se^{i\theta} Z}}{se^{i\theta} - \nu} ds, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{tZ}}{t-\nu} dt = -\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-tZ}}{\zeta-\nu} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} \frac{e^{\zeta Z}}{\zeta-\nu} d\zeta - ie^{\nu Z} \\ &= -\frac{e^{i\theta}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{se^{i\theta}Z}}{se^{i\theta}-\nu} s ds - ie^{\nu Z}. \end{aligned}$$

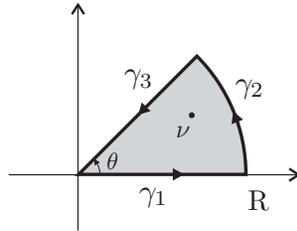


FIGURE I.4 - Exemple 7

#### I.4 La formule de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

On pose  $\alpha = \sqrt{\pi}i$  et  $g(z) = e^{-z^2} / (1 + e^{-2\alpha z})$ , on aura

$$g(z + \alpha) = \frac{e^{-(z+\alpha)^2}}{1 + e^{-2\alpha(z+\alpha)}} = \frac{e^{-(z+\alpha)^2}}{1 + e^{-2\alpha z}} = -\frac{e^{-z^2} e^{-2\alpha z}}{1 + e^{-2\alpha z}} = -e^{-2\alpha z} g(z),$$

d'où

$$g(z) - g(z + \alpha) = e^{-z^2}.$$

La fonction  $g$  possède des pôles simples aux points  $a_k$  vérifiant  $-2\alpha a_k = -i\pi(1 + 2k)$ , soit  $a_k = i\pi(1 + 2k)/2\alpha = \alpha(1 + 2k)/2$ .

Posons alors  $Z_1 = r$ ,  $Z_2 = \alpha + r$ ,  $Z_3 = \alpha - r$ , et  $Z_4 = -r$ , et intégrons  $g$  sur le cycle  $\gamma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \sigma_3 \vee \sigma_4$ , où

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= t, \quad t \in [-r, r] \\ \sigma_2(t) &= r + t\alpha, \quad t \in [0, 1] \\ \sigma_3(t) &= -t + \alpha, \quad t \in [-r, r] \\ \sigma_4(t) &= -r + (1-t)\alpha, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} \text{Res}(g; a_0) &= \frac{e^{-a_0^2}}{-2\alpha e^{-2\alpha a_0}} = \frac{e^{-\alpha^2/4}}{-2\alpha e^{-\alpha^2}} = -\frac{e^{3i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}i} \\ &= -\frac{(\sqrt{i})^3}{2\sqrt{\pi}i} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

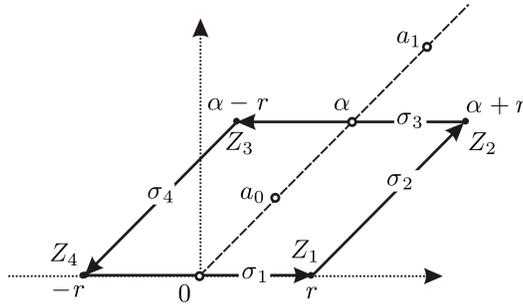


FIGURE I.5 – La Formule de Gauss

d'où

$$\int_{\gamma} g(z)dz = 2i\pi \text{Res}(g; a_0) = \sqrt{\pi}$$

Par ailleurs

$$\int_{\sigma_3} g(z)dz = - \int_{\sigma_1} g(z + \alpha)dz = - \int_{\sigma_1} g(z)dz + \int_{\sigma_1} e^{-z^2} dz$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\sigma_2} g(z)dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\sigma_4} g(z)dz = 0$$

Il en résulte que

$$\sqrt{\pi} = \int_{\sigma_1} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

### I.5 Fonctions présentant des coupures

On veut calculer

$$I = \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{x+a}\sqrt{a-x}} dx$$

Pour  $|\theta| < \pi$ , on pose  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $\sqrt{z+a} = \sqrt{\rho^-} e^{i\theta^-/2}$  où  $z = \rho^- e^{i\theta^-} - a$  et  $\sqrt{z-a} = \sqrt{\rho^+} e^{i\theta^+/2}$  où  $z = \rho^+ e^{i\theta^+} + a$ . Pour  $-a < \Re z < a$ , on aura donc (formule (8.10) et figures 8.8, 8.9 et 8.10)

$$\lim_{\Im z \rightarrow 0^+} f(z) = i\sqrt{x+a}\sqrt{a-x} \text{ et } \lim_{\Im z \rightarrow 0^-} f(z) = -i\sqrt{x+a}\sqrt{a-x}.$$

Si on note alors  $J_R$  l'intégrale de  $g(z) = 1/f(z)$  sur le cercle de rayon  $R > a$  parcouru dans le sens direct, en vertu du théorème de Cauchy on aura

$$0 = J_R + 2iI$$

Pour calculer  $J_R$ , on utilisera le résidu à l'infini, soit en fait le résidu en 0 de

$$\underline{g}(z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\sqrt{1/z+a}\sqrt{1/z-a}}.$$

Il est clair que  $\underline{z}g(z)$  est borné en 0, d'où

$$\text{Res}(\underline{g}, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{1/z+a}\sqrt{1/z-a}}$$

et comme  $\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sqrt{1/z + a} = e^{-i\theta/2} = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sqrt{1/z - a}$ , il en résulte que

$$\text{Res}(\underline{g}, 0) = -1.$$

Finalement on obtient donc

$$0 = -2i\pi + 2iI \text{ soit } I = \pi.$$

## Application II

# La méthode du col

Le théorème de Cauchy est à l'origine d'une technique puissante pour obtenir des développements asymptotiques de certaines intégrales. Plus précisément on cherche un développement asymptotique lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , de

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz, \quad (\text{II.1})$$

où  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe,  $\gamma$  un chemin dont les extrémités sont fixées et l'image située dans  $\Omega$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions analytiques dans  $\Omega$ . L'idée essentielle consiste à choisir au mieux le chemin  $\gamma$  dont en fait l'intégrale ne dépend pas. On commence par traiter le cas où  $\gamma$  est un segment de l'axe réel,  $g$  et  $h$  étant à valeurs réelles.

## II.1 Variable réelle : la méthode de Laplace

### II.1.1 Un premier exemple

Il s'agit de déterminer la partie principale quand  $t \rightarrow +\infty$  de l'intégrale

$$J(t) = \int_0^b x^{\nu} e^{-tcx^{\mu}} dx, \quad (\text{II.2})$$

où  $\nu > -1$ ,  $\mu > 0$ ,  $c > 0$  et  $b > 0$ , éventuellement égal à  $+\infty$ . Il est clair que l'intégrand tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  en tout point  $x \neq 0$ , et que c'est au voisinage de  $x = 0$  que cette convergence est la plus lente. L'idée consiste alors à dilater le voisinage de 0 en posant  $u = ctx^{\mu}$ , quitte à repousser à l'infini la borne supérieure de l'intégrale. On aura donc

$$J(t) = \int_0^b x^{\nu} e^{-ctx^{\mu}} dx = \frac{(ct)^{-(1+\nu)/\mu}}{\mu} \int_0^{ctb^{\mu}} u^{-1+(1+\nu)/\mu} e^{-u} du,$$

car  $x = (u/ct)^{1/\mu}$  et  $du = \mu ct x^{\mu-1} dx$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a

$$\int_0^{ctb^{\mu}} u^{-1+(1+\nu)/\mu} e^{-u} du \rightarrow \int_0^{+\infty} u^{-1+(1+\nu)/\mu} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1+\nu}{\mu}\right)$$

et par conséquent

$$J(t) \sim \frac{(ct)^{-(1+\nu)/\mu}}{\mu} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{\mu}\right) \quad (\text{II.3})$$

### II.1.2 Plus généralement

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$I(t) = \int_0^b g(x) e^{th(x)} dx, \quad (\text{II.4})$$

avec, au voisinage de 0,  $g(x) \sim Ax^\nu$  et  $h(x) \sim -cx^\mu$ . De façon naïve, si on remplace l'intégrand par un équivalent en 0, d'après le calcul qui précède, on obtient

$$I(t) \sim \int_0^b Ax^\nu e^{-tcx^\mu} dx \sim \frac{A}{\mu} (ct)^{-(1+\nu)/\mu} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{\mu}\right),$$

une réelle démonstration demande par contre quelques précautions. Pour fixer les idées supposons  $A > 0$ .

(i) Supposons  $h$  décroissante dans un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^+$  :  $0 \leq x \leq \delta_0$ , puis inférieure à  $h(\delta_0)$  pour  $x \geq \delta_0$  (voir la figure II.1)

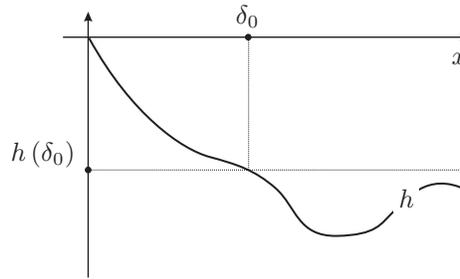


FIGURE II.1 – La fonction  $h$

et posons

$$\varphi(t) = \frac{A}{\mu} (ct)^{-(1+\nu)/\mu} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{\mu}\right);$$

nous allons montrer que  $I(t) \sim \varphi(t)$ .

(ii) Fixons à cet effet  $\varepsilon$  tel que  $2 > \varepsilon > 0$  et commençons par démontrer l'existence de  $\delta \in ]0, \delta_0]$  tel que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(t) \leq \int_0^\delta g(x) e^{th(x)} dx \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(t) \quad (\text{II.5})$$

dès que  $t$  est assez grand.

(iii) Pour chaque  $\lambda$  dans  $]0, 1[$ , en vertu des hypothèses relatives à  $g$  et  $h$ , il existe un nombre  $\delta(\lambda)$  tel que

$$\begin{aligned} A(1-\lambda)x^\nu &\leq g(x) \leq A(1+\lambda)x^\nu \\ -c(1+\lambda)x^\mu &\leq h(x) \leq -c(1-\lambda)x^\mu \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

dès que  $0 < x < \delta(\lambda)$ . Comme la fonction  $\lambda \rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)^{-(1+\nu)/\mu}$  est décroissante de 1 à 0 pour  $0 < \lambda < 1$ , et la fonction  $\lambda \rightarrow (1+\lambda)(1-\lambda)^{-(1+\nu)/\mu}$  croissante de 1 à  $+\infty$  pour  $0 < \lambda < 1$ , on peut choisir  $\lambda$  assez petit pour que

$$(1-\lambda)(1+\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \geq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{et} \quad (1+\lambda)(1-\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \leq \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (\text{II.7})$$

(iv) On fixe maintenant  $\lambda$  et on pose  $\delta = \min(\delta(\lambda), \delta_0)$ , alors selon (II.6)

$$A(1-\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1+\lambda)tx^\mu} dx \leq \int_0^\delta g(x) e^{th(x)} dx \leq A(1+\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1-\lambda)tx^\mu} dx$$

D'après (II.3), on aura

$$A(1-\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1+\lambda)tx^\mu} dx \sim (1-\lambda)(1+\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \varphi(t)$$

$$A(1+\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1-\lambda)tx^\mu} dx \sim (1+\lambda)(1-\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \varphi(t)$$

et par conséquent pour  $t$  assez grand, disons  $t \geq t_1$ ,

$$A \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1+\lambda)tx^\mu} dx \geq (1-\lambda)(1+\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \varphi(t) \geq \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(t)$$

$$A \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1-\lambda)tx^\mu} dx \leq (1+\lambda)(1-\lambda)^{-(1+\nu)/\mu} \varphi(t) \leq \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(t)$$

or d'après (II.10),

$$(1-\lambda) \geq \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \text{ et } (1+\lambda) \leq \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

et par conséquent

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(t) \leq A(1-\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1+\lambda)tx^\mu} dx$$

$$\leq \int_0^\delta g(x) e^{th(x)} dx \leq A(1+\lambda) \int_0^\delta x^\nu e^{-c(1-\lambda)tx^\mu} dx \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(t)$$

soit

$$\int_0^\delta g(x) e^{th(x)} dx \sim \varphi(t) \tag{II.8}$$

(v) On note  $h(\delta) = -\theta < 0$ , selon l'hypothèse relative à  $h$ ,  $h(x) \leq -\theta$  pour  $x \geq \delta$ , d'où pour  $t \geq 1$ ,  $(t-1)(h(x) + \theta) \leq 0$ , soit encore

$$th(x) \leq h(x) + (1-t)\theta \leq 0$$

On aura donc

$$\left| \int_\delta^b g(x) e^{th(x)} dx \right| \leq \int_\delta^b |g(x)| e^{th(x)} dx \tag{II.9}$$

$$\leq \int_\delta^b |g(x)| e^{h(x)+(1-t)\theta} dx = e^{(1-t)\theta} \int_\delta^b |g(x)| e^{h(x)} dx,$$

terme négligeable devant  $\varphi(t)$  pour  $t$  assez grand.

(vi) Il résulte donc de (II.8) et (II.9) que

$$I(t) = \int_0^b g(x) e^{th(x)} dx \sim \varphi(t) = \frac{A}{\mu} (ct)^{-(1+\nu)/\mu} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{\mu}\right) \tag{II.10}$$

dès que  $g(x) \sim Ax^\nu$  et  $h(x) \sim -cx^\mu$ .

### II.1.3 Cas particulier

Pour  $\mu = 2$  et  $\nu = 0$ , si  $h$  se développe en série entière au voisinage de 0,

$$I(t) \sim \frac{A}{2}(ct)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2}(ct)^{-1/2} \sqrt{\pi} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-tc}} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}. \quad (\text{II.11})$$

car  $h''(0) = -2c$ .

## II.2 Variable complexe : la méthode du col

On cherche maintenant à déterminer la partie principale de

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.12})$$

De même que précédemment, c'est lorsque  $\Re h(z)$  est maximum que l'intégrand contribue le plus significativement au résultat. On va utiliser le théorème de Cauchy de façon à chercher un chemin  $\gamma'$  particulièrement favorable susceptible de remplacer  $\gamma$ . Notons qu'en vertu du principe du maximum (remarque 6.4),  $|\Re h(z)|$  ne peut présenter de maximum local dans  $\Omega$ , on doit donc bien comprendre qu'il s'agit d'un maximum *le long de  $\gamma$*  (ou de  $\gamma'$ ).

### II.2.1 Application de la méthode de Laplace

Dans un premier temps on supposera que  $\gamma$  constitue un chemin adéquat, c'est-à-dire que  $\Re h(z)$  est maximum en son origine. Par translation on peut toujours se ramener au cas où l'origine de  $\gamma$  est le point  $z = 0 : \gamma(0) = 0$ . Au voisinage de l'origine,  $g$  et  $h$  se développent en série entière, on notera  $g(z) \sim Az^n$  et  $h(z) \sim a + cz^m$  ou plus précisément  $h(z) = a + cz^m + z^{m+1}\psi(z)$  où  $\psi$  est analytique,  $c = \rho e^{i\alpha} \neq 0$ ,  $n$  est un entier positif et  $m$  un entier  $\geq 1$ . Comme  $a$  n'intervient dans le résultat que comme un facteur multiplicatif, nous le supposons désormais nul, nous réservant de le rétablir dans la formule finale.

(i) Commençons par étudier  $\Re cz^m$  au voisinage de l'origine. Avec  $z = ue^{i\theta}$  on aura  $cz^m = u\rho e^{i(\alpha+m\theta)}$  d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \Re cz^m &\leq 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \alpha + m\theta \leq 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \Re cz^m &\geq 0 \text{ pour } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \alpha + m\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

$k = 0, m - 1$ , soit encore

$$\begin{aligned} \Re cz^m &\leq 0 \text{ pour } -\frac{\pi}{2m} \leq \frac{\alpha - (2k+1)\pi}{m} + \theta \leq \frac{\pi}{2m} \\ \Re cz^m &\geq 0 \text{ pour } -\frac{\pi}{2m} \leq \frac{\alpha - 2k\pi}{m} + \theta \leq \frac{\pi}{2m} \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} S_k &= \left\{ \theta \left| -\frac{\pi}{2m} \leq \frac{\alpha - (2k+1)\pi}{m} + \theta \leq \frac{\pi}{2m} \right. \right\} \\ S'_k &= \left\{ \theta \left| -\frac{\pi}{2m} \leq \frac{\alpha - 2k\pi}{m} + \theta \leq \frac{\pi}{2m} \right. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

En  $z = 0$  la fonction  $cz^m$  s'annule et le long d'un chemin tracé dans l'un des  $S_k$  y est maximale en module, tandis qu'elle minimale dans l'un des  $S'_k$ .

L'idée consiste à déformer le chemin au voisinage de l'origine de telle sorte qu'il emprunte la bissectrice  $\delta_k$  de l'un des  $S_k$ , et par conséquent que l'origine se trouve être le maximum de  $\Re cz^m$  le long de  $\delta_k$  (voir la Figure II.2 où  $m = 3$ ). Le choix de  $k$  sera fixé en fonction de la direction dans laquelle  $\gamma$  s'éloigne de l'origine. On posera

$$\omega_k = \frac{(2k + 1) \pi - \alpha}{m}, \tag{II.14}$$

c'est l'angle de la bissectrice du secteur  $S_k$ .

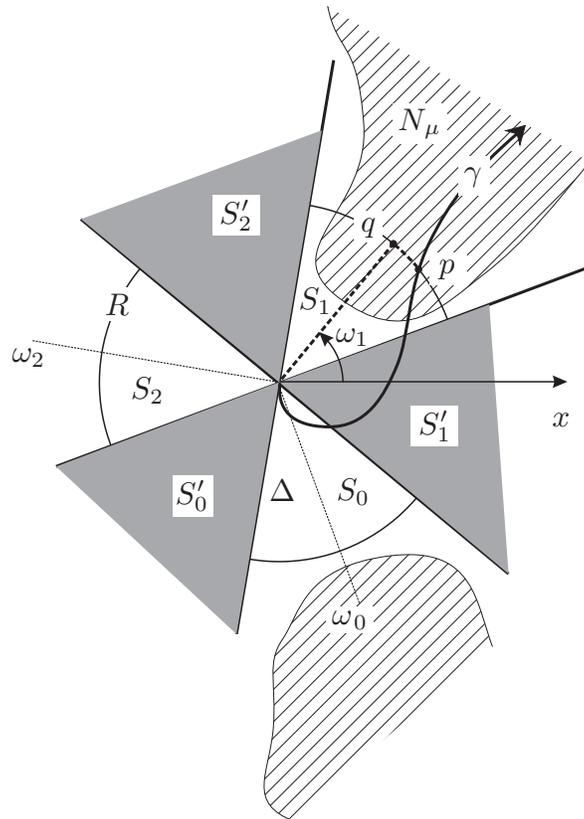


FIGURE II.2 –  $\delta_k$  au voisinage de l'origine

(ii) Commençons par étudier le voisinage de l'origine où l'on déformera le chemin  $\gamma(s)$  selon le chemin rectiligne  $\delta_k(s) = e^{i\omega_k s} = [0, q]$ , où  $\omega_k = ((2k + 1) \pi - \alpha) / m$ . on aura

$$\int_{\delta_k} g(z) e^{th(z)} dz = \int_0^{s_k} g(e^{i\omega_k s}) e^{th(e^{i\omega_k s})} e^{i\omega_k} ds = e^{i\omega_k} \int_0^{s_k} g(e^{i\omega_k s}) e^{th(e^{i\omega_k s})} ds,$$

avec

$$\begin{aligned} h(e^{i\omega_k s}) &= \rho e^{i\alpha} (e^{i\omega_k s})^m + (e^{i\omega_k s})^{m+1} \psi(e^{i\omega_k s}) \\ &= \rho (e^{i(m\omega_k + \alpha)s}) + (e^{i\omega_k s})^{m+1} \psi(e^{i\omega_k s}) \\ &= -\rho s^m + (e^{i\omega_k s})^{m+1} \psi(e^{i\omega_k s}) \\ &= -\rho s^m F_k(s), \end{aligned}$$

où

$$F_k(z) = 1 - z e^{i(m+1)\omega_k} \frac{1}{\rho} \psi(e^{i\omega_k z})$$

d'où

$$\int_{\delta_k} g(z) e^{th(z)} dz = \int_0^{s_k} g(e^{i\omega_k s}) e^{-th(sF_k(s)^{1/m})} e^{i\omega_k s} ds,$$

(iii) Comme  $\psi$  est analytique au voisinage de  $z = 0$  et que  $F_k(0) = 1$ , la fonction  $H_k(z) = zF_k(z)^{1/m}$  est analytique au voisinage de  $z = 0$ . De plus

$$H'_k(z) = F_k(z)^{1/m} + \frac{z}{m} F'_k(z)^{(1-m)/m}$$

et par conséquent  $H'_k(0) = 1$ . En vertu du théorème d'inversion locale, il en résulte que  $H_k$  est inversible au voisinage de 0 : c'est dire qu'il existe un disque centré à l'origine  $\Delta_k$  tel que  $H_k$  soit une bijection de  $\Delta_k$  sur un voisinage ouvert  $U_k$  de 0. Notons  $G_k = H_k^{-1}$  et  $\beta_k = H_k \circ \delta_k$  ; en vertu de la formule du changement de variable, on aura

$$\int_{\delta_k} g(z) e^{th(z)} dz = \int_{\beta_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-th\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta$$

(iv) Soit maintenant  $r_k$  tel que le disque  $D_k$  de rayon  $r_k$  centré à l'origine soit contenu dans  $U_k$ , on peut réduire le rayon  $R_k$  du disque  $\Delta_k$  de telle sorte que  $H_k(\Delta_k)$  soit inclus dans  $D_k$ . Posons  $H_k(s) = \tau_k(s) e^{i\theta_k(s)}$ , on aura  $H_k(0) = 0$ , d'où  $\tau_k(0) = 0$  et

$$1 = H'_k(0) = \tau'_k(0) e^{i\theta_k(0)} + \tau_k(0) i\theta'_k(0) e^{i\theta_k(0)} = \tau'_k(0) e^{i\theta_k(0)},$$

ou encore  $\tau'_k(0) = 1$  et  $\theta_k(0) = 0$  ; quitte à diminuer  $R_k$  on pourra donc faire l'hypothèse que pour  $0 \leq s \leq R_k$  on ait

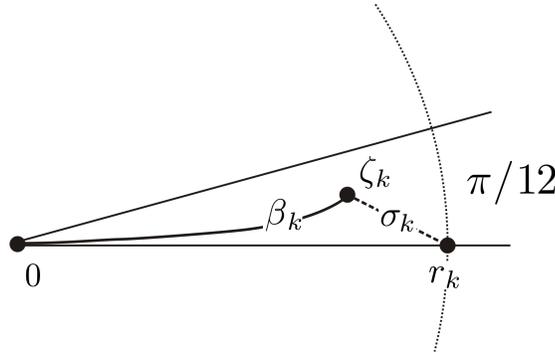
$$0 \leq \text{Arg } H_k(s) \leq \pi/4m.$$

Nous choisirons alors pour extrémité du chemin  $\beta_k$  le point  $\zeta_k = \beta_k(R_k)$ , ce qui nous permet d'affirmer que le chemin  $\beta_k$  reste proche de l'axe réel.

(v) En vertu de nos hypothèses  $\beta_k$  est tout entier inclus dans le secteur  $0 \leq \theta \leq \pi/4m$  du disque de rayon  $r_k$  (voir la Figure v). Notons  $\sigma_k$  le segment joignant le point  $r_k$  au point  $\zeta_k$ .

Selon le théorème de Cauchy

$$\begin{aligned} \int_{\beta_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-th\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta &= \int_0^{r_k} g(e^{i\omega_k} G_k(s)) e^{-t\rho s^m} e^{i\omega_k} G'_k(s) ds \\ &+ \int_{\sigma_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-th\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$



Sur  $\sigma_k$  on aura

$$\Re \zeta^m \geq \Re \zeta_k^m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} |\zeta_k|^m$$

car  $|\text{Arg } \zeta_k^m| \leq \pi/4$  d'où il résulte que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-t\rho\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta \right| \\ & \leq |\sigma_k| \sup_{|\zeta| \leq r_k} \left| e^{i\omega_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) G'_k(\zeta) \right| e^{-\rho t \frac{\sqrt{2}}{2} |\zeta_k|^m}. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

(vi) Il ne reste donc plus qu'à évaluer le terme suivant :

$$\int_0^{r_k} g(e^{i\omega_k} G_k(s)) e^{-t\rho s^m} e^{i\omega_k} G'_k(s) ds,$$

or  $G'_k(0) = 1/H'_k(0) = 1$  d'où  $G_k(s) \sim s$  au voisinage de 0, et par conséquent  $e^{i\omega_k} g(e^{i\omega_k} G_k(s)) G'_k(s) e^{-t\rho s^m} \sim e^{i\omega_k} A e^{in\omega_k} s^n e^{-t\rho s^m} = A e^{i(n+1)\omega_k} e^{-t\rho s^m} s^n$ . En séparant parties réelles et imaginaires, on peut donc utiliser la méthode de Laplace, qui nous conduit au résultat suivant :

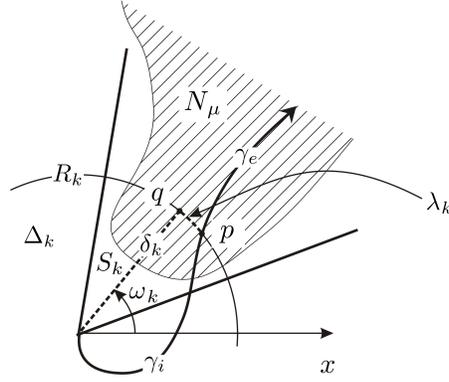
$$\int_0^r g(e^{i\omega_k} G_k(s)) e^{-t\rho s^m} e^{i\omega_k} G'_k(s) ds \sim e^{i(n+1)\omega_k} \frac{A}{m} (\rho t)^{-(1+n)/m} \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right).$$

(vii) Il faut maintenant prendre en compte l'ensemble du chemin  $\gamma$ , ce qui déterminera le choix de  $k$ . On supposera que outre  $\gamma(0) = 0$ , le chemin  $\gamma$  vérifie l'hypothèse suivante :  $\exists k, s_k$  tels que  $p = \gamma(s_k) \in S_k$ ,  $|\gamma(s)| \leq R_k$  pour  $0 \leq s \leq s_k$  et  $|\gamma(s_k)| = R_k$ . On suppose également l'existence de  $\mu > 0$  tel que  $\gamma(s) \in N_\mu = \{z \mid \Re h(z) \leq -\mu\}$  pour  $s \geq s_k$ , ainsi que l'arc de cercle de rayon  $R_k$  joignant  $p$  au point  $q = R_k e^{i\omega_k}$  (voir la Figure II.2). Si  $\gamma_e$  est la portion du chemin  $\gamma$  extérieure au disque  $\Delta_k$  de rayon  $R_k$  et  $\gamma_i$  la portion intérieure à  $\Delta_k$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_\gamma g(z) e^{th(z)} dz &= \int_{\gamma_e} g(z) e^{th(z)} dz + \int_{\gamma_i} g(z) e^{th(z)} dz \\ &= \int_{\gamma_e} g(z) e^{th(z)} dz + \int_{\delta_k} g(z) e^{th(z)} dz + \int_{\lambda_k} g(z) e^{th(z)} dz \end{aligned}$$

où

$$\int_{\delta_k} g(z) e^{th(z)} dz = \int_0^{r_k} g(e^{i\omega_k} G_k(s)) e^{-t\rho s^m} e^{i\omega_k} G'_k(s) ds + \int_{\sigma_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-t\rho\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta.$$



On a déjà vu que

$$\int_0^{r_k} g(e^{i\omega_k} G_k(s)) e^{-t\rho s^m} e^{i\omega_k} G'_k(s) ds \sim e^{i(n+1)\omega_k} \frac{A}{m} (\rho t)^{-(1+n)/m} \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right), \quad (\text{II.16})$$

et que selon (II.15)  $\int_{\sigma_k} g(e^{i\omega_k} G_k(\zeta)) e^{-t\rho\zeta^m} e^{i\omega_k} G'_k(\zeta) d\zeta$  est négligeable devant le second membre de (II.16).

(viii) Considérons maintenant la portion de chemin  $\gamma_e$  :

$$\left| \int_{\gamma_e} g(z) e^{th(z)} dz \right| = \int_{s_k}^{s_{\max}} |g(\gamma(s))| |e^{th(\gamma(s))}| |\gamma'(s)| ds = \int_{s_k}^{s_{\max}} |g(\gamma(s))| e^{t \Re(h(\gamma(s)))} |\gamma'(s)| ds.$$

Comme  $\gamma(s) \in N_\mu$  pour  $s \geq s_k$ , de même qu'en (II.9), on aura

$$\begin{aligned} \int_{s_k}^{s_{\max}} |g(\gamma(s))| e^{t \Re(h(\gamma(s)))} |\gamma'(s)| ds &= \int_{s_k}^{s_{\max}} |g(\gamma(s))| e^{(t-1)\Re(h(\gamma(s)))} e^{\Re(h(\gamma(s)))} |\gamma'(s)| ds \\ &\leq e^{-(t-1)\mu} \int_0^{s_{\max}} |g(\gamma(s))| e^{\Re(h(\gamma(s)))} |\gamma'(s)| ds, \end{aligned}$$

négligeable devant le second membre de (II.16). De même  $\int_{\lambda_k} g(z) e^{th(z)} dz$  peut être négligée devant le second membre de (II.16).

(ix) Finalement, après avoir rétabli le coefficient  $a$ , nous avons montré que

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz \sim e^{at+i(n+1)\omega_k} \frac{A}{m} (\rho t)^{-(1+n)/m} \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right). \quad (\text{II.17})$$

### II.2.2 Choix du chemin

Dans le cas général un nouveau chemin  $\gamma'$  homotope à  $\gamma$  d'origine  $\zeta_1$  et d'extrémité  $\zeta_2$ , doit tout d'abord être déterminé.

(i) Le premier cas est celui où il existe  $\gamma'$  tel qu'à l'une de ses extrémités ( $\zeta_1$  ou  $\zeta_2$ ),  $\Re h(z)$  atteint son maximum le long de  $\gamma'$ , on est alors ramené à l'étude précédente, sous réserve que les diverses hypothèses soient vérifiées

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz = \int_{\gamma'} g(z) e^{th(z)} dz.$$

Le cas le plus simple est celui où  $g(\zeta_1) = A$  et au voisinage de  $\zeta_1$ ,  $h(z) \sim a + c(z - \zeta_1)$ , soit  $m = 1$  et  $n = 0$ , on aura alors  $k = 0$  et  $\omega_0 = \pi - \alpha$  d'où

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} dz \sim A(\rho t)^{-1} e^{at+i(\pi-\alpha)}$$

Si on suppose que  $u_1 = \Re h(\zeta_1) > u_2 = \Re h(\zeta_2)$  et que l'ensemble des  $z$  tels que  $u_2 \leq \Re h(z) \leq u_1$  est connexe, il existe un chemin  $\gamma'$  de  $\zeta_1$  à  $\zeta_2$  tel que le long de  $\gamma'$ ,  $\Re h(z)$  atteigne son maximum en  $\zeta_1$ .

(ii) Sinon, on peut chercher  $z_0 = \gamma'(s)$ ,  $0 < s < 1$  tel que  $\Re h(z)$  soit maximal en  $z_0$  le long de  $\gamma'$ . On découpera alors le chemin  $\gamma'$  en deux portions, de  $\zeta_1$  à  $z_0$  d'une part et de  $z_0$  à  $\zeta_2$  d'autre part. Dans ces conditions il n'est pas possible de traiter le cas  $m = 1$ , car alors les deux portions du chemin se trouveraient nécessairement dans l'unique secteur  $S_0$  autorisé, ce qui fait que les deux parties principales correspondantes seraient opposées et qu'aucun renseignement ne pourrait en être déduit. Pour  $m \geq 2$  au voisinage de  $z_0$ , on aura  $h(z) \sim a + c(z - z_0)^m$  d'où  $h'(z) \sim c(z - z_0)^{m-1}$  et par conséquent  $h'(z_0) = 0$ . Il sera alors nécessaire que les deux portions du chemin  $\gamma$  se trouvent dans deux secteurs  $S_k$  différents de telle sorte que les parties principales correspondantes ne se compensent pas. Il en résulte en vertu des relations de Cauchy-Riemann que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0)$$

et par conséquent que la dérivée de  $h$ , et en particulier celle de  $\Re h$ , s'annule le long de toute courbe passant par  $z_0$ .

(iii) Dans le cas où  $h''(z_0) = 2c = 2\rho e^{i\alpha} \neq 0$ , on a  $m = 2$  ; posons  $z - z_0 = \tau e^{i\omega}$ , alors

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} h(\tau e^{i\omega}) = e^{2i\omega} h''(\tau e^{i\omega})$$

et par conséquent en  $z_0$  la dérivée seconde de  $h$  dans la direction  $e^{i\omega}$  est égale à  $e^{2i\omega} h''(z_0) = 2c e^{2i\omega} = 2\rho e^{i(\alpha+2\omega)}$ . Les directions dans lesquelles la dérivée seconde de  $\Re h$  est minimale ne sont donc autres que  $\omega_0 = (\pi - \alpha)/2$  et  $\omega_1 = (3\pi - \alpha)/2$ . Si on se réfère à la surface  $x_3 = \Re h(x_1 + ix_2)$ , (voir la Figure II.3) ces directions sont celles de la ligne de thalweg qui passe par le point  $z_0$ , tandis que les directions orthogonales sont celles de la ligne de crête dans lesquelles  $\Re h''$  est maximal. Le point  $z_0$  constitue donc bien un col, d'où le nom de la méthode. Les directions dans lesquelles la dérivée seconde de  $\Re h$  s'annule sont celles des lignes de niveau de  $\Re h(z_0)$ , elles séparent les  $S_k$  des  $S'_k$ .

La méthode s'applique encore si  $m > 2$ , auquel cas  $h''(z_0) = 0$ . La surface  $x_3 = \Re h(x_1 + ix_2)$  présentant alors plusieurs lignes de crête et de thalweg au voisinage de  $z_0$ .

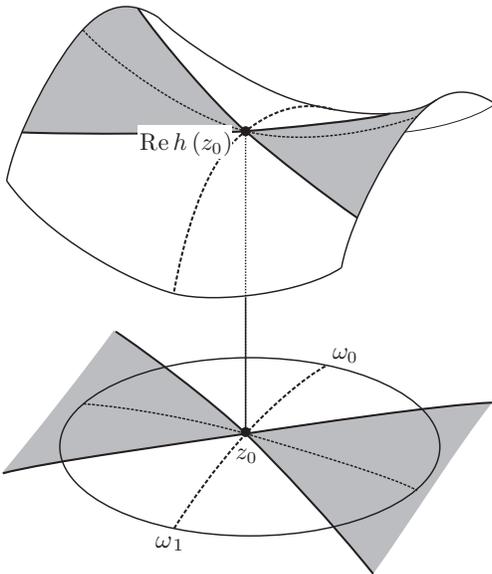


FIGURE II.3 – Un point col

## Application III

# La portance d'un profil d'aile

Il s'agit de déterminer la portance d'un profil d'aile d'avion soumis à un écoulement irrotationnel de fluide parfait incompressible, uniforme à l'infini.

### III.1 L'écoulement autour d'un profil

#### III.1.1 Le potentiel complexe

Selon les hypothèses relatives à l'écoulement, la vitesse  $u(x, y)$  dans le domaine fluide vérifie les équations suivantes :

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ et } \operatorname{rot} u = 0.$$

Supposons pour commencer que le domaine de l'écoulement  $\Omega$  soit simplement connexe, on sait alors (Girault Raviart th2.9 p.31) qu'il existe un *potentiel des vitesses*  $\varphi$  tel que  $u = \nabla \varphi$  ; et on aura

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \nabla \varphi = 0.$$

Posons alors  $z = x + iy = c(x, y)$ . Selon le Théorème 13.3)  $\varphi$  est la partie réelle d'une fonction holomorphe  $f$  appelée *potentiel complexe*, soit en fait

$$f \circ c = \varphi + i\psi.$$

Les relations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

d'où

$$(\nabla \varphi | \nabla \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

et

$$f' \circ c = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

En particulier, la condition de glissement le long du profil  $(\nabla \varphi | n)_{|\gamma} = 0$  équivaut à

$$(\nabla \psi | t)_{|\gamma} = 0 \text{ soit } \psi|_{|\gamma} = Cte.$$

La fonction  $\psi$  est appelée *fonction de courant*.

Il se trouve bien entendu que l'extérieur d'un profil ne constitue pas un ouvert simplement connexe, il est donc nécessaire d'introduire une coupure (voir la Figure III.1) de telle sorte que le domaine de l'écoulement constitue un ouvert simplement connexe, ce qui a pour effet d'introduire une indétermination dans la solution du problème.

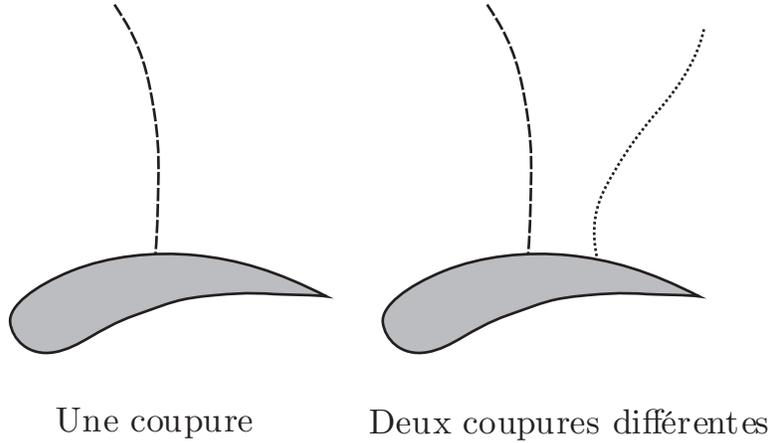


FIGURE III.1 – Domaine non simplement connexe

### III.1.2 La dérivée du potentiel complexe

En modifiant la position de la coupure (voir la Figure III.1) on induit une nouvelle fonction harmonique  $g = \alpha + i\beta$  avec  $u = \nabla\varphi = \nabla\alpha$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\alpha$  diffèrent donc d'une constante en dehors des coupures, comme  $\varphi$  est harmonique, elle est régulière à travers la coupure de  $\alpha$ , par conséquent  $u$  est régulière dans tout l'extérieur du profil.

Considérons alors la dérivée  $f'$  de  $f$  : c'est une fonction régulière, et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f' \circ c) + i \frac{\partial}{\partial y}(f' \circ c) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + i \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

C'est donc en fait une fonction analytique à l'extérieur du profil.

### III.1.3 La circulation

Notons  $\gamma$  le chemin dans  $\mathbb{C}$  représentant le profil et  $\mathcal{C} = \gamma \circ c$  le bord du profil, la circulation du vecteur vitesse le long de  $\mathcal{C}$ , traditionnellement notée  $\Gamma$ , est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\mathcal{C}} (u|_t) ds = \int_0^1 (u|\gamma') \gamma' dt = \int_0^1 (\nabla\varphi|\gamma') dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gamma'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \gamma'_2 \right) dt = \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (\gamma'_1 + i \gamma'_2) dt, \end{aligned}$$

mais par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (\gamma'_1 + i \gamma'_2) dt = \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gamma'_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \gamma'_2 \right) dt + i \int_0^1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \gamma'_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gamma'_1 \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gamma'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \gamma'_2 \right) dt + i \int_0^1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \gamma'_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \gamma'_1 \right) dt, \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (u|t) ds + i \int_0^1 (\nabla \psi | \gamma') dt = \Gamma.$$

### III.1.4 Les formules de Blasius

Si  $p$  note la pression  $\vec{\nu}$  la normale extérieure au domaine fluide, on a

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{C}} p \vec{\nu} ds,$$

et avec l'intégrale première de Bernoulli

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} \|\nabla \varphi\|^2,$$

comme, pour tout vecteur  $\vec{e}$

$$\int_{\vec{\gamma}} (\vec{\nu} | \vec{e}) ds = 0,$$

on obtient

$$\vec{F} = -\frac{\rho}{2} \int_{\vec{\gamma}} \|\nabla \varphi\|^2 \vec{\nu} ds.$$

Posons maintenant

$$F = F_1 + iF_2, \quad \nu = \nu_1 + i\nu_2, \quad \tau = \gamma' / |\gamma'|, \quad \nu = i\tau, \quad ds = |\gamma'| dt,$$

on aura alors

$$F = \int_{\gamma} p \nu ds = -i \frac{\rho}{2} \int_0^1 |f' \circ \gamma|^2 \gamma' dt = -i \frac{\rho}{2} \int_0^1 \overline{f' \circ \gamma} f' \circ \gamma \gamma' dt.$$

Or

$$f' \circ \gamma \gamma' = (f \circ \gamma)' = (\varphi \circ \gamma)' + i(\psi \circ \gamma)' = \overline{f'} \circ \gamma \gamma' + 2i(\psi \circ \gamma)',$$

d'où

$$F = -i \frac{\rho}{2} \int_0^1 (\overline{f'} \circ \gamma)^2 \gamma' dt + \rho \int_0^1 \overline{f'} \circ \gamma (\psi \circ \gamma)' dt.$$

On en déduit que

$$\overline{F} = i \frac{\rho}{2} \int_{\gamma} (f')^2 dz + \rho \int_0^1 f' \circ \gamma (\psi \circ \gamma)' dt = i \frac{\rho}{2} \int_{\gamma} (f')^2 dz + \rho \int_{\mathcal{C}} f' \frac{d\psi}{ds} ds,$$

et dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une ligne de courant

$$\overline{F} = i \frac{\rho}{2} \int_{\gamma} (f')^2 dz.$$

### III.1.5 Le paradoxe de d'Alembert

Supposons maintenant qu'au voisinage de l'infini, la vitesse soit de la forme  $u \sim V_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = V_\infty \begin{pmatrix} \partial \varphi / \partial x \\ -\partial \psi / \partial x \end{pmatrix}$  alors  $f'(z) \sim V_\infty e^{-i\alpha}$  et par conséquent le développement de  $f'(z)$  en série de Laurent à l'extérieur d'un disque contenant le profil est de la forme suivante :

$$f'(z) = V_\infty e^{-i\alpha} + a_{-1}z^{-1} + \sum_{n \leq -2} a_n z^n.$$

Il en résulte que sur le bord  $\delta$  de ce disque

$$\int_{\delta} f'(z) dz = 2i\pi a_{-1},$$

et comme  $f'$  est holomorphe dans l'extérieur du profil

$$\Gamma = \int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\delta} f'(z) dz \implies a_{-1} = \frac{\Gamma}{2i\pi}.$$

Notons que si  $z' = 1/z$ , alors

$$-\frac{1}{(z')^2} f'(z') = -V_\infty e^{-i\alpha} \frac{1}{(z')^2} - a_{-1} \frac{1}{z'} + \sum_{n \geq 0} a_{-n-2} (z')^n$$

ce qui fait de  $-a_{-1}$  le résidu à l'infini de  $f'(z)$  ; on peut alors se référer à la formule (7.16) qui donne encore

$$\Gamma = \int_{\gamma} f'(z) dz = 2i\pi a_{-1} \implies a_{-1} = \frac{\Gamma}{2i\pi}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} (f'(z))^2 &= V_\infty^2 e^{-2i\alpha} + V_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{i\pi} z^{-1} + \sum_{n \leq -2} b_n z^n \\ &= V_\infty^2 e^{-2i\alpha} - iV_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{\pi} z^{-1} + \sum_{n \leq -2} b_n z^n, \end{aligned}$$

d'où

$$-\frac{1}{(z')^2} (f'(z'))^2 = -\frac{1}{(z')^2} V_\infty^2 e^{-2i\alpha} + iV_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{z'} + \sum_{n \geq 0} b_{-n-2} (z')^n,$$

et par conséquent

$$\bar{F} = -i \frac{\rho}{2} 2i\pi i V_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{\pi} = i\rho V_\infty \Gamma e^{-i\alpha}.$$

Il en résulte que

$$F = F_1 + iF_2 = -i\rho V_\infty \Gamma e^{i\alpha},$$

c'est-à-dire que la force exercée sur le profil est orthogonale à la direction de la vitesse à l'infini et proportionnelle à la circulation : en particulier il n'y a pas de traînée, et il n'y a de portance que si la circulation n'est pas nulle.

### III.2 L'écoulement autour d'un cercle

Un cas particulier où les calculs peuvent être menés explicitement est celui de l'écoulement autour d'un cercle. On vérifie aisément que la fonction

$$f(z) = V_{\infty} \left( z + \frac{r^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z$$

où  $r$  et  $\Gamma$  sont réels, est holomorphe à l'extérieur du cercle de rayon  $r$  centré à l'origine, hormis la coupure du logarithme. On aura alors

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Re \left( z + \frac{r^2 \bar{z}}{|z|^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \Im \operatorname{Log} z = V_{\infty} \left( 1 + \frac{r^2}{|z|^2} \right) \Re z + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} z \\ \psi(z) &= \Im \left( z + \frac{r^2 \bar{z}}{|z|^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \Re \operatorname{Log} |z| = V_{\infty} \left( 1 - \frac{r^2}{|z|^2} \right) \Im z - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log} |z|, \end{aligned}$$

ce qui permet de constater que la fonction de courant  $\psi$  n'admet pas de coupure.

#### III.2.1 Conditions aux limites

En  $|z| = r$ , la condition de glissement est vérifiée :

$$\psi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log} r = \text{Cte} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

et à l'infini l'écoulement est uniforme, sa vitesse a pour norme  $V_{\infty}$  et est dirigée selon l'axe des  $x$  :

$$f'(z) = V_{\infty} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_{\infty}.$$

#### III.2.2 Points d'arrêt

De façon à mieux appréhender la topologie de l'écoulement, il est important de déterminer les points où s'annule la vitesse ; nous verrons par la suite que c'est également la position de ces points qui fixe la portance du profil.

On aura donc

$$\nabla \varphi = 0 \iff V_{\infty} \left( 1 - \frac{r^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = f'(z) = 0$$

soit

$$V_{\infty} z^2 - i \frac{\Gamma}{2\pi} z - V_{\infty} r^2 = 0.$$

Le produit et la somme des racines sont donc respectivement donnés par

$$P = -r^2 \quad \text{et} \quad S = i \frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}},$$

et les racines selon la formule

$$z^{\pm} = \frac{i \frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{4V_{\infty}^2 r^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2V_{\infty}}.$$

Deux cas se présentent :

$$4\pi V_\infty r > \Gamma \implies \text{deux solutions complexes } z^- = -\overline{z^+} \text{ conjuguées } |z^-| = |z^+| = r,$$

soit deux points d'arrêt sur le cercle, et

$$4\pi V_\infty r < \Gamma \implies \text{deux solutions imaginaires pures } |z^-| < r < |z^+|,$$

soit un point d'arrêt et un seul dans le fluide, situation qui ne sera pas considérée ultérieurement car peu susceptible de représenter un écoulement réel.

La constante  $\Gamma$  n'est autre que la circulation du vecteur vitesse le long du cercle :

$$\int_\gamma f'(z) dz = \int_\gamma \left[ V_\infty \left( 1 - \frac{r^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \right] dz = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \Gamma.$$

Elle peut se déterminer en fonction de la position des points d'arrêt :

$$\left( 2V_\infty z^\pm - i \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 = 4r^2 V_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2},$$

soit

$$4V_\infty (z^\pm)^2 - 2z^\pm i \frac{\Gamma}{\pi} = 4r^2 V_\infty,$$

ou encore

$$2i\pi V_\infty z^\pm + \Gamma = 2i\pi \frac{r^2 V_\infty}{z^\pm}.$$

Finalement

$$\Gamma = 2i\pi r V_\infty \left( \frac{r}{z^\pm} - \frac{z^\pm}{r} \right).$$

### III.2.3 Plus généralement

Si le centre du cercle est situé au point d'affixe  $a$  et la vitesse à l'infini de la forme  $u \sim V_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ , alors

$$f(z) = V_\infty \left( (z-a)e^{-i\alpha} + \frac{r^2}{(z-a)e^{-i\alpha}} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{z-a}{r},$$

et les points d'arrêt vérifient

$$(z^\pm - a)e^{-i\alpha} = \frac{i \frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{4r^2 V_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2V_\infty}.$$

On aura alors

$$\Gamma = 2i\pi r V_\infty \left( \frac{r}{(z^\pm - a)e^{-i\alpha}} - \frac{(z^\pm - a)e^{-i\alpha}}{r} \right).$$

Avec  $\alpha = \pi/6$ , et  $4\pi V_\infty r > \Gamma$ , les isovalues de la fonction de courant se présentent de la façon suivante :

Dans le cas particulier où  $a = i\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $r^2 = 1 + \beta^2$ , et où le point d'affixe  $z = 1$  est un point d'arrêt, alors

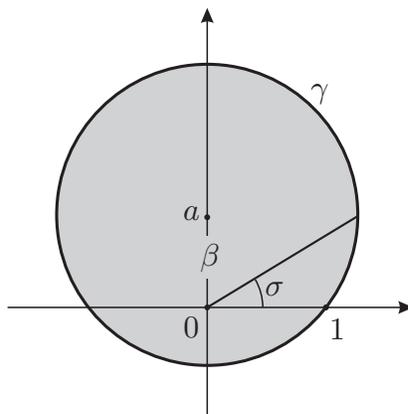
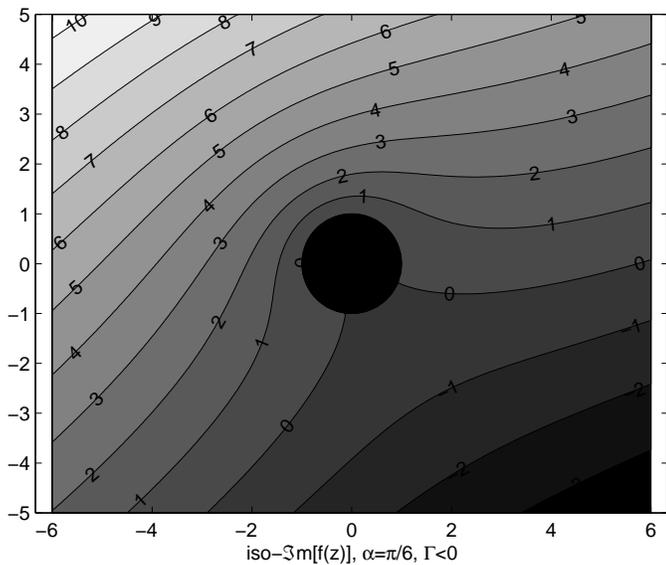


FIGURE III.2 – Centre sur l'axe imaginaire

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2i\pi V_\infty \left( \frac{1 + \beta^2}{(1 - i\beta)e^{-i\alpha}} - (1 - i\beta)e^{-i\alpha} \right) \\ &= 2i\pi V_\infty \left( (1 + i\beta)e^{i\alpha} - (1 - i\beta)e^{-i\alpha} \right) \\ &= -4\pi V_\infty \frac{(1 + i\beta)e^{i\alpha} - (1 - i\beta)e^{-i\alpha}}{2i}, \end{aligned}$$

soit encore avec  $\sigma = \arg(1 + i\beta)$ ,  $1 + i\beta = re^{i\sigma}$  (voir la Figure III.2) d'où

$$\Gamma = -4\pi r V_\infty \frac{e^{i\sigma} e^{i\alpha} - e^{i-\sigma} e^{-i\alpha}}{2i} = -4\pi r V_\infty \sin(\alpha + \sigma).$$

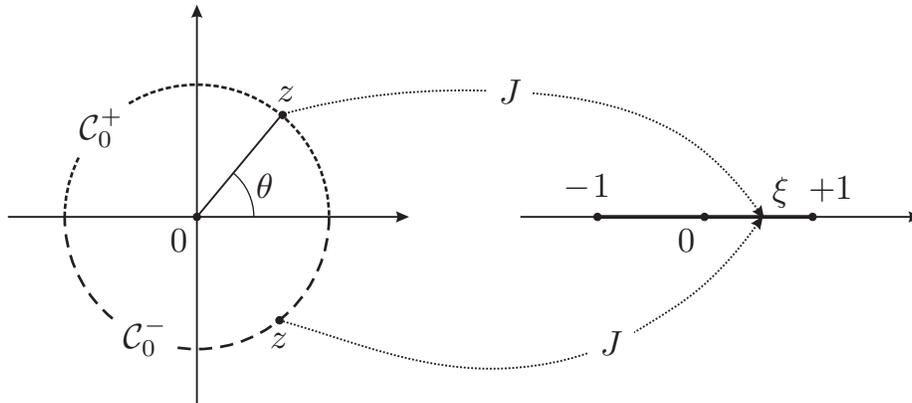


FIGURE III.3 – Image du cercle unité

### III.3 Transformations conformes

La détermination de la portance nécessite donc celle de la circulation, qui ne peut se déduire du modèle de fluide parfait. C'est à la condition de Kutta-Joukowski que nous ferons appel, elle stipule qu'au bord de fuite la vitesse de l'écoulement est finie, et représente une trace du fait que l'écoulement réel est visqueux. Le calcul explicite n'est possible que pour des classes restreintes de profils, nous étudierons ceux qui résultent des transformations conformes de Joukowski et de Karmann-Trefftz.

#### III.3.1 La transformation de Joukowski

Elle est définie par

$$J(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Posons  $\xi = J(z)$ , alors

$$z^2 - 2\xi z + 1 = 0,$$

d'où

$$z^\pm = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \text{ et } z^- z^+ = 1$$

et en particulier avec  $z^+ = r e^{i\theta}$ , on a  $z^- = e^{-i\theta} / r$ .

▷ Si  $\xi \in [-1, 1]$ ,  $z = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}$  d'où  $|z|^2 = \xi^2 + 1 - \xi^2 = 1$ . Réciproquement si  $z = e^{i\theta}$ , alors  $J(z) = \cos \theta \in [-1, 1]$  :  $J$  est une bijection de chacun des demi-cercles unité  $\mathcal{C}_0^+$  et  $\mathcal{C}_0^-$ , respectivement de parties imaginaires positives et négatives, sur le segment  $[-1, 1]$ . Les extrémités  $-1$  et  $+1$  du segment sont les images respectives des points  $z = -1$  et  $z = 1$  (voir la Figure III.3)

▷ Posons

$$S_1(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad S_3(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi} \text{ et } \Sigma_p(\zeta) = \zeta^p$$

L'image de  $S_1$  est incluse dans  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  et celle de  $S_3$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . De plus  $S_1 \circ S_3 = Id$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $S_3 \circ S_1 = Id$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . Il en résulte que  $S_1$  et  $S_3$  sont bijectives respectivement  $\mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $\mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ .

On aura

$$J = S_3 \circ \Sigma_2 \circ S_1 ;$$

en effet

$$\frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2} = \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = \frac{2(z^2 + 1)}{4z} = J(z).$$

Notons que

$$\begin{aligned} \Re S_1(z) &= \Re \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} \\ \Im S_1(z) &= \Im \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = 2 \frac{\Im z}{|z+1|^2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que si  $|z| > 1$ ,  $\Re S_1(z) > 0$ , réciproquement, si  $\xi$  appartient au demi-plan des complexes de partie réelle positive, alors

$$|S_3(\xi)|^2 = \frac{1 + 2\Re \xi + |\xi|^2}{1 - 2\Re \xi + |\xi|^2} > 1 ;$$

par conséquent,  $S_1$  est une bijection du demi-plan ouvert  $H_0$  des complexes de partie réelle strictement positive sur l'extérieur du cercle unité  $\mathcal{C}_0$ .

La transformation  $\Sigma_2$  est bijective de  $H_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^-\}$  et comme  $S_3$  est surjective :  $\mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ , l'image de  $J$  contient  $\mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup S_3(\mathbb{R}^-))$ . Soit donc  $\xi \in \mathbb{R}^-$ , on aura  $S_3(\xi) \in \mathbb{R}$ , et

$$|S_3(\xi)|^2 = \frac{1 + 2\xi + |\xi|^2}{1 - 2\xi + |\xi|^2} < 1,$$

ce qui prouve que l'image de  $J$  contient l'extérieur du segment du segment  $[-1, 1]$  ; c'est dire en fait que  $J$  est une bijection de l'extérieur du cercle unité sur l'extérieur du segment  $[-1, 1]$  (voir la Figure III.4)

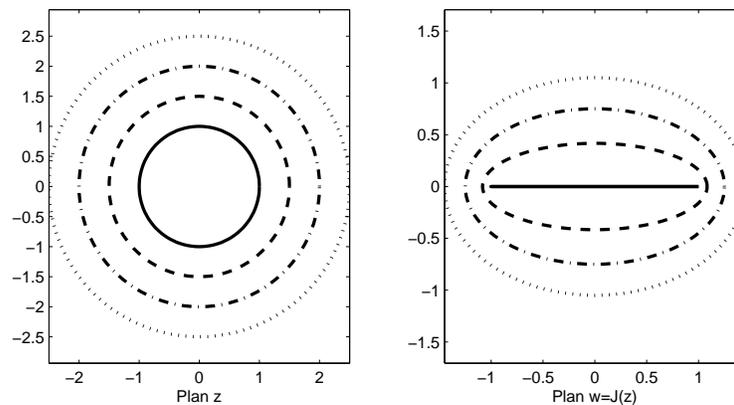


FIGURE III.4 – Transformation conforme à l'extérieur du cercle unité

► La transformation de Joukowski est conforme, en effet

$$J'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

mais aux points  $z = \pm 1$ , on a  $J'(z) = 0$ , la transformation n'est donc plus conforme : en effectuant un

développement à l'ordre supérieur on obtient

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( (h \mp 1) + \frac{1}{h \mp 1} \right) = \frac{1}{2} \left( (h \mp 1) \mp \sum_{n \in \mathbb{N}} (\pm 1)^n h^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (h \mp 1) \mp 1 - h \mp \sum_{n \geq 2} (\pm 1)^n h^n \right) = 1 \mp \frac{h^2}{2} \sum_{n \geq 2} (\pm 1)^n h^{n-2}, \end{aligned}$$

d'où il résulte qu'aux points  $z = 1$  et  $z = -1$ , les angles sont multipliés par 2.

▷ On note  $s(z) = 1/z$ , et  $\mathcal{D}_1$  le cercle de centre 1 passant par l'origine, d'équation  $z = 1 + e^{i\theta}$ , on aura

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{1 + e^{i\theta}} = 1 + \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = 1 + \frac{(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})}{|1 + e^{i\theta}|^2} = 1 + \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{|1 + e^{i\theta}|^2} = 1 - 2i \frac{\sin \theta}{|1 + e^{i\theta}|^2}.$$

De plus  $\sin \theta / |1 + e^{i\theta}|^2$  est une fonction continue de  $\theta$  vérifiant

$$\sin \theta / |1 + e^{i\theta}|^2 = 2 \sin \theta / (1 + \cos \theta) = -4 / (\theta - \pi) + O(\theta - \pi),$$

d'où  $\sin \theta / |1 + e^{i\theta}|^2 \rightarrow \pm \infty$  quand  $\theta \rightarrow \pm \pi$ . Il en résulte que  $s(\mathcal{D}_1)$  est la droite d'équation  $z = 1/2 - it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Si maintenant  $\mathcal{D}_a$  est le cercle de centre  $a$  passant par l'origine, on aura  $\mathcal{D}_a = a\mathcal{D}_1$ , en effet si  $a = \rho e^{i\tau}$ ,  $a(1 + e^{i\theta}) = a + \rho e^{i(\tau+\theta)}$ , et par conséquent  $s(\mathcal{D}_a) = s(\mathcal{D}_1)/a$ , soit la droite d'équation

$$\frac{1}{2a} - \frac{i}{2a} t.$$

▷ Soit  $\mathcal{C}_\sigma$  le cercle centré en  $i\sigma$  qui passe par les points  $z = 1$  et  $z = -1$ . On a

$$S_1(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1} = 1 - 2s(z+1).$$

Comme  $1 + \mathcal{C}_\sigma = \mathcal{D}_a$  où  $a = 1 + i\sigma$ , l'image par  $S_1$  de  $\mathcal{C}_\sigma$  est la droite d'équation

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{i}{a} t = 1 - \frac{1}{1 + i\sigma} + \frac{i}{1 + i\sigma} t = \frac{i(\sigma + t)}{1 + i\sigma}$$

soit en fait la droite  $it/(1 + i\sigma)$ . L'image de  $\mathcal{C}_\sigma$  par  $\Sigma_2 \circ S_1$  est donc la demi-droite d'équation

$$-\frac{1}{(1 + i\sigma)^2} t, \quad t > 0.$$

On a  $S_3(0) = 1$  et  $S_3(+\infty) = -1$ , et comme l'image par  $S_1$  de  $\mathcal{C}_\tau$  est la droite d'équation  $it/(1 + i\tau)$ , l'image par  $S_3 = S_1^{-1}$  de la droite d'équation  $-t/(1 + i\sigma)^2$ , c'est-à-dire l'image par  $J$  de  $\mathcal{C}_\sigma$ , est un arc  $\mathcal{C}_\tau^0$  du cercle  $\mathcal{C}_\tau$  d'extrémités  $z = -1$  et  $z = +1$ , où  $\tau = (\sigma^2 - 1)/2\sigma$  (voir la Figure III.5)

▷ La transformation  $J$  étant dérivable, il suffit qu'elle soit injective dans l'extérieur de  $\mathcal{C}_\sigma$  pour y être conforme. Pour que  $z$  soit extérieur à  $\mathcal{C}_\sigma$  il faut et il suffit que  $|z - i\sigma|^2 > 1 + \sigma^2$ , et pour que  $J(z) = J(z')$  il faut et il suffit que  $zz' = 1$ , on aura alors

$$\begin{aligned} |z' - i\sigma|^2 &= |z'|^2 + \sigma^2 - 2\sigma \Im z' = \frac{1 + 2\sigma \Im z}{|z|^2} + \sigma^2 \\ &= \frac{1 + 2\sigma \Im z + |z|^2 \sigma^2}{|z|^2}. \end{aligned}$$

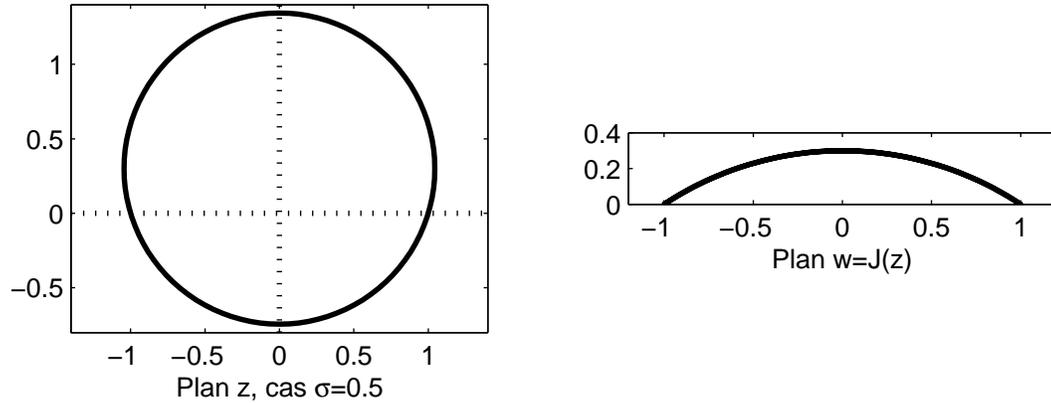


FIGURE III.5 – L'image de  $\mathcal{C}_\sigma$

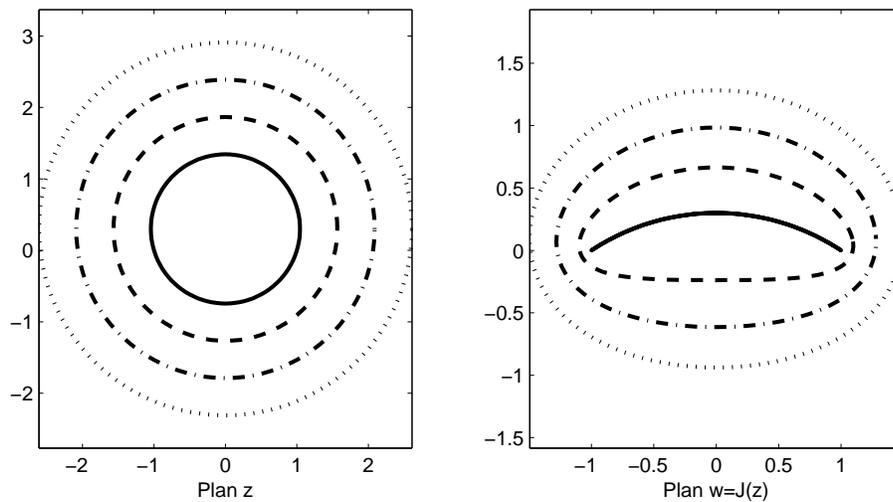


FIGURE III.6 – Transformation conforme à l'extérieur de  $\mathcal{C}_\sigma$

Or  $|z|^2 + \sigma^2 - 2\sigma \Im z = |z - i\sigma|^2 > 1 + \sigma^2$ , d'où  $|z|^2 - 2\sigma \Im z > 1$  et par conséquent

$$|z' - i\sigma|^2 < \frac{|z|^2 + |z|^2 \sigma^2}{|z|^2} = 1 + \sigma^2.$$

Il en résulte que  $z'$  est intérieur à  $\mathcal{C}_\sigma$  et l'injectivité de  $J$  dans l'extérieur de  $\mathcal{C}_\sigma$  (voir la Figure III.6)

▷ Notons  $\mathcal{C}$  un cercle passant par le point  $z = -1$  et contenant  $\mathcal{C}_\sigma$ , son image est contenue dans l'extérieur de  $\mathcal{C}_\tau^0$ , c'est une courbe fermée régulière sauf au point  $w = -1$ , image de  $z = -1$ , qu'on appelle bord de fuite. Elle y admet un point de rebroussement puisque le cercle  $\mathcal{C}$  admet une unique tangente en  $z = -1$ . Comme  $\mathcal{C}$  contient  $\mathcal{C}_\sigma$ , son image contient l'arc de cercle  $\mathcal{C}_\tau^0$  (voir la Figure III.7)

### III.3.2 La transformation de Karmann-Trefftz

L'existence d'un point de rebroussement ne permet pas de considérer  $J(\mathcal{C})$  comme un modèle de profil d'aile adéquat. On est donc amené à modifier la transformation de Joukowski pour la remplacer par la suivante :

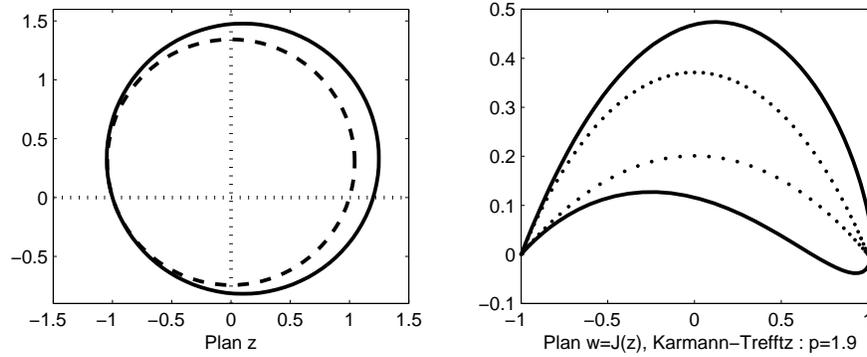


FIGURE III.7 – Un profil de Joukovski

$$K_p(z) = S_3 \circ \Sigma_p \circ S_1(z) \quad 1 < p < 2$$

où  $\Sigma_p(z) = z^p$ ,  $1 < p < 2$  (voir la Figure III.8) Le même raisonnement aboutit au fait que l'image d'un cercle passant par les points  $-1$  et  $1$  par  $\Sigma_p \circ S_1$  est formée de deux demi-droites issues de l'origine, qui par  $S_3$  donnent deux arcs de cercles d'extrémités  $-1$  et  $1$ . qualitativement les résultats sont semblables à ceux découlant de la transformation de Joukowski, mais le bord de fuite n'est plus un point de rebroussement l'angle  $\gamma$  décroît de  $\pi$  à  $0$  quand  $p$  croît de  $1$  à  $2$ .

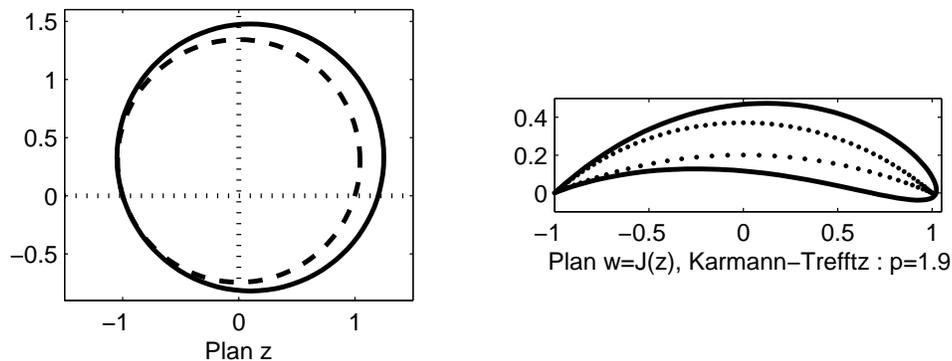


FIGURE III.8 – Un profil de Karmann-Trefftz

### III.4 Écoulement autour du profil

Si  $f$  est le potentiel complexe de l'écoulement autour du cercle, alors  $g = f \circ J^{-1}$  est analytique à l'extérieur du profil et représente donc un potentiel complexe, de plus si  $\psi$  est constante le long du cercle, alors  $\Im m g$  également le long du profil  $J(\gamma)$ , qui constitue donc une ligne de courant.

#### III.4.1 La condition de Kutta-Joukowski

L'indétermination sur la circulation est levée en imposant que la vitesse soit finie au bord de fuite, c'est la condition de Kutta-Joukowski. Au voisinage de  $z = -1$ ,  $J'(z) \sim -(z+1)$ , et par conséquent

$g'(J(z)) = f'(z)/J'(z)$  ne peut être bornée que si  $f'(z)$  s'annule. Les points d'arrêt de l'écoulement autour du cercle (voir la Figure III.9) sont donnés par

$$(z^\pm - i\sigma)e^{-i\alpha} = \frac{i\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{4r^2V_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2V_\infty} ..$$

On imposera donc

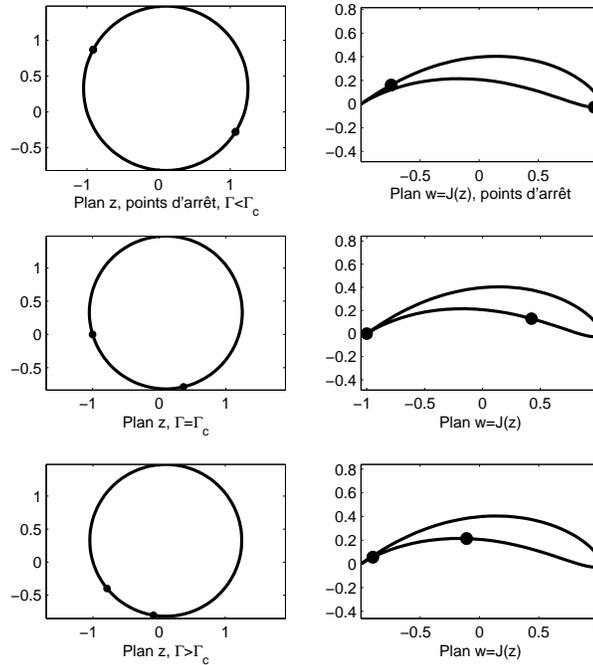


FIGURE III.9 – Les points d'arrêt

$$(-1 - i\sigma)e^{-i\alpha} = \frac{i\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{4r^2V_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2V_\infty},$$

et comme on a choisi de prendre  $4r^2V_\infty^2 - \Gamma^2/4\pi^2 > 0$ , il en résulte que

$$\Im((-1 - i\sigma)(\cos \alpha - i \sin \alpha)) = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty},$$

soit

$$\Gamma = 4\pi V_\infty (\sin \alpha - \sigma \cos \alpha).$$

### III.4.2 Les efforts sur le profil

Les formules de Blasius

$$F = F_1 + iF_2 = -i\rho V_\infty \Gamma e^{i\alpha},$$

nous prouvent alors que

$$F_1 = 4\pi\rho V_\infty^2 (\sin\alpha - \sigma \cos\alpha) \sin\alpha$$
$$F_2 = -4\pi\rho V_\infty^2 (\sin\alpha - \sigma \cos\alpha) \cos\alpha.$$

## Appendice A

# Trigonométrie

Rappelons que

$$\cos z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } \sin z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad (\text{A.1})$$

et nous allons voir que *les formules classiques pour une variable réelle s'étendent au cas complexe*. Posons

$$x = \Re z \text{ et } y = \Im z,$$

nous aurons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

d'où

$$\Re e^z = e^x \cos y \text{ et } \Im e^z = e^x \sin y, \quad (\text{A.2})$$

et

$$|e^z| = e^x (\cos^2 y + \sin^2 y)^{1/2} = e^x \text{ d'où } |e^{iy}| = e^0 = 1. \quad (\text{A.3})$$

Soit  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} (\cos y + i \sin y)(\cos y' + i \sin y') &= e^{iy} e^{iy'} = e^{i(y+y')} = \cos(y+y') + i \sin(y+y') \\ (\cos y + i \sin y)(\cos y' + i \sin y') &= \cos y \cos y' - \sin y \sin y' + i(\sin y \cos y' + \sin y' \cos y), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos(y+y') &= \cos y \cos y' - \sin y \sin y' \\ \sin(y+y') &= \sin y \cos y' + \sin y' \cos y. \end{aligned}$$

En vertu du principe du prolongement analytique 2.7 ces relations restent vérifiées lorsque  $y \in \mathbb{R}$  est remplacé par  $z \in \mathbb{C}$  et finalement lorsque  $y'$  est remplacé par  $z' \in \mathbb{C}$ , soit

$$\begin{aligned} \cos(z+z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \\ \sin(z+z') &= \sin z \cos z' + \sin z' \cos z. \end{aligned}$$

Avec

$$z = \frac{p+q}{2} \text{ et } z' = \frac{p-q}{2},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\cos p &= \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} - \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos q &= \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} + \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin p &= \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} + \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \sin q &= \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} - \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.\end{aligned}$$

## Appendice B

# Substitution des séries entières

Commençons par le cas de deux polynômes ; posons

$$s_N(t) = \sum_{m \leq N} a_m t^m \text{ et } t_N(z) = \sum_{n \leq N} b_n z^n$$

et déterminons le polynôme  $s_N \circ t_N(z)$ . Notons à cet effet  $D_N^m$  l'ensemble des  $m$ -uplets  $(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_m)$  tels que  $0 \leq n_i \leq N$ , où  $1 \leq m \leq N$ . Les  $D_N^m$  seront (par exemple !) rangés dans l'ordre lexicographique :

$$\begin{aligned} D_1^1 &= (0), (1) \\ D_2^1 &= (0), (1), (2), \\ D_2^2 &= (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2) \\ D_3^1 &= (0), (1), (2), (3) \\ D_3^2 &= (0, 0), \dots, (0, 3), (1, 0), \dots, (1, 3), (2, 0), \dots, (2, 3), (3, 0), \dots, (3, 3) \\ D_3^3 &= (0, 0, 0), \dots, (0, 0, 3), (0, 1, 0), \dots, (0, 1, 3), \dots, (3, 3, 0), \dots, (3, 3, 3) \end{aligned}$$

On aura tout d'abord pour  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} (t_N(z))^m &= \left( \sum_{n \leq N} b_n z^n \right)^m = \sum_{n_1 \leq N, \dots, n_m \leq N} b_{n_1} \cdots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m} \\ &= \sum_{(n_i) \in D_N^m} b_{n_1} \cdots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

d'où, avec  $h_N = s_N \circ t_N$

$$\begin{aligned} h_N(z) &= a_0 + \sum_{1 \leq m \leq N} a_m \sum_{(n_i) \in D_N^m} b_{n_1} \cdots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m} \\ &= a_0 + \sum_{0 \leq p \leq N^2} z^p \sum_{1 \leq m \leq N} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D_N^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m} \end{aligned}$$

soit

$$h_N(z) = a_0 + \sum_{0 \leq p \leq N^2} c_p^N z^p \text{ où } c_p^N = \sum_{1 \leq m \leq N} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D_N^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m} \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas où  $N = 2$ , par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} h_2(z) &= a_0 \\ &+ z^0 (a_1 b_0 + a_2 b_0^2) \\ &+ z (a_1 b_1 + a_2 (b_0 b_1 + b_1 b_0)) \\ &+ z^2 (a_1 b_2 + a_2 (b_0 b_2 + b_2 b_0 + b_1^2)) \\ &+ z^3 (a_2 (b_1 b_2 + b_2 b_1)) \\ &+ z^4 a_2 b_2^2 \end{aligned}$$

Etudions maintenant le cas des séries :  $s(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z^m$  et  $t(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ , l'observation de la formule (B.1) nous invite à considérer la série

$$a_0 + \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p \text{ où } c_p = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m}, \quad (\text{B.3})$$

et  $D^m = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} D_N^m$ .

**PROPOSITION B.1** Soit  $s(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m z^m$  une série entière de rayon de convergence  $\rho(s)$  et  $t(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho(t)$ . On pose  $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| z^n$  et on suppose qu'il existe  $r$  tel que  $0 < r < \rho(t)$  et  $T(|z|) < \rho(s)$ ,  $\forall |z| < r$ . Alors pour  $|z| < r$  on a  $|t(z)| < \rho(s)$ , et  $s \circ t(z)$  est la somme de la série  $a_0 + \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p$ , où  $c_p$  est la somme de la série absolument convergente

$$c_p = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m}.$$

**DÉMONSTRATION.** Nous supposons désormais que  $z$  est fixé et vérifie  $|z| < r$ .

▷ Posons tout d'abord

$$S(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| z^m$$

puis

$$\begin{aligned} H_N(z) &= |a_0| + \sum_{1 \leq m \leq N} \sum_{(n_i) \in D_N^m} |a_m| |b_{n_1}| \cdots |b_{n_m}| z^{n_1 + \dots + n_m} \\ &= |a_0| + \sum_{1 \leq m \leq N} |a_m| \sum_{(n_i) \in D_N^m} |b_{n_1}| \cdots |b_{n_m}| z^{n_1 + \dots + n_m}. \end{aligned}$$

La suite  $H_N(|z|)$  est croissante, et on a

$$\begin{aligned} H_N(|z|) &= S_N \circ T_N(|z|) = \sum_{m \leq N} |a_m| \left( \sum_{n \leq N} |b_n| |z|^n \right)^m \\ &\leq \sum_{m \leq N} |a_m| (T(|z|))^m \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_m| (T(|z|))^m = C. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ce qui prouve que la suite  $H_N(|z|)$  converge, c'est-à-dire que la série

$$h(z) = a_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sum_{(n_i) \in D^m} a_m b_{n_1} \cdots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m} = a_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{(n_i) \in D^m} b_{n_1} \cdots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m}$$

est absolument convergente.

▷ Montrons maintenant que  $s \circ t(z) = h(z)$ . On aura

$$h(z) - s \circ t(z) = (h(z) - h_N(z)) + (s_N(t_N(z)) - s(t_N(z))) + (s(t_N(z)) - s(t(z)))$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on sait déjà que, pour  $N$  assez grand,  $|h(z) - h_N(z)| < \varepsilon/3$ . Mais de plus, comme  $|t(z)| \leq T(|z|) < \rho(s)$ , on peut choisir  $\theta$  tel que  $|t(z)| < \theta < \rho(s)$ , et pour  $N$  assez grand, on aura  $|t_N(z)| < \theta$ , puisque  $t_N(z) \rightarrow t(z)$ . Comme  $s_N$  converge uniformément vers  $s$  dans le disque de rayon  $\theta$ , quitte à augmenter  $N$ , on aura  $|s_N(t_N(z)) - s(t_N(z))| < \varepsilon/3$ , et par continuité de  $s$  dans son disque de convergence, toujours quitte à augmenter  $N$ ,  $|s(t_N(z)) - s(t(z))| \leq \varepsilon/3$ . Il en résulte que  $h(z) = s \circ t(z)$ .

▷ Il s'agit maintenant de montrer que  $h(z) = a_0 + \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p$ . Montrons tout d'abord que les séries  $c_p = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m}$  convergent absolument. Considérons la série

$$z^p c_p = z^p \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m \sum_{\substack{(n_i) \in D^m \\ n_1 + \dots + n_m = p}} b_{n_1} \cdots b_{n_m},$$

c'est une série partielle de  $h(z)$ , qui converge donc absolument pour  $|z| < r$ ; il en est donc de même de  $c_p$ . Bien plus,  $\sum_{p \leq N} c_p z^p$  est encore une série partielle de  $h(z)$  et par conséquent, selon (B.4) on aura

$$\sum_{p \leq N} |c_p| |z|^p \leq C,$$

ce qui prouve que la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p$  converge absolument.

▷ Notons enfin que si  $(n_i) \in D_N^m$ , on a  $n_1 + \dots + n_m \leq mN$ , d'où il résulte que les termes qui composent  $h_N(z)$  figurent dans la somme partielle  $a_0 + \sum_{p \leq N^2} c_p z^p$ . et par conséquent, pour  $q \geq N^2$ ,

$$\left| a_0 + \sum_{p \leq q} c_p z^p - h_N(z) \right| \leq |a_0| + \sum_{p \leq q} |c_p| |z|^p - H_N(|z|) \leq H(|z|) - H_N(|z|).$$

Fixons alors  $\varepsilon > 0$ , pour  $N$  assez grand, on aura

$$H(|z|) - H_N(|z|) < \varepsilon/2 \text{ ainsi que } |h(z) - h_N(z)| \leq \varepsilon/2.$$

Il en résulte que

$$\left| a_0 + \sum_{p \leq q} c_p z^p - h(z) \right| \leq \left| a_0 + \sum_{p \leq q} c_p z^p - h_N(z) \right| + |h(z) - h_N(z)| \leq \varepsilon.$$

*Q.E.D.*



## Appendice C

# Calcul pratique de l'indice

Au prix d'une éventuelle translation, on se limitera au cas de la détermination de l'indice de l'origine par rapport au lacet  $\lambda = \gamma - a$ , puisque

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} \frac{1}{\zeta} d\zeta = n(\lambda; 0).$$

Fixons  $\theta$  et supposons que la droite  $\delta : s \rightarrow se^{i\theta}$  ne rencontre  $\lambda$  qu'en un nombre fini  $N - 1$  de points. Opérons une rotation et posons  $\lambda(t) e^{-i\theta} = u(t) + iv(t)$ , où  $u$  et  $v$  sont réels. Une intersection  $m_i$  correspondra à un couple de paramètres réels  $t_i$  et  $s_i$  tels que  $m_i = \lambda(t_i) = s_i e^{i\theta}$ , soit  $u(t_i) = s_i$  et  $v(t_i) = 0$ . On choisira d'ordonner les  $t_i$  selon  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  avec  $\lambda(t_1) = \lambda(t_N)$ . On peut paramétrer  $\lambda$  dans l'intervalle  $[t_1, t_N]$  et comme  $\gamma$  est fermé, prolonger ce paramétrage par périodicité à  $\mathbb{R}$  tout entier. On répartira alors les points  $m_i$  en quatre catégories

- ◊  $\mathbf{C}_1 = \{m_i \mid u(t_i) > 0 \text{ et } v(t) \text{ croissant au voisinage de } t_i\}$
- ◊  $\mathbf{C}_2 = \{m_i \mid u(t_i) > 0 \text{ et } v(t) \text{ décroissant au voisinage de } t_i\}$
- ◊  $\mathbf{C}_3 = \{m_i \mid u(t_i) < 0 \text{ et } v(t) \text{ croissant au voisinage de } t_i\}$
- ◊  $\mathbf{C}_4 = \{m_i \mid u(t_i) < 0 \text{ et } v(t) \text{ décroissant au voisinage de } t_i\}$

Notons que  $m_1$  et  $m_N$  appartiennent au même ensemble  $\mathbf{C}_k$  en raison de la périodicité, et que  $N$  est impair car les signes de  $v(t_1 - \varepsilon)$  et de  $v(t_N + \varepsilon)$  sont opposés alors que  $v$  a changé  $N$  fois de signe. Notons également que si  $m_i \in \mathbf{C}_k$ , alors  $m_{i+1} \in \mathbf{C}_{k-1} \cup \mathbf{C}_{k+1} \pmod{4}$ .

On aura

$$n(\lambda; 0) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{z} dz.$$

Posons alors

$$\delta_i = 1 \text{ si } m_i \in \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_4 \text{ et } \delta_i = -1 \text{ si } m_i \in \mathbf{C}_2 \cup \mathbf{C}_3 ; \tag{C.1}$$

pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , on aura  $u(t) + iv(t) = \rho(t) e^{i\tau(t)}$ , où  $\tau(t_i) = 0$  pour  $t_i \in \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$  et  $\tau(t_i) = \pi$  pour  $t_i \in \mathbf{C}_3 \cup \mathbf{C}_4$  ; il en résulte que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{u'(t) + iv'(t)}{u(t) + iv(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tau'(t) dt,$$

d'où

$$\Re\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} dt\right) = \frac{1}{2\pi} (\tau(t_{i+1}) - \tau(t_i)).$$

Selon le tableau suivant

$\tau$	$\delta$	$t_i$	$t_{i+1}$	$\delta$	$\tau$
0	1	$C_1$	$C_4$	1	$\pi$
0	1	$C_1$	$C_2$	-1	0
0	-1	$C_2$	$C_1$	1	0
0	-1	$C_2$	$C_3$	-1	$-\pi$
$\pi$	-1	$C_3$	$C_2$	-1	0
$\pi$	-1	$C_3$	$C_4$	1	$\pi$
$\pi$	1	$C_4$	$C_3$	-1	$\pi$
$-\pi$	1	$C_4$	$C_1$	1	0

on a

$$\tau(t_{i+1}) - \tau(t_i) = \frac{\pi}{2} (\delta_i + \delta_{i+1}).$$

Il en résulte que

$$n(\lambda; 0) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_i + \delta_{i+1}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \delta_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \delta_i, \tag{C.2}$$

puisque  $\delta_N = \delta_1$ .

La méthode pratique est donc la suivante : si on veut déterminer l'indice du point  $a$  par rapport au lacet  $\gamma$ , on trace une droite  $\Delta$  passant par  $a$ , on repère les intersections  $m_i$  de  $\Delta$  avec  $\gamma$ , à chacune desquelles on associe le nombre  $\delta_i = +1$  si, vu de  $a$ ,  $\gamma$  est parcourue dans le sens direct au voisinage de  $m_i$ , et le nombre  $\delta_i = -1$  si  $\gamma$  est parcourue dans le sens rétrograde. L'indice est alors la demi-somme de tous ces nombres.



Dans le cas particulier où  $C_1 \cup C_2$  ne contient qu'un seul élément, soit par exemple  $m_1 \in C_1$ , on aura  $m_i \in C_4$  si  $i$  est pair et  $m_i \in C_3$  si  $i$  est impair. Comme  $N$  est impair, on aura  $\sum_{i=2}^{N-2} \delta_i = 0$  et  $m_{N-1} \in C_4$ , d'où

$$n(\lambda; 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \delta_i = 1. \tag{C.3}$$

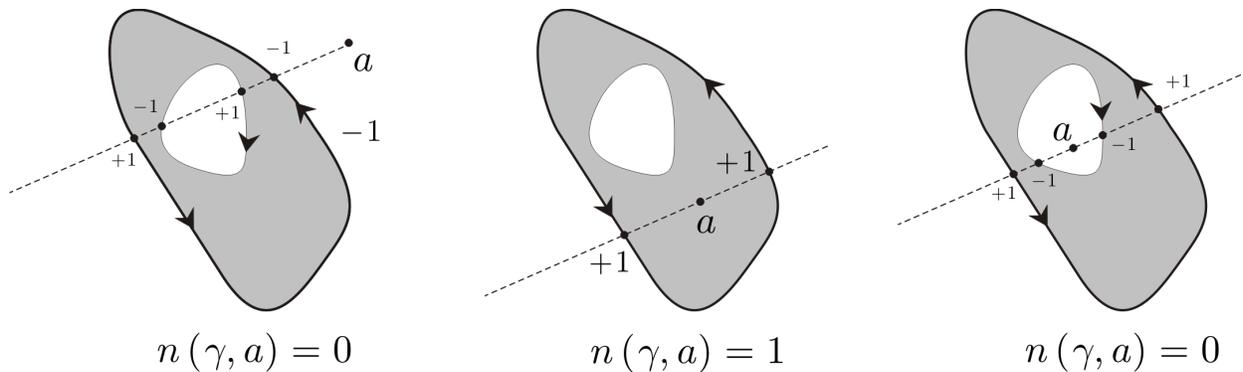


FIGURE C.1 – Calculs d'indices : bord orienté d'un compact

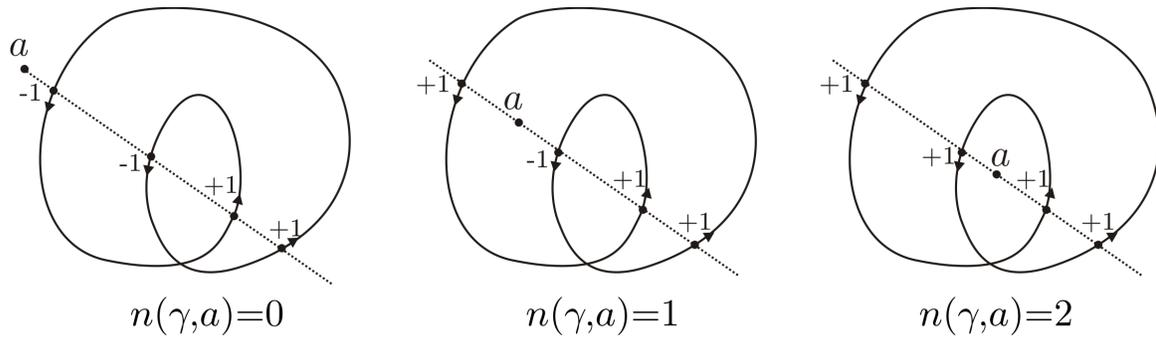


FIGURE C.2 – Calculs d'indices : premier cas

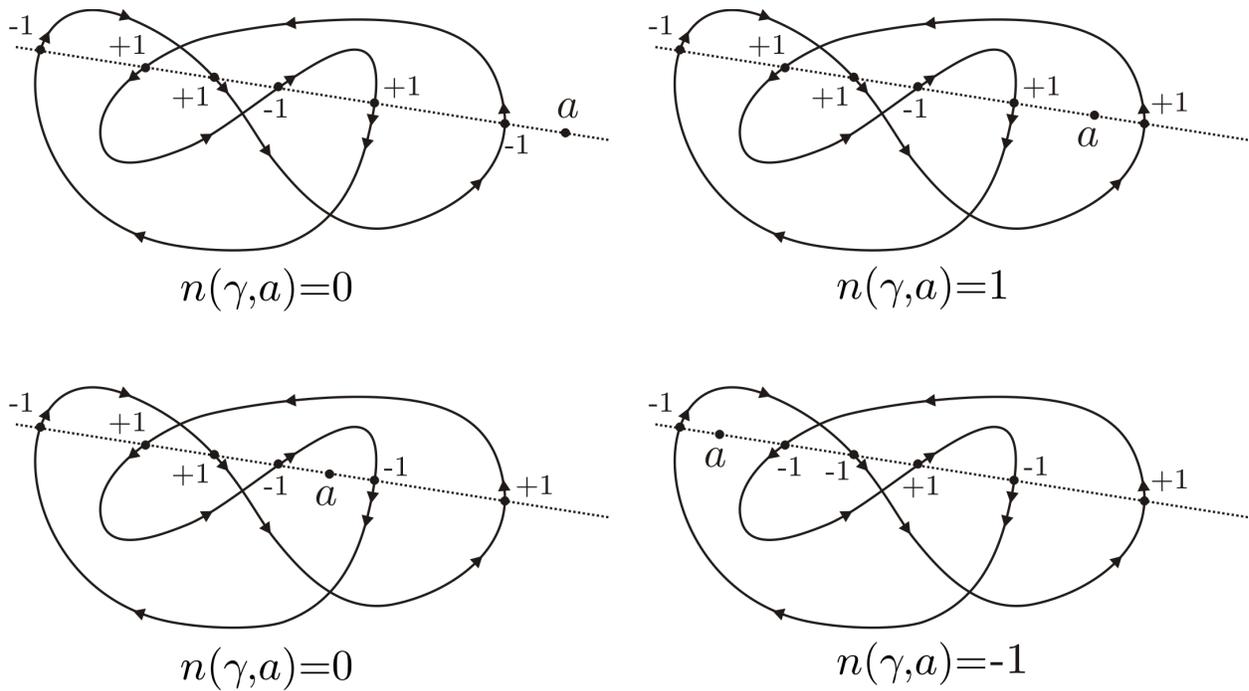


FIGURE C.3 – Calculs d'indices : second cas



# Appendice D

## Connexité

### DÉFINITION D.1

(i) Un espace  $E$  est connexe si aucune de ses parties autre que  $\emptyset$  ou  $E$  n'est à la fois ouverte et fermée. C'est également dire qu'un espace connexe n'admet pas de partition formée de deux ouverts ou, de façon équivalente, de deux fermés non vides. ♡

(ii) Deux points d'un espace  $E$  sont connectés s'il existe une partie connexe de  $E$  qui les contienne.

Notons bien ici qu'il s'agit d'un espace connexe. Si on veut parler de la connexité de  $\Omega \subset E$ , il faut considérer  $\Omega$  comme un espace topologique muni de la topologie induite par celle de  $E$ , soit celle dont les ouverts sont les restrictions à  $\Omega$  des ouverts de  $E$ . En particulier, un ensemble peut être ouvert dans  $\Omega$  sans l'être dans  $E$  ; cependant, si  $\Omega$  est un ouvert de  $E$ , alors un ouvert de  $\Omega$  est ouvert dans  $E$ , et de même si  $\Omega$  est un fermé de  $E$ , alors un fermé de  $\Omega$  est fermé dans  $E$ . ♠

PROPOSITION D.2 Si  $A$  est ouvert et fermé dans  $\Omega$ , si  $\omega$  est connexe et si  $A \cap \omega \neq \emptyset$ , alors  $\omega \subset A$ .

DÉMONSTRATION. On a en effet  $\omega = (\omega \cap A) \cup (\omega \cap A^c)$ , qui constituent l'union disjointe de deux ouverts de la topologie induite sur  $\omega$ . Il en résulte que  $\omega = \omega \cap A$ .

Q.E.D.

### PROPOSITION D.3

(i) L'image continue d'un espace connexe  $E$  est connexe.

(ii) L'adhérence dans  $E$  d'une partie connexe  $A$  d'un espace  $E$  est connexe.

DÉMONSTRATION.

▷ Supposons en effet que  $f(E)$  ne soit pas connexe, alors on aurait  $f(E) = A \cup B$ , où  $A$  et  $B$  sont ouverts disjoints et non vides. et on aurait  $E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ , où  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$  sont ouverts disjoints et non vides, ce qui constitue une contradiction.

▷ Supposons que  $\bar{A} = C \cup D$ , où  $C$  et  $D$  sont des parties disjointes non vides, fermées relativement à  $\bar{A}$ . Elles sont donc fermées relativement à  $E$ , ce qui prouve que  $A = (A \cap C) \cup (A \cap D)$ , où  $A \cap C$  et  $A \cap D$  sont disjointes et fermées relativement à  $A$ . Comme  $A$  est connexe, il en résulte que l'une des deux, soit par exemple  $A \cap D$  est vide ; on aura donc  $A \subset C$ , et comme  $C$  est fermée, en fait  $\bar{A} \subset C$ , ce qui constitue une contradiction.

Q.E.D.

**PROPOSITION D.4** *L'union  $A$  d'une famille de parties connexes  $A_i$ ,  $i \in I$  ayant deux à deux une intersection non vide est connexe.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons le contraire, alors  $A = C \cup D$ , où  $C$  et  $D$  sont des ouverts disjoints non vides. Les  $A_i \cap C$  et  $A_i \cap D$  ont pour union  $A_i$ , sont disjoints et ouverts relativement à  $A_i$ , d'où il résulte que l'un d'entre eux est vide et l'autre égal à  $A_i$ . C'est dire que chaque  $A_i$  est tout entière contenue dans l'un de  $C$  ou  $D$ , et comme deux quelconques des  $A_i$  ont une intersection non vide, c'est que tous les  $A_i$  sont inclus dans le même  $C$  ou  $D$ . Il en résulte qu'il en est de même de  $A$ , ce qui constitue une contradiction.

*Q.E.D.*

**PROPOSITION D.5** *La relation de connexion est une relation d'équivalence.*

**DÉMONSTRATION.** Montrons la transitivité : supposons à cet effet que d'une part  $x$  et  $y$  et d'autre part  $y$  et  $z$  soient connectés. Il existe donc  $A$  et  $B$  connexes contenant respectivement  $x$  et  $y$  et  $y$  et  $z$ . En vertu de la proposition D.4, comme  $A \cap B$  n'est pas vide,  $A \cup B$  est connexe, d'où il résulte que  $x$  et  $z$  sont connectés.

*Q.E.D.*

Une classe d'équivalence pour cette relation s'appelle une *composante connexe* ; les composantes connexes sont disjointes et l'espace entier est la réunion de ses composantes connexes.

**PROPOSITION D.6**

- (i) *La composante connexe  $E_x$  d'un point  $x$  dans  $E$  est la plus grande partie connexe de  $E$  le contenant.*
- (ii) *Une composante connexe de  $E$  est fermée dans  $E$ .*

**DÉMONSTRATION.**

▷ Si  $A$  est connexe et contient  $x$ , alors tous les points de  $A$  sont connectés à  $x$ , d'où il résulte que  $A \subset E_x$ . C'est dire que  $E_x$  contient l'union des parties connexes contenant  $x$ . Réciproquement si  $y \in E_x$ , il est connecté à  $x$  et donc contenu dans une partie connexe  $B$  contenant  $x$ . Il en résulte que  $E_x$  est égal à l'union des parties connexes contenant  $x$ . Comme ces parties contiennent toutes  $x$ , il résulte de la proposition D.4 que  $E_x$  est connexe et le résultat annoncé.

▷ D'après la proposition D.3,  $\overline{E_x}$  est connexe, et par conséquent  $E_x = \overline{E_x}$ .

*Q.E.D.*

♠ Notons que si  $B$  est une partie de  $A$  et  $C$  une composante connexe de  $B$ ,  $C$  n'est pas nécessairement fermée dans  $E$ , ainsi qu'on le constate avec par exemple  $E = \mathbb{R}$  et  $B = ]0, 1[ \cup ]2, 3[$ .

La notion de connexité est un outil théorique, d'utilisation commode dans les démonstrations, mais guère d'un point de vue pratique pour décider de la connexité de tel ou tel ensemble concret.

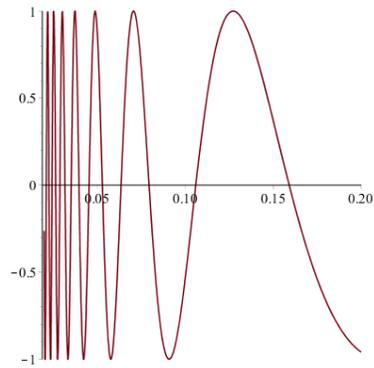
♥ **DÉFINITION D.7** *Un espace  $E$  est connexe par arcs si deux quelconques de ses points, soient  $a$  et  $b$ , peuvent être joints par un arc, c'est-à-dire s'il existe une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .*

Cette notion est plus concrète, et il est souvent (mais pas toujours) assez facile de montrer qu'un ensemble explicitement défini est ou non connexe.

**PROPOSITION D.8** *Un espace  $E$  connexe par arcs est connexe.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $E$  ne soit pas connexe, alors  $E = A \cup B$  où  $A$  et  $B$  sont des ouverts (ainsi d'ailleurs que des fermés) disjoints non vides. Soient  $a$  et  $b$  appartenant respectivement à  $A$  et  $B$ , par hypothèse, ils peuvent être joints par un chemin continu, soit  $\gamma$ . En vertu de la proposition D.3, le chemin  $\gamma$  est connexe, et il est clair que  $\gamma \cap A$  et  $\gamma \cap B$  en constituent une partition. Comme  $A$  et  $B$  sont ouverts pour la topologie de  $E$ ,  $\gamma \cap A$  et  $\gamma \cap B$  le sont pour la topologie induite de  $\gamma$ , ce qui constitue une contradiction, puisqu'aucun des deux n'est vide.

*Q.E.D.*

FIGURE D.1 – L'ensemble  $A$ 

La réciproque est généralement fautive, ainsi qu'on le constate sur l'exemple suivant.

▷ Notons  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.2 \geq x > 0 \text{ et } y = \sin 1/x\}$  et  $B = A \cup C$  où  $C = \{0\} \times [-1, 1]$ . L'ensemble  $A$  est connexe en tant que image continue du segment  $]0, 0.2]$ . Soit  $(x_n, y_n)$  une suite dans  $A$ , qui converge vers  $(x, y)$ . Nécessairement  $y \in [-1, 1]$  qui est fermé et si  $x \neq 0$ , alors  $y = \sin 1/x$ ; c'est dire que  $\bar{A} \subset B$ . Réciproquement  $\bar{B} \subset \bar{A} \cup \bar{C} = \bar{A} \cup C \subset B \cup C = B$ ; il en résulte que  $B$  est connexe en tant que adhérence de  $A$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

▷ Notons par ailleurs  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  un chemin continu dans  $B$  d'origine  $(0, 1)$  et d'extrémité  $(x, y)$  avec  $x > 0$  et posons  $\tau = \sup \{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) = 0\}$ ; par continuité, cette borne est atteinte dans  $[0, 1]$  et on aura  $\gamma(\tau) = (0, \gamma_2(\tau))$ . Choisissons  $\eta \in [-1, 1]$  et considérons une suite décroissante  $\tau_n$  tendant vers  $\tau$ ; . Pour  $n'$  assez grand, on aura  $0 < x_{n'} = (\arcsin \eta + n'\pi)^{-1} < \gamma_1(\tau_n)$ , et par conséquent comme  $\gamma_1$  est continue sur  $[\tau, \tau_n]$ ,  $\exists t_n \in [\tau, \tau_n]$  tel que  $\gamma_1(t_n) = x_{n'}$ . Notons alors que  $\gamma_2(t_n) = \eta$  ce qui est incompatible avec la continuité de  $\gamma_2$  puisque  $t_n \rightarrow \tau$  et que  $\eta$  peut être choisie arbitrairement;  $B$  n'est par conséquent pas connexe par arcs.

#### DÉFINITION D.9

(i) Un espace  $E$  est localement connexe si tout point de  $E$  possède un système fondamental de voisinages connexes, c'est-à-dire si tout voisinage d'un point contient un voisinage connexe de ce point.

(ii) Un espace  $E$  est localement connexe par arcs si tout point de  $E$  possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

**PROPOSITION D.10** Dans un espace localement connexe, toute composante connexe est à la fois ouverte et fermée.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $E_x$  la composante connexe de  $x$  et  $y \in E_x$ . Soit  $V$  un voisinage connexe de  $y$ , comme tous ses points sont connectés à  $y$ , ils le sont également à  $x$ , et par conséquent  $V \subset E_x$ , ce qui montre que  $E_x$  est ouvert. Selon la proposition D.6,  $E_x$  est également fermée.

Q.E.D.

**PROPOSITION D.11** Soit  $E$  un espace localement connexe par arcs, s'il est connexe, alors il est connexe par arcs, sinon chacune de ses composantes connexes est ouverte, fermée et connexe par arcs.

**DÉMONSTRATION.**

▷ Soit  $x \in E$  et  $\tilde{E}_x$  l'ensemble des points qui peuvent être joints à  $x$  par un chemin continu. Soit  $y \in \tilde{E}_x$  et  $\tilde{V}$  un voisinage de  $y$  dont tous les points puissent lui être joints par un chemin continu. Il est clair que si  $z \in \tilde{V}$ , il peut être joint à  $x$ , et par conséquent  $\tilde{V} \subset \tilde{E}_x$ , ce qui montre que  $\tilde{E}_x$  est ouvert.

▷ Montrons que  $\tilde{E}_x$  est fermé, et considérons à cet effet son complémentaire  $\tilde{F}_x$ . Soit  $y \in \tilde{F}_x$  et  $\tilde{W}$  un voisinage de  $y$  dont tous les points puissent lui être joints par un chemin. Aucun point  $z$  de  $\tilde{W}$  ne peut appartenir à  $\tilde{E}_x$ , car sinon on pourrait joindre  $x$  à  $y$  par l'intermédiaire de  $z$ . Il en résulte que  $\tilde{F}_x$  est ouvert et par conséquent  $\tilde{E}_x$  fermé.

▷ Notons  $E_x$  la composante connexe de  $x$ , comme  $\tilde{E}_x$  est connexe puisque connexe par arcs, on aura  $\tilde{E}_x \subset E_x$ , et comme  $E_x$  est connexe et  $\tilde{E}_x$  à la fois ouvert, fermé et non vide, on aura  $\tilde{E}_x = E_x$ . Ce qui montre que  $E_x$  est ouvert, fermé et connexe par arcs.

▷ Si de plus  $E$  est connexe, comme  $\tilde{E}_x$  est ouvert, fermé et non vide, on aura  $E = \tilde{E}_x$ , ce qui prouve que  $E$  est connexe par arcs.

Q.E.D.

On peut maintenant noter qu'un ouvert  $\Omega$  d'un espace métrique (par exemple  $\mathbb{C}$ ) est localement connexe par arcs, en effet tout point de  $\Omega$  est contenu dans une boule incluse dans  $\Omega$ , et une boule est connexe par arcs.

**COROLLAIRE D.12** *Si  $\Omega$  est un ouvert dans un espace métrique  $E$ , alors les composantes connexes de  $\Omega$  sont ouvertes dans cet espace.*

**DÉMONSTRATION.** Selon la proposition **D.11**, les composantes connexes de  $\Omega$  sont ouvertes dans  $\Omega$ , et donc dans  $E$ , puisque  $\Omega$  est un ouvert de  $E$ .

Q.E.D.

En ce qui nous concerne nous n'aurons donc pas à faire de différence entre connexité et connexité par arcs lorsqu'il s'agit d'ouverts de  $\mathbb{C}$ .

## Appendice E

# La transformation de Fourier des distributions

Dans ce chapitre nous utilisons la définition suivante de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable :

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx,$$

celle des distributions s'en déduira par transposition selon la formule suivante :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

On vérifie aisément qu'une telle formule est exacte dans le cas où  $T$  est associée à une fonction intégrable. Cependant  $\varphi$  et  $\widehat{\varphi}$  ne peuvent pas conjointement être à support compact ce qui ne permet pas de définir la transformée de Fourier de n'importe quelle distribution. Ceci conduit à la définition d'un espace de fonctions test  $\mathcal{S}$  contenant  $\mathcal{D}$  qui soit stable par la transformation de Fourier, c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}.$$

### E.1 Transformation de Fourier des fonctions à décroissance rapide

#### E.1.1 L'espace $\mathcal{S}$

DÉFINITION E.1 On note  $\mathcal{S}$  l'espace vectoriel des fonctions  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  telles que

$$|x|^j \varphi^{(m)}(x) \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty \quad (\text{E.1})$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ .

On munit  $\mathcal{S}$  de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$p_{j,m}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^j |\varphi^{(m)}(x)|$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Cette famille de semi-normes étant dénombrable, l'espace  $\mathcal{S}$  est métrisable. De plus, on vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION E.2

- (i) L'espace  $\mathcal{S}$  est complet.
- (ii) L'injection de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{S}$  est continue.
- (iii) L'espace  $\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{S}$ .
- (iv) La dérivation est une application continue de  $\mathcal{S}$  dans lui-même.
- (v) Si  $q$  est un polynôme, l'application  $\varphi \rightarrow q\varphi$  est une application continue de  $\mathcal{S}$  dans lui-même.

### E.1.2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$

**THÉORÈME E.3** La transformation de Fourier est une application linéaire continue de  $\mathcal{S}$  dans lui-même.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors  $x^j \varphi^{(m)}(x)$  est intégrable pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ . Pour s'en convaincre, on peut remarquer par exemple que la fonction  $|x|^{j+n+1} \partial^\alpha \varphi(x)$  est régulière et tend vers 0 à l'infini. Elle est donc bornée sur  $\mathbb{R}$  et ceci prouve que  $x^j \varphi^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Ceci prouve que  $\widehat{\varphi}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui tend vers 0 à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées, plus vite que toute puissance de  $1/\xi$ . Autrement dit,  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ .

▷ L'application  $\mathcal{F}$  est continue de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ ; comme elle est linéaire, il suffit de montrer que si  $\varphi_k$  est une suite tendant vers 0 dans  $\mathcal{S}$ , alors il en est de même pour  $\widehat{\varphi}_k$ . Comme  $\xi^n \widehat{\varphi}_k^{(m)} = \mathcal{F}((x^m \varphi_k)^{(n)})$ , on aura

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi^n \widehat{\varphi}_k^{(m)} \right| \leq \| (x^m \varphi_k)^{(n)} \|_{L^1},$$

et le résultat en découle aisément.

Q.E.D.

## E.2 Transformation de Fourier des distributions tempérées

### E.2.1 L'espace $\mathcal{S}'$

**DÉFINITION E.4** On appelle espace des distributions tempérées et on note  $\mathcal{S}'$  l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}$ .

Par définition, si  $T$  est une distribution tempérée, il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une constante  $C$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq j \leq k, 0 \leq m \leq k} p_{j,m}(\varphi). \quad (\text{E.2})$$

La topologie de  $\mathcal{S}'$  coïncide pour les suites avec celle du dual faible de  $\mathcal{S}$  : une suite  $T_k$  de  $\mathcal{S}'$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{S}'$  si et seulement si on a :

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

De la proposition E.2, on déduit le

**THÉORÈME E.5** Soit  $T \in \mathcal{D}'$ . Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une constante  $C$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq j \leq k, 0 \leq m \leq k} p_{j,m}(\varphi), \quad (\text{E.3})$$

alors  $T$  se prolonge d'une manière unique en une distribution tempérée.

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ , d'après la proposition E.2, il existe une suite  $\varphi_k \in \mathcal{D}$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}$ . D'après la majoration (E.3), il en résulte que  $\langle T, \varphi_k \rangle$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . On vérifie aisément que sa limite ne dépend que de  $\varphi$  (et non de la suite  $\varphi_k$ ), on la note donc  $\langle T, \varphi \rangle$ . Il est facile de voir que  $T$  ainsi définie vérifie (E.2), c'est donc une distribution tempérée.

Q.E.D.

Ceci montre que l'on peut identifier  $\mathcal{S}'$  à un sous-espace (strict) de  $\mathcal{D}'$ .

**Quelques exemples et contre-exemples :**

- (i) Les distributions à support compact sont des distributions tempérées.
- (ii) Les fonctions intégrables définissent des distributions tempérées.
- (iii) De même, si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $x^m f(x)$  définit une distribution tempérée, en particulier, une fonction polynômiale définit une distribution tempérée.
- (iv) La fonction  $f(x) = e^x$  ne définit pas une distribution tempérée.

A nouveau, on a le

**LEMME E.6**

- (i) La dérivation est une application continue de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même.
- (ii) Si  $q$  est un polynôme, l'application  $\varphi \rightarrow q\varphi$  est une application continue de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même.

### E.2.2 La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$

**LEMME E.7**

- (i) Soit  $T \in \mathcal{S}'$ , l'application

$$\varphi \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

définit une distribution tempérée que l'on note  $\widehat{T}$  ou  $\mathcal{F}(T)$  et que l'on appelle la transformée de Fourier de  $T$ . On a donc par définition :

$$\langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

- (ii) La transformation de Fourier est une application continue de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même.

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de vérifier que l'application  $\varphi \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$  est continue de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit donc  $\varphi_k$  une suite de  $\mathcal{S}$  convergeant vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}$ . Alors, d'après le théorème E.3, la suite  $\widehat{\varphi}_k$  converge vers  $\widehat{\varphi}$  dans  $\mathcal{S}$ . Comme  $T$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{S}$ , on a finalement

$$\langle T, \widehat{\varphi}_k \rangle \rightarrow \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

La continuité de  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même est immédiate

*Q.E.D.*

Étudions quelques exemples :

- (i) La masse de Dirac est une distribution tempérée. On a

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(\delta) = \widehat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{E.4})$$

- (ii) De même

$$\langle \mathcal{F}(\delta^{(m)}), \varphi \rangle = (-1)^m \langle \delta, \widehat{\varphi}^{(m)} \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}((ix)^m \varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

d'où

$$\mathcal{F}(\delta^{(m)}) = \frac{(ix)^m}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{E.5})$$

La transformée de Fourier d'une distribution à support compact associée à une fonction :

**THÉORÈME E.8** Si  $T$  est une distribution à support compact, alors  $\widehat{T}$  est la fonction de  $\xi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donnée par :

$$\widehat{T}(\xi) = \langle T, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_x, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $\ell \in \mathbb{N}$  et une constante réelle  $C$  tels que

$$|\widehat{T}^{(m)}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|^\ell) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On dit que  $\widehat{T}$  est une fonction à croissance lente.

DÉMONSTRATION.

▷ Notons tout d'abord que, comme  $T$  est à support compact et  $e^{-ix\xi}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $x$ , le produit de dualité a bien un sens.

▷ On peut ensuite vérifier, en utilisant une version étendue du théorème de Fubini, que

$$\langle T, \widehat{\varphi} \rangle_x = \langle T, \langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_\xi \rangle_x = \langle \langle T, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_x, \varphi \rangle_\xi$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

▷ Le théorème de dérivation sous le crochet permet finalement de montrer que

$$\widehat{T}^{(m)}(\xi) = \langle T, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-ix)^m e^{-ix\xi} \rangle_x, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Si  $K$  est un compact contenant le support de  $T$  et si  $k$  désigne l'ordre de  $T$ , on en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|\widehat{T}^{(m)}(\xi)| \leq C \sup_{x \in K, 0 \leq n \leq k} \left| ((-ix)^m e^{-ix\xi})^{(n)} \right|,$$

d'où la dernière majoration.

Q.E.D.

### E.2.3 Propriétés élémentaires

On peut généraliser aux distributions tempérées les formules classiques relatives à la transformation de Fourier des fonctions :

**LEMME E.9** Soit  $T \in \mathcal{S}'$ . Alors

$$\mathcal{F}(T^{(m)}) = (i\xi)^m \mathcal{F}(T) \tag{E.6}$$

et

$$\mathcal{F}^{(m)}(T) = \mathcal{F}((-ix)^m T). \tag{E.7}$$

DÉMONSTRATION.

▷ Démontrons la première identité. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  on a par définition de la transformée de Fourier et de la dérivation des distributions :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T^{(m)}), \varphi \rangle_\xi &= \langle T, (-1)^m (\mathcal{F}\varphi)^{(m)} \rangle_x \\ &= \langle T, \mathcal{F}((i\xi)^m \varphi) \rangle_x = \langle (i\xi)^m \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_\xi. \end{aligned}$$

▷ De même, on a pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{(m)}(T), \varphi \rangle_\xi &= \langle T, (-1)^m \mathcal{F}(\varphi^{(m)}) \rangle_x \\ &= \langle T, (-ix)^m \mathcal{F}(\varphi) \rangle_x = \langle \mathcal{F}((-ix)^m T), \varphi \rangle_\xi. \end{aligned}$$

Q.E.D.

De même

LEMME E.10 Soit  $T \in \mathcal{S}'$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors on a :

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}T \text{ et } \mathcal{F}(e^{iax} T) = \tau_a \mathcal{F}T, \quad (\text{E.8})$$

où l'on rappelle que

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

En particulier, on déduit des lemmes précédents les formules suivantes :

$$\mathcal{F}(\delta^{(m)}) = \frac{(i\xi)^m}{\sqrt{2\pi}} \text{ et } (\delta_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\xi}.$$

### E.2.4 Les formules de réciprocity et de Plancherel

La transformation de Fourier est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{S}'$

LEMME E.11

$$\mathcal{F}(1) = \sqrt{2\pi} \delta \quad (\text{E.9})$$

DÉMONSTRATION. Posons  $\widehat{T}_\xi = \mathcal{F}(1)$ . Alors, d'après l'identité (E.6), on a :

$$\xi \widehat{T} = 0 \quad (\text{E.10})$$

il en résulte que  $\widehat{T}$  est nécessairement de la forme :

$$\widehat{T} = C \delta.$$

Pour déterminer la valeur de la constante  $C$ , on utilise la fonction test particulière  $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ . On trouve ainsi

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle_\xi = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_x = \langle 1, \varphi \rangle_x = \sqrt{2\pi}.$$

Q.E.D.

THÉORÈME E.12

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)} = \varphi. \quad (\text{E.11})$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(\xi) e^{ia\xi} d\xi.$$

Or

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) e^{ia\xi} = \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)(\xi).$$

Par conséquent :

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)}(a) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \tau_{-a}\varphi \right\rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \varphi(a).$$

Q.E.D.

C'est dire que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}$  dans lui-même dont l'inverse est la transformation de Fourier conjuguée  $\overline{\mathcal{F}}$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx = \mathcal{F}(\varphi)(-\xi). \quad (\text{E.12})$$

On en déduit immédiatement que la transformation de Fourier est également une bijection de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même :

**THÉORÈME E.13**

$$\forall T \in \mathcal{S}' \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T. \quad (\text{E.13})$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Q.E.D.

En découlent les formules de Parseval et de Plancherel :

**THÉORÈME E.14** Pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\mathcal{S}$  on a :

(i) **Identité de Parseval :**

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \langle \varphi, \overline{\psi} \rangle = \langle \mathcal{F}(\varphi), \overline{\mathcal{F}(\psi)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi \quad (\text{E.14})$$

(ii) **Identité de Plancherel :**

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \quad (\text{E.15})$$

DÉMONSTRATION. On déduit tout d'abord l'identité (E.14) de la formule de réciprocity. En effet

$$\langle \varphi, \overline{\psi} \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}\psi}) \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, \overline{\mathcal{F}\psi} \rangle,$$

puis (E.15) en prenant  $\varphi = \psi$  dans (E.14).

Q.E.D.

### E.2.5 Transformation de Fourier et convolution

On sait que, dans le cas des fonctions intégrables, la transformée de Fourier du produit de convolution est égale (au facteur  $\sqrt{2\pi}$  près) au produit des transformées de Fourier. Dans le cas où  $T$  et  $U$  sont deux distributions tempérées cette relation reste valable sous diverses conditions mais il ne suffit pas que les supports de  $T$  et  $U$  soient convolutifs ou que le produit  $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U)$  ait un sens.

**THÉORÈME E.15** Si  $T$  et  $U$  sont des distributions à support compact, alors

$$\mathcal{F}(T * U) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(U) \quad (\text{E.16})$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème E.8, les transformées de Fourier de  $T$ , de  $U$  et de  $T * U$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En particulier, le produit  $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U)$  a bien un sens. Toujours d'après le théorème E.8, on a :

$$\mathcal{F}(T * U)(\xi) = \langle T * U, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_x, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Par définition de la convolution, ceci s'écrit aussi :

$$\mathcal{F}(T * U)(\xi) = \langle T, \langle U, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(x+y)\xi} \rangle_x \rangle_y = \langle T, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iy\xi} \rangle_y \langle U, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_x,$$

d'où le résultat.

Q.E.D.

Ce théorème admet l'extension suivante :

**THÉORÈME E.16** Si  $T \in \mathcal{S}'$  et  $U$  est une distribution à support compact, alors l'identité (E.16) est vérifiée.

DÉMONSTRATION. A nouveau, le produit de convolution a bien un sens dans ce cas et comme  $\mathcal{F}(U)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le produit  $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U)$  définit une distribution. Pour  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on cherche à définir  $\langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi$  de la manière suivante :

$$\langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi = \langle T * U, \mathcal{F}\varphi \rangle_x = \langle T_x, \langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x+y) \rangle_y \rangle_x. \quad (\text{E.17})$$

Or à  $x$  fixé on a

$$\langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x+y) \rangle_y = \langle U_y, \mathcal{F}(e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi))(y) \rangle_y = \langle \mathcal{F}(U), e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) \rangle_\xi.$$

Mais comme  $\mathcal{F}(U)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ceci s'écrit encore :

$$\langle U_y, \mathcal{F}\varphi(x+y) \rangle_y = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(U)\varphi)(x).$$

En revenant à (E.17), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle_\xi &= \sqrt{2\pi} \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(U)\varphi) \rangle_x \\ &= \sqrt{2\pi} \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(U)\varphi \rangle_\xi = \sqrt{2\pi} \langle \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(U), \varphi \rangle_\xi. \end{aligned}$$

Q.E.D.

**REMARQUE E.17** Si  $Y$  désigne la fonction de Heaviside, on a

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \pi\delta - i \text{vp} \frac{1}{\xi} \right).$$

En effet, d'après (E.6)

$$\mathcal{F}\left(\frac{dY}{dx}\right) = i\xi \mathcal{F}(Y),$$

or

$$\frac{dY}{dx} = \delta$$

donc  $\mathcal{F}(Y)$  doit vérifier

$$i\xi \mathcal{F}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Il existe donc une constante  $C$  telle que

$$\mathcal{F}(Y) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{vp}(1/\xi) + C\delta) ;$$

on peut alors déterminer la valeur de la constante  $C$  en remarquant que

$$\langle \mathcal{F}(Y), e^{-\xi^2/2} \rangle = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi,$$

d'où  $C = i\pi$ . On a donc finalement

$$\mathcal{F}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\pi\delta - i \text{vp}(1/\xi)).$$

## Appendice F

# Le rayon de Bohr

Le lemme d'Abel (Théorème 1.19) nous enseigne que dans le cas des séries entières, les deux notions de convergence et de convergence absolue sont équivalentes, hormis sur le bord du disque de convergence. Il est donc naturel de tenter une comparaison entre le module d'une série entière et celui de la série des modules dans le disque de convergence, et tout particulièrement au voisinage de son bord.

On notera  $\mathcal{E}$  l'espace des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

LEMME F.1 Soit  $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  appartenant à  $\mathcal{E}$ , et  $\tau \in ]0, 1[$ , alors si  $r \in ]0, 1[$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n = |a_0| + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) \sum_{n \geq 1} \tau^n \cos(n\theta + \varphi_n) d\theta.$$

DÉMONSTRATION. Posons  $H_r(\theta) = h(re^{i\theta})$ ; les coefficients de Fourier respectifs  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  de  $H_r$  et  $\overline{H_r}$  ont pour expression

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} h(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \text{ et } \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{h}(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

soit

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k r^k \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} \sqrt{2\pi} a_n r^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_k} r^k \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ik\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ \sqrt{2\pi} \overline{a_{-n}} r^{-n} & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (h(re^{i\theta}) + \overline{h}(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n > 0 \\ 2\Re(a_0) & \text{si } n = 0 \\ \overline{a_{-n}} r^{-n} & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Posons alors  $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$ , on aura

$$|a_n| \tau^n r^n = a_n e^{-i\varphi_n} \tau^n r^n = \frac{\tau^n}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) e^{-i(n\theta + \varphi_n)} d\theta \text{ pour } n > 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n &= |a_0| + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re \left( h(re^{i\theta}) \right) \sum_{n \geq 1} \tau^n e^{-i(n\theta + \varphi_n)} d\theta \\
 &= |a_0| + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re \left( h(re^{i\theta}) \right) \sum_{n \geq 1} \tau^n (\cos(n\theta + \varphi_n) - i \sin(n\theta + \varphi_n)) d\theta \\
 &= |a_0| + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re \left( h(re^{i\theta}) \right) \sum_{n \geq 1} \tau^n \cos(n\theta + \varphi_n) d\theta.
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

LEMME F.2 Si  $h \in \mathcal{E}$  et si de plus  $a_0$  est réel positif, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n \leq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(h(re^{i\theta}))|, \quad \forall \tau \in ]0, 1/3[.$$

DÉMONSTRATION. D'après la formule (F.1), on aura

$$|a_0| = \Re(a_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) d\theta,$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \tau^n \cos(n\theta + \varphi_n) \right) d\theta$$

Dans le cas où  $\tau \in ]0, 1/3[$ , on a

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \tau^n \cos(n\theta + \varphi_n) \geq \frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \tau^n = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{1-\tau} = \frac{1-3\tau}{2(1-\tau)} \geq 0,$$

et par conséquent

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n \leq \frac{1}{\pi} \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(h(re^{i\theta}))| \left( \pi + \sum_{n \geq 1} \tau^n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\theta + \varphi_n) d\theta \right).$$

Mais

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\theta + \varphi_n) d\theta = \Re \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\theta + \varphi_n)} d\theta = \Re e^{i\varphi_n} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta} d\theta = 0,$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \tau^n r^n \leq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(h(re^{i\theta}))|, \quad \forall \tau \in ]0, 1/3[.$$

Q.E.D.

PROPOSITION F.3 Si  $h \in \mathcal{E}$  et vérifie  $|h(z)| \leq 1 \quad \forall |z| < 1$ , alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n \leq 1, \quad \forall |z| < 1/3.$$

La valeur  $\tau = 1/3$  est le rayon de Bohr.

DÉMONSTRATION. Notons que  $|h(z)| = |g(z)|$  où  $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  avec  $b_n = a_n e^{-i\varphi_0}$ . On en déduit que si  $|h(z)| \leq 1 \forall |z| < 1$ , alors  $|\Re(g(re^{i\theta}))| \leq 1, \forall r < 1$ , et par conséquent

$$1 \geq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(g(re^{i\theta}))|.$$

Comme  $b_0$  est réel positif, le lemme **F2** montre que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \tau^n r^n \leq 1, \forall \tau \in ]0, 1/3[, \forall r < 1$$

et par conséquent  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| |z|^n \leq 1, \forall r < 1/3$ .

*Q.E.D.*

On peut se demander s'il est possible d'améliorer la borne  $\tau = 1/3$ ; le résultat qui suit montre qu'il n'en est rien.

LEMME **F4** Pour  $0 \leq \lambda < 1$ , la fonction  $f_\lambda(z) = (z - \lambda)/(1 - \lambda z)$  est développable en série entière de rayon de convergence  $1/\lambda$  et vérifie  $|f_\lambda(z)| \leq 1, \forall |z| \leq 1$ .

DÉMONSTRATION. En effet d'une part  $(1 - \lambda z)^{-1}$  a pour rayon de convergence  $\rho$  tel que  $\lambda\rho = 1$ . Par ailleurs  $|f_\lambda(z)|^2 = |z - \lambda|^2 / |1 - \lambda z|^2$ , et pour  $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |1 - \lambda z|^2 - |z - \lambda|^2 &= (1 - \lambda z)(1 - \lambda \bar{z}) - (z - \lambda)(\bar{z} - \lambda) \\ &= 1 - \lambda^2 + (\lambda^2 - 1)|z|^2 = (1 - \lambda^2)(1 - |z|^2) \geq 0, \end{aligned}$$

et par conséquent  $|f_\lambda(z)| \leq 1$ .

*Q.E.D.*

LEMME **F5** Si les  $a_n(\lambda)$  notent les coefficients du développement de  $f_\lambda$  en série entière,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(\lambda)| |z|^n \leq 1$  si et seulement si  $|z| \leq 1/3$ .

DÉMONSTRATION. On aura

$$f_\lambda(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(\lambda) z^n = (z - \lambda) \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n z^n$$

d'où  $a_0(\lambda) = -\lambda$  et pour  $n \geq 1$ ,  $a_n(\lambda) = \lambda^{n-1} - \lambda^{n+1} \geq 0$ . On aura donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(\lambda)| |z|^n &= \lambda + \sum_{n \geq 1} (\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1}) |z|^n = \lambda + \sum_{n \geq 1} \lambda^{n-1} |z|^n - \sum_{n \geq 1} \lambda^{n+1} |z|^n \\ &= \lambda + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) \sum_{n \geq 1} \lambda^n |z|^n = \lambda + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) \lambda |z| \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n |z|^n \\ &= \lambda + \frac{(1 - \lambda^2)|z|}{1 - \lambda |z|} = \lambda + (1 - \lambda) \frac{(1 + \lambda)|z|}{1 - \lambda |z|}. \end{aligned}$$

Comme la fonction  $x \rightarrow \lambda + (1 - \lambda)x$  est croissante, il en résulte que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(\lambda)| |z|^n \leq 1$  si et seulement si

$$\frac{(1 + \lambda)|z|}{1 - \lambda |z|} \leq 1$$

soit  $(1 + 2\lambda)|z| \leq 1$  ou encore  $|z| \leq 1/(1 + 2\lambda)$ . Dans le cas où  $|z| > 1/3$ , on a  $(1 - |z|)/2|z| < 1$  et dès que  $1 > \lambda > (1 - |z|)/2|z|$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(\lambda)| |z|^n > 1$ .

*Q.E.D.*

Au delà de  $|z| = 1/3$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n$  n'est plus en général majoré par 1, mais on peut malgré tout en chercher un majorant. Une estimation fine des coefficients de la série entière sera nécessaire, on définit à cet effet une norme sur  $\mathcal{E}$ , à partir du produit scalaire suivant :

$$((h|g)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(re^{i\theta}) \overline{g}(re^{i\theta}) d\theta.$$

Si  $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $g = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m z^m$ , on aura

$$((h|g)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{b_m} r^m \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \overline{b_n} r^{2n};$$

on pose alors

$$|||h||| = ((h|h))^{1/2} = \left( \sup_{0 \leq r < 1} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2}.$$

**LEMME F.6** Si  $|h(z)| \leq 1, \forall |z| < 1$ , on a  $|||h||| \leq 1$ .

DÉMONSTRATION. En effet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(re^{i\theta}) \overline{h}(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n},$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sup_{-\pi \leq \theta < \pi} |h(re^{i\theta})|^2 \leq 1, \forall r < 1,$$

et par conséquent  $|||h||| \leq 1$ .

*Q.E.D.*

Le sous-espace de  $\mathcal{E}$  des fonctions de la forme  $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ , où  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  sera noté  $\mathcal{V}_n$ . On note également  $P_n$  l'application qui à  $h \in \mathcal{E}$  fait correspondre  $h_n \in \mathcal{V}_n$  définie par  $h_n(z) = a_0 + a_n z^n$ , et pour  $h \in \mathcal{E}$ ,  $A_h$  l'application  $\psi \rightarrow h\psi$  de  $\mathcal{V}_n$  dans  $\mathcal{E}$ .

**LEMME F.7**  $\forall \psi \in \mathcal{V}_n$  et  $\forall h \in \mathcal{E}$ , telle que  $|h(z)| \leq 1, \forall |z| < 1$ , on a  $|||P_n \circ A_h \psi||| \leq |||\psi|||$ .

DÉMONSTRATION. En effet

$$\begin{aligned} |||A_h \psi|||^2 &= \frac{1}{2\pi} \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |h(re^{i\theta}) \psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \sup_{|z| < 1} |h(z)|^2 \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |||\psi|||^2, \end{aligned}$$

et par ailleurs, si  $g = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m z^m$ ,  $|||P_n g|||^2 = |b_0|^2 + |b_n|^2 \leq |||g|||^2$ , d'où  $|||P_n \circ A_h \psi||| \leq |||\psi|||$ .

*Q.E.D.*

Soit maintenant  $S$  la bijection  $\mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{C}^2$  donnée par

$$S(\psi(z)) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ où } \psi(z) = \alpha + \beta z^n.$$

LEMME F.8 Si  $\mathbb{D}$  est la matrice de l'application  $S \circ P_n \circ A_h \circ S^{-1}$ , la matrice  $\mathbb{A} = \mathbb{I} - \mathbb{D}^* \mathbb{D}$  est positive.

DÉMONSTRATION.  $P_n \circ A_h(\psi)(z) = a_0 \alpha + (a_n \alpha + a_0 \beta) z^n$  d'où

$$S \circ P_n \circ A_h \circ S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \alpha \\ a_n \alpha + a_0 \beta \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ où } \mathbb{D} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ a_n & a_0 \end{pmatrix}.$$

De plus on a vu que  $\|P_n \circ A_h \psi\|^2 \leq \|\psi\|^2$ , soit

$$|a_0 \alpha|^2 + |a_n \alpha + a_0 \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

c'est encore dire que, pour le produit scalaire défini par  $(\Psi | \Theta) = \alpha \bar{\gamma} + \beta \bar{\delta}$ , où  $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  et  $\Theta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ ,  $(\mathbb{D}\Psi | \mathbb{D}\Psi) \leq (\Psi | \Psi)$  et par conséquent que  $\mathbb{A}$  est positive.

Q.E.D.

LEMME F.9 Si  $h \in \mathcal{E}$ , avec  $|h(z)| \leq 1$ ,  $\forall |z| < 1$ ,  $\forall n$  on a  $|a_n| \leq 1 - |a_0|^2$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $\mathbb{A}$  est définie positive, ses valeurs propres sont positives ou nulles et leur produit, égal au déterminant, est donné par

$$\begin{aligned} \det \mathbb{A} &= \det \begin{pmatrix} 1 - (|a_0|^2 + |a_n|^2) & a_0 \bar{a}_n \\ \bar{a}_0 a_n & 1 - |a_0|^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - (|a_0|^2 + |a_n|^2))(1 - |a_0|^2) - |a_0|^2 |a_n|^2 \\ &= 1 + |a_0|^2 (|a_0|^2 + |a_n|^2) - |a_0|^2 - (|a_0|^2 + |a_n|^2) - |a_0|^2 |a_n|^2 \\ &= 1 + |a_0|^4 - 2|a_0|^2 - |a_n|^2 = (1 - |a_0|^2)^2 - |a_n|^2. \end{aligned}$$

d'où il résulte que  $|a_n|^2 \leq (1 - |a_0|^2)^2$ . Mais pour  $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a  $(\mathbb{D}\Psi | \mathbb{D}\Psi) = |a_0|^2$  et  $(\Psi | \Psi) = 1$ , d'où  $|a_0|^2 \leq 1$  et par conséquent  $|a_n| \leq 1 - |a_0|^2$ .

Q.E.D.

On pose

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= t + (1 - t^2) \frac{r}{1 - r} \\ M(r) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \varphi_r(t) \text{ et } m(r) = \min(M(r), (1 - r^2)^{-1/2}) \end{aligned}$$

PROPOSITION F.10 Si  $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{E}$ , avec  $|h(z)| \leq 1$ ,  $\forall |z| < 1$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n \leq m(|z|), \forall |z| < 1.$$

DÉMONSTRATION. On aura tout d'abord

$$\begin{aligned} \sum_n |a_n| |z|^n &\leq |a_0| + (1 - |a_0|^2) \sum_{n \geq 1} |z|^n = |a_0| + (1 - |a_0|^2) \frac{|z|}{1 - |z|} \\ &= |h(0)| + (1 - |h(0)|^2) \frac{|z|}{1 - |z|} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left( t + (1 - t^2) \frac{|z|}{1 - |z|} \right) = M(|z|). \end{aligned}$$

Mais comme

$$\frac{d}{dt}\varphi_r(t) = 1 - 2t\frac{r}{1-r},$$

la fonction  $\varphi_r$  atteint son maximum en  $t_0 = (1-r)/2r$ . Si  $r \leq 1/3$  on a  $t_0 \geq 1$ , d'où  $M(r) = \varphi_r(1) = 1$ . Si  $1/3 \leq r < 1$ ,

$$\begin{aligned} M(r) &= t_0 + (1-t_0^2)\frac{r}{1-r} = \frac{1-r}{2r} + \left(1 - \frac{(1-r)^2}{4r^2}\right)\frac{r}{1-r} \\ &= \frac{1-r}{2r} + \frac{r}{1-r} - \frac{(1-r)}{4r} = \frac{r}{1-r} + \frac{(1-r)}{4r} = \frac{4r^2 + (1-r)^2}{4r(1-r)}. \end{aligned}$$

Mais par ailleurs, avec  $\varepsilon \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_n |a_n| |z|^n &= \sum_n |a_n| |1-\varepsilon| \left| \frac{z}{1-\varepsilon} \right|^n \\ &\leq \left( \sum_n |a_n|^n |1-\varepsilon|^n \right)^{1/2} \left( \sum_n \left| \frac{z}{1-\varepsilon} \right|^{2n} \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_n |a_n|^n |1-\varepsilon|^n \right)^{1/2} \left( \frac{1}{1-|z|^2/(1-\varepsilon)^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \|h\| \left( \frac{1}{1-|z|^2/(1-\varepsilon)^2} \right)^{1/2} \leq \left( 1 - \frac{|z|^2}{(1-\varepsilon)^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

d'où  $\sum_n |a_n| |z|^n \leq (1-|z|^2)^{-1/2}$ .

*Q.E.D.*

## Appendice G

# Les homographies

Soient  $a, b, c$  et  $d$  non tous nuls et l'application

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

appelée homographie ; on peut également écrire

$$w(z) = R \circ \mathbb{M} \left( \begin{array}{c} z \\ 1 \end{array} \right), \text{ où } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } R \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) = \frac{\alpha}{\beta} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Cette application n'est pas constante si et seulement si sa matrice  $\mathbb{M}$  est de rang 2, ou encore si l'espace affine des éléments de la forme  $\mathbb{M} \left( \begin{array}{c} z \\ 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix}$  est de dimension 2, soit  $ad - bc = \det \mathbb{M} \neq 0$ , ce qui est encore dire que

$$w'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

**DÉFINITION G.1** On appelle transformation de Möbius une transformation homographique

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

vérifiant  $ad - bc \neq 0$ .

Bien entendu, on peut multiplier tous les coefficients par un même nombre  $\lambda$  sans modifier la transformation. Remarquons cependant que si les coefficients  $a, b, c$  et  $d$  sont réels, ainsi que  $\lambda$ , alors  $(\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc)$ , ce qui rend le signe de  $ad - bc$  invariant.

### G.1 Les transformations de Möbius

**PROPOSITION G.2**

- (i) Les transformations de Möbius sont bijectives  $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  et forment un groupe, soit  $H$ .
- (ii) Les transformations à coefficients réels telles que  $\det \mathbb{M} > 0$  forment un groupe noté  $T$ , sous-groupe de  $H$ , qui laisse invariants la droite réelle et le demi-plan  $P$  des complexes de partie imaginaire positive.

**DÉMONSTRATION.** Prolongeons  $w$  en une application  $\tau : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  en posant tout d'abord

$$\zeta \circ \tau \circ \zeta^{-1}(z) = w(z), \quad z \neq -\frac{d}{c} \text{ si } c \neq 0$$

soit

$$\tau(\omega) = \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta(\omega), \quad \omega \neq \infty, \text{ et } \zeta(\omega) \neq -\frac{d}{c} \text{ si } c \neq 0$$

puis par continuité

$$\tau(\infty) = \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta \circ \zeta^{-1} \circ \zeta(\infty) = \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta(0) = \zeta^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \text{ si } c \neq 0$$

$$\tau(\infty) = \zeta^{-1} \circ \zeta \circ \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta(0) = \zeta^{-1}(0) = \infty \text{ si } c = 0$$

ainsi que

$$\tau \circ \zeta^{-1}\left(-\frac{d}{c}\right) = \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta\left(-\frac{d}{c}\right) = \zeta^{-1} \circ \zeta \circ \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta\left(-\frac{d}{c}\right) = \zeta^{-1}(0) = \infty \text{ si } c \neq 0.$$

Nous noterons  $\mathbb{M}'$  la matrice associée à la transformation

$$w'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'},$$

▷ On aura

$$w' \circ w(z) = R \circ \mathbb{M}' \left( R \circ \mathbb{M} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) = R \circ \mathbb{M}' \circ \mathbb{M} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est dire que la matrice associée à  $w' \circ w$  n'est autre que  $\mathbb{M}' \circ \mathbb{M}$ .

▷ Déterminons l'inverse  $w''$  de  $w$  :

$$z = w'' \circ w(z) = R \circ \mathbb{M}'' \circ \mathbb{M} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathbb{M}'' \circ \mathbb{M} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire  $\mathbb{M}'' = \alpha \mathbb{M}^{-1}$ , ou encore

$$w''(z) = R \circ \mathbb{M}^{-1} = R \circ \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\frac{dz - b}{cz - a}.$$

Les prolongements de  $w$  et  $w''$  sont encore inverses l'un de l'autre, en effet on aura tout d'abord

$$\tau \circ \tau''(\omega) = \zeta^{-1} \circ w \circ \zeta \circ \zeta^{-1} \circ w'' \circ \zeta(\omega) = \zeta^{-1} \circ w \circ w'' \circ \zeta(\omega) = \omega$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \tau \circ \tau''(\infty) &= \tau \circ \zeta^{-1}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \\ \tau \circ \tau'' \circ \zeta^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) &= \tau(\infty) = \zeta^{-1}\left(\frac{a}{c}\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que les transformations de Möbius sont bijectives.

▷ Contentons nous de démontrer l'invariance du demi-plan des complexes de partie réelle positive :

$$\begin{aligned} \Im \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{\Im((az + b)(c\bar{z} + d))}{|cz + d|^2} = \frac{1}{|cz + d|^2} \Im(adz + bc\bar{z}) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} (ad - bc) \Im z \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

De façon générale, on appelle inversion de pôle  $\alpha$  et de puissance  $R^2$  une transformation de la forme

$$f(z) = \alpha + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}}.$$

La transformation

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \bar{\alpha} + \frac{R^2}{z - \alpha}$$

est alors appelée inversion-symétrie. Les inversions-symétries sont des transformations de Möbius particulières.

**PROPOSITION G.3** Une transformation de Möbius se décompose en produit de translations, de similitudes et d'inversions-symétries.

DÉMONSTRATION.

▷ Si  $c = 0$ , on aura  $w = t \circ h$  où  $h(z) = (a/d)z$  est une similitude et  $t(z') = z' + b/d$  est une translation.

▷ Si  $c \neq 0$ , on aura

$$w = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{z + d/c}, \quad (\text{G.1})$$

d'où  $w = t_2 \circ h \circ s \circ t_1$ , avec

$$t_1(z) = z + d/c, \quad s(z') = 1/z', \quad h(z'') = -\frac{ad - bc}{c^2}z'', \quad t_2(z''') = z''' + a/c.$$

La transformation  $s$  étant elle-même composée d'une inversion de pôle 0 et de puissance 1 :  $z \rightarrow 1/\bar{z}$  et d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Q.E.D.

**DÉFINITION G.4** Soient  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4 \in \mathbb{C}$ , on appelle birapport des  $z_i$  la quantité

$$b(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

**THÉORÈME G.5**

- (i) Les transformations de Möbius conservent le birapport.
- (ii) Les transformations de Möbius transforment l'ensemble formé des cercles et des droites en lui-même.
- (iii) L'image d'un cercle ou d'une droite est une droite si et seulement si le cercle ou la droite passe par l'origine.

DÉMONSTRATION.

▷ Les translations et les similitudes conservant évidemment le birapport, il suffira donc de montrer que la transformation  $s(z) = 1/z$  le conserve. On aura en effet

$$\begin{aligned} b(s(z_1), s(z_2), s(z_3), s(z_4)) &= \frac{1/z_1 - 1/z_3}{1/z_1 - 1/z_4} \left( \frac{1/z_2 - 1/z_3}{1/z_2 - 1/z_4} \right)^{-1} \\ &= \frac{z_1 z_3}{z_1 z_4} \frac{1/z_1 - 1/z_3}{1/z_1 - 1/z_4} \left( \frac{z_2 z_3}{z_2 z_4} \frac{1/z_2 - 1/z_3}{1/z_2 - 1/z_4} \right)^{-1} \\ &= \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \left( \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \right)^{-1} = b(z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

▷ Notons maintenant que d'après le théorème de l'arc capable, pour que les 4 points  $z_i$  appartiennent à un même cercle, il faut et il suffit que

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}, \quad (\text{mod } \pi),$$

soit en fait  $b(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ , ce cercle étant en fait une droite si  $(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)$  et  $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)$  sont tous deux réels. Il en résulte que les points  $s(z_i)$  sont cocycliques ou colinéaires dès que les  $z_i$  le sont, et comme les transformations de Möbius sont inversibles, qu'elles transforment les cercles ou droites en cercles ou droites.

▷ Si  $z_2, z_3$  et  $z_4$  sont des points du cercle, son équation est donnée par  $b(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ , soit

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{z - z_3}{z - z_4} = \lambda \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

qui sera une droite si et seulement si  $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)$  est réel, c'est-à-dire  $z = \infty$  est solution de l'équation. Il en résulte que l'image d'un cercle ou d'une droite par une transformation de Möbius est une droite si et seulement si le cercle ou la droite passe par l'origine.

Q.E.D.

### G.1.1 L'inversion symétrie

On peut être plus précis et déterminer explicitement l'image d'un cercle ou d'une droite par  $s$ .

#### Image d'un cercle

##### PROPOSITION G.6

(i) L'image par  $s$  du cercle de centre  $a$  et de rayon  $\rho \neq |a|$  est le cercle de centre  $1/(a(1 - \rho^2))$  et de rayon  $\rho/|a(1 - \rho^2)|$

(ii) L'image par  $s$  du cercle de centre  $a$  et de rayon  $|a|$  est la droite d'équation

$$z = 1/2a + it/a, \quad t \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION.

▷ On peut déjà noter que

$$s(\alpha z) = s(z)/\alpha,$$

d'où il résulte qu'il suffit de considérer un cercle  $C$  centré au point 1.

▷ Comme  $s(1 + \rho e^{i\theta}) = \overline{s(1 + \rho e^{i\theta})}$ ,  $s(C)$  est centré sur l'axe réel. On aura alors

$$s(1 + \rho e^{i\theta}) = b + \mu e^{i\tau},$$

où  $b \in \mathbb{R}$ , soit en particulier  $s(1 + \rho) = b + \mu e^{i\tau_0}$  et  $s(1 - \rho) = b + \mu e^{i\tau_\pi}$ , d'où par conséquent

$$\mu = \left| \frac{1}{1 + \rho} - b \right| = \left| \frac{1}{1 - \rho} - b \right|,$$

et  $\rho$  n'étant pas nul

$$\frac{1}{1 + \rho} - b = -\frac{1}{1 - \rho} + b.$$

On aura donc

$$b = \frac{1}{1 - \rho^2} \text{ et } \mu = \frac{\rho}{|1 - \rho^2|} = \frac{\rho \operatorname{sgn}(1 - \rho)}{1 - \rho^2},$$

d'où le résultat annoncé.

▷ On peut également déterminer  $\tau$  en fonction de  $\theta$  : on aura

$$\frac{1}{1 + \rho e^{i\theta}} = \frac{1}{1 - \rho^2} (1 + \rho \operatorname{sgn}(1 - \rho) e^{i\tau}),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{i\tau} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{z} - b \right) = \frac{(1 - \rho^2) \operatorname{sgn}(1 - \rho)}{\rho} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{1 - \rho^2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(1 - \rho)}{\rho} \left( \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho e^{i\theta}} - 1 \right) = -\operatorname{sgn}(1 - \rho) \left( \frac{\rho + e^{i\theta}}{1 + \rho e^{i\theta}} \right). \end{aligned}$$

▷ Si le cercle passe par l'origine, on a  $\rho = 1$ , d'où  $b = \mu = \infty$ . On posera alors plutôt

$$s(1 + \rho e^{i\theta}) = b + it,$$

d'où

$$\frac{1}{2} = b + it_0,$$

soit  $b = 1/2$  et  $t_0 = 0$ . On aura alors

$$t = -i \left( \frac{1}{z} - b \right) = -i \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right) = \frac{-i}{2z} (2 - z) = -i \frac{(1 - \rho e^{i\theta})}{2(1 + \rho e^{i\theta})}.$$

De façon générale, l'image par  $s$  du cercle de centre  $a$  et de rayon  $|a|$  sera donc la droite d'équation  $z = 1/2a + it/a$

*Q.E.D.*

## Image d'une droite

### PROPOSITION G.7

(i) L'image par  $s$  de la droite d'équation  $z = \alpha + \beta t$ ,  $\alpha \neq 0$ , est le cercle de centre  $1/(2(\alpha - \Re(\alpha/\beta)))$  et de rayon  $1/(2|\alpha - \Re(\alpha/\beta)|)$ .

(ii) L'image par  $s$  de la droite  $z = \beta t$  est la droite d'équation  $z = \tau/\beta$ .

### DÉMONSTRATION.

▷ Comme  $s$  est sa propre inverse, on en déduit que l'image de la droite d'équation  $z = 1 + 2it$  est le cercle de centre  $1/2$  et de rayon  $1/2$ , et de façon plus générale une droite d'équation  $z = \alpha + \beta t$  a également pour représentation

$$z = \alpha' + \beta' t' = \alpha - \Re\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 2\beta \Im\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) t',$$

et elle a donc pour image le cercle de centre  $1/(2(\alpha - \Re(\alpha/\beta)))$  et de rayon  $1/(2|\alpha - \Re(\alpha/\beta)|)$ .

▷ Dans le cas où la droite passe par l'origine on aura  $s(\beta t) = 1/\beta t$ , ce qui montre que l'image de la droite d'équation  $z = \beta t$  est la droite d'équation  $z = \tau/\beta$ .

*Q.E.D.*

### G.1.2 La transformation de Cayley

DÉFINITION G.8 *La transformation homographique*

$$C(z) = \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i}$$

est appelée transformation de Cayley.

La transformation de Cayley a pour inverse

$$\zeta = -i \frac{z+1}{z-1} = -i \left( 1 + \frac{2}{z-1} \right) = -i - \frac{2i}{z-1}, \quad (\text{G.2})$$

elle se décompose sous la forme

$$C(z) = t_2 \circ h \circ s \circ t_1,$$

avec

$$t_1(z) = z + i, \quad s(z') = 1/z', \quad h(z'') = -2iz'', \quad t_2(z''') = z''' + 1.$$

PROPOSITION G.9 *La transformation de Cayley transforme la droite réelle  $\mathbb{R}$  en le cercle unité, c'est un isomorphisme du demi-plan supérieur  $P^+$  sur le disque unité qui se prolonge continûment dans  $P^1(\mathbb{C})$  en une bijection  $\overline{P^+} \rightarrow \overline{D}$ .*

DÉMONSTRATION. En effet  $t_1(\mathbb{R})$  est la droite  $R_1$  d'équation  $z = i + t$ ,  $s(R_1)$  est le cercle  $R_3$  de centre  $-i/2$  et de rayon  $1/2$ ,  $h(R_3)$  est le cercle  $R_4$  de centre  $-1$  et de rayon  $1$ , et  $t_2(R_4)$  le cercle unité. De même si  $R^\varepsilon$  est la droite  $z = i\varepsilon + t$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $C(R^\varepsilon)$  est le cercle de centre  $\varepsilon/(1+\varepsilon)$  et de rayon  $1/(1+\varepsilon)$ , ce qui montre que l'image du demi-plan supérieur est le disque unité.

Q.E.D.

## Appendice H

# La transformation de Schwarz-Christoffel

Il s'agit de déterminer de façon aussi explicite que possible une transformation conforme du disque unité  $D$  sur un polygone  $T$ . On choisira en fait d'utiliser la transformation de Möbius pour se ramener à une transformation du demi-plan des complexes de partie réelle positive sur  $T$ .

Soient  $A_i$ ,  $i = 1, n$ ,  $A_{n+1} = A_1$ , les sommets du polygone. On sait qu'il existe un isomorphisme  $f : P^+ \rightarrow T$ , qui se prolonge d'ailleurs continûment  $\overline{P^+} \rightarrow \overline{T}$  pour la topologie de  $P^1(\mathbb{C})$ , en vertu du théorème **12.16**. Nous noterons  $a_i = f^{-1}(A_i)$ , que nous supposons rangés dans l'ordre croissant,  $C_i = [A_i, A_{i+1}]$ ,  $i = 1, n$  les côtés du polygone  $T$ , et  $c_i = [a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, n-1$ ,  $c_n = \overline{\mathbb{R}} \setminus [a_1, a_n]$ .

Posons  $\tau_i = A_{i+1} - A_i$ , la fonction

$$g_i(z) = \frac{\overline{\tau_i}}{|\tau_i|} (f(z) - A_i)$$

prend des valeurs réelles sur  $c_i$ , car  $f(z) - A_i = \lambda \tau_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; elle est donc susceptible du théorème de prolongement par symétrie **5.10**, et se prolonge à  $P^-$  selon

$$g_i(z) = \overline{g_i(\bar{z})} = \frac{\tau_i}{|\tau_i|} (\overline{f(\bar{z})} - \overline{A_i}), z \in P^-,$$

ce qui permet de prolonger

$$f(z) = A_i + \frac{|\tau_i|}{\tau_i} g_i(z)$$

par

$$f_i(z) = A_i + \frac{|\tau_i|}{\tau_i} g_i(z) = A_i + \frac{|\tau_i|}{\tau_i} \frac{\tau_i}{|\tau_i|} (\overline{f(\bar{z})} - \overline{A_i}) = A_i + \frac{\tau_i}{\tau_i} (\overline{f(\bar{z})} - \overline{A_i}), z \in P^-,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$f_i(z) = s_i \circ f(\bar{z}), z \in P^-,$$

où

$$s_i(\zeta) = A_i + \frac{\tau_i}{\tau_i} (\bar{\zeta} - \overline{A_i})$$

n'est rien d'autre que la symétrie par rapport au segment  $C_i$ . On voit en particulier que  $s_i^2(\zeta) = \zeta$ . L'ensemble de la fonction  $f$  et de son prolongement  $f_i$  est holomorphe dans  $P^+ \cup \overset{\circ}{c}_i \cup P^-$ . Comme de plus la fonction  $f$  est un isomorphisme, elle est injective, sa dérivée ne s'annule donc pas dans  $P^+$ , d'où il résulte que celle de  $f_i$  ne s'annule donc pas non plus dans  $P^-$ . Enfin les angles étant conservés en tout point  $x$  de  $\overset{\circ}{c}_i$ , la dérivée de  $f$  ne s'y annule pas non plus.

Comparons maintenant les divers prolongements que nous venons de réaliser, ils vérifient dans  $P^-$

$$f_j(z) = s_j \circ f(\bar{z}) = s_j \circ (s_i)^{-1} \circ f_i(z) = s_j \circ s_i \circ f_i(z),$$

et se déduisent donc les uns des autres par des compositions de symétries qui ne sont autres que des translations ou des rotations selon que ces côtés  $G_i$  et  $C_j$  sont ou non parallèles. On pourra donc écrire  $f_j = a_{ij}f_i + b_{ij}$  et par conséquent  $f'_j = a_{ij}f'_i$  et  $f''_j = a_{ij}f''_i$  d'où

$$\frac{f''_j}{f'_j} = \frac{f''_i}{f'_i}. \quad (\text{H.1})$$

Posons alors  $h = f''/f'$  dans  $P^+$ , selon la formule (H.1), puisque  $f_i$  prolonge  $f$ , et que sa dérivée ne peut s'annuler en dehors des  $a_i$ , la fonction  $h$  se prolonge à  $P^-$  en une fonction méromorphe dont les seuls pôles sont les  $a_i$ .

Considérons maintenant le prolongement à travers  $c_n$ , comme  $f$  est bornée, son prolongement l'est également, et au voisinage de l'infini on pourra écrire

$$f_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k z^{-k}, \text{ d'où } f'_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} -k b_k z^{-k-1}, \text{ et } f''_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k(k+1) b_k z^{-k-2},$$

et par conséquent  $h(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \infty$ .

Considérons enfin un sommet particulier  $A_i$  de  $T$ , et notons  $V$  la nappe du cône de sommet  $A_i$  limitée par les côtés  $C_i$  et  $C_{i+1}$ . Les vecteurs  $A_{i-1} - A_i$  et  $A_{i+1} - A_i$  auront pour arguments respectifs  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  et on posera  $\alpha_i = \pi / (\gamma_i - \beta_i)$  ; un choix judicieux des angles permettra d'avoir  $\alpha_i > 1/2$  ;  $(\gamma_i - \beta_i)$  est la mesure de l'angle intérieur au sommet  $A_i$ , comptée entre 0 et  $2\pi$ . Considérons la fonction  $\varphi(w) = (w - A_i)^{\alpha_i}$ , pour un choix judicieux (encore!) de la coupure elle applique localement  $\bar{V}$  sur un demi-plan et si on pose alors  $g(z) = \varphi \circ f(z)$ , on peut prolonger  $g$  par symétrie vis-à-vis de la frontière de ce demi-plan, ce qui fait de  $g$  une fonction analytique et injective au voisinage de  $a_i$ .

Au voisinage de  $a_i$  on aura donc

$$f(z) = g(z)^{1/\alpha_i},$$

d'où, avec  $1 - \mu_i = 1/\alpha_i$ ,  $-1 < \mu_i < 1$ , et

$$f'(z) = (1 - \mu_i) g(z)^{-\mu_i} g'(z),$$

et

$$f''(z) = -\mu_i (1 - \mu_i) g(z)^{-1-\mu_i} (g'(z))^2 + (1 - \mu_i) g(z)^{-\mu_i} g''(z),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{-\mu_i (1 - \mu_i) g(z)^{-1-\mu_i} (g'(z))^2}{(1 - \mu_i) g(z)^{-\mu_i} g'(z)} + \frac{(1 - \mu_i) g(z)^{-\mu_i} g''(z)}{(1 - \mu_i) g(z)^{-\mu_i} g'(z)} \\ &= -\mu_i \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g''(z)}{g'(z)}. \end{aligned}$$

Cette formule se prolonge dans un disque pointé de centre  $a_i$  et comme  $g'(a_i) \neq 0$ , puisque  $g$  est injective au voisinage de 0, on aura selon la formule (7.5)

$$\text{Res}(h; a_i) = -\mu_i \frac{g'(z)}{g'(z)} = -\mu_i.$$

La fonction  $g$  ayant un zéro d'ordre 1 en  $a_i$ , il en résulte que

$$h(z) + \sum_{i=1,n} \frac{\mu_i}{z - a_i}$$

est une fonction entière, et comme elle est nulle à l'infini, elle s'annule identiquement. On a ainsi démontré que

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = - \sum_{i=1,n} \frac{\mu_i}{z - a_i}.$$

On aura donc, à une constante multiplicative près

$$f'(z) = \prod_{i=1,n} (z - a_i)^{-\mu_i},$$

et par conséquent

$$f(z) = \xi \int_{\gamma(z_0, z)} \prod_{i=1,n} (z - a_i)^{-\mu_i} dz, \quad (\text{H.2})$$

où  $\gamma(z_0, z)$  est un chemin joignant un point  $z_0$  arbitraire à  $z$ . Il s'agit là de la *formule de Schwarz-Christoffel*.

On peut montrer que cette formule reste valable dans le cas où un sommet  $A_i$  est le point à l'infini, à condition d'y calculer l'angle comme découlant de la relation  $\sum_{i=1,n} \mu_i = 2$ , valable lorsque tous les sommets sont à distance finie.

Il reste le problème de déterminer la position des  $a_i$ , et les valeurs respectives de  $\xi$  et de  $z_0$ . Ces deux derniers paramètres ont une action globale et correspondent à une similitude relative à l'ensemble du polygone; plus difficile est le choix des  $a_i$ . Selon le théorème 12.7 nous savons que le groupe des automorphismes de  $P^+$  dépend de trois paramètres, il est donc loisible de choisir de façon arbitraire la position de trois des points  $a_i$ , il n'y a par contre pas de méthode générale pour choisir les autres, hormis les cas présentant suffisamment de symétries, et on est contraint d'utiliser une méthode numérique pour déterminer la valeur des paramètres restants.



# Appendice I

## Quelques lectures profitables

### Les fondements

**H. Cartan** *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* Hermann (1961)

**M. Audin** *Analyse complexe* <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/analysecomp.pdf>

**E.C. Titchmarsh** *The theory of functions* Oxford University Press (1932)

**M. Houzel** *Analyse complexe et calcul fonctionnel des opérateurs* Polycopié Ecole Polytechnique (1984)

**G. Schiffmann** *Analyse complexe* Polycopié Ecole Polytechnique

### Des chapitres de traités plus généraux

**G. Valiron** *Théorie des fonctions* Masson (1955)

**W. Rudin** *Real and complex analysis* Mc Graw Hill (1966)

**R. Godement** *Analyse mathématique III* Springer (2002)

### Pour aller un peu plus loin

**L.V. Ahlfors** *Complex analysis* Mc Graw Hill (1966)

**J. B. Conway** *Functions of one complex variable I* Springer (1973)

**E. Amar & E. Matheron** *Analyse complexe* Cassini (2004)

**C.A. Berenstein & R. Gay** *Complex variables* Springer (1991)

**P. Dolbeault** *Analyse complexe* Masson (1990)

### Pour aller encore un peu plus loin

**P. Henrici** *Applied and computational complex analysis I et II* Wiley (1974-1977)

**G.A. Jones & D. Singerman** *Complex functions* Cambridge University Press (1987)

**R. Remmert** *Classical topics in complex function theory* Springer (1998)

**J. B. Conway** *Functions of one complex variable II* Springer 1973