



HAL
open science

Éléments finis en plasticité et visco-plasticité

Jean-Michel Delbecq, Michel Frémond, Alain Pecker, Jean Salençon

► **To cite this version:**

Jean-Michel Delbecq, Michel Frémond, Alain Pecker, Jean Salençon. Éléments finis en plasticité et visco-plasticité. Journal de Mécanique Appliquée, 1977, 3 (1), pp.267-304. hal-04058141

HAL Id: hal-04058141

<https://hal.science/hal-04058141>

Submitted on 4 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Éléments finis en plasticité et visco-plasticité

*A finite element approach to problems of plasticity
and viscoplasticity*

par

J. M. DELBECQ, M. FRÉMOND, A. PECKER et J. SALENÇON*

RÉSUMÉ. — On propose une méthode d'éléments finis pour la détermination « par l'extérieur » du convexe des chargements « potentiellement supportables » d'un système, à partir de la seule connaissance de son critère de plasticité (convexe). La méthode, applicable dans son principe pour tout critère, est mise en œuvre sur deux exemples de problèmes plans pour le matériau de von Mises.

On considère ensuite le cas d'un système dont le matériau constitutif obéit à la loi de Norton-Hoff. On met en évidence des principes variationnels en contraintes et en vitesses, analogues à ceux correspondant au matériau de Mises, dont la formulation en termes de paramètres de chargement permet d'appliquer la méthode des éléments finis sous la même forme. On dispose ainsi d'un moyen de recherche des solutions pour les problèmes d'écoulement de ce type de matériau. Un exemple d'application est donné. En outre, le matériau de Mises apparaît comme un cas limite du matériau de Norton-Hoff; comme d'autre part la méthode des éléments finis proposée se révèle plus performante pour le matériau de Norton-Hoff par suite de la régularité de la fonctionnelle à minimiser, on peut trouver ainsi, par le biais du matériau de Norton-Hoff, un autre moyen d'approche du convexe des chargements stables pour le système en matériau de Mises : on utilisera dans l'application du théorème cinématique de la théorie des charges limites, le champ de vitesse minimisant pour le système homologue en matériau de Norton-Hoff suffisamment voisin du matériau de Mises.

ABSTRACT. — Considering a mechanical system subjected to a loading process, and made of a material with a convex yield criterion, a finite element method is proposed which makes it possible to determine from the outside the convex set of the admissible loads. Two examples are given presenting the application of the method for a Mises material.

* J. M. D. : Service de la Navigation, 2, rue de la Quarantaine, 69321 Lyon Cedex.
M. F. : Laboratoire central des Ponts et Chaussées, 50, boulevard Lefèbvre, 75732 Paris Cedex 15. A. P. : Mécasol, 50, rue Gérard, 75013 Paris; J. S. : Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex. E.N.P.C., 28, rue des Saints-Pères, 75007 Paris.

The case of a system made of a Norton-Hoff material is then studied and variational principles for the stresses and the velocities are stated. They are analogous to those for a Mises material. Formulating those principles in the case of a loading process depending on a finite number of loading parameters it appears that the finite element method given for the Mises material only needs slight modifications in order to be applied to the study of flow-problems for the Norton-Hoff material, as shown on an example: the functional to be minimized is now regular and no more discontinuities in the velocity field are to be taken into account.

Besides it is pointed out that the Mises material can be considered as the limit of the Norton-Hoff material when the exponent in the constitutive equation tends to zero. It follows another approach from the outside for the convex set of the safe loads of a system made of a Mises material.

1. Introduction

Le modèle de comportement rigide-parfaitement plastique est, on le sait, essentiellement lié au concept de « calcul à la rupture ». C'est ainsi que l'on utilise ce modèle de comportement pour la détermination des chargements limites que peut supporter un système et des solutions d'écoulement plastique libre correspondantes. Pour ce faire, on utilise les principes de minimum en vitesses et en contraintes de Markov [1] et de Hill ([2], [3]), sous leur forme la plus commode connue, sous le nom de théorie des charges limites, pour un système constitué d'un matériau obéissant au principe du travail maximal.

L'idée d'utiliser la méthode des éléments finis dans cette résolution vient alors naturellement à l'esprit. On peut citer à titre d'exemples les travaux de Lysmer [4], Anderheggen et Knöpfel [5], Maier et coll. [6], etc., qui s'appuient sur le « théorème statique » de la théorie des charges limites, ceux de Frémond, Pecker et Salençon ([7], [8]), partant du « théorème cinématique ».

On se propose dans l'étude présentée ici de prolonger ces deux derniers travaux : pour le matériau rigide parfaitement plastique obéissant au principe du travail maximal, en examinant un nouvel exemple d'application avec condition aux limites du type intégrale sur les vitesses; en étendant l'utilisation de la méthode au cas des systèmes constitués de matériaux à critère de plasticité convexe quelle qu'en soit la règle d'écoulement; pour le matériau de Norton-Hoff, en s'appuyant sur les principes variationnels obtenus dans ce cas, analogues à ceux valables pour le matériau de Mises; la régularisation du problème ainsi obtenue pouvant éventuellement fournir un autre moyen d'approche pour le matériau de Mises.

2. Chargements « potentiellement supportables » par un système

2.1. DOMAINE DES CONTRAINTES ADMISSIBLES

On considère un système constitué d'un matériau dont les capacités de résistance sont caractérisées par un domaine admissible pour les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, G convexe, fermé invariable ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \underline{\underline{\sigma}} \in G \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} \text{ peut être supporté par le matériau.}$$

Pour le milieu continu, ceci peut correspondre au cas du matériau parfaitement plastique (quelles qu'en soient les autres propriétés), mais la limitation sur les contraintes peut aussi provenir d'autres conditions telles que, critère de rupture, etc. Pour les poutres ou les plaques d'autre part, en introduisant à la place de $\underline{\underline{\sigma}}$ les contraintes généralisées, G sera défini à partir des conditions de plasticité (ou de rupture ou de stabilité, etc.), pour l'élément de poutre ou l'élément de plaque.

Il est commode de caractériser G par une fonction scalaire des contraintes, $f(\underline{\underline{\sigma}})$, telle que

$$(2) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ intérieur à } G \Leftrightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ sur la frontière de } G \Leftrightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Compte tenu de l'hypothèse de convexité de G , on choisira évidemment f fonction convexe de $\underline{\underline{\sigma}}$.

On sait que le convexe G peut aussi être caractérisé par sa fonction d'appui, $\pi(\underline{\underline{d}})$, définie par

$$(3) \quad \pi(\underline{\underline{d}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in G} \{ \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}) \} \quad (3),$$

où $\underline{\underline{d}}$ désigne la vitesse de déformation, l'expression $\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}})$ représentant la puissance de déformation pour l'élément. π est une fonction convexe et positivement homogène de degré 1 de $\underline{\underline{d}}$. G apparaît alors comme l'intersection des demi-espaces, dépendant du paramètre $\underline{\underline{d}}$ quelconque, définis par

$$(4) \quad \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}) - \pi(\underline{\underline{d}}) \leq 0.$$

⁽¹⁾ Le matériau peut être non homogène. Dans ce cas, le domaine G sera fonction des variables d'espace $G(x)$. Nous n'indiquerons pas cette dépendance éventuelle qui ne modifie en rien les raisonnements à venir.

⁽²⁾ f symétrique en σ_{ij} et σ_{ji} .

⁽³⁾ Dans ce chapitre, il est fait usage, à un niveau très élémentaire, de quelques notions d'analyse convexe. Les lecteurs se reporteront avec profit à J. J. Moreau [9].

2.2. PROCESSUS DE CHARGEMENT

Le système étudié est supposé soumis à un processus de chargement dépendant de n paramètres Q_i ($i = 1, \dots, n$) auxquels correspondent les variables \dot{q}_i , vitesses de déformation du système, le principe des puissances virtuelles s'écrivant :

$\forall \underline{\underline{\sigma}}$, champ de contraintes, statiquement admissible (S.A.) pour $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$,

$\forall \underline{\underline{d}}$, champ de vitesses de déformation, cinématiquement admissible (C.A.) pour $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, alors,

$$(5) \quad \int_{\Omega} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}) d\Omega = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

où Ω représente l'espace occupé par le système.

2.3. CHARGEMENTS « POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES »

Il est évident que pour qu'un chargement \mathbf{Q} puisse être supporté par le système, il faut que l'on puisse trouver au moins un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ S.A. pour \mathbf{Q} , et tel qu'en tout point du système on ait $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}$.

Nous désignerons par \mathbf{K} l'ensemble de ces chargements que nous dirons « potentiellement supportables » par le système.

On fait l'hypothèse que les changements de géométrie du système sont négligeables, autrement dit la géométrie actuelle est prise identique à la géométrie initiale pour l'écriture des équations d'équilibre.

Soit \mathcal{L} l'espace vectoriel de tous les champs de contraintes S.A. pour le système dans sa géométrie initiale et dans ce processus de chargement. L'application \mathcal{L} qui à $\underline{\underline{\sigma}}$ fait correspondre le \mathbf{Q} de $\{\mathbf{Q}\}$ pour lequel il est S.A., est linéaire

$$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \mathbf{Q} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{le } \mathbf{Q} \text{ pour lequel } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est S.A.}$$

Le noyau de \mathcal{L} est le sous-espace \mathcal{A} des champs d'autocontraintes (champs $\underline{\underline{\sigma}}$ S.A. pour $\mathbf{Q} = 0$) et $\{\mathbf{Q}\}$ est donc isomorphe à \mathcal{L}/\mathcal{A} .

Dans \mathcal{L} , l'ensemble

$$(6) \quad \mathbf{H} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. pour le processus et } \forall \mathbf{x} \in \Omega, \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{G} \},$$

est évidemment convexe.

L'ensemble \mathbf{K} contenu dans $\{\mathbf{Q}\}$ n'est autre que l'image de \mathbf{H} par \mathcal{L} et est donc aussi *convexe* :

$$(7) \quad \mathbf{K} = \mathcal{L}(\mathbf{H}).$$

Désignant par $\Pi(\dot{\mathbf{q}})$ la fonction d'appui de K :

$$\Pi(\dot{\mathbf{q}}) = \sup_{\mathbf{Q} \in K} \{ \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} \},$$

on a

$$\forall \underline{\underline{d}} \text{ C.A. pour } \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi(\dot{\mathbf{q}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in H} \int_{\Omega} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}) d\Omega,$$

d'où, d'après (3), la majoration

$$(8) \quad \Pi(\dot{\mathbf{q}}) \leq \inf_{\underline{\underline{d}} \text{ C.A. pour } \dot{\mathbf{q}}} \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{d}}) d\Omega \quad (^4).$$

2.4. APPROCHES DE K

Les formules (7) et (8) fournissent de façon immédiate deux méthodes pour approcher le convexe K des chargements potentiellement admissibles :

— approche « par l'intérieur » au moyen des champs de contraintes (fig. 1);

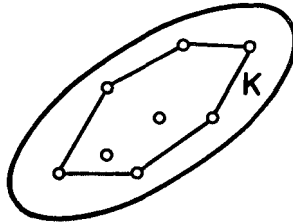


Fig. 1. — Approche par l'intérieur de K .

Fig. 1. — Approaching K from the inside.

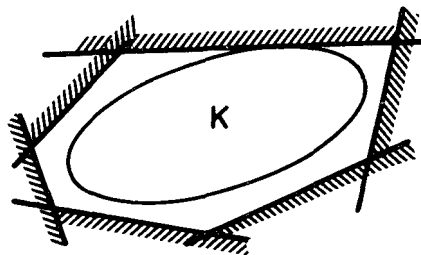


Fig. 2. — Approche par l'extérieur de K .

Fig. 2. — Approaching K from the outside.

(⁴) Égalité assurée dans certaines circonstances.

– approche « par l'extérieur » au moyen des champs de vitesses (*fig. 2*), qui conduit, comme indiqué par (8), à la minimisation à $\dot{\mathbf{q}}$ donné de $P(\underline{\underline{d}}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{d}}) d\Omega$, pour tous les champs $\underline{\underline{d}}$ C.A. pour $\dot{\mathbf{q}}$.

2.5. REMARQUES

2.5.1. Dans le cas où f représente le critère de plasticité d'un matériau parfaitement plastique, vérifiant de plus le principe du travail plastique maximal, on sait que la recherche de (ou des) l'élément $\underline{\underline{\sigma}}$ maximisant dans (3) équivaut à l'écriture de la règle d'écoulement du matériau; $\pi(\underline{\underline{d}}) < +\infty$ apparaît alors comme la puissance dissipée dans $\underline{\underline{d}}$ si $\underline{\underline{d}}$ est plastiquement admissible (P.A.); $\pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty$ correspond au cas où $\underline{\underline{d}}$ n'est pas plastiquement admissible pour le matériau.

Cette information supplémentaire sur le comportement du matériau permet alors de démontrer que : tous les chargements de K seront effectivement supportés par le système, les chargements limites du système appartenant nécessairement à la frontière de K .

On voit de plus que les deux approches du convexe K ne sont autres que les méthodes statique et cinématique de la théorie des charges limites classique (*cf.* par exemple [10]).

2.5.2. Dans le cas d'un matériau parfaitement plastique de critère f (convexe par hypothèse), et de règle d'écoulement quelconque, l'approche par l'extérieur de K correspond au premier théorème de Radenkovic ([11], [12]) pour le milieu continu (ou de Drucker, [13] pour les conditions de frottement aux interfaces); ce théorème introduit un matériau fictif, auxiliaire de calcul, de critère f et vérifiant le principe du travail maximal, pour lequel l'application de la méthode cinématique conserve le caractère d'approximation par excès pour le matériau réel.

La présentation adoptée ici évite toute confusion avec une hypothèse physique sur le comportement du matériau; elle met en évidence la signification de K et montre la généralité du procédé qui ne repose que sur les deux hypothèses de :

- changements de géométrie négligeables;
- convexité de G , quelle que soit la nature physique du phénomène correspondant à cette limitation des contraintes.

Mais il va de soi que cette nature physique ne saurait être ignorée lors de l'utilisation pratique qui pourra être faite de K (pour le dimensionnement d'ouvrages par exemple).

3. Méthode des éléments finis appliquée à l'approche par l'extérieur pour le milieu continu

3.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Comme on l'a dit au paragraphe 2.4, l'approche par l'extérieur conduit, pour un $\dot{\mathbf{q}}$ donné, à la minimisation de $P(\underline{d})$ sur les champs \underline{d} C.A. pour $\dot{\mathbf{q}}$. Il paraît naturel d'utiliser pour cela la méthode des éléments finis, qui permet d'étudier toute une classe de champs.

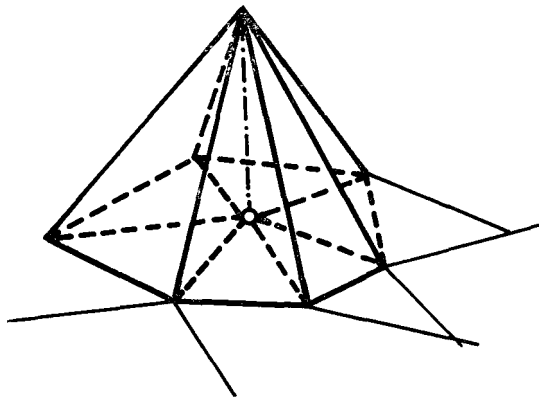


Fig. 3. — Fonction chapeau φ .

Fig. 3. — Witch's hat function φ .

Nous nous restreindrons ici à des problèmes de déformation plane. Le principe de la méthode est le suivant :

Soit un système Σ ; on définit *a priori* une zone déformée \mathcal{D} que l'on maille par des triangles à 3 nœuds et on recherche le champ \underline{d} minimisant dans le sous-espace engendré par les fonctions « chapeau » φ définies par chaque nœud (*fig. 3*), et vérifiant $\dot{\mathbf{q}}(\underline{d}) = \dot{\mathbf{q}}$.

Dans le cas où les seules sollicitations subies par le système sont des forces concentrées la condition

$$(9) \quad \dot{\mathbf{q}}(\underline{d}) = \dot{\mathbf{q}},$$

fixe en chaque point d'application la valeur de la composante de la vitesse suivant la direction de la force. Lorsque l'on a affaire à des forces de volume

ou de surface, les \dot{q}_i correspondants sont des intégrales; la condition (9) sera alors dualisée, conduisant ainsi au problème de point selle

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underset{\underline{d}}{\text{Min}} \{ P(\underline{d}) \mid \underline{d} \text{ C.A. et } \dot{\underline{q}}(\underline{d}) = \dot{\underline{q}} \}, \\ \updownarrow \\ \underset{\lambda}{\text{Max}} \underset{\underline{d}}{\text{Min}} \{ P(\underline{d}) + \lambda(\dot{\underline{q}}(\underline{d}) - \dot{\underline{q}}) \mid \lambda \in \mathbb{R}^n; \underline{d} \text{ C.A.} \}. \end{array} \right.$$

3.2. COMMENTAIRES

Sans nous apesantir sur cette question déjà évoquée dans des publications antérieures, nous signalerons que l'utilisation de l'approche par l'extérieur présente l'avantage de permettre de limiter *a priori* la zone à mailler, en utilisant dans le reste du système le champ $\underline{d} = 0$ c'est-à-dire des champs de vitesses de mouvements rigidifiants déterminés par les conditions aux limites.

On remarque que la forme de $P(\underline{d})$ permet de faire intervenir des champs de vitesses discontinus. Cela correspond d'ailleurs, dans le cas des matériaux parfaitement plastiques à loi d'écoulement normale, à la modélisation mathématique d'un phénomène observé expérimentalement (fort gradient transversal de la vitesse le long d'une surface) et à une nécessité du point de vue mathématique pour la construction des solutions connues, obtenues par d'autres méthodes (théorie des équilibres limites plans et méthode des caractéristiques, par exemple). Il est donc souhaitable, dans l'application de la méthode des éléments finis d'introduire la possibilité de champs de vitesses discontinus.

Au titre des inconvénients de la méthode on doit rappeler que l'on construit par là une approximation par l'extérieur des « potentialités de résistance » du système, ce qui, sauf cas particuliers, ne correspond pas au sens de la sécurité (mais cet inconvénient n'est pas en tout cas lié à la méthode des éléments finis elle-même!), d'autre part, l'incertitude sur les résultats numériques (il conviendra en particulier de bien apprécier la valeur du test d'arrêt des itérations dans la résolution) amène à considérer avec un esprit critique la valeur des résultats.

On se limitera dans cet exposé à l'étude de problèmes de déformation plane pour le matériau de Tresca (ou de Mises), et pour le matériau de Coulomb. L'extension de la méthode à des problèmes axisymétriques, voire tridimensionnels, pose des problèmes certains d'ordre informatique (taille du programme).

4. Mise en œuvre

La mise en œuvre de la méthode comporte deux étapes :

- discrétisation du problème : maillage du domaine et expression discrétisée de $P(\underline{d})$;
- résolution numérique du problème de point selle discrétisé.

4.1. DISCRÉTISATION

4.1.1. Maillage

Le maillage sera constitué de deux types d'éléments, choisis très simples en raison des difficultés d'ordre numérique. Ce choix est justifié *a posteriori* par les résultats eux-mêmes. On utilise :

- des triangles à 3 nœuds (les sommets) sur lesquels la vitesse varie linéairement;
- des rectangles d'épaisseur nulle pour représenter les lignes de discontinuité : la discontinuité de vitesse y varie linéairement.

Remarque. – La forme de la (ou des) ligne de discontinuité est évidemment arbitraire. Toutefois, on devra éviter d'y introduire trop de points anguleux lorsqu'on traitera des problèmes pour le matériau de Tresca (ou de Mises); en effet, la minimisation de $P(\underline{d})$ amène la discontinuité de vitesse à être tangente à la ligne de discontinuité et il s'ensuit que la discontinuité tend à être nulle aux points anguleux. Il est vraisemblable que la méthode devrait pouvoir être améliorée sur ce point.

4.1.2. Expression discrétisée du problème

Soit un maillage à N nœuds et NBT triangles et soit $\mathbf{U} = (U_{e_i})$, $e_i = 1, \dots, 2N$, le vecteur vitesse des N nœuds.

On obtient sans difficulté les expressions analytiques de $P(\underline{d})$ pour les critères de Tresca et de Coulomb en déformation plane à partir de la définition (3) (cf. par exemple [10]).

Pour le critère de Tresca :

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Max}_{i, j=1, 2, 3} \{ \sigma_i - \sigma_j - 2k \},$$

où k représente la cohésion du matériau; d'où en déformation plane :

$$(11) \quad P(\underline{d}) = \int_{\Omega} \left[\sup_{p \in \mathbb{R}} \{ -p \text{tr} \underline{d} + k \sqrt{2 \text{tr} \underline{d}^2} \} \right] d\Omega \\ + \int_{L} \left[\sup_{p \in \mathbb{R}} \{ -p [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} + k |[\mathbf{u}]| \} \right] dL,$$

où L représente une ligne de discontinuité, \mathbf{n} sa normale au point courant, $[\mathbf{u}]$ la discontinuité de vitesse.

Pour le critère de Coulomb :

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Max}_{i, j=1, 2, 3} \{ \sigma_i - \sigma_j - 2C \cos \varphi + (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi \},$$

où φ désigne l'angle de frottement interne et C la cohésion du matériau; d'où en déformation plane

$$(12) \quad P_c(\underline{d}) = \int_{\Omega} \sup_{p \geq 0} \left\{ p \left(\sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi}} [3 \text{tr} \underline{d}^2 - (\text{tr} \underline{d})^2] - \text{tr} \underline{d} \right) + H \text{tr} \underline{d} \right\} d\Omega \\ + \int_L \left\{ \sup_{p \geq 0} \{ p [-[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} + \sin \varphi |[\mathbf{u}]|] \} + H [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \right\} dL.$$

$H = C \cotg \varphi$ est la pression de cohésion.

A signaler que les expressions (11) et (12) sont valables de façon générale pour les champs \underline{d} tridimensionnels dans le cas des critères de Mises et de Drucker-Prager respectivement [10].

La discrétisation conduit alors aux problèmes de point-selle suivants :

Pour le critère de Tresca :

$$(13) \quad \text{Min}_{\mathbf{U}} \text{Max}_{\boldsymbol{\mu}} \{ F(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{B} \mathbf{U} \},$$

où

$$(14) \quad F(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{\text{NBT}} \sqrt{\mathbf{U}_{e_i}^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_{e_i}} + \mathbf{G}(\mathbf{U}) \quad (5),$$

dont le premier terme provient de l'intégrale de $\pi(\underline{d})$ sur les triangles, \mathbf{K}_i étant la matrice de rigidité élémentaire d'un triangle; et dont le second terme est issu de l'intégrale de $\pi(\underline{d})$ sur les rectangles, c'est-à-dire de l'intégrale de ligne dans (11) le long de la ligne de discontinuité.

Dans (13), $\boldsymbol{\mu}$ est un vecteur correspondant à la discrétisation des termes en $-p \text{tr} \underline{d}$ et $-p [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}$ dans (11), et à la dualisation indiquée à la formule (10).

On remarque que l'approche adoptée ici est identique à celle qui consisterait, en s'appuyant sur la méthode cinématique classique (cf. § 2.5.1) à minimiser la puissance dissipée sur les champs \underline{d} vérifiant $\text{tr} \underline{d} = 0$ et $[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0$, et à dualiser ces deux dernières conditions.

(5) A i fixé, \mathbf{U}_{e_i} représente le vecteur vitesse des 3 nœuds du triangle i .

En fait dans les exemples d'application que nous avons étudiés, compte tenu du caractère très contraignant de la condition d'invariance de volume, celle-ci, dualisée, n'a été imposée qu'en moyenne sur deux triangles. Il en résulte que la résolution du problème (13) dans ces conditions conduira à un champ $\underline{\underline{d}}$ qui ne sera plastiquement admissible que de façon approchée par suite de :

- l'incertitude numérique inévitable;
- la nécessité d'adopter un test de convergence pour les processus itératifs;
- la traduction en moyenne de la condition $\text{tr} \underline{\underline{d}} = 0$.

Cela signifie que l'on devra toujours considérer les résultats d'un œil critique avant de leur attribuer le caractère d'approximation par l'extérieur de K.

Pour le critère de Coulomb :

Le problème de point selle s'écrit :

$$(15) \quad \underset{\mathbf{U}}{\text{Min}} \underset{\boldsymbol{\mu} \geq 0}{\text{Max}} \{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathcal{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}) \},$$

où

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{\text{NBT}} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{e_i}$$

est la discrétisation de $\int_{\Omega} \mathbf{H} \text{tr} \underline{\underline{d}} \cdot d\Omega$;

$\mathbf{G}(\mathbf{U})$ est la discrétisation de $\int_{\mathbf{L}} \mathbf{H}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{L}$;

$\mathcal{F}(\mathbf{U})$ est de la forme

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{\text{NBT}} \sqrt{\mathbf{U}_{e_i}^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_{e_i}}$$

et le terme $\boldsymbol{\mu}^T \mathcal{F}(\mathbf{U})$ correspond à la discrétisation de $\int_{\Omega} p \sqrt{\cdot} \cdot d\Omega$;

$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{F}(\mathbf{U})$ est la discrétisation de $\int_{\mathbf{L}} p [\] \, d\mathbf{L}$;

$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{B} \mathbf{U}$ correspond à la discrétisation de $\int_{\Omega} -p \text{tr} \underline{\underline{d}} \, d\Omega$ et à la dualisation

éventuelle des conditions aux limites (10).

4.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

4.2.1. D'une façon générale le problème peut s'écrire :

$$\underset{\mathbf{U}}{\text{Min}} \underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{Max}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{U})$$

avec la condition $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ pour le matériau de Coulomb.

Diverses méthodes peuvent être envisagées pour le résoudre mais des considérations de simplicité, de temps de calcul, et d'efficacité, ont fait choisir un algorithme du type Uzawa, méthode de gradient sur $\boldsymbol{\mu}$ et méthode de descente sur \mathbf{U} , c'est-à-dire le processus itératif à deux paramètres de relaxation ρ_1 et ρ_2 : soit pour chaque composante μ_j de $\boldsymbol{\mu}$, et chaque composante U_{e_i} de \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \mu_j^{(n+1)} &= \mu_j^{(n)} + \rho_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_j}(\boldsymbol{\mu}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)}), & \text{itération externe,} \\ U_{e_i}^{(n+1)} &= U_{e_i}^{(n)} - \rho_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{e_i}}(\boldsymbol{\mu}^{(n+1)}, \mathbf{U}^{(n)}), & \text{itération interne,} \end{aligned}$$

huit itérations internes pour une itération externe.

La méthode n'a été mise en œuvre numériquement que sur des exemples traitant du matériau de Tresca. Le test de convergence choisi a alors été

$$\left| \int_{\Omega} \text{tr} \underline{d} \cdot d\Omega \right| < \varepsilon \text{ sur } n \text{ itérations}$$

et

$$\text{Max} |\text{tr} \underline{d}| < \eta,$$

où $\varepsilon = 10^{-3}$, $\eta = 1$, $n = 20$.

4.2.2. Examinons les principales difficultés rencontrées :

- Il est clair que \mathcal{H} n'est pas différentiable aux points $\mathbf{U}_{e_i} = \mathbf{0}$ et d'autre part comporte des valeurs absolues. La solution consiste à calculer une dérivée directionnelle;

- Cet algorithme nécessite le choix des paramètres ρ_1 et ρ_2 .

On peut essayer de déterminer par essais successifs le couple (ρ_1, ρ_2) optimal que l'on conserve constant tout au long du calcul. Cette méthode fastidieuse nous a rarement donné satisfaction. Toutefois, il a été constaté que l'existence d'une variation brusque de l'intégrale test de convergence vers la 30^e itération permettait de prévoir une bonne convergence, celle-ci intervenant au bout de quelques centaines d'itérations externes.

On a alors envisagé une méthode où le paramètre ρ_2 est choisi d'une manière « optimale » tout au long du calcul, ρ_1 restant constant :

ρ_2 est choisi de manière à rendre minimale la fonction

$$\kappa(\rho_2) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\mu}^{(n+1)}, \mathbf{U}^{(n+1)}),$$

c'est-à-dire

$$\kappa(\rho_2) = \mathcal{H}\left(\dots, \mu_j^{(n)} + \rho_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_j}, \dots, U_{e_i} - \rho_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{e_i}}, \dots\right),$$

la recherche de cette valeur se fait par une méthode itérative, assez grossière, du type « dichotomique ».

Le choix du paramètre ρ_1 s'est révélé aisé, les valeurs les plus couramment utilisées étant 0,1, 1 et 10. Mais la méthode n'a pas apporté une convergence satisfaisante pour la puissance dissipée. Par contre, l'allure des champs de vitesses obtenues était très intéressante.

- Une méthode de diagonalisation a été mise en œuvre sur la première variante. On conserve ρ_1 et ρ_2 constants au cours du calcul mais à chaque itération externe, donc après huit itérations internes, on effectue en supplément une diagonalisation : on cherche à minimiser au mieux en \mathbf{U} dans la direction calculée par les itérations internes. La convergence de la méthode en a été nettement améliorée.

- L'algorithme a été mis en œuvre sur deux exemples présentés ci-dessous. Le premier a été bien résolu par la 1^{re} des variantes indiquées. Le second comportait une condition aux limites du type « intégrale » celle-ci a été discrétisée, mais il a semblé que l'algorithme de résolution était moins bien adaptée à ce type de condition : la 3^e variante n'en a permis qu'une résolution grossière (intégrale de test = 10^{-2} et $\text{Max} |\text{tr } \underline{\underline{d}}| = 40$). C'est pourquoi on a cherché à satisfaire la condition intégrale $\dot{\mathbf{q}}(\underline{\underline{d}}) = \mathbf{q}$ en imposant aux champs de vitesses, sur la partie du contour concernée, un profil qui la vérifiait; la convergence s'est alors révélée excellente (intégrale de test = 10^{-4} , et $\text{Max} |\text{tr } \underline{\underline{d}}| = 2$), mais ce procédé est évidemment dépendant du choix du profil.

5. Exemples d'application

5.1. BUTÉE D'UNE PLAQUE SUR UN COIN INFINI NON PESANT

Nous ne ferons que rappeler brièvement les résultats obtenus pour ce problème, déjà présentés dans [8].

Il s'agit de la butée d'une paroi rigide OA de largeur $2a$ sur un coin rectangulaire infini en matériau de Mises non pesant (fig. 4). Le contact entre

la paroi et le coin se fait sans frottement avec décollement possible : il satisfait le principe du travail maximal. La théorie des charges limites classique rappelée au paragraphe 2, est ici applicable.

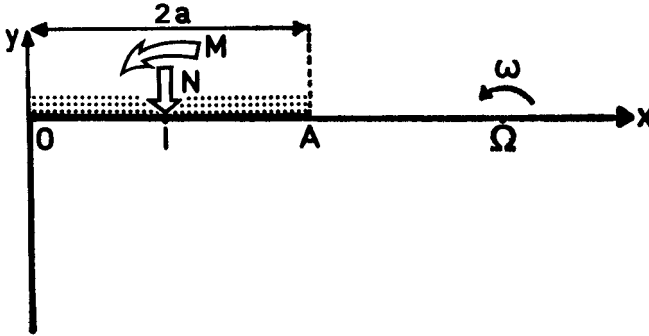


Fig. 4. — Butée d'une plaque sur un coin.

Fig. 4. — Rigid plate acting on a rectangular wedge.

On a affaire à un processus de chargement à deux paramètres; N et M désignant les éléments de réduction des efforts en I , on a choisi les paramètres sans dimension

$$Q_1 = \frac{N}{ak}, \quad Q_2 = \frac{M}{a^2 k},$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{U_y}{|\omega| a}, \quad \dot{q}_2 = \operatorname{sgn} \omega,$$

la puissance étant alors exprimée en unités $|\omega| a^2 k$.

Sur la figure 5, sont représentées les courbes obtenues par l'encadrement de la frontière d'écoulement de ce système par utilisation des moyens classiques [14].

La méthode des éléments finis a été utilisée dans le but d'améliorer l'approximation par l'extérieur : deux directions de \dot{q} ont été explorées, c'est-à-dire deux positions sur Ox du centre instantané de rotation Ω de la plaque, fixant par la condition $\dot{q}(\underline{d}) = \dot{q}$ le profil des vitesses verticales sous OA . Le maillage comportait

$$\text{soit } (1^\circ) \left\{ \begin{array}{l} 152 \text{ noeuds,} \\ 226 \text{ triangles,} \\ 18 \text{ rectangles,} \end{array} \right. \quad \text{soit } (2^\circ) \left\{ \begin{array}{l} 144 \text{ noeuds,} \\ 214 \text{ triangles,} \\ 16 \text{ rectangles.} \end{array} \right.$$

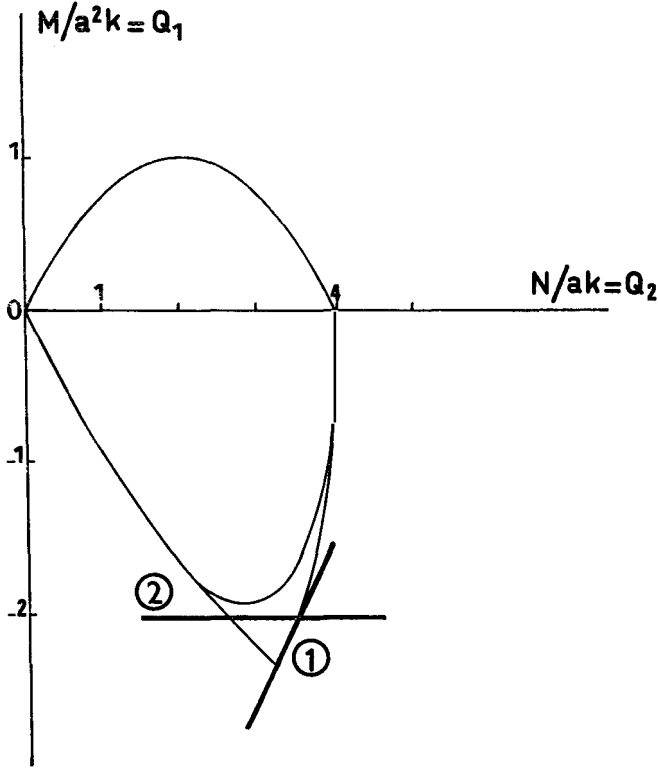


Fig. 5. — Butée d'une plaque sur un coin plastique : frontière d'écoulement.

Fig. 5. — Yield locus for a rigid plate on a rectangular wedge.

1° $\dot{q}_1 = +1$, $\dot{q}_2 = -1$ (Ω en I, milieu de OA) :

On trouve $P = 5,48$ après 246 itérations, soit le plan (1) de la figure 5 alors que le meilleur cercle de glissement pour cette valeur de \dot{q} donne $P = 5,52$. Amélioration faible et peu significative du fait de l'incertitude des calculs.

2° $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = -1$ (Ω en I, milieu de OA) :

Après 271 itérations, on trouve $P = 2,02$, d'où le plan (2) sur la figure 5. L'intégrale de test est égale à $3 \cdot 10^{-3}$. Le champ de vitesses correspondant est représenté à la figure 6 ; sur celle-ci la ligne brisée en traits tiretés représente la ligne le long de laquelle sont placés les 16 éléments rectangulaires

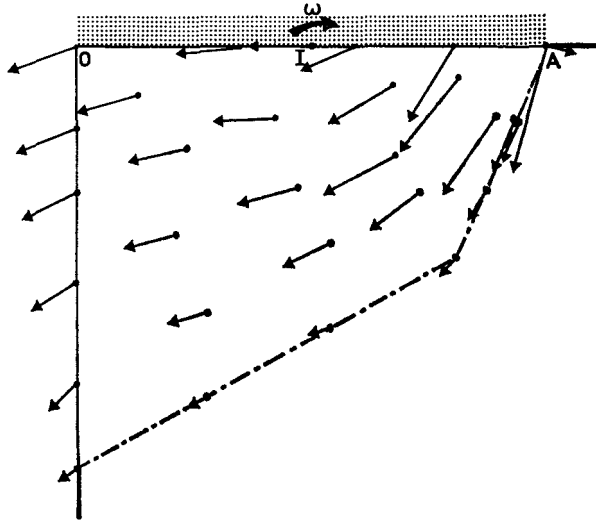


Fig. 6. — Butée d'une plaque sur un coin plastique : champ de vitesses pour $\dot{q} = (0, -1)$.

Fig. 6. — Rigid plate on a rectangular wedge: velocity field for $\dot{q} = (0, -1)$.

de discontinuité. L'amélioration est très sensible par rapport au meilleur cercle de glissement qui donne $P = 2,76$ et par rapport à la pointe inférieure de l'approximation par l'extérieur sur la figure 5, $P = 2,3$.

5.2. HAUTEUR LIMITE D'UNE FOUILLE VERTICALE

5.2.1. Le problème consiste à déterminer la hauteur limite h d'une fouille verticale dans un matériau de Tresca pesant (fig. 7).

Par une transformation simple, on se ramène au problème équivalent de la détermination de la hauteur limite d'un talus vertical non pesant soumis à la distribution de forces extérieures (F) (fig. 7).

Un seul paramètre de chargement dans ce problème, soit en grandeurs sans dimension

$$(16) \quad Q = \frac{\gamma h}{k},$$

$$(17) \quad \dot{q} = \frac{1}{U h} \left[\int_{A-\infty}^B u_y dx + \int_B^O u_x \cdot \frac{y}{h} dy \right],$$

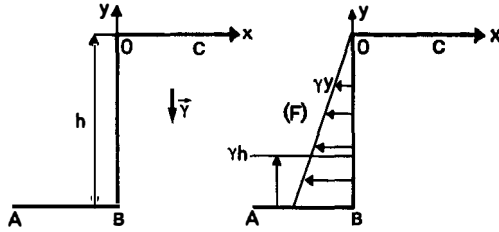


Fig. 7. — Hauteur limite d'une fouille verticale.

Fig. 7. — Limit height of a vertical cut.

où U est une vitesse de référence. Les puissances $P(\underline{d})$ et $Q\dot{q}$ seront exprimées en unités $k U h$.

En fixant la valeur imposée de q égale à $+1$, chaque valeur de $P(\underline{d})$ fournit directement un majorant de Q_{lim} .

On a utilisé pour ce problème des maillages où la ligne de discontinuité partait du pied du talus, en imposant $u_y = 0$ sur $A_{-\infty} B$. La condition (9) s'écrit donc alors :

$$(18) \quad \frac{1}{U h} \int_B^0 u_x \cdot \frac{y}{h} dy = 1$$

qui, à la différence de l'exemple précédent, est du type intégrale. Cette condition a d'abord été traitée par la dualisation (9).

Les meilleurs résultats analytiques actuellement connus pour ce problème, obtenus par les méthodes classiques, encadrent Q_{lim} entre $2\sqrt{2}$ (Heyman, [15]) ⁽⁶⁾ borne inférieure, et 3,83 borne supérieure obtenue par un cercle de glissement. Numériquement Pastor [16], utilisant une méthode d'éléments finis statique (cf. Pastor et Turgeman [17]) a obtenu comme borne inférieure la valeur 3,1.

5.2.2. On a mis en œuvre la méthode d'éléments finis sur cet exemple en utilisant la méthode de diagonalisation. Les calculs sont menés sur 400 itérations en deux passages successifs de 200 itérations, entre lesquels on peut modifier la valeur de ρ_1 (ρ_2 étant fixé à 0,05).

Après 100 itérations pour :

$\rho_1 = 1$ et 0,1, p varie entre 3,6 et 3,85;

$\rho_1 = 1$ et 1, p varie entre 3,6 et 4,1;

$\rho_1 = 1$ et 10, p varie entre 3,93 et 3,97.

⁽⁶⁾ Palmer (1974) dans une solution non publiée a obtenu la valeur 3.

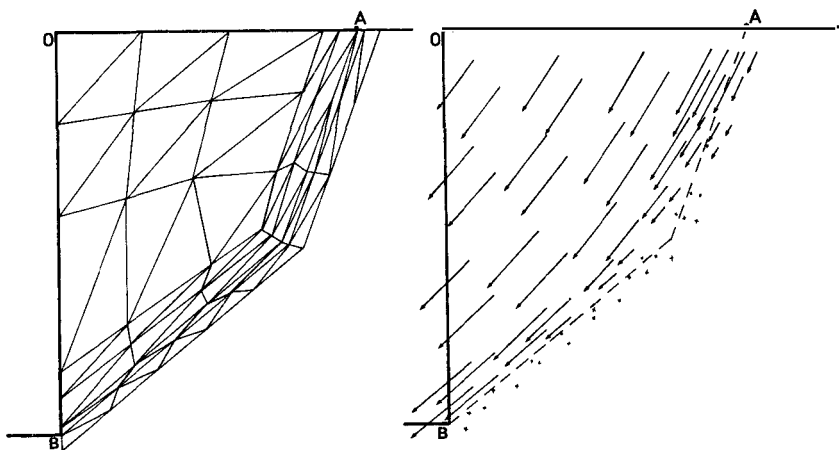


Fig. 8. — Maillage et champ de vitesses avec profil de vitesse horizontale imposé sur BO correspondant à celui du meilleur cercle de glissement.

Fig. 8. — *The mesh used. Velocity field obtained with an imposed horizontal velocity pattern along BO corresponding to that of the best slip circle.*

On constate que les valeurs obtenues sont intéressantes mais la convergence n'est pas satisfaisante : l'intégrale de test est bien égale à 10^{-2} mais la valeur maximale de $\text{tr } \underline{\underline{d}}$ atteint 40 (cf. § 4.2.2).

Pensant que l'origine de ces difficultés pouvait résider dans le type « intégrale » de la condition $\dot{q}(\underline{\underline{d}}) = 1$, qui laisse trop de liberté au champ de vitesses, on a imaginé de traduire cette condition en imposant *a priori* sur BO un profil de u_x satisfaisant cette condition.

La méthode de diagonalisation donne alors de bons résultats. Il reste évidemment à déterminer le profil « optimal » car les valeurs de P sont très variables d'un cas à l'autre.

Le meilleur profil qui ait été utilisé a fourni les résultats suivants :

- avec $\rho_1 = 1$ et 0,1, P oscille entre 3,80 et 3,83 mais la convergence n'est pas obtenue (intégrale test = 0,1);
- avec $\rho_2 = 1$ et 10, P oscille entre 3,93 et 3,97, la convergence étant excellente (intégrale test = 10^{-4} , valeur maximale de $\text{tr } \underline{\underline{d}} = 2$).

Ce profil imposait pour u_x sur BO les vitesses horizontales du meilleur cercle de glissement.

La figure 8 présente le maillage à 54 nœuds, 70 triangles et 6 rectangles utilisé ainsi que le champ de vitesses obtenu (les éléments rectangles de discontinuité sont placés sur la ligne brisée AB en traits tiretés).

6. Application de la méthode des éléments finis au matériau de Norton-Hoff

6.1. LE MATÉRIAU DE NORTON-HOFF

Il s'agit du matériau dont la loi de comportement est la généralisation tridimensionnelle de la loi de fluage de Norton [18], proposée par Hoff [19].

Les notations utilisées sont les suivantes :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}, \\ J_2 = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{\underline{s}}^2, \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{\underline{d}}^2. \end{array} \right.$$

Le matériau est incompressible :

$$(20) \quad \text{tr } \underline{\underline{d}} = 0,$$

et la loi de comportement s'écrit de façon complète :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \alpha I_2^{(m-1)/2} \underline{\underline{d}}, \\ \text{tr } \underline{\underline{d}} = 0, \end{array} \right.$$

qui laisse indéterminée la partie sphérique du tenseur des contraintes (liaison interne parfaite, [20]).

m est un coefficient constant $0 \leq m \leq 1$;

α est une constante dimensionnée, caractéristique du matériau.

L'inversion de (21) est possible pour $m \neq 0$ et conduit à

$$(22) \quad \underline{\underline{d}} = \alpha^{-1/m} J_2^{(1-m)/2m} \underline{\underline{s}}.$$

On remarque que pour $m = 1$, (21) redonne de façon évidente la loi de comportement du fluide newtonien.

Pour $m = 0$, (21) n'a de sens que pour $\underline{\underline{d}} \neq 0$ et implique alors :

$$J_2 = \alpha^2.$$

On complète alors cette loi de comportement par

$$(23) \quad \underline{\underline{d}} = 0 \Rightarrow J_2 \leq \alpha^2.$$

La loi de comportement ainsi obtenue n'est autre que celle du matériau de von Mises :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \underline{d} \neq 0 : \\ \quad \text{tr } \underline{d} = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{1} + \alpha \frac{\underline{d}}{I_2^{1/2}}, \\ \cdot \underline{d} = 0 : \\ \quad J_2 \leq \alpha^2, \end{array} \right.$$

et on remarque qu'il y a continuité dans le passage du matériau de Norton-Hoff pour $m \neq 0$ au matériau de von Mises quand $m \downarrow 0$ puisque la définition complémentaire (23) est en accord avec le comportement de la fonction puissance : on a en effet pour $m \neq 0$, par (21) : $J_2 = \alpha^2 I_2^m$.

On obtient sans difficulté l'expression de la puissance dissipée pour ce matériau, pour $m \neq 0$.

Pour deux tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ et \underline{d} liés par (21) on a

$$(24) \quad \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{d}) = 2\alpha I_2^{(m+1)/2} = \pi_m(\underline{d});$$

que l'on peut également exprimer en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$(25) \quad \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{d}) = 2\alpha^{-1/m} J_2^{(m+1)/2m} = \pi'_m(\underline{\underline{\sigma}}).$$

Posant alors :

$$(26) \quad \varphi_m(\underline{d}) = \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d})$$

et

$$(27) \quad \varphi_m^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{d}) - \varphi_m(\underline{d}) = \frac{m}{m+1} \pi'_m(\underline{\underline{\sigma}}),$$

on obtient immédiatement

$$(28) \quad \underline{s} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial \underline{d}} \text{ pour les } \underline{d} \text{ vérifiant } \text{tr } \underline{d} = 0$$

et

$$(29) \quad \underline{d} = \frac{\partial \varphi_m^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial \varphi_m^*}{\partial \underline{s}}.$$

Pour $m = 0$, les formules (24), (26) et (28) restent valables. Par contre (25) et (27) ne sont plus définies. Le passage à la limite pour $m \downarrow 0$ sur π'_m est un peu délicat et conduit au résultat suivant : quand $m \downarrow 0$, φ_m^* tend vers la fonction nulle pour $J_2 \leq \alpha^2$, et infinie pour $J_2 > \alpha^2$: fonction indicatrice du convexe $J_2 \leq \alpha^2$.

6.2. PRINCIPES DE MINIMUM ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

On considère un système constitué d'un matériau de Norton-Hoff, tel que défini ci-dessus. Ce matériau peut être non homogène, α et m étant alors fonctions de \mathbf{x} .

On suppose que les conditions aux limites sont posées sous la forme classique :

contrainte T_i donnée = T_i^d sur S_{T_i} ,

vitesse u_i donnée = u_i^d sur S_{u_i} .

\mathbf{g} désigne la force de masse.

On obtient alors sans difficulté les résultats suivants :

6.2.1. Pour $m \neq 0$ (⁷) (cf. par exemple [21]) :

– φ_m étant strictement convexe de \underline{d} , on a le principe de minimum sur les vitesses :

Le champ de vitesses, solution *unique* du problème d'écoulement du système (éventuellement à un mouvement solidifiant près) minimise la fonctionnelle

$$(30) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^d u_i dS$$

sur l'ensemble des champs de vitesses \mathbf{u} cinématiquement admissibles et isochores;

– φ_m^* étant strictement convexe de \underline{g} , on a le principe de minimum sur les contraintes :

le champ de contraintes, solution du problème d'écoulement du système, éventuellement déterminé à un champ de contraintes sphériques près, minimise la fonctionnelle

$$(31) \quad \int_{\Omega} \frac{m}{m+1} \pi'_m(\underline{\sigma}) d\Omega - \sum_i \int_{S_{u_i}} u_i^d T_i dS$$

où

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

sur l'ensemble des champs de contraintes $\underline{\sigma}$, statiquement admissibles.

(⁷) Dans le cas d'un matériau non homogène, ceci signifie que la borne inférieure de m doit être strictement positive.

6.2.2. Pour $m = 0$:

– si la borne inférieure de m pour un matériau de Norton-Hoff non homogène, est nulle sans que m soit jamais égal à zéro, les résultats énoncés au paragraphe précédent demeurent valables;

– si m est identiquement nul dans le système, on a affaire au matériau de von Mises. Les principes de minimum, dans le cas d'un système constitué d'un matériau de von Mises, éventuellement non homogène ($m \equiv 0$, α éventuellement fonction de \mathbf{x}), sont connues :

principe de Markov pour les vitesses;

principe de Hill pour les contraintes;

et l'on sait que l'unicité du champ des vitesses n'est plus assurée, de même que l'unicité du champ des contraintes.

On constate alors que, si dans les principes de minimum énoncés ci-dessus pour $m \neq 0$, on fait tendre m vers zéro en tout point du système,

le principe pour les vitesses donne immédiatement le principe de Markov;

le principe pour les contraintes donne le principe de Hill, car quand $m \downarrow 0$ le premier terme de (31) impose de rechercher le minimum dans l'ensemble $J_2 - \alpha^2 \leq 0$;

l'unicité du champ des vitesses (à un mouvement rigidifiant près), assurée tant que $m \neq 0$, ne l'est plus pour $m = 0$, car φ_m n'est plus alors strictement convexe de \underline{d} ;

l'unicité du champ de contraintes (à un champ de contraintes sphériques près), assurée tant que $m \neq 0$, ne l'est plus pour $m = 0$ car φ_m^* n'est plus alors strictement convexe de \underline{s} .

Le passage est donc, en quelque sorte, continu pour les principes de minimum du cas $m \neq 0$ partout au cas $m \equiv 0$, ce qui justifie à nouveau la définition adoptée pour le matériau dans le cas $m = 0$; la perte d'unicité pour $m = 0$, apparemment brutale, est préparée par le fait que quand $m \downarrow 0$ le caractère strictement convexe de φ_m et φ_m^* est de moins en moins marqué;

– si m est nul dans certaines régions du système sans être identiquement nul, l'interprétation des fonctionnelles à minimiser ne présente pas de difficulté; ces dernières ne sont plus strictement convexes de \underline{d} et de \underline{s} et l'unicité des solutions n'est donc plus assurée dans les zones où $m = 0$

6.3. FORMULATION EN TERMES DE PARAMÈTRES DE CHARGEMENT

Dans le cas d'un système soumis à un processus de chargement à n paramètres, on obtient les résultats suivants :

6.3.1. Théorèmes cinématiques pour $m \neq 0$ ⁽⁸⁾.

LEMME. — Soient $\underline{\sigma}^0$ et \underline{u}^0 des champs de contraintes et de vitesses, solutions du problème d'écoulement pour le système dans ce processus, correspondant aux valeurs \mathbf{Q}^0 et $\dot{\mathbf{q}}^0$ de la charge et de la vitesse de déformation, alors, $\forall \underline{u}$, cinématiquement admissible dans ce processus et isochore, on a par la convexité de Φ_m :

$$(32) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d}) d\Omega - \mathbf{Q}^0 \cdot \dot{\mathbf{q}}(\underline{u}) \geq \int_{\Omega} \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d}^0) d\Omega - \mathbf{Q}^0 \cdot \dot{\mathbf{q}}^0.$$

D'où Φ_m étant strictement convexe pour $m \neq 0$:

THÉORÈME I. — \mathbf{Q} étant donné égal à \mathbf{Q}^d , le champ de vitesses, solution unique (éventuellement à un mouvement rigidifiant près) du problème d'écoulement du système sous la charge \mathbf{Q}^d , minimise la fonctionnelle

$$(33) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d}) d\Omega - \mathbf{Q}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}(\underline{u})$$

sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour le processus et isochores.

THÉORÈME II. — $\dot{\mathbf{q}}$ étant donné égal à $\dot{\mathbf{q}}^d$, le champ de vitesses, solution unique (éventuellement à un mouvement rigidifiant près) du problème d'écoulement du système pour la « vitesse de déformation » $\dot{\mathbf{q}}^d$, minimise la fonctionnelle

$$(34) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{m+1} \pi_m(\underline{d}) d\Omega$$

sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour le processus et isochores, et tels que $\dot{\mathbf{q}}(\underline{u}) = \dot{\mathbf{q}}^d$.

6.3.2. Théorèmes statiques pour $m \neq 0$ ⁽⁹⁾.

LEMME. — Reprenant les notations du lemme du paragraphe 6.3.1, on a par la convexité de Φ_m^* :

$\forall \underline{\sigma}$ statiquement admissible pour le processus :

$$(35) \quad \int_{\Omega} \frac{m}{m+1} \pi'_m(\underline{\sigma}) d\Omega - \mathbf{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^0 \geq \int_{\Omega} \frac{m}{m+1} \pi_m(\underline{\sigma}^0) d\Omega - \mathbf{Q}^0 \cdot \dot{\mathbf{q}}^0.$$

(8) Même remarque qu'au paragraphe 6.2.1.

(9) Même remarque qu'au paragraphe 6.2.1.

D'où φ_m^* étant strictement convexe de \underline{s}

THÉORÈME III. — \mathbf{Q} étant donné égal à \mathbf{Q}^d , le champ de contraintes solution du problème d'écoulement du système sous cette charge, minimise la fonctionnelle

$$(36) \quad \int_{\Omega} \frac{m}{m+1} \pi'_m(\underline{\sigma}) d\Omega$$

sur l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles pour le processus et tels que $\mathbf{Q}(\underline{\sigma}) = \mathbf{Q}^d$.

Il est unique, éventuellement à un champ de contraintes sphériques près.

THÉORÈME IV. — $\dot{\mathbf{q}}$ étant donné égal à $\dot{\mathbf{q}}^d$, le champ de contraintes solution du problème d'écoulement du système pour la « vitesse de déformation » $\dot{\mathbf{q}}^d$, minimise la fonctionnelle

$$(37) \quad \int_{\Omega} \frac{m}{m+1} \pi'_m(\underline{\sigma}) d\Omega - \mathbf{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d$$

sur l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles pour le processus.

Il est unique, éventuellement à un champ de contraintes sphériques près.

6.3.3. Remarques

On rappelle que dans la formulation en termes de paramètres de chargement, les interfaces et les conditions de frottement correspondantes sont traitées en même temps que le matériau constitutif du système. Les énoncés ci-dessus supposent donc que les interfaces obéissent aussi à une loi de Norton; ceci est vérifié en particulier dans le cas de l'interface lisse, de l'interface sans mouvement relatif (interface à adhérence totale), et de tout interface à cission limite donnée.

Les énoncés ci-dessus se simplifient lorsque le système est constitué d'un matériau de Norton-Hoff *homogène en m*, avec des interfaces lisses ou à adhérence totale; le théorème II conduit à la minimisation de

$$(38) \quad P_m(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \pi_m(\underline{d}) d\Omega$$

sous les conditions indiquées pour les vitesses, et le théorème III à la minimisation de

$$(39) \quad P'_m(\sigma) = \int_{\Omega} \pi'_m(\underline{\sigma}) d\Omega$$

sous les conditions indiquées pour les contraintes.

On est donc amené à minimiser l'intégrale de la puissance dissipée par rapport à \mathbf{u} ou par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}$ et les minimums ainsi obtenus représentent la puissance des efforts extérieurs dans la solution d'écoulement, c'est-à-dire :

dans le 1^{er} cas : $\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d$,

dans le 2^e cas : $\mathbf{Q}^d \cdot \mathbf{q}$.

6.3.4. Pour $m = 0$

La discussion pour $m = 0$, devrait distinguer trois points comme au § 6.2.2, en fait nous n'examinerons ici que le cas où $m \equiv 0$, les autres cas se transposant sans difficulté.

Pour $m \equiv 0$, le matériau de Norton-Hoff ayant été identifié au matériau de von Mises, les théorèmes correspondants sont les théorèmes connus de la théorie des charges limites pour le matériau de von Mises.

On remarque que si $m \downarrow 0$, le lemme du paragraphe 6.3.1 donne l'inégalité de la méthode cinématique de détermination des chargements limites [le second membre de (32) est alors nul], pour le matériau de von Mises :

$$\int_{\Omega} \pi_0(\underline{\underline{d}}) d\Omega - \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) \geq 0;$$

le lemme du paragraphe 6.3.2 donne le « théorème du travail maximal », base de la méthode statique de détermination des chargements limites (cf. par exemple [22]) dans le cas du matériau de von Mises (en raison du comportement de $\varphi_m^* = [m/(m+1)] \pi_m'$ quand $m \downarrow 0$); les résultats concernant l'unicité de la solution en vitesses sont conservés tant que $m \neq 0$ et disparaissent pour $m = 0$, de même pour les contraintes, comme indiqué au paragraphe 6.2.2.

Remarque. — Il est possible pour un matériau homogène lorsque m est strictement positif de donner des théorèmes d'existence dans un cadre fonctionnel convenable. Ces théorèmes complètent alors les théorèmes I, II, III et IV.

6.4. APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Dans le cas du matériau de Norton-Hoff homogène en m , le théorème II avec la fonctionnelle (28) où $\pi_m(\underline{\underline{d}})$ a la forme donnée par (23), montre que la méthode d'éléments finis proposée plus haut dans le cas du matériau rigide parfaitement plastique de von Mises sera directement applicable au matériau de Norton-Hoff. Il y a modification de l'exposant dans la

fonctionnelle à minimiser qui devient différentiable dès que $m \neq 0$, en même temps qu'il n'y a plus possibilité de discontinuité de vitesse.

Exemple. — La méthode a été appliquée au problème de la compression, en déformation plane, d'un bloc rectangulaire en matériau de Norton-Hoff homogène, compris entre deux plaques planes. Deux types de condition de frottement entre blocs et plaques ont été étudiés : l'interface lisse et l'interface à adhérence totale.

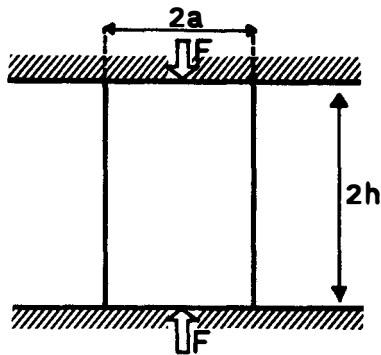


Fig. 9. — Compression d'un bloc entre deux plaques planes.

Fig. 9. — Compression between two rigid plates.

Le problème est rendu sans dimension pour les besoins du calcul numérique :

Désignant par $2U$ la vitesse verticale relative de rapprochement des deux plateaux, on prend les unités suivantes :

vitesse : U ; longueur : h ; coefficient α : α ;
d'où :

vitesse de déformation \underline{d} : U/h ; contraintes $\underline{\sigma}$: $\alpha (U/h)^m$;

puissance dissipée, $\text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{d})$: $\alpha (U/h)^{m+1}$;

force Q : $\alpha U^m/h^{m-1}$ (par unité de longueur transversale); \dot{q} : U ;
 $Q \cdot \dot{q}$: $\alpha U^{m+1}/h^{m-1}$.

Le paramètre de chargement est $Q = F$, intensité de la résultante des forces de pression exercées par chaque plateau, et la vitesse de déformation associée est $\dot{q} = 2U$.

Le problème a été étudié pour $m = 0,17$, valeur moyenne adoptée pour décrire, par la loi de Norton-Hoff, le comportement de l'acier à

chaud. On a examiné diverses géométries définies par $h/a = 1, 2, 3, 4$ et 6 , dans chacun des deux cas de conditions aux limites.

La convergence de la méthode s'est révélée très bonne vis-à-vis des deux critères introduits plus haut, à savoir « intégrale de la divergence » et « divergence maximale sur un élément ».

Dans le cas de l'interface lisse, la solution exacte du problème est immédiate, c'est la déformation uniforme

$$d_{xx} = -\frac{U}{h}, \quad d_{yy} = \frac{U}{h} \quad \text{autres } d_{ij} = 0;$$

$$\sigma_{xx} = -2\alpha\left(\frac{U}{h}\right)^m, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = -\alpha\left(\frac{U}{h}\right)^m \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0;$$

$$Q \cdot \dot{q} = P_m(\mathbf{u}) = 8\left(\frac{h}{a}\right)^{-1} \alpha \frac{U^{m+1}}{h^{m-1}} = 2 \text{ U.F.}$$

Cette solution a été retrouvée numériquement dans chaque cas avec une excellente précision comme le montre le tableau suivant :

h/a	1	2	3	4	6
$P_m(\mathbf{u})/4$ calculé.....	1,99	1,00	0,67	0,50	0,32
$P_m(\mathbf{u})/4$ théorique.....	2,0	1,0	0,666	0,5	0,333

(Avec les unités indiquées plus haut.)

La figure 10 présente, dans le cas $h/a = 3$, le maillage triangulaire et la distribution des vitesses sur le quart de bloc ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h$).

Dans le cas de l'interface à adhérence totale, la solution exacte n'est pas connue.

Par la méthode des éléments finis on a obtenus une solution dans laquelle la puissance dissipée P_m , et donc l'effort d'écrasement, sont évidemment supérieurs à ceux du cas de l'interface lisse; la différence entre les résultats obtenus dans les deux cas étant d'autant moins sensible que h/a est plus grand.

h/a	1	2	3	4	6
$P_m(\mathbf{u})/4$	2,22	1,04	0,69	0,51	0,33

Le tableau I rapporte, pour chacune des géométries étudiées la valeur obtenue pour la composante horizontale de la vitesse aux nœuds du maillage

situés sur la surface libre du bloc. On obtient ainsi le profil de la déformée initiale de la surface libre du bloc. Pour $h/a = 1$ et 2, on a une forme de barillet (fig. 11). Pour $h/a = 3, 4$ et 6 il est remarquable que la déformation de la surface libre n'est sensible que jusqu'à une profondeur de $2a$ à partir

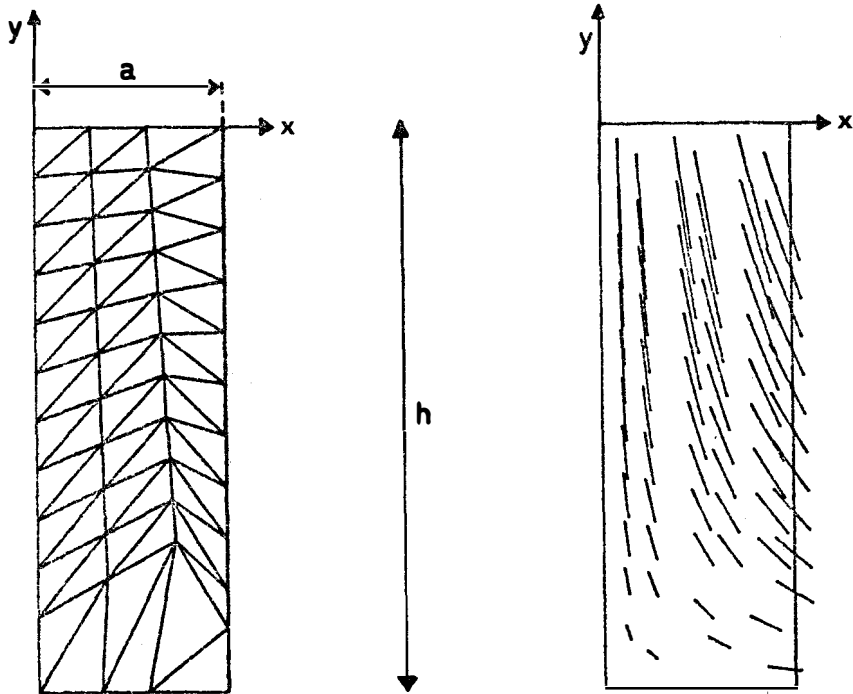


Fig. 10. — $h/a = 3$, interface lisse :
distribution des vitesses (aux centres des éléments).

Fig. 10. — $h/a = 3$, smooth interface:
velocity field for the centers of the elements.

du plateau; la courbure de signe constant, y correspond à une déformation en barillet; dans la partie médiane la vitesse varie peu :

— 6 % de variation pour $h/a = 6$, où sans attacher une trop grande importance à une telle variation, on peut distinguer que, quand on se déplace de l'équateur vers le plateau, la vitesse horizontale, maximale sur l'équateur, décroît puis est longuement stationnaire avant de croître à nouveau vers un maximum relatif à la profondeur $2a$ sous le plateau.

Une telle distribution conduisant à une déformée initiale en forme de léger diabolo double pour le bloc entier (fig. 11);

– vitesse remarquablement constante pour $h/a = 4$, la surface libre demeurant ainsi verticale sur la moitié de la hauteur du bloc (fig. 11);

– pour $h/a = 3$: 1 % de variation de la vitesse qui, partant d'un minimum relatif sur l'équateur, croît pour atteindre son maximum sensiblement à la profondeur $2a$ sous le plateau, d'où une déformée initiale du bloc en très léger « diabolo simple » (fig. 11).

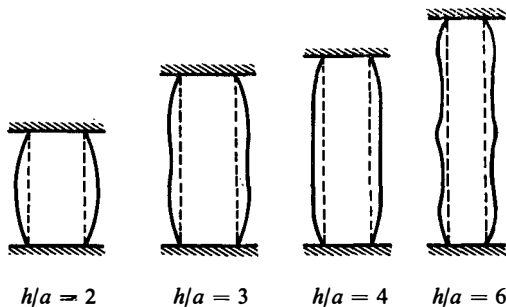


Fig. 11. — Interface à adhérence totale, $m = 0,17$:
allure des déformées initiales du bloc.

Fig. 11. — Sticking interface, $m = 0.17$:
initial deformation of the block (enlarged).

Il pourrait être tentant de rapprocher les résultats concernant les formes de barillet, « diabolo » simple et double, des constatations expérimentales. Bien que la concordance soit bonne, il convient de rester extrêmement prudent car les profils de la figure 11 sont *très exagérés*, l'amplitude de la variation de vitesse horizontale dans la région médiane demeurant toujours très faible ($< 6\%$); de plus les constatations expérimentales correspondent à de grandes déformations et non à la déformée initiale; il y aurait donc lieu de procéder à un calcul itératif pour suivre la déformation du bloc et voir si les tendances initiales se maintiennent.

D'autre part, fixant la géométrie ($h/a = 3$), on s'est intéressé à l'évolution de la solution au fur et à mesure que l'on faisait décroître m vers zéro.

TABLEAU I

$m = 0,17$, interface à adhérence totale : composante horizontale de la vitesse aux nœuds du maillage situés sur la surface libre ($-y/h = 1$, équateur; $-y/h = 0$, plateau).

TABLE I

$m = 0.17$, sticking interface: horizontal component of the velocity at the nodes on the stress free boundary of the block ($-y/h = 1$, equator; $-y/h = 0$, plate).

$a = h$		$a = 2 h$		$a = 3 h$		$a = 4 h$		$a = 6 h$	
$-y/h$	u/U	$-y/h$	u/U	$-y/h$	u/U	$-y/h$	u/U	$-y/h$	u/U
1,0	1,30	1,0	0,687	1,0	0,405	1,0	0,288	1,0	0,177
0,857	1,30	0,923	0,688	0,886	0,405	0,906	0,288	0,958	0,173
0,714	1,25	0,846	0,679	0,818	0,407	0,875	0,288	0,917	0,170
0,571	1,17	0,769	0,663	0,727	0,408	0,813	0,287	0,875	0,167
0,429	1,05	0,692	0,641	0,636	0,408	0,750	0,288	0,833	0,167
0,286	0,90	0,615	0,610	0,545	0,401	0,688	0,288	0,792	0,167
0,143	0,67	0,538	0,571	0,455	0,382	0,625	0,288	0,750	0,167
0,0	0,0	0,462	0,522	0,364	0,346	0,563	0,288	0,708	0,167
		0,385	0,466	0,273	0,294	0,500	0,286	0,667	0,167
		0,308	0,409	0,182	0,232	0,438	0,282	0,625	0,167
		0,231	0,352	0,091	0,166	0,375	0,274	0,583	0,168
		0,154	0,295	0,0	0,0	0,313	0,258	0,542	0,169
		0,077	0,227			0,250	0,232	0,500	0,170
		0,0	0,0			0,188	0,199	0,458	0,171
						0,125	0,161	0,417	0,172
						0,062	0,118	0,375	0,174
						0,0	0,0	0,333	0,174
								0,292	0,173
								0,250	0,169
								0,208	0,160
								0,167	0,145
								0,125	0,125
								0,083	0,099
								0,042	0,067
								0,0	0,0

On sait que pour $m = 0$, matériau de von Mises, la solution exacte est connue :

– champ de contraintes :

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = -2\alpha, \quad \sigma_{zz} = -\alpha, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0;$$

– champ de vitesse non unique, continu ou discontinu : avec les notations de la figure 12 :

$$u_x = U \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pour } X > a\sqrt{2},$$

$$u_y = -U \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pour } Y > a\sqrt{2},$$

$$u_x = f(X) \quad \text{pour } -a\sqrt{2} < X < a\sqrt{2},$$

$$u_y = -g(Y) \quad \text{pour } -a\sqrt{2} < Y < a\sqrt{2},$$

$$u_x = -U \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pour } X < -a\sqrt{2},$$

$$u_y = U \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pour } Y < -a\sqrt{2},$$

où f et g sont des fonctions à variations bornées, non décroissantes, à valeurs comprises entre $-U\sqrt{2}/2$ et $U\sqrt{2}/2$.

La déformée initiale correspondante, pour les solutions symétriques (f impaire et $f = -g$), peut présenter aussi bien la forme en barillet que la forme en diabolo simple (fig. 12).

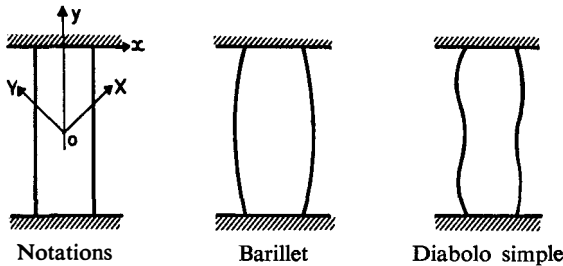


Fig. 12. – $m = 0$, interface à adhérence totale : déformées initiales.

Fig. 12. – $m = 0$, sticking interface: possible initial deformations of the block (enlarged).

La puissance dissipée est égale à celle obtenue dans le cas de l'interface lisse

$$P_0(\mathbf{u}) = Q \cdot \dot{q} = 8 \left(\frac{h}{a} \right)^{-1} \alpha U h = 2,67 \alpha U h.$$

La recherche des solutions a été effectuée numériquement pour $m = 0,0001; 0,001; 0,003; 0,01; 0,05; 0,10; 0,17; 0,30; 0,50$. La convergence de la méthode s'est révélée égale sur toute cette gamme de valeurs.

Les résultats numériques concernant $P_m = Q \cdot \dot{q}$, exprimée en unités ($\alpha U^{m+1}/h^{m-1}$) sont rapportés ci-dessous :

$m \dots \dots$	0,0001	0,001	0,003	0,01	0,05	0,10	0,17	0,30	0,50
$P_m/4 \dots$	0,671	0,671	0,672	0,672	0,677	0,681	0,687	0,693	0,705

Il est à noter que la « convergence » du matériau de Norton-Hoff vers le matériau de von Mises quand $m \downarrow 0$, se manifeste par la convergence de P_m exprimée en unités $\alpha U^{m+1}/h^{m-1}$ vers P_0 exprimée en unités $\alpha U h$ ($P_0/4 = 0,667$).

Le tableau II donne pour chaque valeur de m , le profil de la composante horizontale de la vitesse aux nœuds situés sur la surface libre. L'interprétation de ces résultats se fait comme pour ceux donnés au tableau I

TABLEAU II

$h/a = 3$, interface à adhérence totale : composante horizontale de la vitesse aux nœuds du maillage situés sur la surface libre ($-y/h = 1$, équateur; $-y/h = 0$, plateau).

TABLE II

$h/a = 3$, sticking interface: horizontal component of the velocity at the nodes on the stress free boundary of the block ($-y/h = 1$, equator; $-y/h = 0$, plate).

$-y/h$	u/U pour $m =$								
	0,0001	0,001	0,003	0,01	0,05	0,1	0,17	0,30	0,50
1,0	0,503	0,501	0,498	0,489	0,452	0,427	0,405	0,379	0,372
0,886	0,504	0,502	0,499	0,489	0,452	0,427	0,405	0,383	0,372
0,818	0,501	0,499	0,497	0,487	0,452	0,428	0,407	0,384	0,374
0,727	0,484	0,483	0,481	0,474	0,446	0,427	0,408	0,388	0,377
0,636	0,455	0,454	0,453	0,450	0,434	0,422	0,408	0,391	0,378
0,545	0,411	0,411	0,411	0,412	0,411	0,408	0,401	0,391	0,377
0,455	0,350	0,351	0,352	0,357	0,372	0,380	0,382	0,382	0,371
0,364	0,279	0,279	0,282	0,288	0,315	0,333	0,346	0,360	0,355
0,273	0,206	0,207	0,210	0,217	0,249	0,273	0,294	0,320	0,325
0,182	0,140	0,142	0,144	0,152	0,184	0,209	0,232	0,264	0,278
0,091	0,083	0,084	0,086	0,093	0,122	0,143	0,166	0,195	0,212
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

et on remarque qu'au fur et à mesure que m augmente, la déformation de la surface libre tend à se localiser sous le plateau : la vitesse horizontale sur l'équateur diminue (fig. 13); pour $m = 0,1$ la vitesse horizontale

est pratiquement constante sur une hauteur de a à partir de l'équateur; m croissant on voit ensuite apparaître une légère forme de diablo simple, maximale pour $m = 0,3$ (l'amplitude de la variation de la vitesse ne dépassant d'ailleurs pas 3 %).

Ici encore il serait intéressant du point de vue pratique de procéder à un calcul itératif pour atteindre de grandes déformations : il serait important de dégager si une certaine plage de valeurs de m se révèle critique pour la formation de diablo.

On remarquera enfin que l'indétermination de la solution en vitesse^s (même continue) pour le matériau de von Mises ($m = 0$) n'entraîne apparemment aucune instabilité du schéma de calcul quand $m \downarrow 0$, jusqu'à la valeur 10^{-4} ; les champs de vitesses obtenus pour $m = 3 \cdot 10^{-3}$, $1 \cdot 10^{-3}$ et 10^{-4} diffèrent d'ailleurs fort peu.

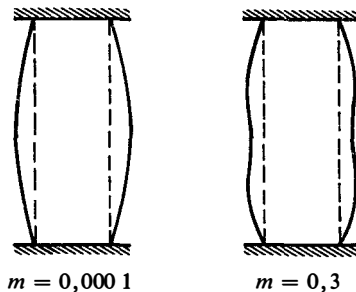


Fig. 13. — $h/a = 3$, interface à adhérence totale :
Allure de la déformée initiale de la surface libre pour $m = 0,000 1$ et $m = 0,3$.

Fig. 13. — $h/a = 3$, sticking interface:
initial deformation of the block for $m = 0.000 1$ and $m = 0.3$ (enlarged).

6.5. APPLICATION AUX PROBLÈMES D'ANALYSE LIMITE POUR LE MATÉRIAU DE VON MISES

La « convergence » du matériau de Norton-Hoff vers le matériau de von Mises quand $m \downarrow 0$ a été mentionnée ci-dessus à plusieurs reprises. Elle incite à croire à une certaine convergence des solutions pour ces deux matériaux, correspondant à un même problème d'écoulement. Cette idée a été appliquée pratiquement sous la forme suivante : le champ de vitesses obtenu par la méthode des éléments finis pour m voisin de 0, est utilisé pour le même problème dans le cas $m = 0$; on procède alors au calcul de P_0 dans ce champ qui peut même servir de point de départ pour une nou-

velle minimisation vis-à-vis du matériau de von Mises. Les discontinuités de vitesse étant exclues tant que $m \neq 0$, les champs peuvent présenter des zones à fort gradient de vitesse.

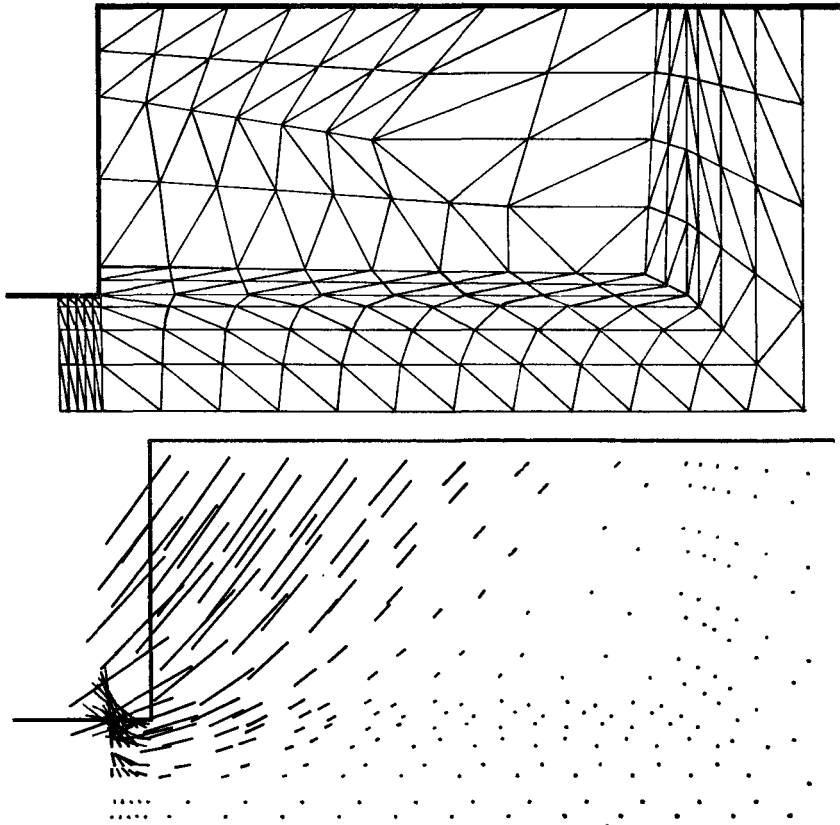


Fig. 14. — Hauteur limite d'une fouille verticale :
maillage et champ de vitesses minimisant pour $m = 0,01$.

Fig. 14. — *Limit height of a vertical cut:
mesh and minimizing velocity field for $m = 0.01$.*

Ceci a été effectué pour le problème de la fouille verticale. Avec les notations indiquées au paragraphe 5.2.1, le problème est rendu sans dimension comme ci-dessus. P_m et $Q \cdot \dot{q}$ sont rapportées à $\alpha U^{m+1}/h^{m-1}$. Le paramètre de charge sans dimension est maintenant $Q = \gamma h/\alpha (U/h)^m$ auquel est associé

$$\dot{q} = \frac{1}{Uh} \left[\int_{A-\infty}^B u_y dx + \int_B^0 u_x \left(\frac{y}{h} \right) dy \right].$$

En imposant $\dot{q} = 1$, la valeur numérique obtenue pour P_m représente la valeur de γh en unité $\alpha (U/h)^m$. P_0 est ensuite calculée sur ce champ de vitesse et représente la valeur de γh en unité k . Les résultats obtenus sont rapportés au tableau ci-dessous :

m	0,1	0,05	0,01
P_m	4,55	4,46	4,37
P_0	6,36	5,30	4,52

On y constate la décroissance de P_m quand $m \downarrow 0$, ainsi que celle de P_0 . Toutefois la valeur obtenue pour P_0 n'approche pas encore les meilleures valeurs obtenues par la méthode directe. On remarquera d'ailleurs sur la figure 14 où est présenté le maillage utilisé, que le champ de vitesses minimisant pour le matériau de Norton-Hoff correspond à un écoulement sous le pied du talus, il n'est donc pas surprenant que le résultat ainsi obtenu pour le matériau de von Mises ne soit pas très bon : les « bonnes » solutions pour le matériau de von Mises dans ce problème correspondent à un champ de vitesses, avec discontinuité, sans écoulement sous le pied. Il est vraisemblable qu'il faudrait dans ce type de problème procéder à une deuxième minimisation avec discontinuité pour le matériau de von Mises à partir de la solution obtenue pour le matériau de Norton-Hoff.

7. Conclusion

Dans cette étude nous avons présenté deux voies d'approche pour la détermination numérique, par la méthode des éléments finis, du convexe des chargements potentiellement supportables d'un système dont les capacités de résistance sont limitées par un critère convexe.

Par la première voie, que l'on peut qualifier de « directe », on s'appuie sur les théorèmes généralisant la théorie des charges limites classiques, obtenues par le principe des travaux virtuels et par la convexité du critère, et on met en œuvre la méthode des éléments finis à partir d'un principe de minimum sur les vitesses. Les formules correspondantes sont données pour les critères de von Mises et de Drucker-Prager, mais la méthode n'a été exploitée que pour le matériau de Tresca ou de von Mises. Des difficultés sont apparues dans le cas de conditions aux limites de type intégrale, où l'on n'a obtenu que des résultats moyens, dans les autres cas les résultats ont été très satisfaisants, améliorant même ceux que l'on pouvait connaître par les procédés plus classiques (cercle de glissement, par exemple). La caractéristique essentielle de cette méthode est qu'elle introduit des lignes de discontinuité du champ de vitesses.

L'étude du principe de minimum pour le problème de l'écoulement du matériau de Norton-Hoff a alors mis en évidence une analogie, permettant d'utiliser sans modification délicate la procédure mise au point pour le matériau de von Mises. La différence essentielle étant la disparition des discontinuités de vitesse liée à la régularité de la fonctionnelle à minimiser. Les résultats obtenus ont été très bons. La « convergence » du matériau de Norton-Hoff vers le matériau de von Mises quand l'exposant m de la loi de comportement tend vers zéro, incite à penser à une certaine « convergence » des solutions du problème d'écoulement pour ces deux matériaux. Cette deuxième voie d'approche, tentée sur le problème de la tenue d'une fouille verticale non coffrée, n'a conduit qu'à des résultats moins bons que ceux de l'approche directe; cela pourrait être dû, à notre sens, au fait que la solution de ce problème pour le matériau de von Mises, comporte nécessairement une discontinuité du champ de vitesses alors que les champs construits pour le matériau de Norton-Hoff sont tous continus.

La méthode présentée pour le matériau de von Mises et le matériau de Norton-Hoff classique pourrait se généraliser pour un matériau de critère convexe quelconque (critère de Drucker-Prager, par exemple) en introduisant le matériau de Norton-Hoff « généralisé » correspondant.

Cette approche n'est pas sans rappeler celle suivie par Mercier ([23], [24]) qui explore le domaine des chargements admissibles pour un système en matériau de von Mises en utilisant, comme « indicateur », le matériau de Bingham, régularisant ainsi le problème de charges limites. Dans le même ordre d'idées, Zienkiewicz et Godbole ([25], [26], [27]) traitent par une même procédure numérique les problèmes d'écoulement du matériau rigide parfaitement plastique et du matériau de Bingham généralisé; dans les cas étudiés – problèmes d'extrusion et de poinçonnement pour le matériau de von Mises – ces auteurs ne signalent aucune influence fâcheuse du fait que les champs de vitesses utilisés sont nécessairement continus.

La voie directe nous semble néanmoins devoir encore être préférée, au moins dans le cas où la solution du problème d'écoulement doit présenter des discontinuités.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MARKOV A. A., *On Variational Principles in the Theory of Plasticity (Prikl. Math. Mekh.*, vol. 11, 1947, p. 339-350).
- [2] HILL R., *A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity (Quart. J. Appl. Math.*, vol. 1, 1948, p. 18-28).

- [3] HILL R., *On the State of Stress in a Plastic Rigid Body at the Yield Point (Phil. Mag., vol. 7, n° 42, 1951, p. 868-875).*
- [4] LYSMER J., *Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics (J. of Soil Mech. and Foundation, Div. A.S.C.E., vol. 96, n° SM 4, juillet 1970, p. 1311-1334).*
- [5] ANDERHEGGEN E. et KNÖPFEL M., *Finite Element Limit Analysis using Linear Programming (Int. J. Solids Structures, vol. 8, 1972, p. 1413-1431).*
- [6] MAIER G., ZAVELANI-ROSSI A. et BENEDETTI D., *A Finite Element Approach to Optimal Design in Plane Stress (Int. J. Num. Meth. Enging., vol. 4, 1972, p. 455-473).*
- [7] FRÉMOND M. et SALENÇON J., *Limit Analysis by Finite Element Method (Proc. Symp. on Plasticity and Soil Mech., Cambridge), septembre 1973, p. 297-309).*
- [8] FRÉMOND M., PECKER A. et SALENÇON J., *Méthodes variationnelles pour le matériau rigide-plastique (Symp. Franco-Polonais « Rhéologie et Mécanique des Sols », Nice, juillet 1974).*
- [9] MOREAU J. J., *Fonctionnelles convexes (Séminaire aux équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1966).*
- [10] SALENÇON J., *Calcul à la rupture et plasticité, Cours D.E.A., E.N.P.C., Paris, 1977.*
- [11] RADENKOVIC D., *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée (C.R. Ac. Sc., Paris, t. 252, série B, 1961, p. 4103-4104).*
- [12] RADENKOVIC D., *Théorie des charges limites (Séminaire Plasticité, École Polytechnique, 1961, J. MANDEL éd., 1962, p. 129-142).*
- [13] DRUCKER D. C., *Coulomb Friction Plasticity and Limit Loads (J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E., vol. 21, n° 1, 1954, p. 71-74).*
- [14] SALENÇON J., *Quelques résultats théoriques concernant la butée d'une paroi sur un coin plastique (Annales I.T.B.T.P., n° 313, série T.M.C. n° 165, janvier 1974, p. 185-194).*
- [15] HEYMAN J., *The Stability of a Vertical Cut (Int. J. Mech. Sc., vol. 15, 1974, p. 845-854).*
- [16] PASTOR J., *Application de l'analyse limite à l'étude de la stabilité des pentes et des talus (Thèse 3° Cycle, Univ. Grenoble, 1976).*
- [17] PASTOR J. et TURGEMAN S., *Mise en œuvre numérique des méthodes de l'analyse limite pour les matériaux de von Mises et de Coulomb standard en déformation plane (Mechanics Research Comm., vol. 3, n° 6, 1976, p. 469-474).*
- [18] NORTON F. H., *The Creep of Steel at High Temperatures, McGraw-Hill, New York, 1929.*
- [19] HOFF N. J., *Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations (Quart. Appl. Math., vol. 12, n° 1, avril 1954, p. 49).*
- [20] MANDEL J., *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables, Éditions Scientifiques de Pologne, Varsovie, 1974.*
- [21] HOFF N. J., *Fluage des métaux (Séminaire Institut Henri-Poincaré, Paris, 1964).*
- [22] MANDEL J., *Mécanique des milieux continus, Gauthier-Villars, Paris, 1966, t. II, ann. XX.*
- [23] MERCIER B., *Une méthode de résolution du problème des charges limites utilisant les fluides de Bingham (C. R. Ac. Sc. Paris, t. 281, série A, 1975, p. 525-527).*
- [24] MERCIER B., *Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de plasticité (Thèse Dr ès Sc., Université Paris-VI, 1977).*

- [25] ZIENKIEWICZ O. C. and GODBOLE P. N., *Viscous Incompressible Flow with Special Reference to Non-Newtonian (Plastic) Fluids (Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, Swansea, 1974, GALLAGHER, OWEN, TAYLOR and ZIENKIEWICZ ed., J. Wiley and Sons, 1975).*
- [26] ZIENKIEWICZ O. C. and GODBOLE P. N., *Flow of Plastic and Visco-Plastic Solids with Special Reference to Extrusion Processes (Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, n° 1, 1974, p. 3-16).*
- [27] ZIENKIEWICZ O. C. and GODBOLE P. N., *A Penalty Approach to Problems of Plastic Flow of Metals with Large Surface Deformations (J. Strain analysis, vol. 10, n° 3, 1975, p. 180-183).*

ERRATUM

Éléments finis en plasticité et visco-plasticité

par

J. M. DELBECQ, M. FRÉMOND, A. PECKER et J. SALENÇON

(*Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 1, n° 3, 1977, p. 267-304)

Le texte de la page 297, au-dessus de la figure 12, est à modifier comme suit :

– champ de vitesse non unique, continu ou discontinu : avec les notations de la figure 12 :

$$\begin{aligned}u_Y &= -U \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{pour } X > (h-a) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\u_X &= -U \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{pour } Y > (h-a) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\u_Y &= f(X) && \text{pour } -(h-a) \frac{\sqrt{2}}{2} < X < (h-a) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\u_X &= g(Y) && \text{pour } -(h-a) \frac{\sqrt{2}}{2} < Y < (h-a) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\u_Y &= U \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{pour } X < -(h-a) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\u_X &= U \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{pour } Y < -(h-a) \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions à variations bornées, à valeurs comprises entre $-U \sqrt{2}/2$ et $U \sqrt{2}/2$ et telles que en tout point du solide on ait $-\partial u_X / \partial Y + \partial u_Y / \partial X \geq 0$ (on peut en particulier prendre f et g fonctions non croissantes de X et de Y).

La déformée initiale correspondante, pour les solutions symétriques (f impaire et $f = g$), peut présenter aussi bien la forme en barillet que la forme en diabolo simple (fig. 12).