



**HAL**  
open science

**Existence et étude numérique de stabilité de solutions faibles du problème de fluide de Maxwell dans un canal. Publication de l'Institut Camille Jordan n° 412, 30 p. (2022). Version française**

Dominique Sandri

► **To cite this version:**

Dominique Sandri. Existence et étude numérique de stabilité de solutions faibles du problème de fluide de Maxwell dans un canal. Publication de l'Institut Camille Jordan n° 412, 30 p. (2022). Version française. 2022. hal-04068481

**HAL Id: hal-04068481**

**<https://hal.science/hal-04068481v1>**

Preprint submitted on 14 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

### Existence et étude numérique de stabilité de solutions faibles du problème de fluide de Maxwell dans un canal.

**Résumé.** Nous étudions l'écoulement d'un fluide régi par le modèle de Maxwell corotationnel (COM model) ou surconvecté (UCM model) dans un canal plan. Il apparaît que le problème admet une solution faible, dans un sens à préciser, qui est un écoulement présentant un glissement aux parois du canal. Ce type de solution présente des propriétés de stabilité qui pourraient expliquer les phénomènes de glissement observés dans les simulations effectuées dans [13], [14], [15] et donner des indications sur le problème du grand nombre de Weissenberg (*cf.* [8]).

**1. Introduction.** Lorsque l'on considère l'écoulement d'un fluide régi par le modèle de Maxwell surconvecté (cas important de modélisation d'un polymère sans solvant) à travers une contraction abrupte et que l'on approche la solution de ce problème par une méthode de type d'éléments finis (MEF), les méthodes de résolution utilisées pour résoudre le problème EF, non linéaire, se mettent à diverger avec le raffinement de maillage (problème du grand nombre de Weissenberg).

La méthode introduite dans [2] appelée méthode de log-conformation permet de remédier à des situations analogues et permet d'atteindre de grands nombres de Weissenberg dans les simulations. Cependant, comme remarqué dans le cas d'une simulation d'écoulement 3D dans une contraction abrupte pour un fluide régi par le modèle d'Oldroyd, il n'apparaît pas d'améliorations significative, avec cette méthode, dans le cas du problème de Maxwell surconvecté (*cf.* [1]).

D'autre part, comme remarqué dans [16], dans le cas d'un nombre de Reynolds non nul, il apparaît une structure localisée au coin de la contraction qui pourrait être ou non un artefact. L'étude montre qu'un très haut niveau de résolution («*very high resolution*») proche de la singularité géométrique (coin ré-entrant de la contraction) serait nécessaire pour approcher cette singularité.

Dans [12], nous avons développé une méthode (dénommée, pour simplifier notre propos, méthode  $\theta$ -MSUPG) qui semblerait être la seule à notre connaissance qui permette d'obtenir des résultats de convergence de la MEF pour l'approximation d'une version linéarisée du Problème de Maxwell, la linéarisation intervenant sur les termes de vitesse dans l'équation de comportement. Les simulations avec cette méthode font alors apparaître un glissement à la paroi avale de l'écoulement dans une contraction 4 :1, pour les modèles (COM) et (UCM) (*cf.* [13]). Sachant que ce phénomène pourrait être un artefact de simulation, nous étudions ici cette question du glissement dans le cas d'un écoulement dans un canal plan. Nous montrons l'existence de solutions faibles avec glissement au bord pour ce type d'écoulement, dans le cas d'un écoulement dans un canal de longueur infinie d'un fluide régi par le modèle de Maxwell (COM et UCM). Ensuite, nous étudions la stabilité de ces solutions faibles, dans le cas d'un écoulement à travers un canal fini, avec conditions au bord, en approchant le problème ainsi posé, par une méthode d'éléments finis. Nous regardons dans quelle mesure l'écoulement approché se stabilise vers une solution faible, restreinte au domaine borné, en aval de l'écoulement. Pour des nombres de Weissenberg suffisamment grands, nous observons que l'écoulement donné par la solution approchée se stabilise autour d'une solution faible. Ceci se produit dans le cas du modèle (COM), ainsi que dans le cas du modèle (UCM), mais pour ce dernier cas, uniquement avec l'utilisation de la méthode  $\theta$ -MSUPG. En particulier, si les conditions au bord, sont données par les valeurs d'une solution faible, nous observons,

avec la méthode  $\theta$ -MSUPG, une convergence des solutions de type éléments finis vers cette solution faible, pour des nombres de Weissenberg suffisamment grands. Ceci nous amène à faire l'hypothèse que ce type de solutions faibles existerait dans le cas d'une contraction 4 :1, sans exclure l'existence éventuelle d'une solution forte conjointe, avec une singularité de coin (*cf.* l'étude dans [7]). Le phénomène du grand nombre de Weissenberg pour le modèle de Maxwell surconvecté se produirait avec le raffinement de maillage qui rendrait les solutions faibles plus attractives numériquement, mais d'approximation instable pour les méthodes de type SUPG. La méthode  $\theta$ -MSUPG permettrait une meilleure approximation de ces solutions.

Au §2, nous considérons le problème de l'écoulement monodimensionnel dans un canal de longueur infinie avec une condition de vitesse nulle au bord, d'un fluide régi par le modèle viscoélastique de Maxwell corotationnel (COM) ou surconvecté (UCM). Nous construisons des solutions faibles, dans un sens à définir, de ce problème. Au §3, nous considérons un écoulement dans un canal de longueur finie, avec conditions au bord, le problème ainsi obtenu est approché par diverses méthodes d'EF, avec une méthode de point fixe pour la résolution du problème non linéaire. Nous étudions ensuite la stabilisation des solutions approchées vers des solutions faibles obtenues au §2, sur tout l'écoulement ou sur une partie de l'écoulement. Ainsi le phénomène de glissement observé dans [13], dans le cas d'écoulements dans une contraction 4 : 1, ainsi que dans le cas d'un canal (*cf.* [14]), pourrait s'expliquer comme étant la convergence de la méthode des élément finis vers une solution de type solution faible sur une partie du domaine de l'écoulement.

**2. Existence de solution faibles pour un écoulement de Poiseuille.** On note  $\sigma$  le tenseur des extra-contraintes supposé symétrique,  $u$  la vitesse du fluide et  $p$  sa pression. On note pour un tenseur  $\sigma$ ,  $\nabla \cdot \sigma = \sigma_{ij,j}$  sa divergence, avec la convention de sommation d'Einstein, pour une vitesse  $u$ , on note  $\nabla \cdot u = u_{i,i}$  la divergence de  $u$ ,  $u \cdot \nabla \sigma = u_k \sigma_{ij,k}$ , pour un scalaire  $p$   $\nabla p = p_{,i}$  le gradient de  $p$ ,  $d(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  le tenseur des taux de déformation de  $u$  et  $\omega(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$  le tenseur de vorticité de  $u$ .

Soit  $a \in [-1, 1]$ , on pose  $B$  la dérivée objective

$$B(u, \sigma) = u \cdot \nabla \sigma + \sigma \omega(u) - \omega(u) \sigma - a(d(u) \sigma + \sigma d(u)).$$

On considère l'écoulement d'un fluide à travers le domaine  $\Omega = ]-\infty, +\infty[ \times ]-1, 1[$  de frontière  $\Gamma = ]-\infty, +\infty[ \times \{-1, 1\}$ , avec  $(\sigma, u, p)$  satisfaisant le modèle d'Oldroyd :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \sigma + \lambda B(u, \sigma) = 2\alpha d(u) \text{ in } \Omega, \\ -\nabla \cdot \sigma - 2(1 - \alpha) \nabla \cdot d(u) + \nabla p = 0 \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x, -1) = u(x, 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$  la fraction visco elastique de la viscosité. Le modèle de Maxwell, que nous considérons dans la suite, est obtenu en posant  $\alpha = 1$  dans  $(\mathcal{P})$ . Le modèle de Maxwell corotationnel est obtenu pour  $a = 0$  et le modèle de Maxwell surconvecté pour  $a = 1$ .

On cherche un écoulement monodimensionnel solution de  $(\mathcal{P})$ , avec  $u$  et  $\sigma$  dépendant uniquement de la variable  $y$  et tel que  $u_2 = 0$ , que l'on appellera écoulement de Poiseuille.

Soit  $\alpha = 1$ , on dira que  $(\sigma, u, p)$  est une solution faible de  $(\mathcal{P})$  si  $(\sigma, u, p)$  est la limite simple sur  $\Omega$ , quand  $\epsilon$  tend vers  $0^+$ , d'une suite d'écoulements monodimensionnels  $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$  tels que sur tout ouvert borné de la forme  $\Omega_\ell = ]-\ell, \ell[ \times ]-1, 1[$ ,  $\ell > 0$ , on a  $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon) \in [L^2(\Omega_\ell)]^4 \times [H^1(\Omega_\ell)]^2 \times L^2(\Omega_\ell)$ ,  $u^\epsilon \cdot \nabla \sigma^\epsilon \in [L^2(\Omega_\ell)]^4$  et

$$(\mathcal{P}f) \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sigma^\epsilon + \lambda B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) - 2d(u^\epsilon) = 0 \text{ dans } [L^1_{loc}(\Omega)]^4, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\nabla \cdot \sigma^\epsilon + \nabla p^\epsilon = 0 \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^2, \\ \nabla \cdot u^\epsilon = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u^\epsilon(x, -1) = u^\epsilon(x, 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant (les pressions sont définies à une constante  $C_p$  près) :

**Proposition 1.** Soit  $\alpha = 1$  et soit  $D > 0$  ( $D$  représente le débit du fluide).

• *Cas 1. Soit  $a = 0$  (Modèle de Maxwell corotationnel).*

a) Si  $\lambda \leq \lambda_c \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{D}(1 - \frac{\pi}{4})$ , alors il existe un unique écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  solution de  $(\mathcal{P})$ , tel que  $(u, p)$  vérifie :

$$(1) \quad u_1(x, y) = \int_1^y \frac{-2fs}{1 + \sqrt{1 - 4f^2\lambda^2s^2}} ds, \quad u_2(x, y) = 0, \quad p(x, y) = -fx + C_p, \quad \int_{-1}^1 u_1(x, y) dy = D.$$

La constante  $0 \leq f \leq f_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\lambda}$  est définie de manière unique par la condition de débit.

b) Pour  $\lambda > \lambda_c$ , il n'existe pas d'écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  solution de  $(\mathcal{P})$ .

c) Le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution faible donnée par

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma &= 0, u = (U_0, 0), p = C_p \text{ sur } \Omega \text{ et} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, u = (0, 0), p = -\frac{1}{\lambda} + C_p \text{ sur } \Gamma, U_0 = \frac{D}{2}. \end{aligned}$$

• *Cas 2. Soit  $a = 1$  (Modèle de Maxwell surconvecté).*

a) Pour tout  $D \geq 0$ , il existe un unique écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  solution de  $(\mathcal{P})$ , tel que  $(u, p)$  vérifie :

$$(3) \quad u_1(x, y) = \frac{f}{2}(1 - y^2), \quad u_2(x, y) = 0, \quad p(x, y) = -fx + C_p, \quad f = \frac{3}{2}D.$$

b) Le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution faible, avec  $\sigma_{11}$  définie à une constante  $C_\sigma$  près sur  $\Gamma$ , donnée par

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma &= 0, u = (U_0, 0), p = C_p \text{ sur } \Omega \text{ et} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} C_\sigma & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, u = (0, 0), p = -\frac{1}{\lambda} + C_p \text{ sur } \Gamma, U_0 = \frac{D}{2}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Par commodité, nous reprenons la preuve de la relation (1) donnée dans [6], complétée de la question du débit. Nous avons conservé la variable  $x$  dans les expressions de  $(\sigma, u)$  ainsi que l'écriture des équations avec des dérivées partielles.

**Preuve du cas 1 (modèle (COM)), a) – b).** Pour  $a = 0$ , l'équation de comportement s'écrit, avec  $u \cdot \nabla \sigma = 0$  :

$$\sigma_{11} - \lambda \sigma_{12} u_{1,2} = 0, \quad \sigma_{12} + \frac{\lambda}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) u_{1,2} - u_{1,2} = 0, \quad \sigma_{22} + \lambda \sigma_{12} u_{1,2} = 0$$

ce qui donne la relation classique

$$(5) \quad \sigma_{11}(x, y) = \frac{\lambda u_{1,2}^2(x, y)}{1 + \lambda^2 u_{1,2}^2(x, y)}, \quad \sigma_{12}(x, y) = \frac{u_{1,2}(x, y)}{1 + \lambda^2 u_{1,2}^2(x, y)}, \quad \sigma_{22}(x, y) = -\frac{\lambda u_{1,2}^2(x, y)}{1 + \lambda^2 u_{1,2}^2(x, y)},$$

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 \sigma_{12}^2}}{2\lambda^2 \sigma_{12}} = \frac{2\sigma_{12}}{1 \mp \sqrt{1 - 4\lambda^2 \sigma_{12}^2}} \text{ si } \sigma_{12} \neq 0 \text{ et } 1 - 4\lambda^2 \sigma_{12}^2 \geq 0,$$

$$u_{1,2} = 0 \text{ si } \sigma_{12} = 0.$$

L'équation des moments s'écrit

$$-\sigma_{12,2} + p_{,1} = 0, -\sigma_{22,2} + p_{,2} = 0,$$

on obtient une pression de la forme

$$p(x, y) = \sigma_{22}(x, y) + \Psi(x) \Rightarrow \sigma_{12,2}(x, y) = \Psi'(x) \Rightarrow \sigma_{12}(x, y) = \Psi'(x)y + K(x).$$

Comme  $\sigma_{12}$  dépend uniquement de  $y$ , on en déduit que  $\Psi'$  est une constante  $-f$  telle que  $p_{,1} = -f$ , et que la fonction  $K(x)$  est une constante. On obtient avec (5) :

$$\sigma_{12} = -fy + K \Leftrightarrow u_{1,2} = (-fy + K)(1 + \lambda^2 u_{1,2}^2).$$

Par hypothèse,  $u$  ne dépend pas de  $x$  et doit vérifier les conditions au bord  $u_1(x, -1) = u_1(x, 1) = 0$ , donc, d'après le Théorème des accroissements finis  $u_{1,2}$  s'annule pour une valeur  $-1 < y_0 < 1$ , donc  $K = fy_0$ , ce qui donne avec (5) :

$$u_{1,2}(x, y) = \frac{-2f(y - y_0)}{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 f^2 (y - y_0)^2}} \text{ si } 1 - 4\lambda^2 f^2 (y - y_0)^2 \geq 0 \text{ et } y \neq y_0.$$

On obtient une seule fonction continue possible au voisinage de  $y_0$  :

$$u_{1,2}(x, y) = \frac{-2f(y - y_0)}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda^2 f^2 (y - y_0)^2}}$$

qui est définie sur  $[-1, 1]$  pour  $\lambda$  suffisamment petit. Il reste à vérifier les conditions au bord. On a donc

$$u_1(x, y) = \int_1^y \frac{-2f(s - y_0)}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda^2 f^2 (s - y_0)^2}} ds = \int_{1-y_0}^{y-y_0} \frac{-2fs}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda^2 f^2 s^2}} ds.$$

La fonction à intégrer est impaire, du signe de  $-f$ , strictement, pour  $s > 0$ . La condition au bord  $u_{1,2}(x, -1) = 0$  est vérifiée si et seulement si  $-1 - y_0 = -(1 - y_0) \Rightarrow y_0 = 0$ . Donc, si  $|f| \leq f_\lambda$ , avec  $f_\lambda = \frac{1}{2\lambda}$ , on obtient un unique écoulement de Poiseuille, à la constante  $f$  près, de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , solution de  $(\mathcal{P})$ , avec  $u$  donné par

$$(6) \quad u_1(x, y) = \int_y^1 \frac{2fs}{1 + \sqrt{1 - 4f^2 \lambda^2 s^2}} ds, \quad u_2(x, y) = 0.$$

Pour ce résultat, on pourra se référer, par exemple, à [6], Eqn. 2.8 et Proposition 2.1 (pour un écoulement dans la direction de  $y$ ).

Il reste à montrer l'existence de la solution pour un débit  $D$  donné. Soit  $u_1$  donnée par (6) et  $D(f) = \int_{-1}^1 u_1(x, y) dy = 2 \int_0^1 u_1(x, y) dy$  le débit. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $s \in ]0, 1]$  fixés, la fonction de la variable  $f : f \rightarrow \frac{2fs}{1 + \sqrt{1 - 4f^2 \lambda^2 s^2}}$  est continue, strictement croissante comme produit de fonctions positives strictement croissantes. On en déduit que pour  $y \in [-1, 1]$  fixé,  $u_1(x, y)$  est une fonction strictement croissante de  $f$  et que  $D$  est une bijection continue strictement croissante de  $[0, f_\lambda]$  sur  $[0, D(f_c)]$ . Le débit maximal est atteint pour  $f = f_\lambda$  et vaut

$$D(f_\lambda) = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \left( \int_y^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx \right) dy = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Ainsi un débit donné  $D \geq 0$  pourra être satisfait par le fluide si et seulement si  $\lambda$  vérifie :

$$D \leq \frac{2}{\lambda} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \lambda \leq \lambda_c \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{D} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad \square$$

Dans le cas  $\lambda \leq \lambda_c$ , la constante  $f$  est déterminée de manière unique. Ainsi pour  $\lambda > \lambda_c$ , il n'y a plus d'existence d'un écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Dans les simulations numériques sur un canal  $\Omega_L$  présentées au Paragraphe suivant, il apparaît que l'écoulement se stabilise en général vers l'écoulement de Poiseuille régulier (1), lorsqu'il existe une solution donnée par (6) qui satisfait le débit  $D$  imposé dans la simulation, *i.e.* pour  $\lambda \leq \lambda_c$  (*cf.* aussi [14], [15], Fig. 3.2). Un écoulement avec glissement apparaît lorsque  $\lambda$  devient supérieur à  $\lambda_c$ , donc lorsque l'on perd l'existence de l'écoulement de Poiseuille et une chute de pression apparaît. L'écoulement avec glissement se stabilise alors autour de la solution faible (2).

**Preuve du cas 1 (modèle (COM)), c) Existence de la solution faible.** Soit  $0 < \epsilon < 1$ . Posons  $f_\epsilon$  et  $g_\epsilon = 1 - f_\epsilon$ , les fonctions indicatrices respectives de  $\Omega^\epsilon = ]-\infty, +\infty[ \times ]-1 + \epsilon, 1 - \epsilon[$  et de son complémentaire dans  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma : (\Omega^\epsilon)^c = ]-\infty, +\infty[ \times ]-1, -1 + \epsilon[ \cup ]-\infty, +\infty[ \times ]1 - \epsilon, 1[$ . Donc, pour  $(x, y) \in \bar{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x, y) &= 1 \text{ si } -1 + \epsilon \leq y \leq 1 - \epsilon, f_\epsilon(x, y) = 0, \text{ sinon} \\ g_\epsilon(x, y) &= 0 \text{ si } -1 + \epsilon \leq y \leq 1 - \epsilon, g_\epsilon(x, y) = 1, \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On pose  $U_0 = 2D$ , avec  $D > 0$  le débit,  $u_1^\epsilon$  la fonction continue qui vaut  $U_0$  sur  $\Omega^\epsilon$ ,  $\frac{(1+y)U_0}{\epsilon}$  sur  $] - \infty, +\infty[ \times ]-1, -1 + \epsilon[$  et  $\frac{(1-y)U_0}{\epsilon}$  sur  $] - \infty, +\infty[ \times ]1 - \epsilon, 1[$  (*cf.* Fig. 1) et on pose  $u_2^\epsilon$  la fonction nulle sur  $\bar{\Omega}$ .

La fonction  $u_1^\epsilon$  est une fonction continue  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de dérivée directionnelle suivant  $x$  nulle, qui appartient à  $H^1(\Omega_\ell), \forall \ell > 0$ . On a encore

$$u^\epsilon(x, y) = U_0 \left( f_\epsilon + \frac{1 - |y|}{\epsilon} g_\epsilon, 0 \right).$$

Le profil de la vitesse  $u^\epsilon$  a alors la forme d'un trapèze (*cf.* Fig. 1). La fonction  $u_1^\epsilon$  est dérivable suivant  $y$  sur  $\bar{\Omega}$  privé des droites  $y = -1 + \epsilon$  et  $y = 1 - \epsilon$ , avec

$$u_{1,2}^\epsilon(x, y) = -\text{sign}(y) \frac{U_0}{\epsilon} g_\epsilon, y \neq -1 + \epsilon, y \neq 1 - \epsilon.$$

Posons, à partir de (5) :

$$\sigma_{11}^\epsilon = \frac{\lambda U_0^2}{\epsilon^2 + \lambda^2 U_0^2} g_\epsilon, \sigma_{12}^\epsilon = -\text{sign}(y) \frac{\epsilon U_0}{\epsilon^2 + \lambda^2 U_0^2} g_\epsilon, \sigma_{22}^\epsilon = -\frac{\lambda U_0^2}{\epsilon^2 + \lambda^2 U_0^2} g_\epsilon, p^\epsilon = \sigma_{22}^\epsilon + C_p.$$

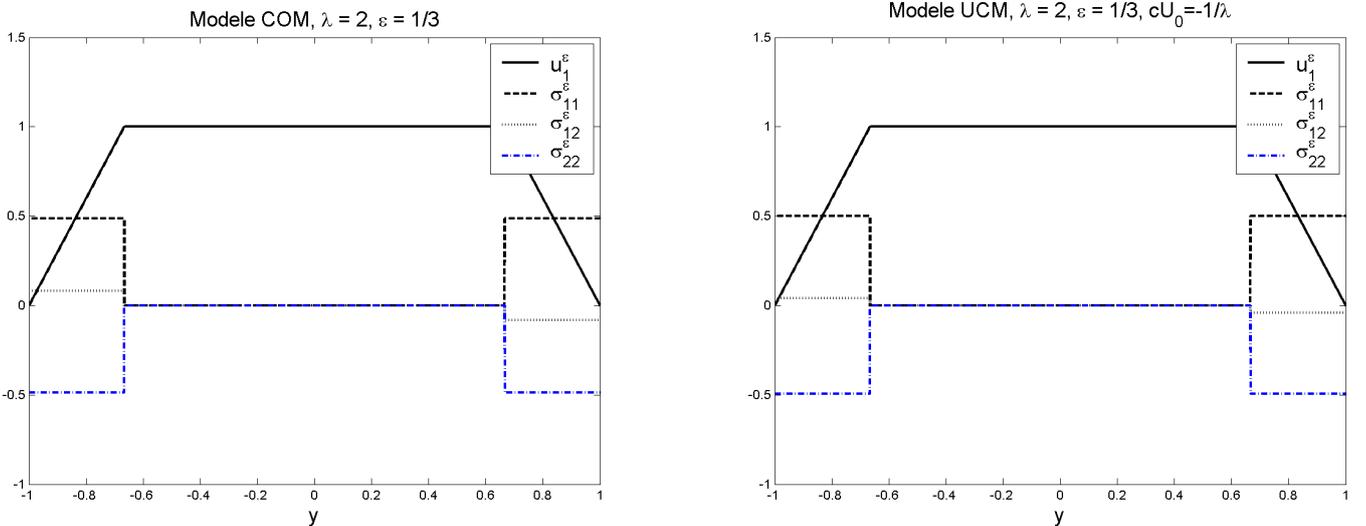


Fig. 1. Fonctions  $\sigma^\epsilon$  et  $u_1^\epsilon$  dans le cas des modèles (COM) et (UCM) avec  $U_0 = 1$  et, dans le cas du modèle (UCM),  $c = \frac{1}{\lambda}$ .

Le tenseur  $\sigma^\epsilon$  est dérivable suivant  $u^\epsilon$  de dérivée nulle :  $u^\epsilon \cdot \nabla \sigma^\epsilon = u_1^\epsilon \sigma_{,1}^\epsilon = 0$ . Soit  $(\sigma, u, p)$  la limite simple quand  $\epsilon$  tend vers  $0^+$  de  $(u^\epsilon, \sigma^\epsilon, p^\epsilon)$  sur le fermé  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $(\sigma, u, p)$  vérifie la relation (2) de la Proposition 1 :

$$u = (U_0, 0), \sigma = 0, p = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } u = (0, 0), \sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, p = -\frac{1}{\lambda} + C_p, \text{ sur } \Gamma.$$

Le triplet  $(\sigma, u, p)$  étant constant sur  $\Omega$ , vérifie le problème  $(\mathcal{P})$ , mais avec une vitesse discontinue à la frontière. Le triplet  $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$  vérifie l'équation de comportement pour  $y \neq \pm(1 - \epsilon)$  :

$$\begin{aligned} \sigma^\epsilon + \lambda B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) - 2d(u^\epsilon) \\ = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^\epsilon - \lambda \sigma_{12}^\epsilon u_{1,2}^\epsilon & \sigma_{12}^\epsilon + \frac{\lambda}{2}(\sigma_{11}^\epsilon - \sigma_{22}^\epsilon)u_{1,2}^\epsilon - u_{1,2}^\epsilon \\ \sigma_{12}^\epsilon + \frac{\lambda}{2}(\sigma_{11}^\epsilon - \sigma_{22}^\epsilon)u_{1,2}^\epsilon - u_{1,2}^\epsilon & \sigma_{22}^\epsilon + \lambda \sigma_{12}^\epsilon u_{1,2}^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sigma^\epsilon + \lambda B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) - 2d(u^\epsilon) = 0 \text{ dans } [L_{loc}^1(\Omega)]^4.$$

Le choix de la convergence  $L_{loc}^1(\Omega)$  est dû au fait que  $B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) \in L_{loc}^1(\Omega)$  lorsque  $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon)$  appartient à  $[L_2(\Omega_\ell)]^4 \times [H^1(\Omega_\ell)]^2$  pour tout  $\ell > 0$ . Soit  $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2$ ,  $K$  son support compact, et  $\epsilon_0$  tel que  $K \subset \Omega^\epsilon, \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , alors, comme  $\sigma^\epsilon$  et  $p^\epsilon$  sont nuls sur  $K$  pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  on a, avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $([\mathcal{D}(\Omega)]^2)'$  et  $[\mathcal{D}(\Omega)]^2$  :

$$\langle -\nabla \cdot \sigma^\epsilon + \nabla p^\epsilon, v \rangle = (\sigma^\epsilon, d(v)) - (p^\epsilon, \nabla \cdot v) = \int_K (\sigma_{ij}^\epsilon d_{ij}(v) - p^\epsilon \nabla \cdot v) = 0, \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\nabla \cdot \sigma^\epsilon + \nabla p^\epsilon = 0 \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^2. \quad \square$$

**Preuve du cas 2 (modèle (UCM)).** Pour  $a = 1$ , l'équation de comportement devient alors

$$\sigma_{11} - 2\lambda \sigma_{12} u_{1,2} = 0, \sigma_{12} - \lambda \sigma_{22} u_{1,2} - u_{1,2} = 0, \sigma_{22} = 0$$

ce qui donne la relation classique

$$(7) \quad \sigma_{11} = 2\lambda u_{1,2}^2, \sigma_{12} = u_{1,2}, \sigma_{22} = 0.$$

On obtient alors la solution (3) de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  en raisonnant comme au cas précédent. Traitons le cas de l'existence de la solution faible. On pose, comme précédemment, pour  $u^\epsilon$  :

$$u^\epsilon(x, y) = U_0(f_\epsilon + \frac{1 - |y|}{\epsilon} g_\epsilon, 0), U_0 = \frac{D}{2}$$

et pour  $\sigma^\epsilon$  et  $p^\epsilon$  (cf. Fig. 1), avec  $c \in \mathbb{R}$  (avec le paramètre  $c$ , on obtient une solution faible définie à une constante près sur  $\Gamma$ ) :

$$\sigma_{11}^\epsilon = cU_0^2 g_\epsilon, \sigma_{12}^\epsilon = -\text{sign}(y) \frac{cU_0 \epsilon}{2\lambda} g_\epsilon, \sigma_{22}^\epsilon = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{c\epsilon^2}{2\lambda} - 1 \right) g_\epsilon, p^\epsilon = \sigma_{22}^\epsilon + C_p.$$

La solution faible (4) s'obtient alors en prenant la limite simple sur  $\Omega$  de  $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$  quand  $\epsilon$  tend vers  $0^+$  et en posant  $C_\sigma = cU_0^2$ . De la relation, pour  $y \neq \pm(1 - \epsilon)$  :

$$\sigma^\epsilon + \lambda B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) - 2d(u^\epsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^\epsilon - 2\lambda \sigma_{12}^\epsilon u_{1,2}^\epsilon & \sigma_{12}^\epsilon - \lambda \sigma_{22}^\epsilon u_{1,2}^\epsilon - u_{1,2}^\epsilon \\ \sigma_{12}^\epsilon - \lambda \sigma_{22}^\epsilon u_{1,2}^\epsilon - u_{1,2}^\epsilon & \sigma_{22}^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^\epsilon \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sigma^\epsilon + \lambda B(u^\epsilon, \sigma^\epsilon) - d(u^\epsilon) = 0 \ [L^1_{loc}(\Omega)]^4.$$

La limite de  $-\nabla \cdot \sigma^\epsilon + \nabla p^\epsilon$  vers 0 dans  $[H^{-1}(\Omega)]^2$  quand  $\epsilon$  tend vers  $0^+$ , se traite comme précédemment.  $\square$

**3. Simulations numériques.** On utilise la symétrie de l'écoulement, et on considère un écoulement dans un domaine de la forme  $\Omega_L = ]0, L[ \times ]0, 1[$ , avec des conditions au bord. On prendra  $L = 8$  dans les simulations. On considère le problème  $(\mathcal{Q})$  posé sur  $\Omega_L$  :

$$(\mathcal{Q}) \quad \sigma + \lambda B(u, \sigma) = 2d(u), \quad -\nabla \cdot \sigma + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad \text{sur } \Omega_L,$$

on pose  $\Gamma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y \in [0, 1]\}$  la frontière rentrante du fluide,  $\Gamma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = L, y \in [0, 1]\}$  sa frontière sortante,  $\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, L], y = 0\}$  l'axe de symétrie de l'écoulement et  $\Gamma_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, L], y = 1\}$  la paroi de l'écoulement sur lequel la vitesse du fluide est nulle (*cf.* Fig. 2). On note  $n$  le vecteur normal unitaire sortant sur la frontière de  $\Omega$  et  $t = (-n_2, n_1)$  la tangente unitaire (la base  $(n, t)$  est orientée dans le sens direct). La vitesse est imposée à l'entrée et, pour tenir compte du caractère hyperbolique de l'équation de comportement, une condition au bord est imposée sur  $\sigma$  à la frontière  $\Gamma^-$  (*cf.* [3]). Soit  $u_0 \in [H^1_{loc}(\Omega_L)]^2$  et  $\sigma_0 \in [L^2(\Gamma^-)]^4$ , avec la condition de vitesse nulle à la paroi et la condition sur l'axe de symétrie, les conditions au bord choisies pour le problème  $(\mathcal{Q})$  sont alors :

$$\sigma = \sigma_0 \text{ sur } \Gamma^-, \quad u = u_0 \text{ sur } \Gamma^-, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_p, \quad u \cdot n = 0 \text{ et } [(\sigma - pI) \cdot n] \cdot t = 0 \text{ sur } \Gamma_a \text{ (Neumann)}.$$

La condition de Neumann sur l'axe de symétrie est vérifiée par les solutions données par la Proposition 1, avec  $\sigma$  donné par Eqns. (5) ou (7) dans le cas des solutions de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  : comme  $\sigma = 0$  sur  $\Gamma_a$ , on a alors  $[(\sigma - pI) \cdot n] \cdot t = (pI \cdot n) \cdot t = 0$ .

A la sortie de l'écoulement, nous avons considéré plusieurs types de conditions qui donnent sensiblement les mêmes résultats dans les simulations :

- (CFD) : condition de Dirichlet en sortie :  $u = u_0$  sur  $\Gamma^+$ ,
- (CF1) : condition de Dirichlet sur  $u \cdot t$  en sortie :  $u_2 = 0$  sur  $\Gamma^+$ , avec conditions de Neumann  $[(\sigma - pI) \cdot n] \cdot n = 0$  sur  $\Gamma^+$ ,
- (CF2) : condition de Neumann en sortie :  $(\sigma - pI) \cdot n = 0$  sur  $\Gamma^+$ .

Les restrictions à  $\bar{\Omega}_L$  des solutions  $(\sigma, u, p)$  du problème  $(\mathcal{P})$  sont solutions (dans un sens formel pour les solutions faibles) du problème  $(\mathcal{Q})$  avec les conditions de Dirichlet (CFD) et le choix des conditions au bord  $(\sigma_0, u_0) = (\sigma, u)$ . Dans le cas du modèle (UCM), nous étudierons la convergence des solutions approchées lorsque le couple  $(\sigma_0, u_0)$  est donné par une de ces solutions, avec, au §3.3, le couple  $(\sigma_0, u_0)$  donné par la solution faible (2) ou (4) et au §3.4, par la solution régulière donné par (3) and (7).

Les formulations EF utilisées pour l'approximation du problème  $(\mathcal{Q})$  sont d'une part, une méthode de type SUPG modifiée avec un splitting d'un facteur  $\theta$  des équations couplé à un décentrage amont avec un coefficient  $\delta$ . Cette méthode permet d'obtenir des résultats de convergence EF dans le cas d'une version linéarisée du problème de Maxwell lorsque

$$\theta = \frac{1}{1 + \delta},$$

(*cf.* [12]). Nous nommerons par commodité cette méthode, méthode  $\theta$ -MSUPG. D'autre part, nous avons aussi comparé les résultats avec une méthode de type SUPG, utilisant le terme de décentrage standard  $\delta u_h \cdot \nabla \tau_h$ , que nous avons appelée méthode  $\theta$ -SUPG.

Plaçons nous dans le cas des conditions de Dirichlet (CFD). Avec ces conditions (CFD), les pressions sont choisies dans l'espace  $L^2_0(\Omega_L)$  des fonctions de  $L^2(\Omega_L)$  de moyenne nulle. On suppose que  $u_0 = 0$  sur  $\Gamma_p$  et que les conditions de compatibilité  $\int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} u_0 \cdot n \, ds = 0$  et  $u_0 \cdot n = 0$  sur  $\Gamma_a$  sont vérifiées (il n'est pas nécessaire que  $u_0$  soit de divergence nulle). Notons  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire sur  $[L^2(\Omega_L)]^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $\langle \sigma, \tau \rangle_{\Gamma^-} = \int_{\Gamma^-} \sigma_{ij} \tau_{ij} |u_0 \cdot n| \, ds$ .

On pose  $T = \{\tau \in [H^1(\Omega_L)]^4, \tau \text{ symétrique}\}$ ,  $X = \{v \in [H^1(\Omega_L)]^4, v = 0 \text{ sur } \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma_p, v.n = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$ . Soit  $\{T_h \times X_h \times M_h\}_{h>0} \subset T \times X \times M$  une famille d'espaces vectoriels. Soit  $\mu \geq 0$  un paramètre, le problème  $(\mathcal{Q})$  est alors approché par le problème  $(\mathcal{Q}_h)$  suivant (à titre indicatif nous avons conservé dans la formulation le terme  $\alpha$  qui vaut 1 dans les simulations) :

### Méthode $\theta$ -MSUPG

Trouver  $(\sigma_h, u_h, p_h) \in T_h \times (u_0 + X_h) \times M_h$  tel que  $\forall (\tau, v, q) \in T_h \times X_h \times M_h$  on a :

$$(\mathcal{Q}_h) \begin{cases} (\sigma_h + \lambda B(u_h, \sigma_h), \tau + \delta \lambda B(u_h, \tau)) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_h, \tau \rangle_{\Gamma^-} \\ \quad = 2\alpha(d(u_h), \tau + \delta \lambda B(u_h, \tau)) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_0, \tau \rangle_{\Gamma^-}, \\ \theta(\sigma_h, d(v)) + (1 - \theta)(2\alpha d(u_h) - \lambda B(u_h, \sigma_h), d(v)) \\ + 2(1 - \alpha)(d(u_h), d(v)) - (p_h, \nabla \cdot v) + \mu(\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v) = (f, v), \\ (\nabla \cdot u_h, q) = 0. \end{cases}$$

Pour  $\theta = 1$  et  $\delta = 0$ , on retrouve une méthode de Galerkin classique. D'autre part, nous avons aussi utilisé une méthode de type  $\theta$ -SUPG, où le terme de décentrage  $\lambda B(u_h, \tau)$  dans  $(\mathcal{Q}_h)$  est remplacé par le terme  $\lambda u_h \nabla \cdot \tau$  :

### Méthode $\theta$ -SUPG

Trouver  $(\sigma_h, u_h, p_h) \in T_h \times (u_0 + X_h) \times M_h$  tel que  $\forall (\tau, v, q) \in T_h \times X_h \times M_h$  on a :

$$(\mathcal{Q}'_h) \begin{cases} (\sigma_h + \lambda B(u_h, \sigma_h), \tau + \delta \lambda u_h \nabla \cdot \tau) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_h, \tau \rangle_{\Gamma^-} \\ \quad = 2\alpha(d(u_h), \tau + \delta \lambda u_h \nabla \cdot \tau) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_0, \tau \rangle_{\Gamma^-}, \\ \theta(\sigma_h, d(v)) + (1 - \theta)(2\alpha d(u_h) - \lambda B(u_h, \sigma_h), d(v)) \\ + 2(1 - \alpha)(d(u_h), d(v)) - (p_h, \nabla \cdot v) + \mu(\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v) = (f, v), \\ (\nabla \cdot u_h, q) = 0. \end{cases}$$

Pour  $\theta = 1$ , on retrouve une méthode de type SUPG classique pour le modèle de Maxwell. Lorsque  $\theta = 1$ , les espaces d'EF doivent vérifier une condition inf-sup tenseur-vitesse pour que les problèmes  $(\mathcal{Q}_h)$  ou  $(\mathcal{Q}'_h)$ , pour l'approximation du problème de Stokes à trois champs obtenu en posant  $\lambda = 0$  dans  $(\mathcal{Q})$ , soit bien posés (cf. [4],[5],[9],[11]). Des résultats numériques, auxquels nous faisons référence dans le cadre du §3.1, utilisant ce type d'EF, sont présentés dans [13], [14], [15]. Les formulations des problèmes  $(\mathcal{Q}_h)$  et  $(\mathcal{Q}'_h)$  correspondant aux conditions (BC1) et (BC2) s'obtiennent de manière similaire, en adaptant l'espace  $X$  aux conditions au bord et en prenant l'espace  $L^2(\Omega)$  comme espace des pressions. Dans le cas du modèle (UCM), nous avons obtenu des solutions approchées présentant un glissement à la paroi, proches des solutions faibles de la Proposition 1, uniquement avec la méthode  $\theta$ -MSUPG.

Soit  $c \geq 0$  un paramètre, le problème  $(\mathcal{Q}_h)$  est résolu par l'itération de point fixe suivant : soit  $(\sigma_h^n, u_h^n, p_h^n) \in T_h \times (u_0 + X_h) \times M_h$  donné, alors  $(\sigma_h^{n+1}, u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in T_h \times (u_0 + X_h) \times M_h$  est donné par :

$$(\mathcal{FP}) \begin{cases} (\sigma_h^{n+1} + \lambda B(u_h^n, \sigma_h^{n+1}), \tau + \delta \lambda B(u_h^n, \tau)) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_h^{n+1}, \tau \rangle_{\Gamma^-} \\ \quad = 2\alpha(d(u_h^{n+1}), \tau + \delta \lambda B(u_h^n, \tau)) + \lambda(1 + \delta) \langle \sigma_0, \tau \rangle_{\Gamma^-}, \\ \theta(\sigma_h^{n+1}, d(v)) + (1 - \theta)(2\alpha d(u_h^{n+1}) - \lambda B(u_h^n, \sigma_h^{n+1}), d(v)) \\ + 2(1 - \alpha + c)(d(u_h^{n+1}), d(v)) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot v) + \mu(\nabla \cdot u_h^{n+1}, \nabla \cdot v) \\ \quad = (f, v) + 2c(d(u_h^n), d(v)) \\ (\nabla \cdot u_h^{n+1}, q) = 0, \forall (\tau, v, q) \in T_h \times X_h \times M_h. \end{cases}$$

Le coefficient  $c$ , permet d'améliorer, dans certains cas et de manière significative, la convergence de l'algorithme du point fixe ci-dessus. Le point fixe utilisé pour résoudre le problème  $(\mathcal{Q}'_h)$  est analogue.

Le domaine  $\Omega_L$  est muni d'une triangulation conforme  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  de triangles  $K$ . Les calculs sont effectués sur diverses triangulations, sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  et sur le maillage  $\mathcal{M}_2$  qui est un raffinement de ce maillage (*cf.* Fig. 2 et aussi Fig. 14, détails des maillages). Les espaces d'EF utilisés sont l'espace  $P_1$  continu pour l'approximation des tenseurs et de la pression et le  $P_2$  continu pour l'approximation des vitesses. Pour prendre en compte le cas  $\theta = 1$ , nous utiliserons aussi des éléments finis de type  $P_1$  bulles continus pour l'approximation des tenseurs, avec :

$$T_h = \{\tau \in [\mathcal{C}^0(\Omega_L)]^4, \tau|_K \in [P_1(K) \oplus b_4(K)]^4, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

avec  $b_4(K) = \text{span}\{\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2\}$ , où  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  est un ensemble de coordonnées barycentriques de  $K$ .

Au §3.4, nous avons aussi considéré un maillage  $\mathcal{M}_3$ , plus régulier et anisotrope (*cf.* Fig. 16) (avec une approximation  $P_1$  continue ou  $P_2$  continue des tenseurs) dans le cadre d'une étude de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille lorsque-celui est solution du problème aux limites ( $\mathcal{Q}$ ) (modèle (UCM)).

Pour étudier les variations de la solution approchée au voisinage de la paroi (*cf.* Fig. 5 et Fig. 9, les variations de la vitesse), nous posons  $\Delta_1$  la droite  $y = 47/48 \simeq 0.9792$  qui intersecte les arêtes horizontales de la première rangée de triangles du maillage  $\mathcal{M}_1$ , en comptant ceux-ci depuis le sommet de  $\Omega_L$  (*cf.* Fig. 2 et Fig. 14, des détails du maillage). De même, pour le maillage  $\mathcal{M}_2$ , nous notons  $\Delta_2$  la droite correspondante, qui a pour équation  $y = \frac{1535}{1536} \simeq 0.99935$ . La seconde rangée de triangles du maillage  $\mathcal{M}_2$  est délimitée par  $\Delta_2$  et la droite  $\Delta_2'$  d'équation  $y = \frac{1534}{1536} \simeq 0.9987$ .

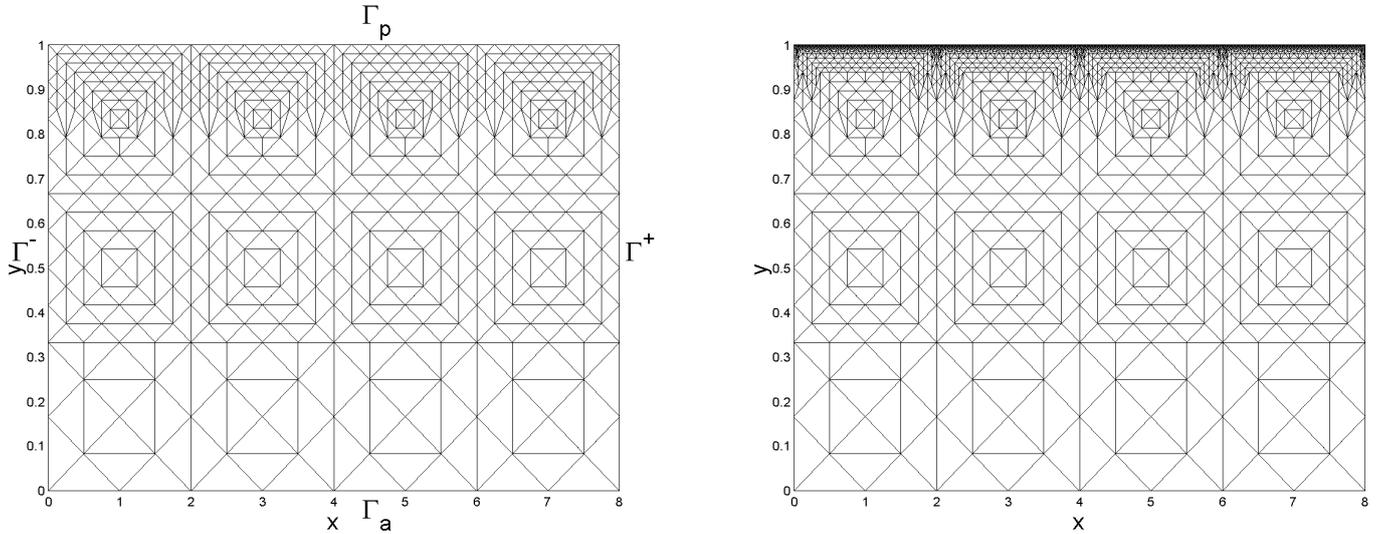


Fig. 2. Maillages  $\mathcal{M}_1$  (992 triangles, 529 sommets) et  $\mathcal{M}_2$  (9668 triangles, 5368 sommets), le maillage de la paroi de l'écoulement a pour tailles respectives  $h = \frac{1}{4}$  et  $h = \frac{1}{128}$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , le triangle  $T_1$  placé en haut à gauche de  $\Omega_L$  a pour coordonnées  $(0, 1), (\frac{1}{8}, \frac{47}{48}), (\frac{1}{4}, 1)$  et sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , le triangle  $T_1$  placé en haut à gauche de  $\Omega_L$  a pour coordonnées  $(0, 1), (\frac{1}{256}, \frac{1535}{1536}), (\frac{1}{128}, 1)$ . Nombre d'inconnues pour l'approximation  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continue : 6214 inconnues (maillage  $\mathcal{M}_1$ ) et 62278 inconnues (maillage  $\mathcal{M}_2$ ).

Nous étudions le rôle joué par les solutions faibles sur le comportement du point fixe et les solutions numériques dans plusieurs cas de figures. Au §3.3, nous étudions la convergence de la solution approchée vers la solution faible sur tout le domaine. Aux §3.1, 3.2 et 3.4, pour étudier la stabilisation des solutions approchées autour d'une solutions faible, on se place sur une partie

médiane de l'écoulement ou de la frontière, choisie de la manière suivante. On pose pour l'étude au voisinage de la frontière  $\Gamma_p$  :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [1, 7], y = 1\}$$

et on étudiera sur  $F$  le comportement du tenseur des extra-contraintes et de la pression. On pose aussi

$$F^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [1, 7], y = 0.99\},$$

pour l'étude de la vitesse (qui est nulle sur  $F$ ) au voisinage de  $\Gamma_p$ , avec le choix des normes, par unité de longueur, suivantes :

$$\|f\|_F = \frac{1}{6} \int_1^7 |f(x, 1)| dx, \quad \|f\|_{F^*} = \frac{1}{6} \int_1^7 |f(x, 0.99)| dx.$$

Pour l'étude sur le domaine  $\Omega_L$ , on pose  $A$  le domaine suivant, obtenu en prenant une partie médiane de  $\Omega_L$  privée d'une bande de largeur 0.1 le long de  $\Gamma_p$  :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [3, 6], y \in [0, 0.9]\},$$

avec le choix de la norme

$$\|f\|_A = \int_A |f|.$$

Dans le cas où la pression est définie à une constante près (cas des conditions au bord (CFD)), on utilisera la valeur moyenne de la pression sur  $A$  :

$$p_A \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{mes(A)} \int_A p,$$

ainsi que sa valeur moyenne sur  $\Omega_L$  :

$$\bar{p} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{mes(\Omega_L)} \int_{\Omega_L} p.$$

Au §3.1, dans le cas du modèle (COM) et au §3.2 dans le cas du modèle (UCM), nous étudions l'approximation du Problème ( $\mathcal{Q}$ ) avec des conditions au bord de type (CF2) et nous étudions la stabilisation des solutions des problèmes approchés ( $\mathcal{Q}_h$ ) ou ( $\mathcal{Q}'_h$ ) vers une solution faible. Au §3.3, nous étudions l'approximation du problème ( $\mathcal{Q}$ ) avec des conditions au bord de type (CFD) données par une solution faible. Dans le cas du modèle (UCM), lorsque  $\lambda$  est suffisamment grand, la solution approchée donnée par la méthode  $\theta$ -MSUPG converge alors, avec le raffinement de maillage vers la solution faible, alors que dans le cas de la méthode SUPG ou  $\theta$ -SUPG, le point fixe diverge, la méthode ne capturant pas la solution faible. Au §3.4, pour le modèle (UCM), nous étudions l'approximation du problème ( $\mathcal{Q}$ ), dans le cas où la solution de celui-ci est donnée par l'écoulement de Poiseuille (3) et (7). Lorsque  $\lambda$  croît, la méthode de point fixe appliqué à la méthode SUPG ou  $\theta$ -SUPG se met à diverger, la méthode  $\theta$ -MSUPG donne une solution approchée qui se stabilise vers une solution faible avec une courbe de convergence qui se place autour d'une phase plateau. Ce processus se produit aussi lorsque la solution du Problème ( $\mathcal{Q}$ ) appartient à l'espace d'EF et est solution du Problème ( $\mathcal{Q}_h$ ) ou ( $\mathcal{Q}'_h$ ) (ceci est du aux erreurs d'arrondis).

La norme utilisée pour mesurer la convergence est la norme de l'énergie :

$$\|(\sigma, u, p)\| = \left[ \int_{\Omega} \sigma_{ij} \sigma_{ij} + d_{ij}(u) d_{ij}(u) + p^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et on notera

$$U_h^n = (\sigma_h^n, u_h^n, p_h^n)$$

le  $n$ -ième itéré du point fixe ( $\mathcal{FP}$ ). Dans une partie des résultats énoncés ci-dessous, les courbes de convergence obtenues ne sont pas toutes achevées, notamment pour des temps de calcul qui peuvent être longs. En effet, certaines de ces courbes présentent des taux de convergence proches de 1, ce qui conduit à des temps de calculs très longs (*cf.* Fig. 10, par exemple, où la courbe de convergence est tracée pour 355729 itérations). Par exemple, sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , le temps de calcul moyen d'une itération est de l'ordre de 250 s., ce qui conduit à des temps de calcul de l'ordre d'un an pour 126000 itérations. Certains calculs ont été accélérés en parallélisant l'assemblage de la FEM dans la limite des possibilités de calcul. D'autres courbes présentent des phases qui sont proches d'un plateau. Durant ces phases, on peut cependant observer une variation significative de la norme de l'énergie comme à la Figure 9 (graphiques de droite) ou des réajustements de la solution sur des zones de discontinuité, comme à la Figure 9 (figure de gauche). Dans le cas d'un écoulement dans une contraction 4 en 1, nous avons pu obtenir des solutions avec glissement à la paroi avale de l'écoulement ainsi qu'une convergence achevée sur des maillages de même taille à la paroi avale que ceux utilisés ici. Il semble que la singularité de coin provoquerait plus facilement le glissement, ce qui améliorerait alors la convergence du point fixe (*cf.* [15]).

**3.1. Modèle de Maxwell corotationnel.** Nous notons  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible donnée par Eqn. (2). On considère le problème ( $\mathcal{Q}$ ) avec une condition au bord de type (CF2). Nous posons comme condition sur  $\Gamma^-$  :  $u_0(x, y) = 4(1 - y^2)$  et  $\sigma_0 = 2d(u_0)$  (écoulement de Poiseuille pour un fluide régi par les équations de Stokes de débit de valeur  $\frac{16}{3}$ ). Il n'y a pas de condition imposée en sortie sur  $\Gamma^+$  pour  $u$ .

La condition de Neumann  $(\sigma - pI).n = 0$  imposée sur  $\Gamma^+$  permet de déterminer la constante d'intégration de  $p$ . Pour la constante  $C_p$  de la solution faible (*cf.* Eqn. (2)), comme  $\sigma^f = 0$  sur  $\Omega$ , ceci donne  $p^f = C_p = 0$ .

Pour cet écoulement, le nombre de Weissenberg est donné par  $We = |\frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 1)|\lambda = 8\lambda$ . Le débit vaut alors  $D = \frac{16}{3}$ , ce qui donne la valeur de  $U_0 = \frac{8}{3}$ , dans l'expression de la solution faible donnée par Eqn. (2).

Pour  $a = 0$ , la valeur critique  $\lambda_c$  (*cf.* Proposition 1. Cas 1,  $a$ ) est donnée par  $\lambda_c = \frac{3}{8} - \frac{3}{32}\pi \simeq 0.08047$ , ce qui donne un nombre de Weissenberg critique de  $We = 0.6438$ .

Pour  $\lambda < \lambda_c$ , la composante  $u_1$  de la solution approchée par les méthodes  $\theta$ -SUPG et  $\theta$ -MSUPG, se stabilise en milieu d'écoulement vers la solution régulière  $u_1$  de la Proposition 1, Eqn. (1), (*cf.* [14], [15], Fig. 3.2).

Un résultat de simulation pour une valeur légèrement supérieure à  $\lambda_c$  de  $\lambda$ , donnée par  $\lambda = 0.0825$  est décrit aux Figures 3-5 et au Tableau 1. La méthode utilisée est la méthode  $\theta$ -MSUPG. On choisit, ainsi qu'au §3.2 et au §3.4, comme itéré initial dans l'itération de point fixe ( $\mathcal{FP}$ ), la solution  $(\sigma_h^0, u_h^0, p_h^0)$  du problème de Stokes obtenu pour  $\lambda = 0$ . Au §3.3, c'est l'interpolé de la solution faible qui sera choisi comme itéré de départ.

On observe, en aval du domaine et sur la paroi de l'écoulement, une stabilisation de la solution approchée vers la solution faible (*cf.* Fig. 3, 4). Il est à noter que la méthode de Galerkin sans décentrage obtenue en posant  $\delta = 0$  dans  $(\mathcal{Q}_h)$ , dont la méthode de Galerkin classique obtenue pour  $\theta = 1$ , ainsi que la méthode  $\theta$ -SUPG, avec ou sans splitting, *i.e.*  $\theta = 1$ , permettent d'obtenir des résultats similaires (*cf.* [14],[15]). Lorsque  $\theta = 1$ , ces résultats sont obtenus avec l'utilisation d'espaces d'EF vérifiant la condition inf-sup tenseur-vitesse qui permet de stabiliser l'approximation du problème de Stokes à trois champs obtenu en posant  $\lambda = 0$  dans  $(\mathcal{Q})$  (*cf.*

[5],[9],[11]). En ce sens, la solution régulière est stable ces méthodes d'EF.

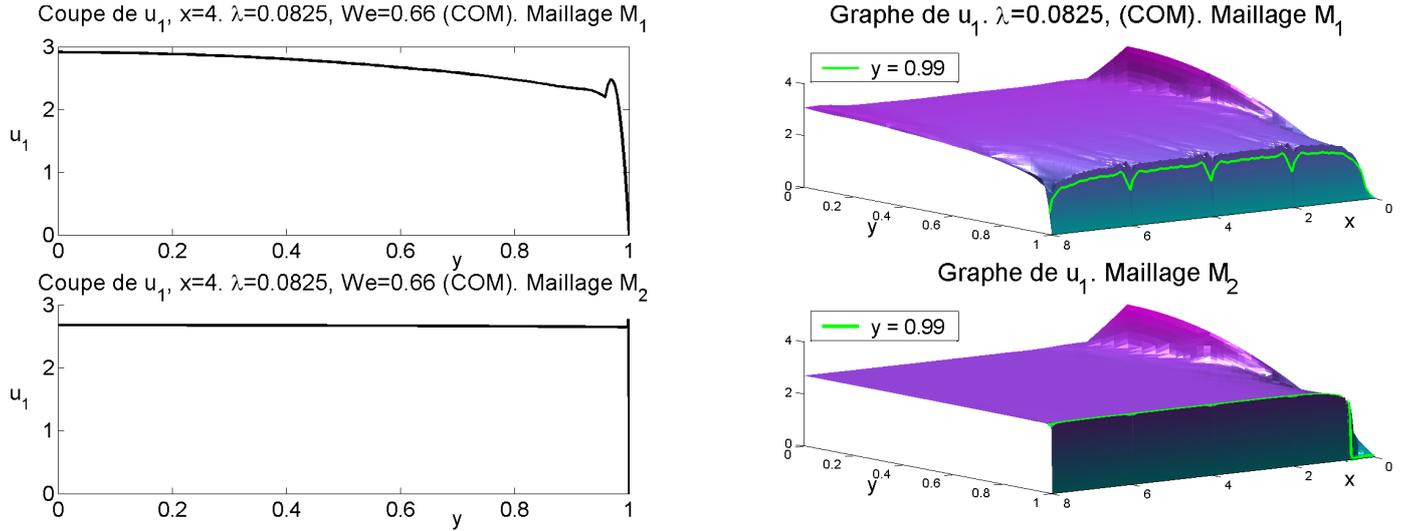


Fig. 3. Modèle de Maxwell corotationnel. Figures de gauche : vue en coupe de  $u_1$  suivant la droite  $x = 4$  ( $u$  vitesse approchée). Figures de droite : graphe de  $u_1$  (vue opposée) et graphe de la courbe  $x \rightarrow u_1(x, 0, 99)$ ,  $x \in [0, 8]$ . Modèle (COM),  $a = 0$ ,  $\lambda = 0.0825$ ,  $We = 8\lambda = 0.66$ , conditions (CF2). Paramètres de  $(\mathcal{FP})$  :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 0)$ . Terme MSUPG de décentrage amont :  $\delta\lambda B(u_h^n, \tau)$ . Espaces d'EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu. Résultats sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

La Figure 4 donne le graphe de la solution approchée  $\sigma_{11}$  obtenue sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , ainsi que des vues en coupes de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  au voisinage de  $\Gamma_p$ . Sur  $\Gamma_p$ , les composantes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  de  $\sigma$  prennent des valeurs proches de  $\frac{1}{\lambda} \simeq 12.1212$  pour  $\sigma_{11}$  et des valeurs proches de  $-\frac{1}{\lambda}$  pour  $\sigma_{22}$ . Le Tableau 1 donne les valeurs moyennes prises par  $\sigma$  sur la partie médiane  $F$  de  $\Gamma_p$ .

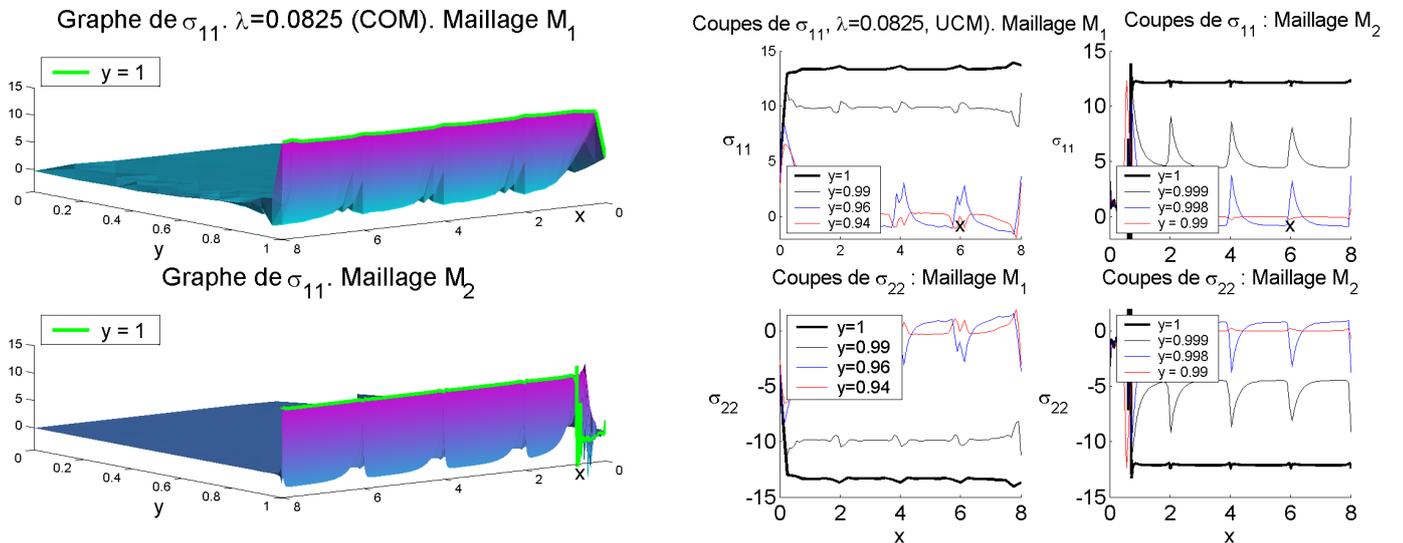


Fig. 4. Modèle de Maxwell corotationnel (suite de la Figure 3). Figures de gauche : graphe de la fonction  $\sigma_{11}$  obtenue sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et graphe de la courbe  $x \rightarrow \sigma_{11}(x, 1)$ ,  $x \in [0, 8]$ . Figures de droite : vues en coupe de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  suivant les droites  $y = 0.94, 0.96, 0.99$  (traits fins) et  $y = 1$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}_1$  et les droites  $y = 0.99, 0.998, 0.999$  (traits fins) et  $y = 1$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}_2$ .

Au Tableau 1, nous regardons la stabilisation de la solution approchée vers la solution faible sur les segments  $F \subset \Gamma_p$ ,  $F^* \subset \bar{\Omega}_L$  et sur la partie avale  $A \subset \Omega_L$  de l'écoulement. On observe, avec le raffinement de maillage, la convergence sur le rectangle  $A$ , de la solution approchée

$(\sigma, u, p)$  vers la solution faible  $(\sigma^f, u^f, p^f)$ , ainsi que la convergence sur le segment  $F$  de  $(\sigma, p)$  vers  $(\sigma^f, p^f)$  et sur le segment  $F^*$ , de la vitesse  $u$  vers  $u^f$ . Posons, pour  $U = (\sigma, u, p)$  :

$$\begin{aligned}\|U\|_{F, F^*} &= \|\sigma_{11}\|_F + \|\sigma_{12}\|_F + \|\sigma_{21}\|_F + \|\sigma_{22}\|_F + \|u_1\|_{F^*} + \|u_2\|_{F^*} + \|p\|_F, \\ \|U\|_A &= \|\sigma_{11}\|_A + \|\sigma_{12}\|_A + \|\sigma_{21}\|_A + \|\sigma_{22}\|_A + \|u_1\|_A + \|u_2\|_A + \|p\|_A.\end{aligned}$$

Soit  $U^f = (\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible, soit  $U^i$  la solution obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_i$ , on a les rapports

$$\frac{\|U^f - U^1\|_{F, F^*}}{\|U^f - U^2\|_{F, F^*}} = 26.09, \quad \frac{\|U^f - U^1\|_A}{\|U^f - U^2\|_A} = 24.11,$$

proches du rapport 32 de la taille du maillage  $\mathcal{M}_1$  sur le bord  $\Gamma_p$  sur la taille correspondante du maillage  $\mathcal{M}_2$ , ce qui donne une indication de convergence vers la solution faible, sur une partie restreinte du domaine, respectivement en  $\mathcal{O}(h^{0.94})$  et  $\mathcal{O}(h^{0.92})$ , avec  $h$  la taille du maillage de la paroi  $\Gamma_p$ .

Méth.  $\theta$ -MSUPG, EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu,  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 0)$ ,  $a = 0$ ,  $\lambda = 0.0825$ , (CF2).

Maillage	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, 1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{12}(x, 1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{22}(x, 1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_1(x, 0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_2(x, 0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 p(x, 1) dx$
$\mathcal{M}_1$	13.39	-0.77	-13.38	1.96	-0.0002	-7.75
$\mathcal{M}_2$	12.14	-0.02	-12.11	2.64	0.0002	-12.15
<sup>(a)</sup> Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _F$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _F$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _F$	$\ u_1 - u_1^f\ _{F^*}$	$\ u_2 - u_2^f\ _{F^*}$	$\ p - p^f\ _F$
$\mathcal{M}_1$	1.27	0.77	1.26	0.71	0.0043	4.37
$\mathcal{M}_2$	0.028	0.016	0.025	0.028	0.0008	0.24
<sup>(b)</sup> Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _A$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _A$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _A$	$\ u_1 - u_1^f\ _A$	$\ u_2 - u_2^f\ _A$	$\ p - p^f\ _A$
$\mathcal{M}_1$	0.16	1.81	0.16	0.44	0.0175	16.07
$\mathcal{M}_2$	0.008	0.076	0.008	0.018	0.0017	0.66

Tableau 1. Modèle de Maxwell corotationnel. Etude de convergence.  $a = 0$ ,  $\lambda = 0.0825$ ,  $\frac{1}{\lambda} = 12.1212$ ,  $We = 0.66$ . Le terme  $(\sigma, u, p)$  est la solution du problème approché  $(\mathcal{Q}_h)$  et  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  est la solution faible de la Proposition 1, Eqn. (2), avec  $U_0 = \frac{8}{3}$  et  $C_p = 0$ . <sup>(a)</sup> Normes  $L^1$ , ramenée à l'unité, sur une partie médiane du bord :  $\|f\|_F = \frac{1}{6} \int_1^7 |f|(x, 1) dx$  ou de son voisinage  $\|f\|_{F^*} = \frac{1}{6} \int_1^7 |f|(x, 0.99) dx$ , <sup>(b)</sup> norme  $L^1$  sur une partie médiane du domaine  $\|f\|_A = \int_A |f|$ . Nombre d'itérations : 956 ( $\mathcal{M}_1$ ) et 41891 ( $\mathcal{M}_2$ ), erreur relative entre les deux derniers itérés :  $2.05e - 015$  ( $\mathcal{M}_1$ ) et  $7.53e - 015$  ( $\mathcal{M}_2$ ).

D'autres choix de conditions sur  $\sigma$  en entrée d'écoulement, par exemple en choisissant  $\sigma$  donné par la relation (5) (cf. les courbes de convergence de la Fig. 5 obtenues pour cet exemple), conduisent aussi à des solutions avec glissement pour  $\lambda > \lambda_c$ .

Le premier graphe de la Fig. 5 montre un agrandissement de la coupe suivant la droite  $x = 5$  de la solution approchée  $u_1$  obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , avec une représentation du maillage au voisinage de cette droite. Approximativement, la fonction  $u_1(5, y)$  prend la valeur  $U_0$  pour  $0 \leq y \leq 0.99935$ , puis après une oscillation, décroît de manière affine vers la valeur nulle. Ainsi la variation de  $u_1$  se fait sur la dernière rangée de triangle au niveau de la droite  $\Delta_2$ . Soit  $\epsilon = \frac{1}{1536}$ , le profil de vitesse est alors proche de celui de la solution  $u^\epsilon$  définie au §2 (cf. aussi le graphe de  $u^\epsilon$  pour  $\epsilon = \frac{1}{3}$ , à la Fig. 1).

Le second graphe de la Figure 5 donne les courbes de convergence en norme de l'énergie (courbe du logarithme népérien de l'erreur relative, en fonction du nombre d'itérations) de point fixe

( $\mathcal{FP}$ ). On observe une convergence de type linéaire avec un taux de convergence qui croît avec le raffinement de maillage. Le troisième graphique de la Figure 5 est un agrandissement du précédent, sur lequel on a ajouté des courbes de convergences obtenues pour  $\lambda = 0.08 < \lambda_c$  et  $\lambda = 0.0825 > \lambda_c$ , avec les conditions aux bord en entrée sur  $\sigma$  données par Eqn. (5). Pour  $\lambda = 0.0825 > \lambda_c$ , les courbes présentent une phase plateau qui correspond à l'apparition du glissement au cours du processus de point fixe. Pour  $\lambda = 0.08 < \lambda_c$ , il n'y a pas d'apparition de glissement ni de phase plateau correspondante.

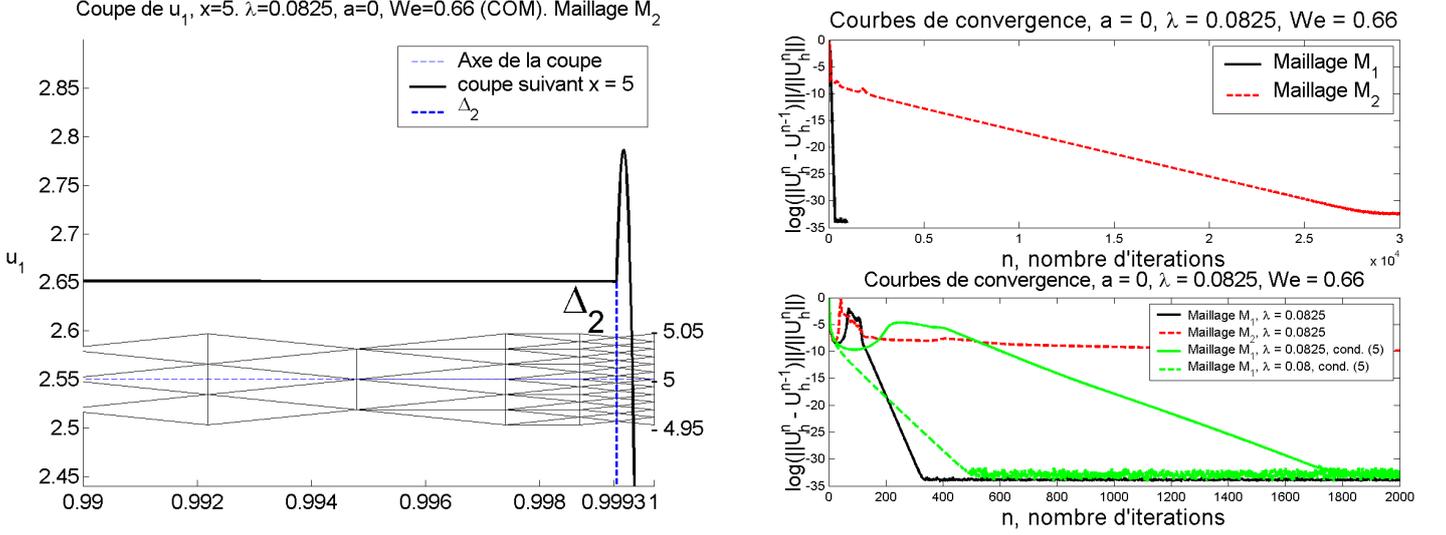


Fig. 5. Modèle de Maxwell corotationnel (suite de la Figure 4). Figure de gauche : coupe de  $u_1$  suivant  $x = 5$  et tracé d'un agrandissement du maillage  $\mathcal{M}_2$  au voisinage de  $x = 5$ . Figures de droite, premier graphe : courbes de convergence sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , nombre d'itérations : 956 ( $\mathcal{M}_1$ ), 41891 ( $\mathcal{M}_2$ ). Second graphe, agrandissement des courbes de la figure au-dessus et ajout des courbes de convergence obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  avec la condition  $\sigma_0$  donnée par la relation (5).

**3.2. Modèle de Maxwell surconvecté.** Nous notons  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible donnée par Eqn. (4). Les conditions au bord choisies sont identiques à celles du cas précédent, avec la pression  $p^f$  choisie à 0 sur  $\Omega_L$ . Par rapport au modèle (COM), la situation est différente dans le cas du modèle de Maxwell surconvecté ( $a = 1$ ), où il n'y a pas de perte d'existence d'un écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1$ , quelque soit le débit imposé. D'autre part la solution faible de la Proposition 1 donne un ensemble de solutions  $\sigma_{11}$  définies à un facteur  $C_\sigma$  près.

Lorsque  $\lambda$  croît dans les simulations numériques, le schéma de point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) commence, en général, par converger vers une solution régulière, puis, dans le cas des méthodes de type SUPG ou  $\theta$ -SUPG, il se met à diverger. Pour les méthodes de type  $\theta$ -MSUPG et pour des valeurs de  $\lambda$  qui restent bornées, un écoulement avec glissement à la paroi  $\Gamma_p$  de l'écoulement apparaît et la vitesse se stabilise en aval du domaine vers la vitesse  $u^f$  donnée par la solution faible de la Proposition 1 (*cf.* Fig. 6).

Par exemple, sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , dans le cas de la méthode  $\theta$ -MSUPG, un écoulement avec glissement apparaît à partir de  $\lambda \simeq 0.25$ . On observe ce glissement jusqu'à des valeurs de  $\lambda = 0.375$ , accompagné d'un ralentissement de la vitesse de convergence du point fixe, avec les paramètres  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ , pour toutes ces simulations. Dans le cas de la méthode  $\theta$ -SUPG, avec ces paramètres et ce même maillage, le point fixe converge jusqu'à  $\lambda = 0.3$  vers une solution régulière (la convergence est obtenue après 600 itérations env.), puis diverge à partir de  $\lambda = 0.3125$ . Cependant, pour cette valeur de  $\lambda$ , le point fixe reste convergent si l'on

augmente suffisamment la valeur de  $c$  (ce qui diminue en général le taux de convergence du point fixe). Ainsi, pour  $c = 100$ , la convergence est obtenue après environ 40000 itérations.

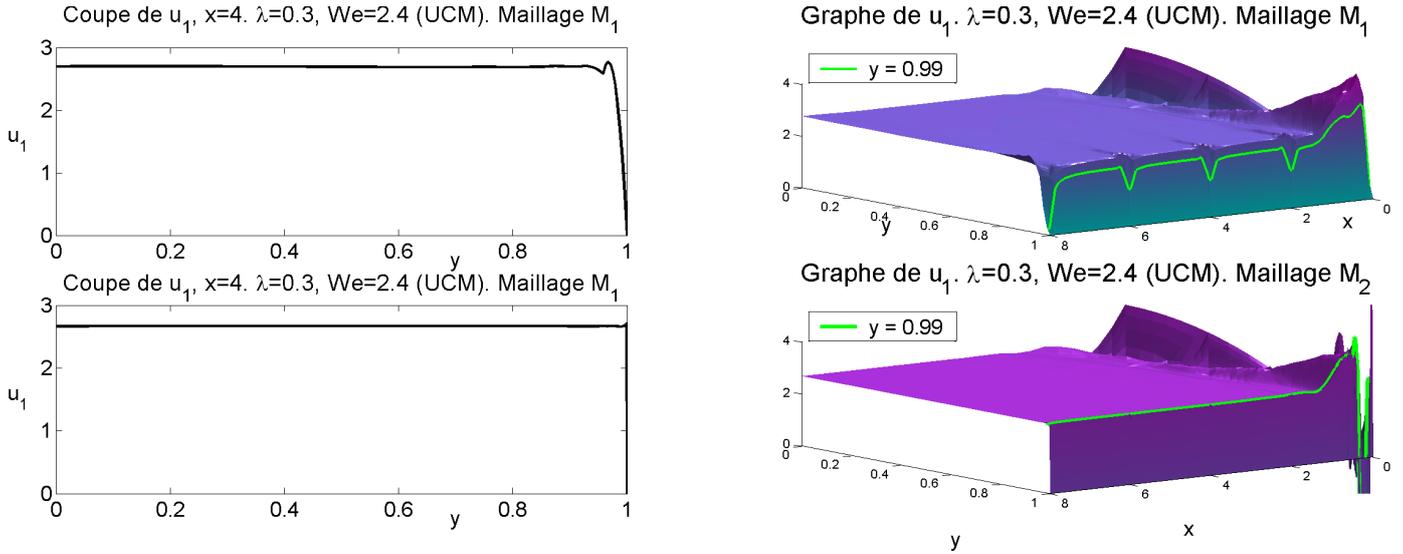


Fig. 6. Modèle de Maxwell surconvecté. Figures de gauche : vue en coupe de  $u_1$  suivant la droite  $x = 4$  ( $u$  vitesse approchée). Figures de droite : graphe de  $u_1$  (vue opposée) et graphe de la courbe  $x \rightarrow u_1(x, 0, 99)$ ,  $x \in [0, 8]$ . Modèle (UCM),  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $We = 8\lambda = 2.4$ , conditions (CF2). Paramètres de  $(\mathcal{FP})$  :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ . Terme MSUPG de décentrage amont :  $\delta\lambda B(u_h^n, \tau)$ . Espaces d'EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu. Résultats sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

Un résultat de simulation pour une valeur de  $\lambda = 0.3$  avec l'utilisation de la méthode  $\theta$ -MSUPG est décrit aux Figures 6-9 et au Tableau 2. La Fig. 6 décrit la composante  $u_1$  de la vitesse obtenue sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Les Figs. 7 et 8 décrivent le tenseur des extra-contraintes, avec, sur la Fig. 7 (figures de droite), des vues en coupes de  $\sigma_{11}$  dont une coupe suivant le segment  $F_\beta$  défini ci-après et qui correspond à un minimum pour  $\sigma_{11}$ . Sur ces figures et le Tableau 2, on observe une stabilisation de la solution approchée vers la solution faible, en aval du domaine et sur la partie avale de la paroi de l'écoulement (à la détermination près du coefficient  $C_\sigma$  qui intervient dans la définition de la solution faible  $\sigma_{11}$ ). Le choix de  $C_\sigma$  est précisé au Tableau 2 ci-dessous. Sur la partie médiane  $F$  de la paroi de l'écoulement, on observe une convergence, pour la norme  $\|\cdot\|_F$ , de  $\sigma_{12}$  vers 0 et de  $\sigma_{22}$  vers  $-\frac{1}{\lambda}$  (cf. aussi la Fig. 8, graphes de gauche). Le Tableau 2 donne les valeurs moyennes prises par  $\sigma$  sur la partie médiane  $F$  de  $\Gamma_p$ . Des oscillations apparaissent au voisinage de la frontière  $\Gamma_p$  sur la composante  $\sigma_{11}$  du tenseur des extra-contraintes (cf. Fig. 7, graphiques à gauche et en haut à droite). Cependant, ces oscillations disparaissent avec l'utilisation de maillages plus réguliers (cf. §3.3.4) comme le maillage  $\mathcal{M}'_1$  (cf. Premier graphe de la Fig. 14). Sur la Figure 7 nous avons représenté en ligne pointillée une coupe de  $\sigma_{11}$  obtenue sur ce maillage, avec un lissage des oscillations. Les courbes de convergence sont données à la Fig. 9.

Il existe une infinité de solution faibles définies à la constante  $C_\sigma$  près, qui est la valeur prise sur le bord  $\Gamma_p$  par la solution faible  $\sigma_{11}^f$ . La composante  $\sigma_{11}$  du tenseur des extra-contraintes semble bien se stabiliser, en moyenne, sur la partie  $F$  de la frontière, autour d'une valeur constante, que nous notons  $C_{\sigma,h}$ . Cette valeur  $C_{\sigma,h}$  dépend du maillage, avec une indétermination sur la limite éventuelle de  $C_{\sigma,h}$  quand le pas du maillage tend vers 0. On a, en moyennant sur  $F$  :  $C_{\sigma,h} = 5.1714 \pm 1.1137$  (écart en norme  $\|\cdot\|_F$ ) sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  et  $C_{\sigma,h} = -2.0094 \pm 0.3278$  sur  $\mathcal{M}_2$ , le maillage le plus fin (cf. Tab. 2).

Posons, pour  $0 \leq b \leq 1$ ,  $F_b = \{(x, y), x \in [1, 7], y = b\}$  le segment de  $\Omega_L$  placé sur la droite  $y = b$  parallèle à la paroi de l'écoulement. On cherche  $\beta$  qui minimise la valeur moyenne de  $\sigma_{11}$  sur  $F_b$  donnée par  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, b) dx$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , on trouve  $\beta = \frac{47}{48} \pm 5e - 4 \simeq 0.9792$ ,

$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.3752$  (cf. Fig. 7, le tracé de  $u_1$  suivant la droite  $y = \beta$ ). Le segment  $F_\beta$  est donc inclus dans la droite  $\Delta_1$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , on trouve  $\beta = 1 \pm 2e - 5$ ,  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -2.0094$  (cf. Fig. 7) et le segment  $F_\beta$  est cette fois inclus dans la frontière  $\Gamma_p$ . Ce qui donnerait numériquement l'hypothèse suivante de détermination de  $\sigma_{11}$  sur la frontière, quand le pas  $h$  du maillage de la frontière tend vers 0, avec  $\beta = \beta_h$  dépendant de  $h$  :

$$(8) \quad \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta_h) dx = \inf_{b \in [0,1]} \int_1^7 \sigma_{11}(x, b) dx, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta_h = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta_h) dx = -\frac{1}{\lambda}.$$

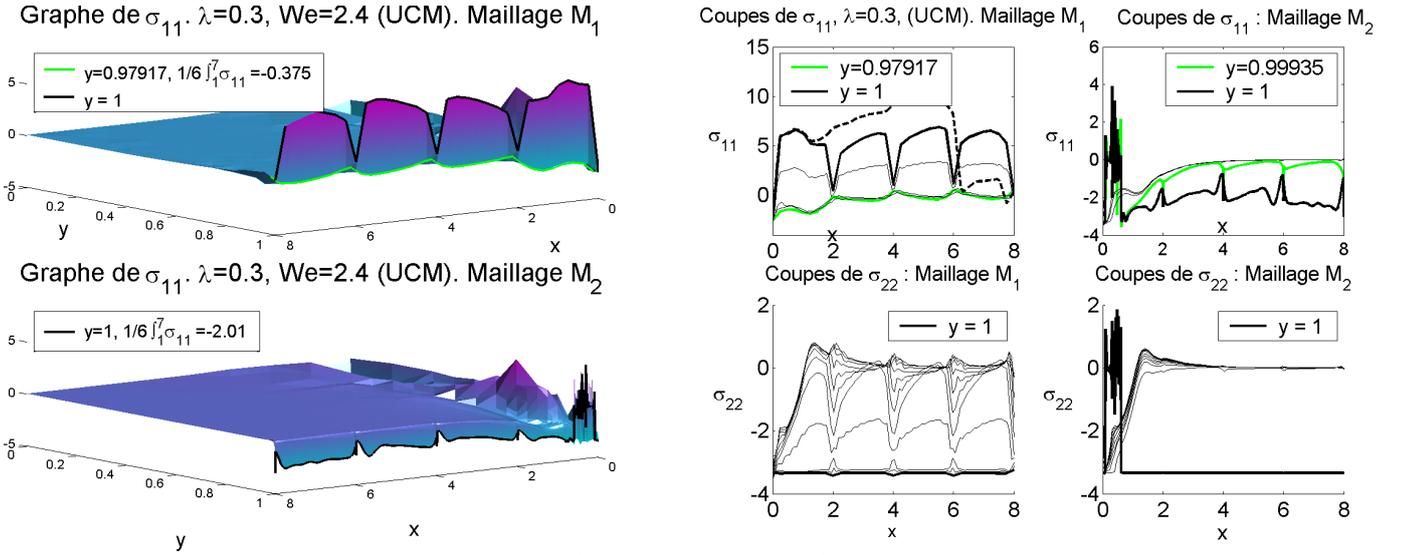


Fig. 7. Modèle de Maxwell surconvecté (suite de la Fig. 6). Figures de gauche : graphe de  $\sigma_{11}$  (vue opposée) et tracé de  $\sigma_{11}$  suivant  $y = 1$  ainsi que suivant  $y = \beta$  pour le maillage  $\mathcal{M}_1$  (sur ce maillage,  $\beta \neq 1$ ). Figures de droite : vue en coupe de  $\sigma_{11}$  suivant les droites  $y = 0.97, 0.98, 0.99$  (traits fins),  $y = 1$ ,  $y = \frac{47}{48}$  (maillage  $\mathcal{M}_1$ ) et  $y = \frac{1535}{1536}$  (maillage  $\mathcal{M}_2$ ) (trait épais), et vue en coupe de  $\sigma_{22}$  suivant les droites  $y = 0.9, 0.91, \dots, 0.99$  (traits fins) et  $y = 1$  (trait épais). Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  :  $\beta = \frac{47}{48} \sim 0.9792$  avec la valeur moyenne  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.3752$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_2$  :  $\beta = 1$  avec la valeur moyenne  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -2.0094$ . Courbe pointillée : vue en coupe suivant la droite  $y = 1$  de la fonction  $\sigma_{11}$  obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}'_1$ ,

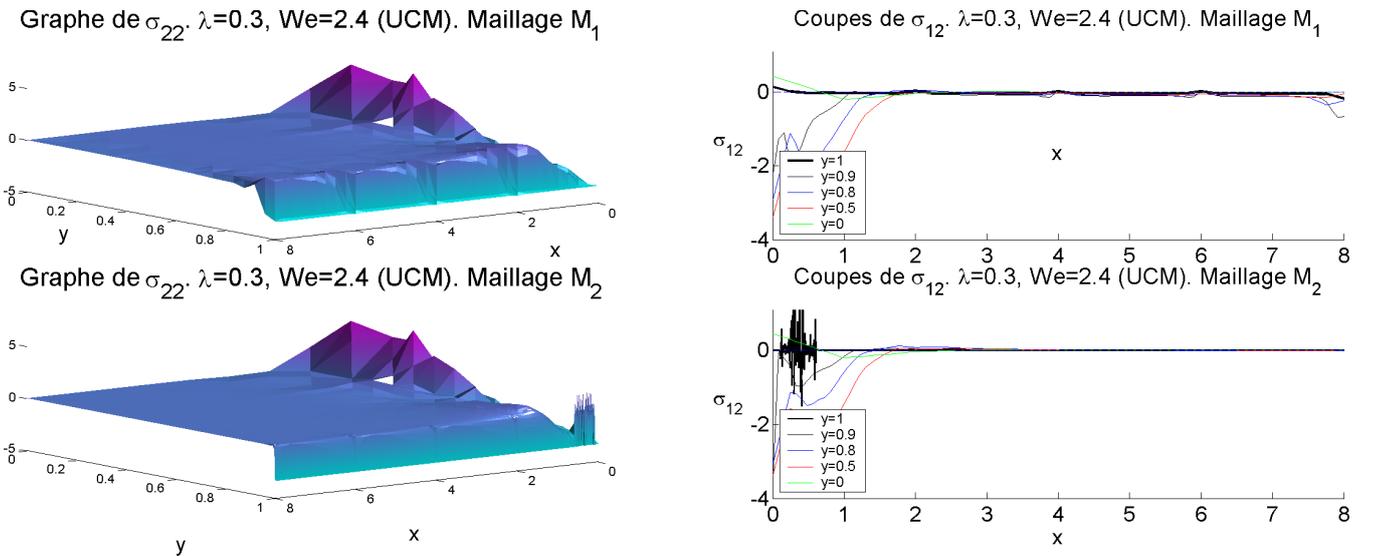


Fig. 8. Modèle de Maxwell surconvecté (suite des Figures 6-7). Figures de gauche : graphe de  $\sigma_{22}$  (vue opposée). Figures de droite : vues en coupe de  $\sigma_{12}$  suivant les droites  $y = 0, 0.2, 0.5, 0.9$  (traits fins) et  $y = 1$  (trait épais).

Pour l'écoulement monodimensionnel, on a la relation  $\sigma_{11} - 2\lambda\sigma_{12}u_{1,2} = 0$ , avec  $\sigma_{12}$  proche de 0 et  $u_{1,2}$  qui tend vers  $-\infty$  sur  $\Gamma_p$ . Lorsque  $u_{1,2} < 0$ , avec cette relation,  $\sigma_{11}$  est alors du signe opposé au signe de  $\sigma_{12}$ . Sur le Tableau 2 et la Fig. 8 (figures de droite), on voit que la composante  $\sigma_{12}$ , négative en moyenne sur  $\Gamma_p$  lorsque l'on résout sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , devient positive en moyenne sur  $\Gamma_p$  avec l'utilisation du maillage  $\mathcal{M}_2$ , ce qui correspond bien au changement de signe observé sur  $C_{\sigma,h}$ . Cette relation pourrait expliquer en partie les instabilités numériques observées sur  $\sigma_{11}$  (cf Fig. 7), avec la possibilité d'une convergence en valeur absolue de  $C_{\sigma,h}$  vers  $\frac{1}{\lambda}$ .

Avec les notations du §3.1 pour les normes  $\|\cdot\|_A$  et  $\|\cdot\|_{F,F^*}$ , soit  $U^f = (\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible, soit  $U^i$  la solution obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_i$ . On a les rapports

$$\frac{\|U^f - U^1\|_{F,F^*}}{\|U^f - U^2\|_{F,F^*}} = 3.85, \quad \frac{\|U^f - U^1\|_A}{\|U^f - U^2\|_A} = 8.78,$$

ce qui donne une indication de convergence vers la solution faible, sur une partie restreinte du domaine, respectivement en  $\mathcal{O}(h^{0.39})$  et  $\mathcal{O}(h^{0.63})$ , avec  $h$  la taille du maillage de la paroi  $\Gamma_p$ . Ce résultat de convergence est à moduler par le fait que l'on choisit comme valeur de  $\sigma_{11}^f$  à la paroi, la moyenne obtenue sur le maillage (indétermination de la constante  $C_\sigma$ ).

Méth.  $\theta$ -MSUPG, EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu,  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ ,  $a = 1$ ,  $We = 2.4$ , (CF2).

Maillage	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{12}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{22}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_1(x,0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_2(x,0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 p(x,1) dx$
$\mathcal{M}_1$	5.1714	-0.0244	-3.3562	2.1833	-0.0007	-2.5859
$\mathcal{M}_2$	-2.0094	0.0009	-3.3334	2.6884	-0.0009	-3.1281
Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _F$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _F$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _F$	$\ u_1 - u_1^f\ _{F^*}$	$\ u_2 - u_2^f\ _{F^*}$	$\ p - p^f\ _F$
$\mathcal{M}_1$	1.1137	0.0283	0.0228	0.4898	0.0064	0.7474
$\mathcal{M}_2$	0.3278	0.0009	0.0001	0.0232	0.0014	0.2781
Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _A$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _A$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _A$	$\ u_1 - u_1^f\ _A$	$\ u_2 - u_2^f\ _A$	$\ p - p^f\ _A$
$\mathcal{M}_1$	0.0603	0.1113	0.0586	0.0597	0.0105	1.5266
$\mathcal{M}_2$	0.0539	0.0317	0.0407	0.0042	0.0025	0.0562

Tableau 2. Modèle de Maxwell surconvecté. Etude de convergence. Les notations sont celles du Tableau 1. Le terme  $(\sigma, u, p)$  est la solution du problème approché ( $\mathcal{Q}_h$ ) et  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  est la solution faible de la Proposition 1, Eqn. (4), avec  $U_0 = \frac{8}{3}$  et  $C_p = 0$ . Sur le bord  $\Gamma_p$ ,  $\sigma_{11}^f = C_\sigma$  est évalué par la valeur moyenne  $C_{\sigma,h} = \frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x,1) dx$ .  $\frac{1}{\lambda} = 3.333$ . Nombre d'itérations : 32605 ( $\mathcal{M}_1$ ) et 423438 ( $\mathcal{M}_2$ ), erreur relative entre les deux derniers itérés :  $7.38e - 015$  ( $\mathcal{M}_1$ ) et  $3.54e - 006$  ( $\mathcal{M}_2$ ).

On remarque que la vitesse est très sensible aux irrégularités géométriques du maillage situées aux points (2, 1), (4, 1), (6, 1) (cf. Fig. 6, figure en haut à droite, le graphe et la coupe suivant  $y = 0.99$  de la solution  $u_1$  obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ ). Les variations de  $u_1$  en ces points sont amplifiées plus particulièrement sur  $\sigma_{11}$  (cf. Fig. 7). La question d'un maillage plus régulier est abordée au prochain § 3.3. Par exemple, les maillages  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$  représentés à la Figure 14 permettent de lisser les irrégularités qui apparaissent sur les courbes de la Figure 11 (cf. Fig. 15). Comme mentionné ci-dessus, la Figure 7 (graphes en haut à droite) montre une coupe de la fonction  $\sigma_{11}$  obtenue avec le maillage  $\mathcal{M}'_1$ , avec une diminution des oscillations sur les trois premiers quarts de la paroi.

D'autres conditions en entrée sur  $\sigma$ , comme  $\sigma = 0$ , ou des conditions au bord de type (BC1), donnent des résultats similaires à ceux de ce §. Le choix d'une condition en entrée sur  $\sigma$  donnée par la relation (7) (écoulement de Poiseuille régulier), conduit aussi à des solutions avec glissement, mais pour des valeurs plus élevées de  $\lambda$ . Ce cas est abordé au §4, dans le cadre des conditions de Dirichlet (CFD).

La figure 9 (figure de gauche) montre une vue en coupe de la vitesse obtenue pour  $x = 5$ . On observe, après un grand nombre d'itérations, un ajustement de la solution au graphe de  $u_1^\epsilon$ , avec  $\epsilon = \frac{1}{1536}$ , alors que la courbe de convergence est proche d'une phase plateau.

Coupe de  $u_1$ ,  $x=5$ .  $a=1$ ,  $\lambda=0.3$ ,  $We=2.4$  (UCM). Maillage  $\mathcal{M}_2$

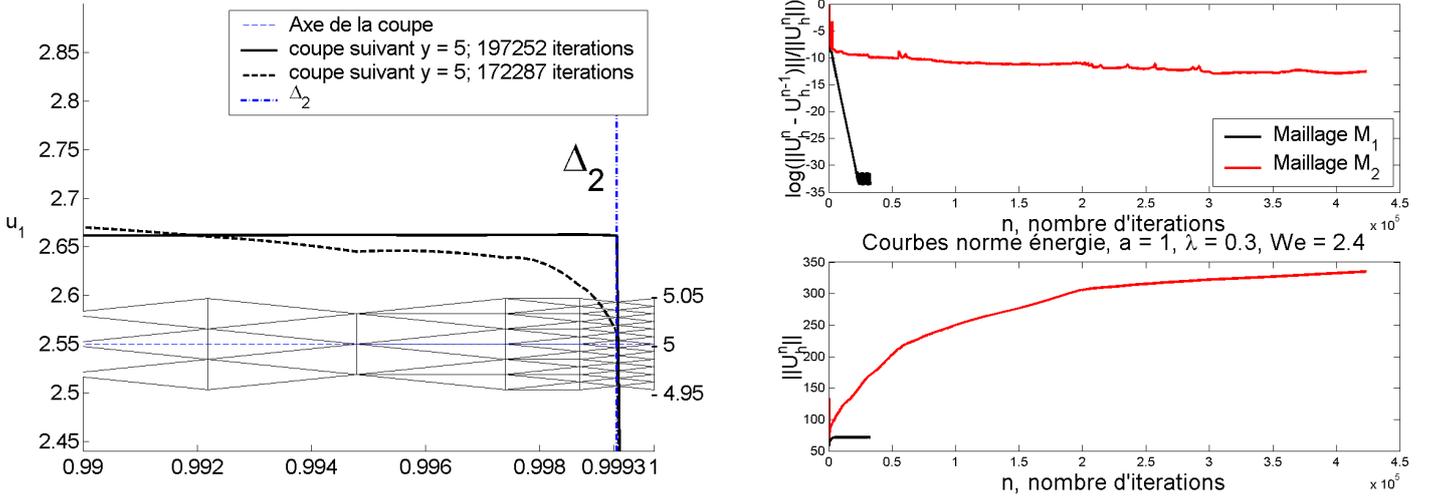


Fig. 9. Modèle de Maxwell surconvecté (suite des Figures 6-8). Premier graphe : coupe de  $u_1$  suivant  $x = 5$  et tracé d'un agrandissement du maillage  $\mathcal{M}_2$  au voisinage de  $x = 5$ , sur ce graphe  $\Delta_2$  est la droite d'équation  $y = \frac{1535}{1536}$ . Graphiques de droite : courbes de convergence et courbes de la norme d'énergie des itérés. Nombre d'itérations : 32605 ( $\mathcal{M}_1$ ), 423438 ( $\mathcal{M}_2$ ).

### 3.3. Condition sur la vitesse de type créneau en entrée et en sortie (solution faible).

Nous notons  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible donnée par la Proposition 1, Eqn. (2) (cas du modèle COM) ou Eqn. (4) (cas du modèle UCM). On étudie le problème ( $\mathcal{P}$ ) avec des conditions au bord données par les solutions faibles  $\sigma^f$  et  $u^f$  (vitesse en forme de créneau). On étudie d'abord le cas du modèle (UCM) pour des valeurs élevées de  $\lambda$  avant d'examiner le cas du modèle (COM), des petites valeurs de  $\lambda$  et l'influence du maillage.

#### 3.3.1. Condition créneau en entrée et en sortie (solution faible, (UCM)).

On se place dans le cas du modèle de Maxwell surconvecté. Nous désignons par  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible donnée par la relation (4). On se donne en entrée et en sortie une condition au bord constante *i.e.* on pose comme condition au bord  $u_0 = u^f$  la solution faible donnée par Eqn. (4), avec  $U_0 = \frac{8}{3}$ . La condition en entrée sur  $\sigma$  est choisie à  $\sigma_0 = \sigma^f = 0$ . L'itéré initial choisi pour le point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) est  $(\sigma_h^0, u_h^0, p_h^0) = (0, u^i, 0)$ , avec  $u^i \in X_h$  l'interpolé de la solution faible  $u^f$  :  $u^i$  vaut 0 sur les degrés de liberté placés sur la frontière  $\Gamma_p$  et vaut  $\frac{8}{3}$  aux autres degrés de liberté.

Pour ce type de problème, la pression est définie à une constante près, la pression choisie est la pression de moyenne nulle. Pour la solution faible, la constante  $C_p$  est choisie telle que  $p^f = C_p$  soit de moyenne nulle, ce qui donne donc  $C_p = 0$ . Soit  $p$  la pression solution du problème approché ( $\mathcal{Q}_h$ ) (numériquement,  $p$  est obtenue en posant  $p = 0$  sur un degré de liberté de l'espace d'EF), on pose  $\tilde{p} = p - \bar{p}$  la pression approchée de moyenne nulle. Pour étudier la convergence de la pression approchée on comparera  $\tilde{p}$  à la solution faible  $p^f$ . La valeur moyenne de  $\tilde{p}$  à la paroi est évaluée par  $\frac{1}{8} \int_0^8 \tilde{p}(x, 1) dx = \frac{1}{8} \int_0^8 p(x, 1) dx - \bar{p}$ . Sur le bord  $\Gamma_p$ ,  $\sigma_{11}^f$  est définie à une constante  $C_\sigma$  près, dans l'étude de convergence du Tableau 3,  $\sigma_{11}^f = C_\sigma$  est évalué par la valeur moyenne  $C_{\sigma,h} = \frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, 1) dx$ .

A titre de comparaison, nous avons conservé la valeur  $We = 8\lambda$ , bien que  $|u_{1,2}|$  soit infini à la paroi de l'écoulement (en fait  $u_{1,2}(x, \cdot)$  est une fonction de type Dirac). Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons des résultats de simulation obtenus pour  $\lambda = 2$ . Dans le cas de la méthode  $\theta$ -MSUPG, nous observons la convergence de la vitesse approchée vers la solution faible (cf. Fig. 10, figures de gauche). Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , la convergence de la méthode de point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) est obtenue pour le choix  $c = 0$  (cf. Fig. 10, graphiques de droite), avec une solution approchée proche de la solution faible. Pour  $c = 1$ , ainsi que sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , les courbes de convergence ne sont pas achevées, avec un point fixe qui converge lentement. On note cependant une stabilisation des courbes en norme de l'énergie (cf. Fig. 14) et des valeurs du Tableau 3 qui restent stables au cours du processus itératif, et qui montrent une convergence vers la solution faible.

En général une petite valeur de  $c$  améliore le taux de convergence du point fixe, lorsque celui converge. Une plus grande valeur de  $c$  peut permettre d'obtenir la convergence de point fixe, lorsque celui-ci est instable pour des petites valeurs de  $c$ .

Lorsque l'on utilise la méthode  $\theta$ -SUPG ou la méthode SUPG (avec des éléments finis de type  $P_1$  bulles continus, pour l'approximation des tenseurs, comme dans [14]), le point fixe diverge pour diverses valeurs de  $c$  comme  $c = 1, 100$  (cf. Fig. 10, dernier graphique, les courbes de convergence obtenues sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , pour la valeur  $c = 100$ ). Au cours du processus itératif, l'itéré de point fixe  $u_h^n$ , initialisé à l'interpolé de la solution faible, s'en écarte progressivement avant de diverger.

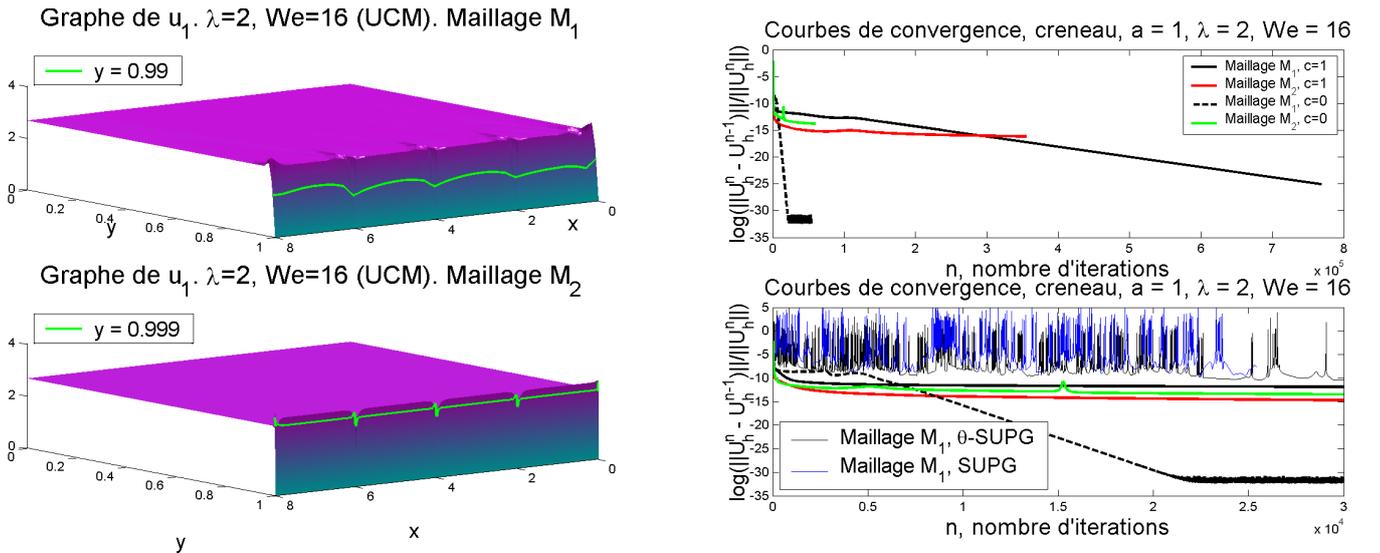


Fig. 10. Modèle de Maxwell surconvecté (§3.3. Créneau), l'écoulement donné par la solution faible est imposé en entrée et sortie. Figures de gauche : graphes de  $u_1$ . Modèle (UCM),  $a = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $We = 8\lambda = 16$ , conditions (CFD). Paramètres :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ . Terme MSUPG de décentrage amont :  $\delta\lambda B(u_h^n, \tau)$ . Espaces d'EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu. Résultats sur les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Figures de droite, premier graphe : courbes de convergence correspondantes obtenues pour  $c = 1$ , avec les nombre d'itérations 769015 ( $\mathcal{M}_1$ ), 355729 ( $\mathcal{M}_2$ ) et courbes obtenues pour  $c = 0$ . Figures de droite, second graphe : agrandissement des courbes de la figure au-dessus et ajout des courbes de convergence obtenues sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  pour les méthodes  $\theta$ -SUPG et SUPG (approximation avec l'EF  $P_1 \oplus$  bulles-continu pour les tenseurs) avec la valeur  $c = 100$  dans le point fixe, on n'obtient pas de convergence sur ces courbes.

Posons, pour  $0 \leq b \leq 1$ ,  $F'_b = \{(x, y), x \in [0, 8], y = b\}$  le segment de  $\Omega_L$  placé sur la droite  $y = b$ . On cherche  $\beta$  qui minimise la valeur moyenne de  $\sigma_{11}$  sur  $F'_b$  donnée par  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, b) dx$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , on trouve  $\beta = 1$ , on a donc  $F'_\beta = \Gamma_p$  et  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.2807$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , on trouve  $\beta = \frac{1534}{1536} \sim 0.9987$ ,  $\frac{1}{6} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.2998$  (cf. Fig. 11, figures

de droite) et  $F'_\beta \subset \Delta'_2$ . Sur la frontière  $\Gamma_p$ , la fonction  $\sigma_{11}$  prend à ses extrémités les valeurs  $\sigma_{11}(0, 1) = -0.4112$  et  $\sigma_{11}(8, 1) = -0.4937$ , proche de  $-\frac{1}{\lambda}$ , et vaut  $-0.0098$  à son maximum.

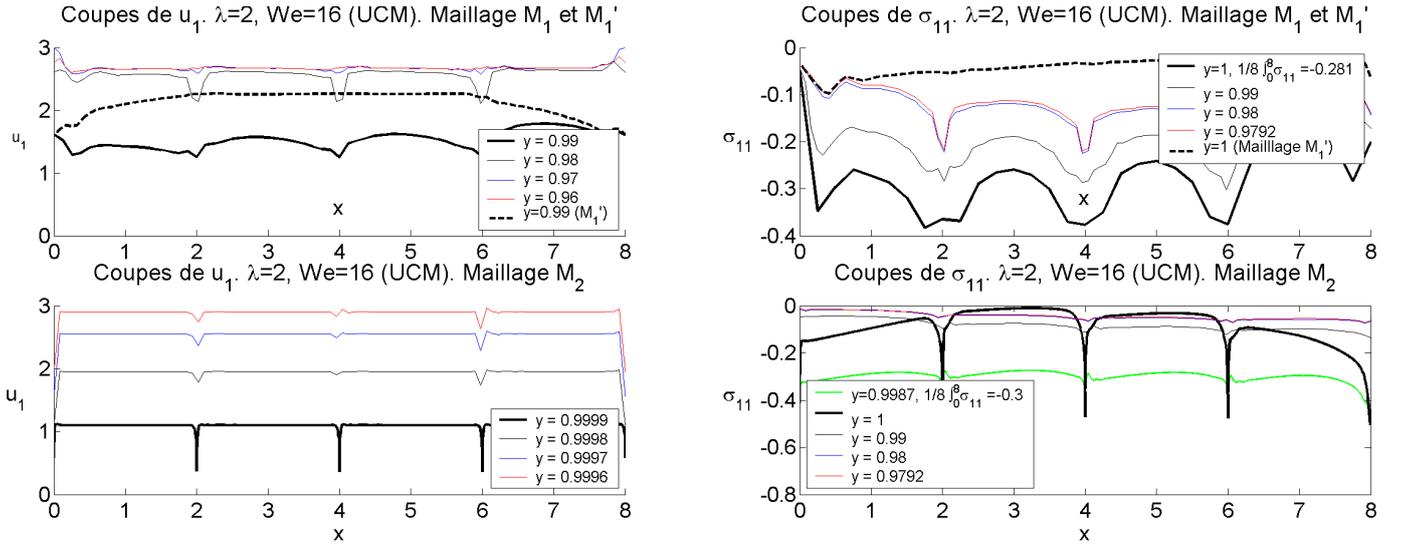


Fig. 11. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.3, Créneau (suite de la Figure 10). Figures de gauche : coupes de  $u_1$  suivant les droites  $y = 0.96, 0.97, 0.98$  (trait fin) et  $y = 0.99$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}_1$  et  $y = 0.9996, 0.9997, 0.9998$  (trait fin) et  $y = 0.9999$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}_2$ . Figures de droite : coupes de  $\sigma_{11}$  suivant les droites  $y = \frac{47}{48}, 0.98, 0.99$  (trait fin),  $y = 1$  et, pour le maillage  $\mathcal{M}_2$ ,  $y = \frac{1534}{1536}$  (trait épais). Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  :  $\beta = 1$ , valeur moyenne  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.2807$  et sur le maillage  $\mathcal{M}_2$  :  $\beta = \frac{1534}{1536} \sim 0.9987$ , valeur moyenne  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.2998$ . Graphiques du dessus, courbes en pointillé : coupe de  $u_1$  suivant la droite  $y = 0.99$  et de  $\sigma_{11}$  suivant la droite  $y = 1$ , avec  $(\sigma, u, p)$  obtenu sur le maillage  $\mathcal{M}'_1$ , pour comparaison aux résultats obtenus sur maillage  $\mathcal{M}_1$  (cf. aussi Fig. 15).

On observe aux Figures 10 et 12, la convergence de la vitesse vers la solution faible. Il apparaît une perte de convergence en norme  $L^\infty(\Omega_L)$  sur la frontière  $\Gamma_p$  (cf. Fig. 12), qui évoque le phénomène de Gibbs.

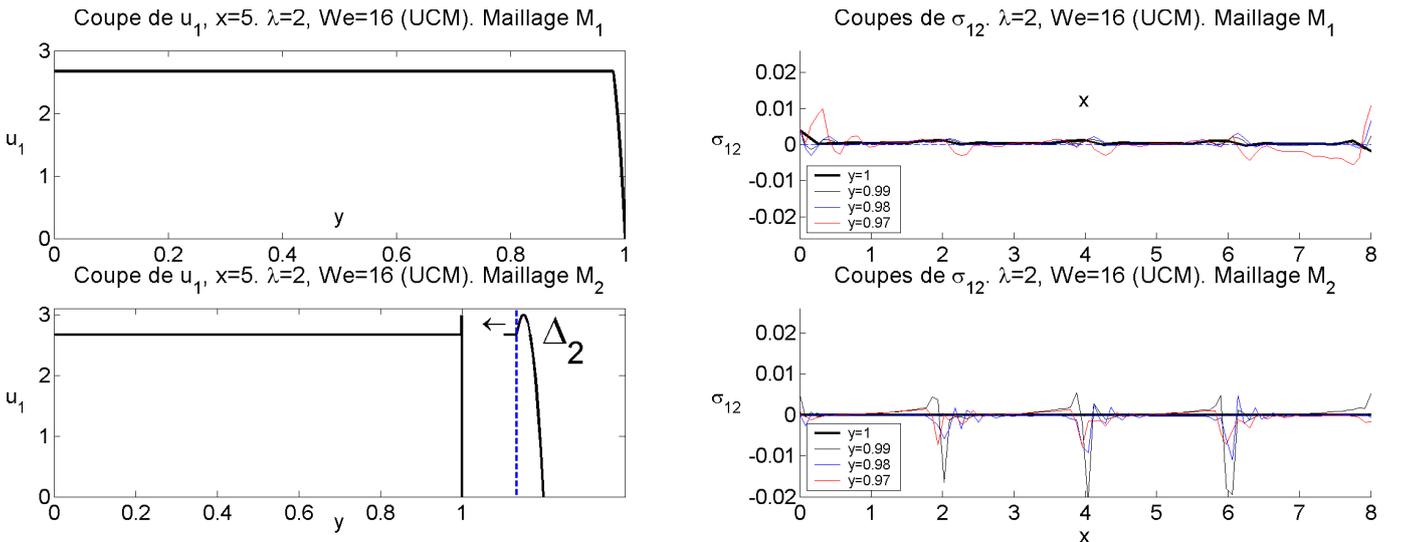


Fig. 12. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.3 (suite des Figs. 10-11). Figures de gauche : coupes de  $u_1$  suivant  $x = 5$  et, pour le maillage  $\mathcal{M}_2$ , agrandissement du graphe pour  $y \in [0.999, 1]$ . Figures de droite : coupes de  $\sigma_{12}$  suivant  $y = 0.97, 0.98, 0.99$  (trait fin) et  $y = 1$  (trait épais).

Au Tableau 3, la solution faible étant solution du problème aux limites, les normes sont prises sur la domaine tout entier, avec les normes en moyenne  $|f|_1 = \frac{1}{8} \int_1^8 |f|(x, 1) dx$  et

$|f|_{1^*} = \frac{1}{8} \int_1^8 |f(x, 0.99)| dx$  et la norme  $\|f\|_1 = \int_{\Omega_L} |f(x)|$ . On observe la convergence de maillage de la méthode d'élément finis avec la convergence de la solution approchée vers la solution faible. Posons, pour  $U = (\sigma, u, p)$  :

$$\|U\|_{1,1^*} = |\sigma_{11}|_1 + |\sigma_{12}|_1 + |\sigma_{21}|_1 + |\sigma_{22}|_1 + |u_1|_{1^*} + |u_2|_{1^*} + |p|_1,$$

$$\|U\|_1 = \|\sigma_{11}\|_1 + \|\sigma_{12}\|_1 + \|\sigma_{21}\|_1 + \|\sigma_{22}\|_1 + \|u_1\|_1 + \|u_2\|_1 + \|p\|_1.$$

Soit  $U^f = (\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible, soit  $U^i$  la solution obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_i$ . On a les rapports

$$\frac{\|U^f - U^1\|_{1,1^*}}{\|U^f - U^2\|_{1,1^*}} = 9.03, \quad \frac{\|U^f - U^1\|_1}{\|U^f - U^2\|_1} = 6.63,$$

ce qui donne une indication de convergence vers la solution faible respectivement en  $\mathcal{O}(h^{0.64})$  et  $\mathcal{O}(h^{0.55})$ , avec  $h$  la taille du maillage de la paroi  $\Gamma_p$ . Comme au §3.2, la composante  $\sigma_{11}$  du tenseur des extra-contraintes, sur toute la frontière  $\Gamma_p$  est proche d'une valeur constante  $C_{\sigma,h}$  (cf Fig. 11), avec cependant des irrégularités. On obtient  $C_{\sigma,h} = -0.2807 \pm 0.0510$  sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  (écart en norme  $|\cdot|_1$ ) et  $C_{\sigma,h} = -0.0855 \pm 0.0539$  sur  $\mathcal{M}_2$  (cf. Tab. 3). Dans le cas du maillage  $\mathcal{M}_2$ , la composante  $\sigma_{11}$  est plus régulière sur la droite  $\Delta'_2$  que sur  $\Gamma_p$  avec une valeur quasi-constante (cf. Fig. 11) donnée par  $\frac{1}{8} \int_0^8 |\sigma_{11}(x, \beta)| dx = -0.2998 \pm 0.0205$ . On a, sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  :

$$\beta = 1, \frac{1}{8} \int_0^8 |\sigma_{11}(x, \beta) + \frac{1}{\lambda}| dx = 0.2193 \text{ et sur } \Delta_1 : \frac{1}{8} \int_0^8 |\sigma_{11}(x, \frac{47}{48}) + \frac{1}{\lambda}| dx = 0.3748$$

et sur le maillage  $\mathcal{M}_2$  :

$$\beta = \frac{1534}{1536}, \frac{1}{8} \int_0^8 |\sigma_{11}(x, \beta) + \frac{1}{\lambda}| dx = 0.2002 \text{ et sur } \Gamma_p : \frac{1}{8} \int_0^8 |\sigma_{11}(x, 1) + \frac{1}{\lambda}| dx = 0.4145,$$

ce qui donne une convergence éventuelle de maillage de  $\sigma_{11}$  vers  $-\frac{1}{\lambda}$  au sens de (8), sur toute la frontière cette-fois :

$$(8') \quad \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta_h) dx = \inf_{b \in [0,1]} \int_0^8 \sigma_{11}(x, b) dx, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta_h = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta_h) dx = -\frac{1}{\lambda}.$$

---

Méthode  $\theta$ -MSUPG,  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ ,  $a = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\frac{1}{\lambda} = 0.5$ , (CFD).

---

Maillage	$\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, 1) dx$	$\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{12}(x, 1) dx$	$\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{22}(x, 1) dx$	$\frac{1}{8} \int_0^8 u_1(x, 0.99) dx$	$\frac{1}{8} \int_0^8 u_2(x, 0.99) dx$	$\frac{1}{8} \int_0^8 \tilde{p}(x, 1) dx$
$\mathcal{M}_1$	-0.2807	0.0005	-0.5003	1.5254	1.9307e-006	-0.4295
$\mathcal{M}_2$	-0.0855	4.9692e-006	-0.5000	2.6658	-6.7215e-008	-0.4538
Norme $L^1$	$ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f _1$	$ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f _1$	$ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f _1$	$ u_1 - u_1^f _{1^*}$	$ u_2 - u_2^f _{1^*}$	$ \tilde{p} - p^f _1$
$\mathcal{M}_1$	0.0510	0.0005	0.0007	1.1413	0.0019	0.1103
$\mathcal{M}_2$	0.0539	6.1129e-006	2.6195e-006	0.0038	0.0015	0.0854
Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _1$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _1$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _1$	$\ u_1 - u_1^f\ _1$	$\ u_2 - u_2^f\ _1$	$\ \tilde{p} - p^f\ _1$
$\mathcal{M}_1$	0.0962	0.0158	0.2865	0.2531	0.0302	0.4159
$\mathcal{M}_2$	0.0270	0.0039	0.0482	0.0089	0.0044	0.0717

Tableau 3. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.3, Créneau (suite des Figures 10-12). Etude de convergence. Le terme  $(\sigma, u, p)$  est la solution du problème approché ( $\mathcal{Q}_h$ ) et  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  est la solution faible de la Proposition 1, Eqn. (4), avec  $U_0 = \frac{8}{3}$ . Sur le bord  $\Gamma_p$ ,  $\sigma_{11}^f = C_\sigma$  est évalué par la valeur moyenne  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, 1) dx$ ,  $C_p = 0$ .  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ . Nombre d'itérations : 769015 ( $\mathcal{M}_1$ ) et 355729 ( $\mathcal{M}_2$ ), erreur relative entre les deux derniers itérés :  $1.29e - 011$  ( $\mathcal{M}_1$ ) et  $9.47e - 008$  ( $\mathcal{M}_2$ ).

**3.3.2. Cas du modèle (COM).** On considère le modèle corotationnel avec  $\lambda = 2$ . Nous désignons par  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible donnée par la relation (2). Nous donnons à la Fig. 13, le graphe de la vitesse et de la pression approchées obtenus sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ . On observe la convergence de la solution approchée vers la solution faible. Pour la pression, la valeur moyenne de  $\tilde{p}$  sur  $\Gamma_p$  vaut  $\frac{1}{8} \int_0^8 \tilde{p}(x, 1) dx = -0.5026$ , proche de la valeur  $-\frac{1}{\lambda}$  de la solution faible  $p^f$  à la paroi, avec l'écart en norme  $\|p - p^f\|_1 = 0.1357$ . On note une oscillation de la pression au point  $(0, 0)$ . Ce type d'oscillations, amplifiées par le raffinement de maillage, se produit aussi pour le modèle (UCM) : dans ce cas la solution  $\tilde{p}$  converge en norme  $L^1(\Omega_L)$  vers  $\tilde{p}$  (cf. Tableau 4), mais pas en norme  $L^\infty(\Omega_L)$ .

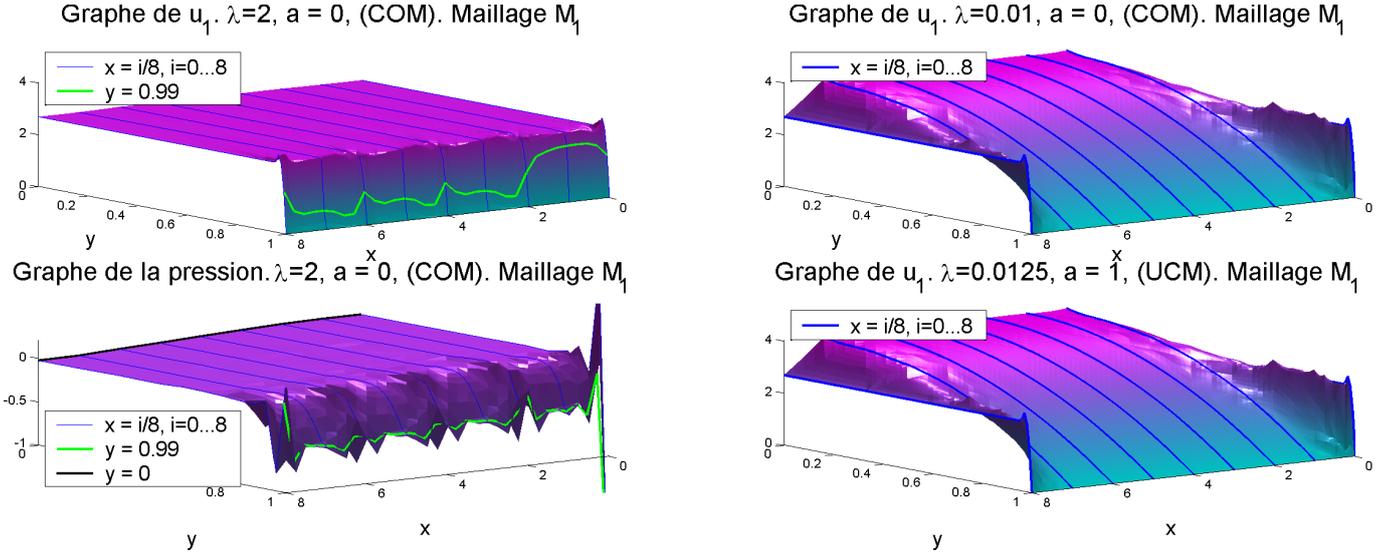


Fig. 13. Modèle de Maxwell corotationnel et surconvecté, §3.3, (suite des Figures 10-12). Figures de gauche, modèle (COM),  $\lambda = 2$ . Stabilisation vers la solution faible, graphes de la vitesse et de la pression  $\tilde{p}$ . Figures de droite, modèle (COM) et (UCM) : stabilisation vers l'écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\lambda = 0.01$  pour le modèle corotationnel et  $\lambda = 0.0125$  pour le modèle de Maxwell surconvecté. Paramètres de  $(\mathcal{FP})$  :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ . Maillage  $\mathcal{M}_1$ . Angle de vue opposé.

**3.3.3. Cas des petites valeurs de  $\lambda$ .** Nous considérons le problème avec conditions aux limites de type créneau, pour des petites valeurs de  $\lambda$ . Sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , avec  $\lambda = 0.01$  pour le modèle (COM) et  $\lambda = 0.0125$  pour le modèle (UCM), la solution obtenue avec les méthodes SUPG,  $\theta$ -SUPG et  $\theta$ -MSUPG se stabilise, sur une partie du domaine, autour de l'écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1$  (cf. Fig. 13). Sur le maillage raffiné  $\mathcal{M}_2$ , le modèle (COM) donne des résultats similaires, avec, pour les méthodes  $\theta$ -MSUPG et SUPG (avec une convergence presque achevée pour cette dernière), une solution régulière similaire à celle de la Fig. 13. La méthode  $\theta$ -SUPG donne une solution intermédiaire entre solution régulière et solution faible. Dans le cas du modèle (UCM), le point fixe, associé aux méthodes avec un décentrage de type SUPG, diverge alors que la méthode  $\theta$ -MSUPG donne une solution régulière.

Pour étudier de plus grandes valeurs de  $\lambda$  dans le cas du modèle (UCM), nous avons utilisé un maillage  $\mathcal{M}_0$  moins fin que  $\mathcal{M}_1$ . Pour  $\lambda = 0.125$ , sur le maillage  $\mathcal{M}_0$ , toutes les méthodes donnent une solution régulière sur la partie médiane de l'écoulement. Avec les maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , le point fixe diverge pour les méthodes de type SUPG alors qu'il converge, dans le cas de la méthode  $\theta$ -MSUPG, vers une solution proche de la solution faible (maillage  $\mathcal{M}_2$  : nombre d'itérations : 50438, erreur relative entre les deux derniers itérés :  $1.07e - 006$ ). Ainsi, dans le cas du modèle (UCM), nous sommes en présence de deux types de solutions approchées. Avec le raffinement de maillage, la solution faible devient attractive pour la méthode  $\theta$ -MSUPG alors que le point fixe diverge pour les autres méthodes.

Ce type de phénomène est aussi observé dans le cas de l'écoulement dans une contraction 4 : 1 pour le modèle (UCM) (*cf.* [13][14][15]), le maillage le moins fin donne une solution régulière, ensuite, avec le raffinement de maillage, le point fixe appliqué aux méthodes utilisant un décentrage de type SUPG diverge (problème du grand nombre de Weissenberg) alors que la méthode  $\theta$ -MSUPG donne une solution qui se stabilise autour d'une solution de type faible, qui est caractérisée par l'apparition d'un glissement à la paroi aval.

Ainsi, dans le cas du modèle (UCM), pour donner un élément d'explication du problème du grand nombre de Weissenberg, on peut conjecturer que dans le cas d'une contraction 4 : 1, il existerait une solution faible (sans exclure l'existence éventuelle d'une solution forte conjointe, avec une singularité de coin), que cette solution devient attractive avec le raffinement de maillage et que dans ce cas, les méthodes itératives utilisant une MEF de type SUPG divergent, alors que l'on obtient une éventuelle convergence des méthodes de type  $\theta$ -MSUPG vers la solution faible, comme dans le cas, dans ce Paragraphe, de l'écoulement dans un canal. En fait, le problème du grand nombre de Weissenberg se produirait peut-être pour tout nombre de Weissenberg, dès que l'on raffine suffisamment le maillage à la paroi aval de la contraction (*cf.* [15], où l'on observe la divergence de la méthode SUPG pour  $We = 0.8$  et l'apparition d'un glissement pour  $We = 0.6$ ).

**3.3.4. Influence du maillage, courbes en norme de l'énergie des itérés.** Pour étudier l'influence de la géométrie du maillage sur l'approximation de solutions faibles présentant des discontinuités et peu régulières, les 2 triangles du maillage  $\mathcal{M}_1$  qui ont en commun le sommet de coordonnées (2, 1), ainsi que les deux autres couples de triangles ayant chacun en commun les sommets de coordonnées respectives (4, 1) et (6, 1), ont été repositionnés pour obtenir un maillage uniforme le long de la frontière (*cf.* Fig. 14). Le nouveau maillage obtenu est noté  $\mathcal{M}'_1$  (*cf.* Premier graphe de la Fig.14). La Figure 11 montre une coupe des solutions approchées  $u_1$  et  $\sigma_{11}$  obtenues sur  $\mathcal{M}'_1$  (lignes pointillées), avec une disparition des oscillations (*cf.* aussi Fig. 7 et Fig. 15). Nous avons aussi testé le maillage  $\mathcal{M}'_2$  obtenu par raffinements successifs du maillage  $\mathcal{M}'_1$ , ce maillage est de la même taille que le maillage  $\mathcal{M}_2$  sur  $\Gamma_p$ , mais il est plus régulier (*cf.* Fig. 14).

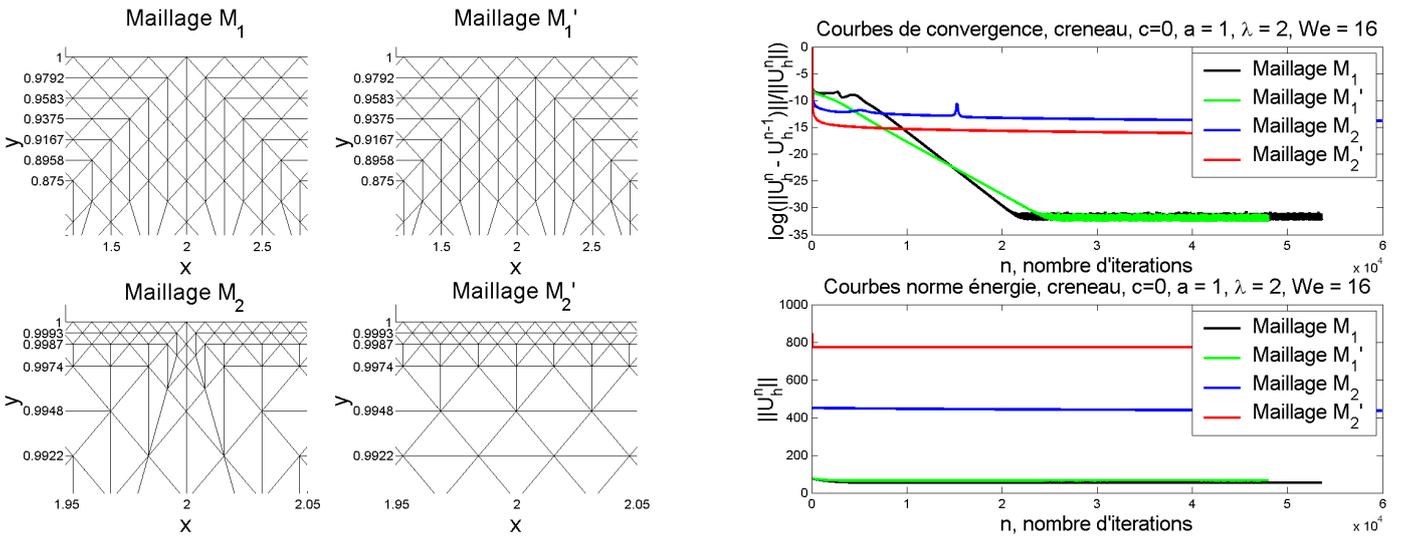


Fig. 14. Figures de gauche : maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et les maillages  $\mathcal{M}'_1$  (992 triangles, 529 sommets) et  $\mathcal{M}'_2$  (9584 triangles, 5326 sommets) correspondants. Figures de droite : courbes de convergence et courbes de la norme de l'énergie des itérés successifs du point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) :  $n \rightarrow \|(\sigma_h^n, u_h^n, p_h^n)\|$ . Modèle (UCM), conditions de type créneau sur la composante  $u_1$  de la vitesse,  $a = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $We = 16$ , (CFD). Paramètres :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 0)$ . Terme MSUPG de décentrage amont :  $\delta\lambda B(u_h^n, \tau)$ . Espaces d'EF  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu. Résultats sur les maillages  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_2$ .

Le graphique en haut à droite de la Figure 14, représente les courbes de convergence obtenues pour les différents maillages  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_2$  avec la valeur  $c = 0$  dans l'itération de point fixe ( $\mathcal{FP}$ ). Le maillage plus régulier  $\mathcal{M}'_1$  permet d'améliorer le taux de convergence obtenu sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  au début du processus. Le dernier graphique de la Figure 14 représente les courbes de la norme de l'énergie des itérés successifs avec une décroissance de ces courbes vers une valeur plateau qui croît avec le raffinement ou la régularité du maillage.

La Figure 15, représente une vue en coupe des solutions  $u_1$  et  $\sigma_{11}$  obtenues sur les maillages plus réguliers  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$ . Les courbes de convergence correspondantes sont celles de la Fig. 14, obtenues pour  $c = 0$ , elles ne sont pas achevées, avec cependant une norme de l'énergie des derniers itérés quasi-constante. L'utilisation de maillages réguliers à la frontière  $\Gamma_p$  améliore de manière significative l'aspect des solutions approchées au voisinage de cette frontière.

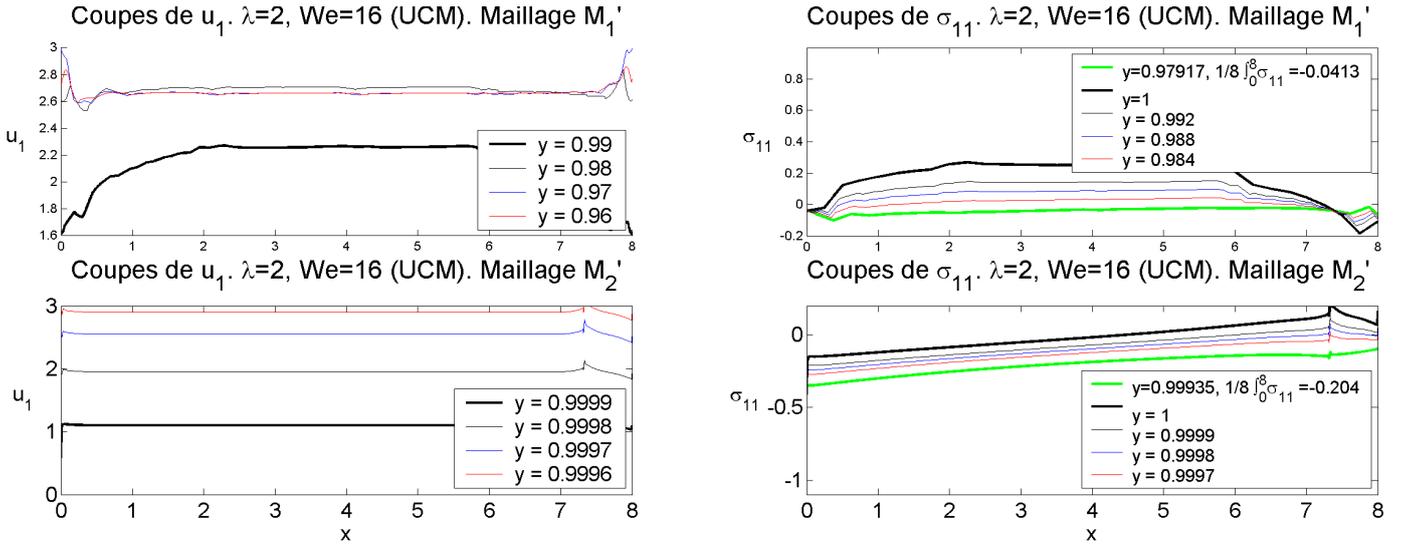


Fig. 15. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.3, Créneau. Figure correspondant à la Fig. 11, avec ici, les résultats obtenus sur les maillages  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$ . Figures de gauche : coupes de  $u_1$  suivant les droites  $y = 0.96, 0.97, 0.98$  (trait fin) et  $y = 0.99$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}'_1$  et  $y = 0.9996, 0.9997, 0.9998$  (trait fin) et  $0.9999$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}'_2$ . Figures de droite : coupes de  $\sigma_{11}$  suivant les droites  $y = 0.984, 0.988, 0.992$  (trait fin) et  $y = 1$  (trait épais) pour le maillage  $\mathcal{M}'_1$  et  $y = 0.9997, 0.9998, 0.9999$  (trait fin) et  $y = 1$  (trait épais) sur le maillage  $\mathcal{M}'_2$ . Vue en coupe de  $\sigma_{11}$  sur la droite  $y = \beta$  avec, sur le maillage  $\mathcal{M}'_1$  :  $\beta = \frac{47}{48} \sim 0.9792$ , valeur moyenne  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.0413$ , sur le maillage  $\mathcal{M}'_2$  :  $\beta = \frac{1535}{1536} \sim 0.9993$ , valeur moyenne  $\frac{1}{8} \int_0^8 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.2044$ .

**3.4. Condition de Dirichlet : écoulement de Poiseuille en entrée et sortie.** On se place dans le cas du modèle de Maxwell surconvecté, avec des conditions aux bord de type (CFD). Le tenseur des extra-contraintes est imposé en entrée d'écoulement et la vitesse, en entrée et en sortie d'écoulement. Les conditions au bord sont données par l'écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  donné par Eqn. (3) : on pose  $u_0 = 4(1 - y^2)$  et  $\sigma_0$  est donné par la relation (7), avec  $u = 4(1 - y^2)$  dans cette relation, *i.e.*

$$(7) \quad \sigma_{011} = 2\lambda u_{0,2}^2, \quad \sigma_{012} = u_{0,1,2}, \quad \sigma_{022} = 0.$$

De manière similaire au § précédent, on choisit  $p^f = 0$  sur  $\Omega_L$ . Avec ce choix de conditions au bord, le problème continu ( $\mathcal{Q}$ ) admet comme solution l'écoulement de Poiseuille  $(\sigma, u, p)$  donné par (3), (7) et cette solution appartient à l'espace d'EF  $P_2^4 \times P_2^2 \times P_1$  continu. Lorsque l'on résout le problème approché ( $\mathcal{Q}_h$ ) avec cet espace d'EF, avec comme itéré de départ dans le schéma de point fixe ( $\mathcal{FP}$ ), la solution du problème de Stokes, alors le point fixe converge en une itération

vers  $(\sigma, u, p)$ , aux erreurs d'arrondis près (cf. Fig. 16, graphique en bas à gauche, le début de la courbe de convergence). Avec les erreurs d'arrondis, lorsque l'on continue le processus itératif, alors si  $\lambda$  est suffisamment grand, des instabilités apparaissent dans le processus de point fixe. Ces instabilités dépendent du maillage, des coefficients  $c$  et  $\mu$  de la méthode du point fixe, du type d'espaces d'EF et du décentrage choisi. Par exemple, pour  $\lambda = 0.6$  et l'utilisation de la méthode  $\theta$ -MSUPG, on observe en résolvant le problème approché  $(Q_h)$  sur le maillage  $\mathcal{M}_3$  (cf. Fig. 16, Figure en haut à gauche), une courbe de l'erreur relative entre deux itérés successifs du point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) qui se stabilise, avec des oscillations, autour d'un plateau (cf. Fig. 16, Figure en bas à gauche). D'autre part, on obtient des itérés de la vitesse qui se stabilisent en milieu de l'écoulement, vers la solution faible donnée par (4) (cf. Fig. 16, graphique en bas à droite, le résultat de simulation obtenu pour l'approximation  $P_2$  continue des tenseurs). Pour la méthode SUPG (avec  $c = 1000$  dans ( $\mathcal{FP}$ )) ou la méthode  $\theta$ -SUPG (avec  $c = 1$  dans ( $\mathcal{FP}$ )) et cette valeur de  $\lambda = 0.6$ , le point fixe diverge, avec la norme énergie de l'erreur entre deux itérés successifs qui tend vers  $+\infty$ . Nous n'avons pas observé d'apparition d'un glissement pour ce type de décentrage. L'approximation  $P_1$  continue des tenseurs donne des résultats similaires (cf. Fig. 16, graphique en haut à droite, un résultat de simulation pour la méthode  $\theta$ -MSUPG).

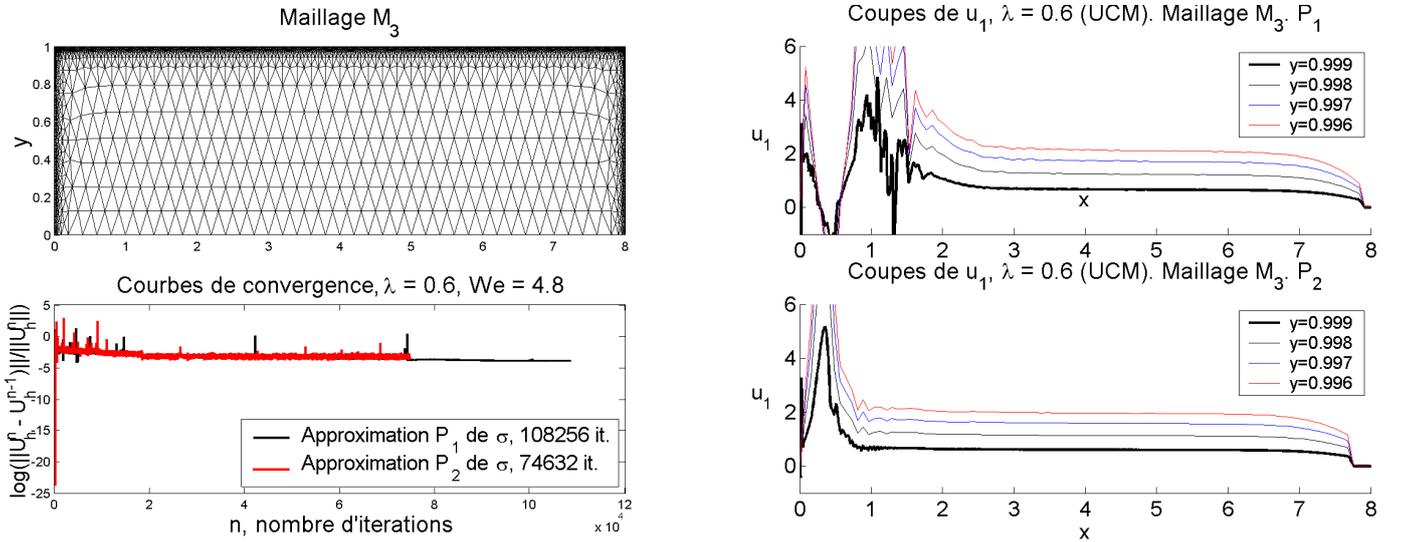


Fig. 16. Modèle de Maxwell surconvecté, écoulement de Poiseuille imposé en entrée et sortie. Figures de gauche : Maillage  $\mathcal{M}_3$  (6436 triangles, 3655 sommets, taille  $h$  du maillage de  $\Gamma_p$  : pour  $0.25 \leq x \leq 7.95$ ,  $h = \frac{1}{80}$  et aux extrémités  $h = \frac{1}{640}$ ) et courbes de convergence. Figures de droite : coupes de  $u_1$  suivant les droites  $y = 0.996, 0.997, 0.998$  (trait fin) et  $y = 0.999$  (trait épais). Modèle (UCM),  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $We = 4.8$ , (CFD). Paramètres :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ . Terme MSUPG de décentrage amont :  $\delta \lambda B(u_h^n, \tau)$ . Approximation  $P_1$  ou  $P_2$  continue des tenseurs. Résultats sur le maillage  $\mathcal{M}_3$ . Nombre d'inconnues pour l'approximation  $P_1^4 \times P_2^2 \times P_1$  continue : 42110 inconnues, pour l'approximation  $P_2^4 \times P_2^2 \times P_1$  continue : 72380 inconnues.

Ainsi, au début du processus, la solution est atteinte exactement, aux erreurs d'arrondis près. Ensuite, ceci est rendu possible compte-tenu des erreurs d'arrondis, l'itéré de point fixe s'éloigne de la solution exacte et se stabilise soit vers une solution proche en milieu de l'écoulement de la solution faible (sans pour autant que l'on obtienne la convergence du point fixe) soit se met à diverger. Ainsi, dans ce dernier cas, tout se passe, comme André Fortin en faisait la remarque en des termes approchants, dans le cas d'un écoulement dans une contraction, «on dirait que la solution du point fixe est répulsive».

Nous sommes donc en présence de deux solutions du problème continu, lorsque le nombre de Weissenberg augmente, la solution faible devient attractive pour la méthode  $\theta$ -MSUPG et le point fixe diverge pour la méthode SUPG ou  $\theta$ -SUPG, malgré la présence d'une solution continue régulière.

Dans le cas d'un écoulement dans un contraction 4 :1, avec ce type de conditions aux limites et des valeurs de  $We = 8\lambda$  proches de 1 on obtient, avec la méthode  $\theta$ -MSUPG, la convergence de l'itération de point de fixe vers une solution dont la vitesse présente un glissement à la paroi avale de l'écoulement (*cf.* [13][14][15]). Pour ce type d'écoulement, lorsque l'on raffine le maillage le long de la paroi avale de la contraction, le point fixe devient divergent lorsque l'on utilise des méthodes de type SUPG ou de type Lesaint-Raviart (problème du grand nombre de Weissenberg). Dans le cas de la méthode  $\theta$ -MSUPG, le point fixe reste convergent, avec un taux de convergence qui croît vers 1 lorsque le pas du maillage de la paroi avale décroît. On observe d'un part une convergence de maillage des solutions obtenues sur chaque maillage et d'autre part une convergence de ces solutions, sur une partie de l'écoulement aval, vers une solution du type de la solution faible de la Proposition 1, Eqn. (4), avec un glissement qui peut présenter des irrégularités plus ou moins prononcées suivant le type d'EF et de maillage utilisés (*cf.* [13][14][15]).

La Fig. 17 décrit des vues coupes des composantes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  du tenseur des extra-contraintes obtenues, avec la méthode  $\theta$ -MSUPG, sur le maillage  $\mathcal{M}_3$ . Sur cette figure, on remarque que  $\sigma_{11}$  prend des valeurs proches de la valeur  $-\frac{1}{\lambda}$  sur le premier tiers de la paroi  $\Gamma_p$ , avec les valeurs moyennes  $\frac{1}{3} \int_0^3 \sigma_{11}(x, 1) dx = -1.3742$  dans le cas de l'approximation  $P_1$  et  $\frac{1}{3} \int_0^3 \sigma_{11}(x, 1) dx = -0.5226$  dans le cas de l'approximation  $P_2$ . Ceci donne sur cette partie de la paroi, une valeur de  $C_\sigma$  relativement proche de  $-\frac{1}{\lambda} \sim -1.67$ , avec, donc, une dégénérescence du tenseur de conformation  $\sigma + \frac{1}{\lambda} Id$ .

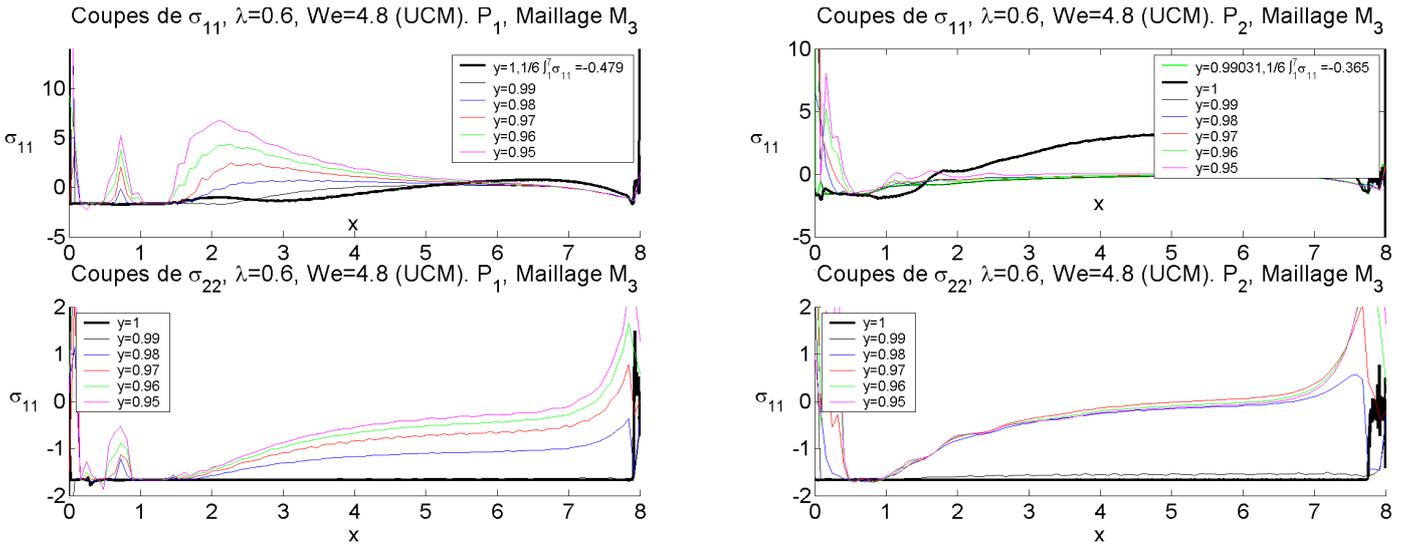


Fig. 17. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.4, Poiseuille (suite de la Fig. 16). Figures de gauche : cas de l'approximation  $P_1$  continue de  $\sigma$ , vues en coupe des composantes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  du tenseur des extra-contraintes suivant les droites  $y = 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99$  (trait fin) et  $y = 1$  (trait épais). Figures de droite : cas de l'approximation  $P_2$  continue. Sur les graphes du dessus : coupe de  $\sigma_{11}$  suivant  $y = \beta$  avec pour l'approximation  $P_1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.4787$  et pour l'approximation  $P_2$ ,  $\beta = 0.9903$ ,  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.3654$ .  $\frac{1}{\lambda} \sim 1.67$ .

On observe au Tableau 4, dans le cadre de la méthode  $\theta$ -MSUPG sur le maillage  $\mathcal{M}_3$ , une stabilisation, sur une partie du domaine, de la vitesse et des composantes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  du tenseur des extra-contraintes vers la solution faible de la Proposition 1 donnée par Eqn. (4). Avec les notations du §3.1 pour les normes  $\|\cdot\|_A$  et  $\|\cdot\|_{F,F^*}$ , soit  $U^f = (\sigma^f, u^f, p^f)$  la solution faible, soit  $U^i$  la solution obtenue avec l'approximation  $P_i$  des tenseurs, on a les rapports :

$$\frac{\|U^f - U^1\|_{F,F^*}}{\|U^f - U^2\|_{F,F^*}} = 1.25, \quad \frac{\|U^f - U^1\|_A}{\|U^f - U^2\|_A} = 0.98,$$

qui indiquent un écart à la solution faible, sur une partie restreinte du domaine, du même ordre pour les deux types d'approximation des contraintes (approximation  $P_1$  ou  $P_2$  continue), avec une meilleure approximation de la solution faible  $u^f$  à proximité de la frontière, dans le cas de l'approximation  $P_2$  des tenseurs (cf. Tab. 4, ainsi que Fig. 16).

Méthode  $\theta$ -MSUPG,  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ , maillage  $\mathcal{M}_3$ ,  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\frac{1}{\lambda} = 1.67$ , (CFD).

Appr. $P_1/P_2$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{12}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{22}(x,1) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_1(x,0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 u_2(x,0.99) dx$	$\frac{1}{6} \int_1^7 \tilde{p}(x,1) dx$
$P_1$ continu	-0.4787	2.3628e-004	-1.6675	2.8752	-0.0099	-1.0922
$P_2$ continu	1.8207	-0.0024	-1.6659	2.6701	-0.0006	-1.3110
Norme $L^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _F$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _F$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _F$	$\ u_1 - u_1^f\ _{F^*}$	$\ u_2 - u_2^f\ _{F^*}$	$\ \tilde{p} - p^f\ _F$
$P_1$ continu	0.7752	0.0009	0.0010	0.6556	0.1935	0.8638
$P_2$ continu	1.1920	0.0027	0.0012	0.0325	0.0069	0.7533
Norme $\bar{L}^1$	$\ \sigma_{11} - \sigma_{11}^f\ _A$	$\ \sigma_{12} - \sigma_{12}^f\ _A$	$\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^f\ _A$	$\ u_1 - u_1^f\ _A$	$\ u_2 - u_2^f\ _A$	$\ \tilde{p} - p^f\ _A$
$P_1$ continu	2.0489	0.3630	0.5679	0.0284	0.0100	0.9363
$P_2$ continu	1.6845	0.3741	0.7578	0.1210	0.0754	1.0216

Tableau 4. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.4, Poiseuille (suite des Figs. 16-17). Etude de convergence. Approximation  $P_1$  ou  $P_2$  continue de  $\sigma$ . Le terme  $(\sigma, u, p)$  est la solution du problème approché ( $\mathcal{Q}_h$ ) et  $(\sigma^f, u^f, p^f)$  est la solution faible de la Proposition 1, Eqn. (4), avec  $U_0 = \frac{8}{3}$ . Sur le bord  $\Gamma_p$ ,  $\sigma_{11}^f = C_\sigma$  est évalué par la valeur moyenne  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, 1) dx$ , sur  $\Omega_L$ ,  $C_p = 0$ .  $\frac{1}{\lambda} = 1.67$ . Nombre d'itérations : 108256 ( $P_1$ ) et 74632 ( $P_2$ ), erreur relative entre les deux derniers itérés :  $2.13e - 002$  ( $P_1$ ) et  $2.38e - 002$  ( $P_2$ ).

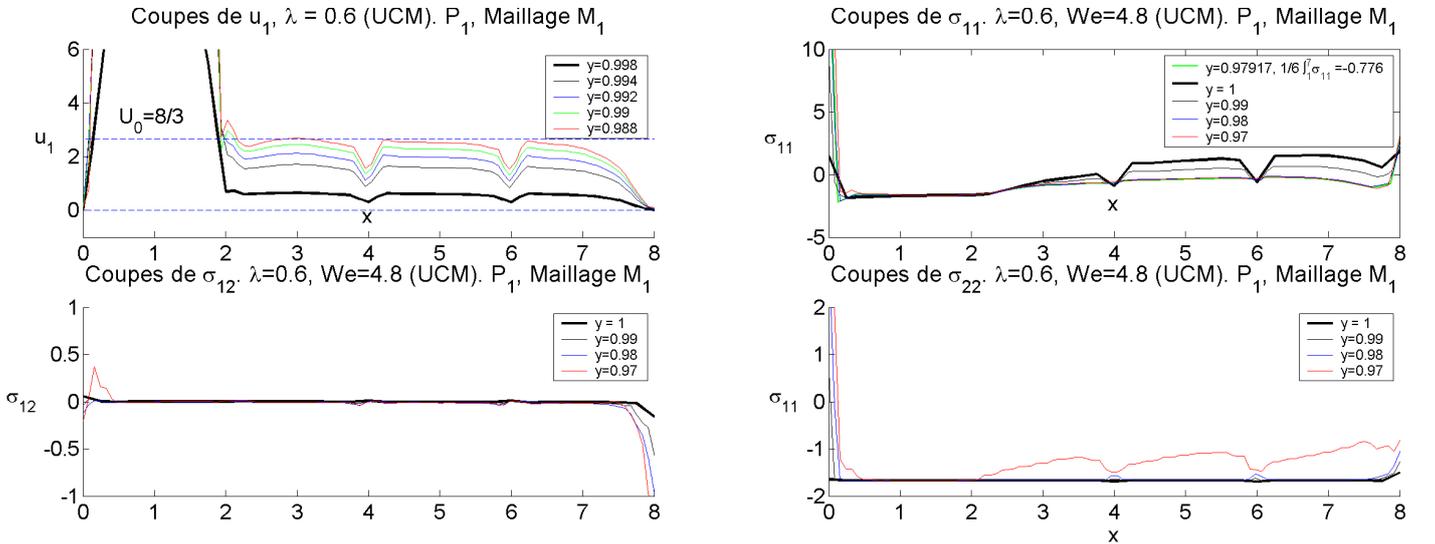


Fig. 18. Modèle de Maxwell surconvecté, §3.4, Poiseuille (suite des Figs. 16-17). Approximation sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ . Vue en coupe de la vitesse  $u_1$  suivant les droites  $y = 0.988, 0.99, 0.992, 0.994$  (trait fin) et  $y = 0.998$  (trait épais) et des composantes du tenseur des extra-contraintes  $\sigma$  suivant les droites  $y = 0.97, 0.98, 0.99$  (trait fin) et  $y = 1$  (trait épais) ainsi que suivant  $y = \beta = \frac{47}{48} \sim 0.9792$  pour  $\sigma_{11}$ ,  $\frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.7757$ . Paramètres de  $(\mathcal{FP})$  :  $(\theta, \delta, \mu, c) = (\frac{10}{11}, \frac{1}{10}, 2, 1)$ . Nombre d'itérations : 1178379, erreur relative entre les deux derniers itérés :  $1.15e - 006$ .

Nous remarquons que les courbes de convergence de la Figure 16 atteignent un plateau. La Figure 18 présente un résultat de simulation obtenu sur le maillage  $\mathcal{M}_1$ , avec ici une amélioration

de la convergence de la méthode du point fixe (avec une erreur relative entre les deux derniers itérés de  $1.15e - 006$ ). On obtient des résultats du même type qu'avec le maillage  $\mathcal{M}_3$ , avec ici,  $\beta = \frac{47}{48} \sim 0.9792$ , une valeur moyenne de  $\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{6} \int_1^7 \sigma_{11}(x, \beta) dx = -0.7757$  et l'écart à la moyenne en norme sur  $F_\beta : \frac{1}{6} \int_1^7 |\sigma_{11}(x, \beta) - \bar{\sigma}_{11}| dx = 0.4505$ . Sur la frontière,  $\sigma_{11}$  prend la valeur moyenne de  $\frac{1}{2} \int_{0.3}^{2.3} \sigma_{11}(x, 1) dx = -1.6787 \pm 0.0543$ , proche de  $-\frac{1}{\lambda}$ , avant de croître en moyenne pour  $y \geq 2.3$ .

**4. Conclusion.** Dans le cas d'un écoulement dans un canal, sur un maillage donné, les solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  de la Proposition 1, lorsqu'elles existent, apparaissent stables pour les faibles valeurs de  $\lambda$ , dans le sens où, lorsque le point fixe ( $\mathcal{FP}$ ) converge, la solution approchée du problème ( $\mathcal{Q}$ ), avec diverses conditions au bord, se stabilise vers ces solutions sur une partie de l'écoulement, ou converge vers une de ces solutions, comme dans le cas du choix des conditions au bord du §3.4 données par l'écoulement de Poiseuille régulier. Lorsque  $\lambda$  croît ou lorsque l'existence de la solution de classe  $\mathcal{C}^1$  est perdue comme dans le cas du modèle (COM), ce sont les solutions faibles de la Proposition 1, qui apparaissent alors stables. Comme dans le cas du §3.3.3, ces solutions peuvent devenir stables avec le raffinement de maillage dans le cas du modèle (UCM). Dans le cas du §3.3.3 et du modèle (COM) pour  $\lambda \leq \lambda_c$ , la solution approchée se stabilise bien, avec le raffinement de maillage, vers une solution régulière dans le cas de la méthode  $\theta$ -MSUPG, cette stabilisation se produit aussi, plus lentement, au cours du processus de point fixe, pour un décentrage de type SUPG. La méthode  $\theta$ -SUPG donne une solution approchée intermédiaire entre la solution faible et une solution régulière.

Dans le cas du modèle (UCM), la stabilisation de la solution approchée vers une solution faible dépend des méthodes d'EF utilisées : méthodes SUPG,  $\theta$ -SUPG ou  $\theta$ -MSUPG. Ainsi, la méthode de point fixe couplée à une MEF de type  $\theta$ -SUPG, après avoir convergé pour les petites valeurs de  $\lambda$  vers une solution régulière (par exemple vers l'écoulement de Poiseuille de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  si celui-ci est solution du problème ( $\mathcal{Q}$ ), comme au §3.4) se met à diverger lorsque  $\lambda$  croît. Avec une MEF de type  $\theta$ -MSUPG, la méthode de point fixe continue de converger, plus ou moins bien (pour des valeurs de  $\lambda$  bornées) et donne une solution qui se stabilise vers une solution faible sur une partie de l'écoulement ou, comme au §3.3, qui converge avec le raffinement de maillage vers une solution faible. Ceci montre un rôle des solutions faibles dans le cadre de l'approximation par la MEF du problème ( $\mathcal{Q}$ ). Dans le cas du modèle (UCM) ce rôle n'apparaît qu'avec l'utilisation de méthodes de type  $\theta$ -MSUPG, avec l'apparition de ces solutions ainsi que, éventuellement, par la divergence des méthodes de point fixe utilisant un décentrage de type SUPG dans la formulation variationnelle.

Il existe une infinité de solution faibles définies à la constante  $C_\sigma$  près, qui est la valeur prise sur le bord  $\Gamma_p$  par la solution faible  $\sigma_{11}^f$ . Dans les simulations, cette valeur apparaît relativement constante sur  $\Gamma_p$  et pourrait être donnée par  $C_\sigma = -\frac{1}{\lambda}$  au sens de la limite donnée par une relation du type (8) ou (8'). Elle pourrait aussi dépendre des conditions aux limites ainsi que de la taille du maillage à la paroi.

Il est à noter que le rôle prépondérant joué ici par le terme  $\sigma\omega(u) - \omega(u)\sigma - a(d(u)\sigma + \sigma d(u))$  sur l'existence des solutions faibles, souligne tout l'intérêt d'étudier des modèles viscoélastiques obtenus en négligeant le terme de transport  $u \cdot \nabla \sigma$  comme par exemple dans [10].

Dans le cas de l'écoulement dans une contraction 4 :1, lorsque l'on utilise une méthode de type  $\theta$ -MSUPG, on observe l'apparition de solutions dont la vitesse présente un glissement à la paroi avale de l'écoulement (*cf.* [12], [13], [14], [15]) et qui s'apparentent aux solutions faibles de la Proposition 1. Ceci laisse supposer ainsi l'existence de solutions faibles pour ce type d'écoulement. Le phénomène du grand nombre de Weissenberg se produit lorsque le schéma de point fixe se met à diverger avec le raffinement de maillage, pour des nombre de  $We$  relativement élevés. Ainsi, lors des raffinement successifs, avant que le schéma de point fixe

ne diverge, on observe une croissance rapide des valeurs de  $\sigma_{11}$  à la singularité du coin réentrant de la contraction pour les méthodes de type SUPG (*cf.* [15]). Ce phénomène du grand nombre de Weissenberg pourrait alors s'expliquer en partie par l'existence éventuelle d'une solution faible, qui soit du type de celle de la Proposition 1, en aval de l'écoulement, et par l'existence éventuelle d'une solution de classe  $C^1(\Omega)$  avec une singularité de coin ou le long de la paroi avale de l'écoulement, dont l'existence reste un problème ouvert, et par la difficulté d'approximation de ces solutions. Avec le raffinement de maillage, ce serait alors la solution faible qui deviendrait la plus stable, le schéma numérique n'arrivant alors pas à capturer, ni la solution faible, ni la solution de classe  $C^1(\Omega)$ , se met à diverger, ce qui produirait le phénomène. La méthode  $\theta$ -MSUPG, capturerait la solution faible, le problème de l'approximation de l'éventuelle solution de classe  $C^1(\Omega)$  restant alors ouvert. Il est à noter que dans le cas du modèle (COM), on peut envisager que le problème n'admet pas de solutions  $C^1(\Omega)$  à partir d'un nombre de Weissenberg critique, mais qu'il conserve une solution faible.

### Références bibliographiques.

- [1] ALFONSO A., ALVES M., PINHO, F., OLIVIERA P. : Application of the log-conformation tensor approach to three dimensional viscoelastic flows. CMNE/CILAMCE 2007 Porto, 13 a 15 de Junho, 2007.
- [2] FATTAL, R., KUPFERMAN, R. : Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor J. Non-Newtonian Fluid Mech., 123 (23), (2004) pp. 281-285.
- [3] FORTIN, M., FORTIN, A. : A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 32 (1989), 295-310.
- [4] FORTIN, A., GUÉNETTE, R., PIERRE, R. : On the discrete EVSS method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 189 (2000), n° 1, 121-139.
- [5] FORTIN, M., PIERRE, R. : On the convergence of the mixed method of Crochet and Marchal for viscoelastic flows, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 73 (1989), 341-350.
- [6] GUILLOPÉ, C., SAUT, J-C. : Global existence and one-dimensional non linear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type, Modél. Math. Anal. Numér., **24**, n° 3 (1990), 369-401.
- [7] HINCH E.J. : The flow of an Oldroyd fluid around a sharp corner J. Non-Newtonian Fluid Mech., 50 (1993), pp. 161-171.
- [8] KEUNINGS, P. : In : Tucker Ch. III (ed.) Computer Modeling for Polymer Processing, pp. 403-469. Munich : Hanser Verlag, 1989.
- [9] MARCHAL J.M., CROCHET, M.J. : A new finite element for calculating viscoelastic flow, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 26 (1987), pp. 77-114.
- [10] PICASSO, M., RAPPAZ, J. : Existence, a priori and a posteriori error estimates for a nonlinear three-field problem arising from Oldroyd-B viscoelastic flows, Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 35 (2001) n° 5, 879-897.
- [11] RUAS, V. : An optimal three-field finite element approximation of the Stokes system with continuous extra stresses, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 11, (1994), 113-130.
- [12] SANDRI, D. : On a FEM method for a linearized version of the Oldroyd Problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 191 (2002), pp. 5045-5065.
- [13] SANDRI, D. : Numerical study around the corotational Maxwell model for the viscoelastic fluid flows. Eur. J. Mech. B Fluids, 24, (2005), n° 6, 733-750.

- [14] SANDRI, D. : Finite element method for viscoelastic fluids flows : approximation of the upper convected Maxwell model and study of a wall slip. Publication de l'Institut Camille Jordan n° 408, 33 p. (2018).
- [15] SANDRI, D. : Finite element method for viscoelastic fluids flows : approximation of the upper convected Maxwell model and study of a wall slip. Study of convergence mesh. Publication de l'Institut Camille Jordan n° 411, 30 p. (2021).
- [16] TREBOTICH, D. : Toward a solution to the high Weissenberg number problem PAMM. Proc. Appl. Math. Mech. 7, 21000732100074 (2007).