



HAL
open science

Développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces sur un corps global de caractéristique $p > 0$

Bertrand Lemaire

► **To cite this version:**

Bertrand Lemaire. Développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces sur un corps global de caractéristique $p > 0$. 2022. hal-04053165

HAL Id: hal-04053165

<https://hal.science/hal-04053165v1>

Preprint submitted on 18 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DÉVELOPPEMENT FIN DE LA CONTRIBUTION
UNIPOTENTE À LA FORMULE DES TRACES SUR UN
CORPS GLOBAL DE CARACTÉRISTIQUE $p > 0$, I**

par

Bertrand Lemaire

Résumé. — Pour un corps commutatif quelconque F et un groupe réductif connexe G défini sur F , on développe une théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink des F -strates unipotentes dans $G(F)$ qui devrait permettre d'attaquer des problèmes ouverts en caractéristique non nulle. En guise d'application, on utilise cette théorie pour établir le développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces sur un corps global F de caractéristique $p > 0$, sans restriction sur p (c'est-à-dire que l'on traite aussi les mauvais p). Les F -strates unipotentes dans $G(F)$ jouent le rôle des orbites géométriques unipotentes dans le travail d'Arthur sur un corps de nombres. La décomposition en termes de produits de distributions locales n'est pas abordée ici ; elle fera l'objet d'un prochain article.

Abstract. — For any field F and any connected reductive group G defined over F , we develop a theory of Kempf-Rousseau-Hesselink unipotent F -strata in $G(F)$ that should allow to attack open problems in nonzero characteristic. As an application, we use this theory to establish the fine expansion of the unipotent contribution to the trace formula over a global field of characteristic $p > 0$, without any restriction on p (that is we also treat the bad p). The unipotent F -strata play the role of the unipotent geometric orbits in Arthur's work over a number field. The expansion in terms of products of local distributions is not discussed here ; it will be the subject of further work.

Table des matières

1. Introduction	3
1.1. Les étapes du développement	3
1.2. « Vrais » unipotents	4
1.3. La théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink	6

Classification mathématique par sujets (2000). — 20G15, 14L24, 20G35, 11F72.

Mots clefs. — instabilité, co-caractère optimal, strate unipotente, formule des traces, contribution unipotente.

Je remercie vivement Jean-Pierre Labesse. C'est lui qui m'a patiemment expliqué la formule des traces et remis dans la voie quand je m'égarais. Sans son aide, ce texte n'aurait probablement jamais vu le jour.

1.4. Sur les propriétés algébriques des F -lames	7
1.5. Induction parabolique	8
1.6. Application à la formule des traces	9
1.7. Sur l'étape suivante (II.2)	11
1.8. Organisation des résultats	11
Partie I : strates unipotentes rationnelles	12
2. La théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink rationnelle	13
2.1. Notations et rappels	13
2.2. Le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford	16
2.3. Le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford rationnel	20
2.4. La variante de Hesselink (cas d'une G -variété pointée)	24
2.5. La stratification de Hesselink	33
2.6. Comparaison avec la stratification géométrique	42
2.7. Le critère de Kirwan-Ness (cas d'un G -module)	47
2.8. Le cas d'un corps topologique	54
2.9. Récapitulatif des hypothèses dans la section 2	59
3. Le cas de la variété unipotente	60
3.1. Les ensembles ${}_F\mathcal{U}$ et \mathcal{U}_F	60
3.2. Morphismes et optimalité	61
3.3. F -lames standard de ${}_F\mathcal{U}$	65
3.4. Du groupe à l'algèbre de Lie	66
3.5. F -strates et orbites géométriques	73
3.6. Induction parabolique des ensembles F -saturés	76
3.7. Induction parabolique des F -strates	82
3.8. Trois exemples en petit F -rang	90
Partie II : développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces	
.....	94
4. La distribution $\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T$	94
4.1. Troncature(s)	94
4.2. Convergence et réécriture de l'intégrale tronquée	96
5. Décomposition suivant les F -strates unipotentes	100
5.1. La stratégie d'Arthur	100
5.2. La variante de Hoffmann	101
5.3. Énoncé des résultats	102
5.4. Les étapes de la démonstration de 5.3.2	104
5.5. Quelques lemmes utiles	107
5.6. Majoration de sommes rationnelles	109
5.7. Estimée d'une intégrale	115
5.8. Démonstration de la proposition 5.3.2	118
5.9. Démonstration de 5.3.4	122
5.10. Action de la conjugaison	123

Partie III : annexes	124
A. Sur la séparabilité non algébrique	124
A.1. Algèbres séparables sur un corps	124
A.2. Descente séparable non algébrique	125
B. Sur la c - F -topologie	126
B.1. La topologie donnée par les co-caractères rationnels	127
B.2. Application aux $G(F)$ -orbites dans $\tilde{G}(F)$	129
C. Des F -strates aux F_S -strates	133
C.1. Les F_S -strates, \mathbb{A} -strates, etc.	133
C.2. Approximation faible	135
C.3. Le cas de la variété unipotente	136
Références	137
Index	138

1. Introduction

1.1. Les étapes du développement. — Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps global F de caractéristique $p > 0$. On a écrit en [LL, 9] le développement géométrique grossier de la formule des traces tordue pour $G(\mathbb{A})$ où \mathbb{A} est l'anneau des adèles de F ; c'est-à-dire la formule des traces pour $(\tilde{G}(\mathbb{A}), \omega)$ où \tilde{G} est un G -espace tordu défini sur F (avec $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$) et ω est un caractère automorphe unitaire de $G(\mathbb{A})$. Ce développement s'exprime en termes des classes de $G(F)$ -conjugaison des paires primitives (\tilde{M}, δ) dans $\tilde{G}(F)$, lesquelles jouent le rôle des classes de ss-conjugaison du cas des corps des nombres. Une telle classe $\mathfrak{o} = [\tilde{M}, \delta]$ étant fixée, pour une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}))$, le développement fin de la contribution

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{\mathbf{Y}_G} k_{\mathfrak{o}}^T(f; x) dx$$

associée à \mathfrak{o} devrait comme dans le cas des corps de nombres comporter deux étapes principales :

- (I) une réduction par descente centrale au centralisateur connexe $G_\delta(\mathbb{A})$ — ou au centralisateur stable, notion qu'il faudra définir si δ est inséparable — de δ dans $G(\mathbb{A})$;
- (II) une description de la contribution unipotente à formule des traces (non tordue) pour $G_\delta(\mathbb{A})$.

On s'intéresse ici à l'étape (II). Plus précisément, on s'intéresse au développement fin de la contribution

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T(f) \quad \text{avec} \quad \tilde{G} = G, \omega = 1, \mathfrak{o} = [M_0, 1].$$

Il s'agit d'adapter le travail d'Arthur [A2] à la caractéristique positive. Rappelons les deux principales étapes de loc. cit. (pour les corps de nombres) :

- (II.1) une décomposition suivant les orbites géométriques unipotentes \mathcal{O} qui possèdent un point F -rationnel ;

(II.2) pour tout ensemble fini S de places de F , une décomposition de la contribution associée à (\mathcal{O}, S) en termes des intégrales orbitales pondérées définies par les orbites géométriques unipotentes \mathcal{O}^M des F -facteurs de Levi M de G qui s'induisent à \mathcal{O} (pour l'application d'induction parabolique des orbites géométriques unipotentes de Lusztig-Spaltenstein [LS]).

La décomposition (II.2) exprime le développement fin de la contribution associée à (\mathcal{O}, S) comme une combinaison linéaire (finie) d'intégrales orbitales pondérées locales. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont définis par récurrence grâce à la finitude du nombre de classes de $G(F_S)$ -conjugaison dans $\mathcal{O}(F_S)$. Ce sont des objets de nature locale-globale du type fonction Zêta de Riemann partielle hors de S , en général très difficiles à calculer.

Dans les années 2015, Hoffmann [Ho] a conjecturé une variante de (II.1) basée sur la forme finale de la décomposition (II.2). Cette variante de Hoffmann a été démontrée par Finis et Lapid [FL] pour des fonctions test bien plus générales que les fonctions lisses à support compact. Au même moment, Chaudouard [C] démontrait la version « algèbre de Lie » de cette variante pour les fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$; où $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. La version « algèbre de Lie » de la variante de Hoffmann pour les corps de fonctions avait été établie précédemment par Chaudouard et Laumon [CL] pour le groupe $G = \text{GL}_n$ et pour une fonction test très simple⁽¹⁾. Observons que la formule de Hoffmann permet dans certains cas particuliers (e.g [HW, CL, C]) de calculer explicitement les coefficients de l'étape (II.2) ; d'où son intérêt.

Nous traitons ici l'analogue de (II.1), précisément la variante de Hoffmann, pour les corps de fonctions. L'analogue de (II.2) sera traité ultérieurement.

Pour (\widetilde{M}, δ) comme dans l'étape (I), le centralisateur schématique de δ peut ne pas être réduit, auquel cas on sort de la théorie des groupes algébriques linéaires de Borel [B]. Il faudra donc ou bien raffiner la descente centrale (I) de manière à se ramener à la contribution unipotente dans un « vrai » groupe algébrique linéaire (quitte à changer le corps de base) ; ou bien modifier le présent travail ainsi que l'analogue de (II.2) de manière à traiter une classe plus large de schémas en groupes sur un corps (e.g. les groupes pseudo-réductifs de Conrad-Gabber-Prasad). L'étape (II.1) traitée ici est de toutes façons un passage obligé.

1.2. « Vrais » unipotents. — Soit \overline{F} une clôture algébrique de F . On note $F^{\text{sép}}$, resp. F^{rad} , la clôture séparable, resp. radicielle, de F dans \overline{F} . Les éléments unipotents de $G(F)$ que l'on considère ici sont tous *vrais*⁽²⁾, c'est-à-dire *F-unipotents* : un vrai unipotent est un élément contenu dans le radical unipotent d'un F -sous-groupe parabolique de G . Observons que si G est F -anisotrope, tout élément de $G(F)$ est

⁽¹⁾La démonstration de Chaudouard [C] est essentiellement calquée sur celle de Chaudouard-Laumon [CL] et donc naturellement généralisable aux corps de fonctions, ce que nous faisons ici pour la version « groupe ». Il est probablement possible d'adapter les techniques de Finis-Lapid [FL] au cas des corps de fonctions mais ce n'est pas l'approche que nous avons choisie.

⁽²⁾Tits les appelle « bons » [Ti] ; pour éviter la confusion avec les « bons p », nous préférons ici les appeler « vrais ».

(F -)primitif au sens de [LL]⁽³⁾ et l'élément neutre est le seul (vrai) unipotent de $G(F)$. Insistons sur cette notion, au cœur de la différence entre la caractéristique $p > 0$ et la caractéristique nulle :

EXEMPLE 1.2.1. — Soit γ un élément primitif de $\mathrm{GL}_p(F)$ d'image $\bar{\gamma}$ dans $\mathrm{PGL}_p(F)$. Le polynôme caractéristique ϕ_γ de γ est irréductible sur F et on distingue deux cas : ou bien ϕ_γ est séparable, auquel cas il a p racines distinctes (dans $F^{\mathrm{sépar}}$) et $\bar{\gamma}$ est (absolument) semi-simple ; ou bien il est inséparable, auquel cas il a une racine de multiplicité p (dans F^{rad}) et $\bar{\gamma}$ est un (vrai) unipotent de $\mathrm{PGL}_p(F^{\mathrm{rad}})$ qui est aussi primitif dans $\mathrm{PGL}_p(F^{\mathrm{sépar}})$. Dans les deux cas, $\bar{\gamma}$ est primitif dans $\mathrm{PGL}_p(F)$ et il est traité dans la formule des traces pour $\mathrm{PGL}_p(\mathbb{A})$ comme un « vrai » élément semi-simple régulier elliptique.

On voit apparaître dans l'exemple 1.2.1 une autre notion clé en caractéristique $p > 0$, géométrique celle-ci, la séparabilité : un élément x de G est dit *séparable* si le morphisme $G \rightarrow \mathrm{Int}_G(x)$, $g \mapsto gxg^{-1}$ est séparable, ou ce qui revient au même, si l'algèbre de Lie du centralisateur réduit⁽⁴⁾ $\{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ de x dans G coïncide avec le centralisateur $\ker(\mathrm{Ad}_x - \mathrm{Id})$ de x dans \mathfrak{g} . On sait que si $p \gg 1$ ⁽⁵⁾, tout élément de G est séparable. Observons que l'élément γ de $\mathrm{GL}_p(F)$ de l'exemple 1.2.1 est séparable si et seulement si son polynôme caractéristique est séparable.

Soit \mathfrak{U} l'ensemble des éléments unipotents de $G = G(\bar{F})$. C'est une sous-variété algébrique fermée de G , définie sur F et G -invariante pour la conjugaison. L'exemple 1.2.1 montre que l'ensemble $\mathfrak{U}(F)$ des points F -rationnels de \mathfrak{U} est en général plus gros que l'ensemble des vrais éléments unipotents de $G(F)$. D'autre part on sait d'après Lusztig [L1] que \mathfrak{U} est une réunion *finie* d'orbites géométriques, i.e. de G -orbites. Si \mathcal{O} est une G -orbite dans \mathfrak{U} qui possède un point F -rationnel et si S est un ensemble fini de places de F , l'ensemble $\mathcal{O}(F_S)$ de ses points F_S -rationnels est une réunion de $G(F_S)$ -orbites ; où $F_S = \prod_{v \in S} F_v$. En caractéristique nulle ces $G(F_S)$ -orbites sont toutes formées de vrais unipotents de $G(F_S)$ et leur réunion est toujours finie : $\mathfrak{U}(F_S)$ est réunion finie de $G(F_S)$ -orbites F_S -unipotentes. En revanche ici, $\mathcal{O}(F_S)$ peut contenir des $G(F_S)$ -orbites qui ne sont pas F_S -unipotentes (cf. 1.2.1) ou un nombre infini de $G(F_S)$ -orbites F_S -unipotentes (e.g. si $G = \mathrm{SL}_2$, $p = 2$ et $S = \{v\}$). Observons que l'infinité du nombre d'orbites rationnelles est étroitement relié à l'inséparabilité des orbites géométriques.

Soit \mathfrak{U}_F l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $G(F)$. Le découpage de \mathfrak{U} en orbites géométriques utilisé par Arthur [A2] est remplacé ici par le découpage de \mathfrak{U}_F en F -strates (voir 1.3, en particulier 1.3.1). Une F -strate est un ensemble $G(F)$ -invariant, donc réunion (éventuellement infinie) de $G(F)$ -orbites. Il n'y a qu'un nombre *fini* de F -strates et deux éléments à l'intérieur d'une même F -strate partagent les mêmes invariants (classe de $G(F)$ -conjugaison d'un co-caractère F -optimal $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\mathrm{opt}}$ et niveau

⁽³⁾ Les éléments primitifs de $G(F)$ sont ceux qui ne sont contenus dans aucun F -sous-groupe parabolique propre de G . Tits les appelle « anisotropes » [Ti].

⁽⁴⁾ C'est-à-dire le centralisateur au sens de Borel [B].

⁽⁵⁾ Précisément si $p > 1$ est *très bon* pour G . Pour les notions de p « bon » et p « très bon » pour G , on renvoie à 3.5.1.

$m_u(\lambda)$) ; d'ailleurs ce sont ces invariants qui définissent les F -strates. Par produit, on découpe aussi l'ensemble $\mathfrak{U}_{F_S} = \prod_{v \in S} \mathfrak{U}_{F_v}$ en F_S -strates. Comme sur F , il n'y qu'un nombre *fini* de F_S -strates mais une F_S -strate peut contenir un nombre infini de $G(F_S)$ -orbites.

1.3. La théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink. — Les résultats contenus dans cette sous-section sont valables pour n'importe quel corps commutatif F . Soit $p \geq 1$ l'exposant caractéristique de F . À tout élément unipotent u de $G = G(\overline{F})$, la théorie de Kempf-Rousseau [**K1**, **R**] associe un co-caractère indivisible λ de G dit *u -optimal* : la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(u)$ existe⁽⁶⁾ et vaut $1 = e_G$ (l'élément neutre de G) ; et $\text{Int}_{t^\lambda}(u)$ tend vers 1 « plus vite » que pour tout autre co-caractère $\lambda' \in \check{X}(G)$. On renvoie à 2.2 pour une définition précise de la notion d'optimalité. Ce co-caractère λ n'est pas unique mais l'ensemble Λ_u^{opt} des co-caractères u -optimaux forme une seule orbite sous l'action du sous-groupe parabolique P_λ de G associé à λ ; en particulier P_λ ne dépend que de u . À tout $\lambda \in \check{X}(G)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(u) = 1$ est associé un *niveau* $m_u(\lambda)$ qui est un entier > 0 . Il vérifie

$$m_{p_u p^{-1}}(\lambda) = m_u(\lambda) \quad \text{pour tout } p \in P_\lambda ;$$

en particulier $m_u(\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_u^{\text{opt}}$.

Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, on a une version rationnelle de cette théorie, qui consiste à ne tester que les co-caractères λ qui sont F -rationnels. On définit de la même manière la notion de (F, u) -optimalité et le sous-ensemble (non vide) $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ de $\check{X}_F(G)$. Comme dans le cas géométrique, l'ensemble $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ forme une seule orbite sous l'action de $P_\lambda(F)$ pour un (i.e. pour tout) $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$; en particulier P_λ est un F -sous-groupe parabolique de G qui ne dépend que de u . De même le niveau $m_u(\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$. On note $\mathbf{\Lambda}_{F,u}$ l'ensemble des co-caractères virtuels (F, u) -optimaux *normalisés* :

$$\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \left\{ m_u(\lambda)^{-1} \lambda \mid \lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \right\}.$$

À la suite de Hesselink [**H2**], on pose

$$(1) \quad \mathscr{Y}_{F,u} = \{u' \in \mathfrak{U}_F \mid \mathbf{\Lambda}_{F,u'} = \mathbf{\Lambda}_{F,u}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,u} = \text{Int}_{G(F)}(\mathscr{Y}_{F,u}).$$

Les ensembles $\mathscr{Y}_{F,u}$, resp. $\mathfrak{Y}_{F,u}$, sont appelés F -lames, resp. F -strates (de \mathfrak{U}_F). Les F -strates sont donc les classes de $G(F)$ -conjugaison de F -lames. Observons que même pour $F = \overline{F}$, une \overline{F} -strate (de $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\overline{F}}$) peut contenir plusieurs orbites géométriques unipotentes (cf. l'exemple [**H1**, 8.5]). Le point clé est que \mathfrak{U}_F est réunion *finie* de F -strates. Pour $u \in \mathfrak{U}_F$ et $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$, la F -lame $\mathscr{Y}_{F,u}$ est $P_\lambda(F)$ -invariante (c'est une conséquence de la $P_\lambda(F)$ -invariance de $\mathbf{\Lambda}_{F,u}$). De plus l'étude des classes de $G(F)$ -conjugaison dans $\mathfrak{Y}_{F,u}$ se ramène à celle des classes de $P_\lambda(F)$ -conjugaison dans $\mathscr{Y}_{F,u}$: l'application naturelle $G(F) \times^{P_\lambda(F)} \mathscr{Y}_{F,u} \rightarrow \mathfrak{Y}_{F,u}$ est bijective.

⁽⁶⁾Au sens où le morphisme de variétés algébriques $\mathbb{G}_m \rightarrow V$, $t \mapsto \text{Int}_{t^\lambda}(u)$ se prolonge (de manière unique) en un morphisme de variétés algébriques $\mathbb{G}_a \rightarrow V$; la limite est par définition la valeur en 0 de ce prolongement.

La théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink se comporte très bien par extension séparable (algébrique ou non) du corps de base. Soit E/F une telle extension, avec $(E^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(E^{\text{sép}})} = F$. Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, on a⁽⁷⁾

$$\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{E,u}.$$

On en déduit les égalités

$$(2) \quad \mathscr{Y}_{F,u} = G(F) \cap \mathscr{Y}_{E,u} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,u} = G(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,u}.$$

Observons que si F est un corps global, le complété F_v de F en une place v est une extension séparable de F (de degré de transcendance infini). On peut dans les égalités (2) remplacer E par F_v ou par F_S pour un sous-ensemble fini S de places de F .

REMARQUE 1.3.1. —

- (i) Si $p = 1$ (i.e. si F est de caractéristique nulle) ou $p > 1$ est *bon* pour G , les \overline{F} -strates de $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\overline{F}}$ sont exactement les orbites géométriques unipotentes. En particulier si $p = 1$, une F -strate de \mathfrak{U}_F n'est autre que l'ensemble $\mathcal{O}(F)$ des points F -rationnels d'une orbite géométrique \mathcal{O} définie sur F et telle que $\mathcal{O}(F) \neq \emptyset$. Cette propriété est encore vraie si $p > 1$ est *très bon* pour G .
- (ii) Si $p > 1$ est « assez petit » (par rapport au rang de G), les égalités (2) sont en général fausses si l'on remplace E par \overline{F} . En effet l'élément $\overline{\gamma}$ de l'exemple 1.2.1 est primitif dans $\text{PGL}_p(F)$ mais il est conjugué dans $\text{PGL}_p(F^{\text{rad}})$ à un élément unipotent régulier de $\text{PGL}_p(F)$; dans ce cas l'orbite géométrique unipotente régulière de PGL_p est une \overline{F} -strate de \mathfrak{U} qui contient la F -strate régulière de \mathfrak{U}_F ainsi que des éléments primitifs de $\text{PGL}_p(F)$.

1.4. Sur les propriétés algébriques des F -lames. — La théorie des F -strates de \mathfrak{U}_F s'insère dans le cadre plus général d'une G -variété (algébrique) affine pointée (V, e_V) définie sur F , avec $e_V \in V(F)$; c'est-à-dire que V est une G -variété affine définie sur F et e_V est un point (F -rationnel) G -invariant de V . Supposons de plus que e_V soit régulier dans V (hypothèse 2.4.20) ; c'est toujours le cas si V est un groupe algébrique linéaire (e.g. $V = G$ ou $V = \mathfrak{g}$). L'ensemble \mathfrak{U}_F correspond au sous-ensemble $\mathcal{N}_F \subset V(F)$ formé des éléments F -*instables* ; c'est-à-dire les $v \in V(F)$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v = e_V$ pour un $\lambda \in \check{X}_F(G)$. Pour $v \in \mathcal{N}_F$, on définit comme plus haut le sous-ensemble $\mathbf{\Lambda}_{F,v} \subset \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$ et la F -lame $\mathscr{Y}_{F,v}$, resp. la F -strate $G(F) \cdot \mathscr{Y}_{F,v}$, de $V(F)$. Pour $F = \overline{F}$, les propriétés des \overline{F} -lames et des \overline{F} -strates de $V = V(\overline{F})$ ont été décrites par Hesselink [H2] ; en particulier ce sont des sous-variétés localement fermées dans V . Pour alléger l'écriture, on supprime l'exposant \overline{F} en indice : pour $v \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_{\overline{F}}$, on pose $\mathbf{\Lambda}_v = \mathbf{\Lambda}_{\overline{F},v}$, $\mathscr{Y}_v = \mathscr{Y}_{\overline{F},v}$, etc.

Revenons à F quelconque. Pour $v \in \mathcal{N}_F$ tel que l'intersection $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$ soit non vide, on a

$$\mathscr{Y}_{F,v} = \mathscr{Y}_v(F) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,v} = \mathcal{N}_F \cap \mathfrak{Y}_v.$$

En revanche si $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v = \emptyset$, la F -lame $\mathscr{Y}_{F,v}$ de \mathcal{N}_F n'a *a priori* aucune structure algébrique raisonnable. Cela nous amène à introduire l'hypothèse suivante :

⁽⁷⁾On renvoie à 2.4 (¶ *Co-caractères « virtuels » et optimalité*) pour la définition de $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$.

(2.6.9) pour tout $v \in \mathcal{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$.

Si F est parfait (e.g. si $p = 1$), cette hypothèse est toujours vérifiée par descente séparable.

Dans le cas où V est un G -module défini sur un corps global F (avec $e_V = 0$), on donne des conditions suffisantes pour que l'hypothèse 2.6.9 soit vérifiée (cf. 2.8.10). Par passage au complété E_w d'une extension séparable finie E de F en une place finie w de E (qui est une extension séparable de F), on se ramène au cas où F est un corps local non archimédien et G est F -déployé. Alors $G \simeq_F \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}} F$ pour un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif de Chevalley-Demazure \mathcal{G} . L'une des conditions est que l'action de G sur V provienne par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire de \mathcal{G} sur le \mathbb{Z} -espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. On prouve alors l'implication

$$\mathcal{N}_F \neq V(F) \Rightarrow \mathcal{N} \neq V.$$

Autrement dit s'il existe un élément de $V(F)$ qui soit F -semi-stable (c'est-à-dire qui ne soit pas F -instable), alors il existe un élément de $V = V(\overline{F})$ qui soit \overline{F} -semi-stable. C'est évidemment toujours vrai si F est une extension finie du corps p -adique \mathbb{Q}_p (par descente séparable). On en déduit le résultat pour $F \simeq \mathbb{F}_q((\varpi))$ par la méthode des corps proches (qui permet de passer de F à une extension finie de \mathbb{Q}_p), grâce au théorème de Seshadri [Se] (qui permet de passer de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ à \overline{F}). Si maintenant $v \in \mathcal{N}_F \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$, le critère de Kirwan-Ness rationnel (2.7.6) assure que l'image de v dans le M_λ -module $V_\lambda(k)$ est (F, M_λ^\perp) -semi-stable ; on renvoie à 2.7 pour les définitions. En supposant que l'action de M_λ sur $V_\lambda(k)$ provienne elle aussi par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire d'un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif \mathcal{M}_λ sur le \mathbb{Z} -espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$, on en déduit comme ci-dessus que le co-caractère virtuel $\frac{1}{k}\lambda$ appartient à $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$.

On applique ensuite ce résultat au cas de l'action de G sur lui-même par conjugaison (par passage à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} qui est un G -module). En conclusion, pour un groupe réductif connexe G défini sur un corps global F , l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée :

$$\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_u \neq \emptyset \quad \text{pour tout } u \in \mathfrak{U}_F.$$

REMARQUE 1.4.1. — Insistons sur l'importance des F -lames dans cette approche.

Prenons le cas de $G = \text{PGL}_2$ en caractéristique 2. Notons u l'image de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $G(F)$. L'ensemble $\mathfrak{Y}_{F,u} = \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$ est l'unique F -strate non triviale de \mathfrak{U}_F . Elle est formée des images dans $G(F)$ des éléments $\gamma \in \text{GL}_2(F)$ tels que $\text{Tr}(\gamma) = 0$ et $\det(\gamma) \in (F^\times)^2$; elle ne peut donc pas être l'ensemble des points F -rationnels d'une variété algébrique définie sur F . En revanche $\mathfrak{Y}_{F,u} = \mathfrak{Y}_u(F)$ est l'ensemble des images dans $G(F)$ des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in F^\times$.

1.5. Induction parabolique. — Sur un corps commutatif algébriquement clos $F = \overline{F}$, Lusztig et Spaltenstein [LS] ont défini une notion d'induction parabolique pour les orbites géométriques unipotentes d'un facteur Levi M de G . Pour un corps global F et une composante de Levi M d'un sous-groupe parabolique P de G , avec M et P définis sur F , on définit comme suit une notion d'induction parabolique pour

les F -strates de \mathfrak{U}_F^M (cf. 3.7) : pour $w \in \mathfrak{U}_F^M$, il existe une *unique* F -strate de \mathfrak{U}_F qui intersecte $\mathscr{Y}_{F,w}^M U_P$ de manière (Zariski-)dense ; on la note $I_{F,P}^G(w)$. Elle ne dépend que de la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,w}^M$ de \mathfrak{U}_F^M : pour tout $w' \in \mathfrak{Y}_{F,w}^M$, on a $I_{F,P}^G(w') = I_{F,P}^G(w)$. Pour cela, on commence par définir $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$ comme étant l'unique \overline{F} -strate de $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\overline{F}}$ qui intersecte $\mathscr{Y}_w^M U_P$ de manière (ouverte) dense ; cela a un sens car les \overline{F} -strates de \mathfrak{U} sont localement fermées dans G et la variété $\mathscr{Y}_w^M U_P$ est irréductible. Ensuite la propriété 2.6.9 pour M assure que l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P) \cap \mathscr{Y}_{F,w}^M U_P(F)$ est dense dans $\mathscr{Y}_w U_P$; en particulier elle est non vide. Alors

$$I_{F,P}^G(w) = \mathfrak{Y}_{F,u} \quad \text{pour un (i.e. pour tout) } u \in \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P) \cap \mathscr{Y}_{F,w}^M U_P(F).$$

L'induction parabolique des F -strates unipotentes vérifie des propriétés analogues à l'induction parabolique des orbites géométriques unipotentes de Lusztig-Spaltenstein (transitivité, etc.) ; en particulier — même si nous n'utiliserons pas cette propriété ici —, elle ne dépend pas vraiment de P : pour tout F -sous-groupe parabolique P' de G de composante de Levi M et tout $w \in \mathfrak{U}_F^M$, on a $I_{F,P'}^G(w) = I_{F,P}^G(w)$.

REMARQUE 1.5.1. —

- (i) Pour $F = \overline{F}$, si $p = 1$ ou $p > 1$ est *bon* pour M et pour G , l'application $I_{F,P}^G$ coïncide avec celle de Lusztig-Spaltenstein **[LS]** (cf. 1.3.1 (i)).
- (ii) Pour F quelconque (non algébriquement clos), si $p = 1$ ou $p > 1$ est *très bon* pour M et pour G , alors pour tout $w \in \mathfrak{U}_F^M$, on a $I_{F,P}^G(w) = \mathcal{O}(F)$ où \mathcal{O} est l'induite parabolique de Lusztig-Spaltenstein de la M -orbite $\mathcal{O}_w^M = \text{Int}_M(w)$ de w (rappelons que $\mathfrak{Y}_{F,w}^M = \mathcal{O}_w^M(F)$, cf. 1.3.1 (i)).

1.6. Application à la formule des traces. — On reprend les notations de **[LL]**. En particulier F est un corps global de caractéristique $p > 1$.

Pour un paramètre $T \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier, soit

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T(f) \quad \text{avec } \mathfrak{o} = [M_0, 1]$$

la contribution unipotente à la formule des traces (non tordue). Elle est donnée par la formule intégrale

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\text{unip}}^T(x) dx, \quad \overline{\mathbf{X}}_G = A_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$

où $k_{\text{unip}}^T(x) = k_{\text{unip}}^T(f; x)$ est le noyau unipotent modifié défini par

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{P, \text{unip}}(\xi x, \xi x)$$

avec

$$K_{P, \text{unip}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathfrak{U}^{M_P}(F)} \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1} \eta u y) du.$$

De plus, la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$ définit un élément de PolExp . Comme le fait Arthur dans **[A2]**, on commence par récrire $\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$ pour $T \in \mathfrak{a}_0$ suffisamment régulier : il

existe une constante $c(f) > 0$ (ne dépendant que du support de f) telle que pour $\mathbf{d}_0(T) \geq c(f)$, on ait⁽⁸⁾

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\text{unip}}(x, x) dx \quad \text{avec} \quad K_{\text{unip}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F} f(x^{-1}\eta y) ;$$

où $F_{P_0}^G(\cdot, T)$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble compact de $\overline{\mathbf{X}}_G$. Cela prouve que l'intégrale est absolument convergente.

Notons $[\mathfrak{U}_F]$ l'ensemble des F -strates de \mathfrak{U}_F . Pour chaque $\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]$, on souhaite approximer l'intégrale (absolument convergente)

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx \quad \text{avec} \quad K_{\mathfrak{Y}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathfrak{Y}} f(x^{-1}\eta y).$$

Pour cela, on commence par définir pour chaque $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ un noyau

$$K_{P, \mathfrak{Y}}(x, y) = \sum_{\substack{\mathfrak{Y}' \in [\mathfrak{U}_F^{M_P}] \\ I_{P, P}^G(\mathfrak{Y}') = \mathfrak{Y}}} \sum_{\eta' \in \mathfrak{Y}'} \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\eta' u y) du .$$

Observons que si la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F n'est l'induite parabolique d'aucune F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_P}$, alors $K_{P, \mathfrak{Y}} = 0$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$k_{\mathfrak{Y}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F) \setminus G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{P, \mathfrak{Y}}(\xi x, \xi x).$$

On a la décomposition

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]} k_{\mathfrak{Y}}^T(x).$$

Le théorème suivant décrit le développement unipotent fin de la formule des traces (cf. 5.3 pour des énoncé précis) :

THÉORÈME 1.6.1. — (i) Si le paramètre $T \in \mathfrak{a}_0$ est assez régulier, on a

$$\sum_{\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]} \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} |k_{\mathfrak{Y}}^T(x)| dx < +\infty .$$

(ii) Pour chaque $\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]$, la fonction

$$T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^T(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathfrak{Y}}^T(x) dx$$

définit un élément de PolExp .

(iii) Pour chaque $\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]$, l'expression $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^T(f)$ est asymptotique à l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx .$$

⁽⁸⁾Observons qu'ici la formule est exacte. L'analogie sur un corps de nombre est une formule intégrale asymptotique (en T).

On a donc l'égalité dans PolExp :

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \sum_{\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]} \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f).$$

Si la F -strate \mathfrak{y} n'est l'induite parabolique d'aucune F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ avec $P \neq G$, alors la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$ ne dépend pas de T et on peut noter $J_{\mathfrak{y}}(f)$ sa valeur constante. Dans ce cas on a

$$J_{\mathfrak{y}}(f) = \int_{\mathbf{X}_G} \left(\sum_{\eta \in \mathfrak{y}} f(x^{-1}\eta x) \right) dx ;$$

l'intégrale est absolument convergente. En particulier pour $\mathfrak{y} = \{1\}$, on a

$$J_{\{1\}}(f) = \text{vol}(\overline{\mathbf{X}}_G) f(1).$$

1.7. Sur l'étape suivante (II.2). — Pour un ensemble fini S de places de F , les F_S -strates serviront à décomposer les distributions $\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$ sur $G(\mathbb{A})$ en produits de distributions locales. On l'a déjà dit, l'une des difficultés nouvelles par rapport au cas des corps de nombres est que pour $u \in \mathfrak{U}_F$, le nombre de $G(F_S)$ -orbites dans la F_S -strate $\mathfrak{y}_{F_S, u}$ peut être infini. Dans l'étape (II.2), il ne suffit donc pas de produire une distribution $G(F_S)$ -invariante à support dans $\mathfrak{y}_{F_S, u}$ pour obtenir une combinaison linéaire de $G(F_S)$ -intégrales orbitales. D'ailleurs ces dernières ne sont pas définies en caractéristique $p > 1$ ⁽⁹⁾. Déjà pour le groupe $G = \text{SL}_2$ en caractéristique 2, la méthode d'Arthur ne fonctionne pas et le résultat final s'exprime différemment : il faut après la régularisation classique appliquer une formule sommatoire de Poisson permettant de récupérer la finitude par un argument global. Nous expliquerons cela dans un prochain travail consacré à l'étape (II.2).

1.8. Organisation des résultats. — L'article est divisé en trois parties. La partie I (sections 2 et 3) contient les principaux résultats de la théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink sur un corps commutatif quelconque. Dans la partie II (sections 4 et 5), on décrit le développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces sur un corps global de caractéristique $p > 1$. La partie III contient des annexes qu'il nous a semblé préférable de séparer du reste du texte.

Dans les sections 2 et 3, l'objectif est de définir les objets et d'établir les résultats qui nous serviront dans les sections 4 et 5 mais aussi de développer la théorie en vue des applications futures (e.g. [Le]). Dans la section 2, on traite d'abord le cas général d'une G -variété affine V munie d'une sous-variété fermée G -invariante non vide \mathcal{Q} , puis on se restreint rapidement au cas d'une G -variété pointée (i.e. $\mathcal{Q} = \{e_V\}$), le cas d'un G -module V (avec $e_V = 0$) étant l'archétype de la théorie. La théorie géométrique (i.e. $F = \overline{F}$) est due à Kempf-Rousseau [K1, R] et Hesselink [H2]. La théorie de l'optimalité dans le cadre rationnel (pour F quelconque) a d'abord été étudiée par Hesselink [H1], puis par de nombreux auteurs (cf. [BHMR, BMRT]). En ce qui

⁽⁹⁾On peut cependant définir une mesure de Radon $G(F_S)$ -invariante sur $\mathfrak{y}_{F_S, u}$ analogue à celle définie par Ranga Rao et Deligne sur la $G(F_S)$ -orbite de u (cf. [Le]).

concerne les F -lames et les F -strates de \mathcal{N}_F pour une G -variété affine pointée (V, e_V) , à notre connaissance rien n'avait été écrit jusqu'à présent dans le cadre rationnel. Notre étude est bien sûr largement inspirée du cas géométrique. Dans la section 3, on traite plus profondément le cas de la variété pointée $(V = G, e_V = 1)$ donnée par l'action par conjugaison de G sur lui-même. L'induction parabolique des F -strates unipotentes est traitée en 3.6 et 3.7. En 3.8, on décrit les F -strates unipotentes des groupes SL_2 , $\mathrm{SU}(2, 1)$ et Sp_4 .

Dans la section 4, on reprend en la raffinant la démonstration de la convergence de la contribution unipotente. Le développement fin est établi dans la section 5. On commence par rappeler la décomposition d'Arthur puis la variante de Hoffmann (sur un corps de nombres). Nos principaux résultats sont énoncés en 5.3 et prouvés dans les sous-sections qui suivent.

L'annexe A contient des rappels sur les F -algèbres séparables non algébriques et la descente des variétés (algébriques) relativement à une extension de corps séparable non algébrique. Dans l'annexe B, on introduit la c - F -topologie de [BHMR] et on prouve que les ensembles \mathcal{O}_\circ de [LL] ont les propriétés voulues pour la c - F -topologie. Dans l'annexe C, pour un corps global F d'exposant caractéristique $p \geq 1$ et un ensemble fini S de places de F , on définit les F_S -lames et les F_S -strates de \mathfrak{U}_{F_S} ; puis on décrit le lien entre une F -lame \mathscr{A} , resp. F -strate \mathfrak{B} , de \mathfrak{U}_F et la F_S -lame \mathscr{A}_{F_S} , resp. F_S -strate \mathfrak{B}_{F_S} , de \mathfrak{U}_{F_S} qui lui est naturellement associée pour le plongement diagonal de \mathfrak{U}_F dans \mathfrak{U}_{F_S} ⁽¹⁰⁾.

L'index figurant après les références bibliographiques renvoie principalement aux notations introduites dans les sections 2 et 3. Pour celles utilisées dans les sections 4 et 5, on renvoie à (l'index de) [LL].

PARTIE I : STRATES UNIPOTENTES RATIONNELLES

Dans toute cette partie, F est un corps commutatif quelconque — sauf mention expresse du contraire (e.g. en 2.8) — et G est un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur F . On note p l'exposant caractéristique de F : $p = 1$ si F est de caractéristique nulle et $p > 1$ est la caractéristique de F sinon. On note e_G , ou simplement 1, l'élément neutre de G .

⁽¹⁰⁾Observons que si F est un corps de fonctions, l'inclusion $\mathrm{Int}_{G(F_S)}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_{F_S}$ peut être stricte. En revanche c'est toujours une égalité si F est un corps de nombres, ce qui n'est autre que le lemme 7.1 de [A2]. C'est en essayant de prouver ce lemme d'Arthur dans le cas des corps de fonctions que nous avons été amenés à remplacer l'argument utilisant les \mathfrak{sl}_2 -triplet de Jacobson-Morosov par un argument analogue utilisant les co-caractères optimaux de la théorie de Kempf-Rousseau. Cela nous a conduits à abandonner le point de vue des orbites géométriques unipotentes et à les remplacer par les strates unipotentes rationnelles.

2. La théorie de Kempf-Rousseau-Hesselink rationnelle

2.1. Notations et rappels. — Soient \overline{F} une clôture algébrique de F et $F^{\text{sép}}$, resp. F^{rad} , la clôture séparable, resp. radicielle, de F dans \overline{F} . On note Γ_F le groupe de Galois $\text{Aut}_F(\overline{F})$. Le corps des points fixes de Γ_F est F^{rad} et le morphisme de restriction $\gamma \mapsto \gamma|_{F^{\text{sép}}}$ est un isomorphisme de Γ_F sur $\text{Aut}_F(F^{\text{sép}})$.

On appelle *variété algébrique*, ou plus simplement *variété*, une \overline{F} -variété algébrique, c'est-à-dire un \overline{F} -schéma de type fini, réduit et séparé. On ne demande pas qu'elle soit irréductible. Comme il est d'usage, on identifie une variété à l'ensemble de ses points \overline{F} -rationnels⁽¹¹⁾. On appelle F -variété une *variété définie sur F* au sens de Borel [B], c'est-à-dire un F -schéma de type fini, géométriquement réduit et séparé. Un F -morphisme ou *morphisme défini sur F* (entre F -variétés) est simplement un morphisme de F -schémas. Si X est une sous-variété fermée — pas forcément définie sur F , ni même sur F^{rad} — d'une F -variété V , on pose

$$X(F) = X \cap V(F).$$

Observons que l'on peut avoir $X(F) = \emptyset$ même si $F = F^{\text{sép}}$. En revanche si la variété X est définie sur F , puisque $X(F^{\text{sép}})$ est dense dans $X = X(\overline{F})$ [B, ch. AG, 13.3], on a toujours $X(F^{\text{sép}}) \neq \emptyset$.

Si V est une F -variété, une sous-variété F -fermée de V au sens de Borel [B, ch. AG, 12.2] « est » un sous- F -schéma fermé réduit (mais pas forcément géométriquement réduit) du F -schéma V . Si V est une F -variété affine, une sous-variété F -fermée, resp. fermée et définie sur F , de V correspond à un idéal I de l'algèbre affine $F[V]$ de V tel que le quotient $F[V]/I$ soit *réduit* (i.e. sans éléments nilpotents $\neq 0$), resp. tel que $\overline{F} \otimes_F F[V]/I$ soit réduit (cf. [B, ch. AG, 12.1])⁽¹²⁾.

À un groupe algébrique linéaire H défini sur F correspond un F -schéma en groupes affine lisse dont l'algèbre affine est l'algèbre affine de H , notée $F[H]$. Le produit, resp. l'inverse, dans le groupe algébrique H ou dans le F -schéma en groupes H est donné par le même homomorphisme de $F[H]$ dans $F[H] \otimes_F F[H]$, resp. $F[H]$. Un F -sous-groupe fermé de H , i.e. un sous-groupe fermé de H défini sur F , correspond à un sous- F -schéma en groupes fermé lisse.

¶ *Descente séparable (algébrique).* — Si V est une F -variété, le groupe de Galois Γ_F opère sur l'ensemble $V(F^{\text{sép}})$ de ses points $F^{\text{sép}}$ -rationnels. Rappelons le « critère galoisien » (cf. [B, ch. AG, 14.4]) :

PROPOSITION 2.1.1. — *Soit V une F -variété et soit X une sous-variété fermée de V . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

⁽¹¹⁾ Ainsi on écrira « élément $v \in V$ », resp. « sous-ensemble $Z \subset V$ », pour « élément $v \in V(\overline{F})$ », resp. « sous-ensemble $Z \subset V(\overline{F})$ ».

⁽¹²⁾ Les notions de F -variété et de sous-variété F -fermée ont été supplantées depuis les années 60 par celle, plus souple, de F -schéma. Nul doute que pour traiter les questions fines liées à l'inséparabilité, le langage des schémas et la topologie plate sont indispensables. Le langage « daté » du livre de Borel [B] permet néanmoins de développer une théorie rapide et efficace des groupes algébriques linéaires sur un corps commutatif, largement suffisante pour cet article. C'est pourquoi, concernant cette théorie, nous avons adopté [B] comme référence principale.

- (i) X est définie sur F ;
- (ii) X est définie sur $F^{\text{sé}}p$ et $X(F^{\text{sé}}p)$ est Γ_F -stable ;
- (iii) il existe un sous-ensemble Γ_F -stable de $X(F^{\text{sé}}p) = X \cap V(F^{\text{sé}}p)$ qui soit Zariski-dense dans $X = X(\overline{F})$.

En particulier pour qu'une sous-variété fermée X d'une F -variété V soit définie sur F^{rad} — i.e. « soit » une sous-variété F -fermée de V (cf. [B, ch. AG, 12.2]) —, il faut et il suffit qu'elle soit Γ_F -stable (au sens où l'ensemble $X = X(\overline{F})$ est Γ_F -stable).

D'autre part si V et W sont deux F -variétés, pour qu'un morphisme de variétés $f : V \rightarrow W$ soit défini sur F , il faut et il suffit qu'il soit défini sur $F^{\text{sé}}p$ et qu'il induise une application Γ_F -équivariante $V(F^{\text{sé}}p) \rightarrow W(F^{\text{sé}}p)$ (cf. [B, ch. AG, 14.3]). En d'autres termes, une F -variété V est déterminée (à F -isomorphisme unique près) par la $F^{\text{sé}}p$ -variété $V_{F^{\text{sé}}p} = V \times_F F^{\text{sé}}p$ et l'action de Γ_F sur $V(F^{\text{sé}}p)$: le foncteur

$$(1) \quad V \mapsto (V_{F^{\text{sé}}p}, \Gamma_F\text{-ensemble } V(F^{\text{sé}}p))$$

est pleinement fidèle⁽¹³⁾.

¶ *Orbites séparables.* — Soit H un groupe algébrique affine et soit V une variété non vide, *a priori* ni affine, ni lisse, munie d'une action algébrique de H (à gauche)

$$H \times V \rightarrow V, \quad (h, v) \mapsto h \cdot v.$$

On suppose que cette action est définie sur F , c'est-à-dire que H , V et le morphisme ci-dessus sont définis sur F . Pour $v \in V$, d'après [B, ch. I, 1.8] l'orbite

$$H \cdot v = \{h \cdot v \mid h \in H\} \subset V$$

est une variété lisse, localement fermée dans V ; on la notera parfois \mathcal{O}_v^H ou simplement \mathcal{O}_v si aucune confusion n'est possible. Le stabilisateur schématique de v dans le \overline{F} -schéma en groupes $H_{\overline{F}} = H \times_F \overline{F}$ est noté $H_{\overline{F}}^v$; c'est un sous- \overline{F} -schéma en groupes fermé de $H_{\overline{F}}$ (qui peut ne pas être lisse, i.e. réduit). Le groupe $H_{\overline{F}}^v(\overline{F})$ de ses points \overline{F} -rationnels est le stabilisateur de v dans $H = H(\overline{F})$ au sens de Borel [B, ch. I, 1.7], c'est-à-dire le sous-groupe fermé

$$\text{Stab}_H(v) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{h \in H \mid h \cdot v = v\} \subset H.$$

En d'autres termes, $\text{Stab}_H(v)$ est le stabilisateur schématique *réduit* $(H_{\overline{F}}^v)^{\text{rd}}$ de v dans $H_{\overline{F}}$ (correspondant au quotient de l'algèbre affine $\overline{F}[H_{\overline{F}}^v]$ par son nilradical).

REMARQUE 2.1.2. — Pour $v \in V(F)$, la sous-variété fermée \mathcal{O}_v de V est définie sur F et le sous-groupe fermé $\text{Stab}_H(v)$ de H est F -fermé. Le stabilisateur schématique $H_{\overline{F}}^v$ provient par le changement de base $F \rightarrow \overline{F}$ d'un sous- F -schéma en groupes fermé H^v de H , à savoir le stabilisateur schématique de v dans (le F -schéma en groupes) H : on a $H_{\overline{F}}^v = H^v \times_F \overline{F}$. Le sous-groupe F -fermé $\text{Stab}_H(v)$ de H coïncide — en tant

⁽¹³⁾La description de l'image du foncteur (1) est plus difficile. Il s'agit de déterminer si une $F^{\text{sé}}p$ -variété \tilde{V} est définie sur F , autrement dit s'il existe une F -variété V et un $F^{\text{sé}}p$ -isomorphisme $\varphi : \tilde{V} \rightarrow V_{F^{\text{sé}}p}$; on dit alors que le couple (V, φ) est un F -modèle de \tilde{V} . Une condition nécessaire pour l'existence d'un tel couple (V, φ) est l'existence d'une donnée de descente à la Weil pour \tilde{V} . Cette condition est souvent suffisante (e.g. si \tilde{V} est quasi-projective).

que sous- F -schéma en groupe fermé réduit de H — avec le stabilisateur schématique réduit $(H^v)^{\text{réd}}$ de v dans H (correspondant au quotient de l'algèbre affine $F[H^v]$ par son nilradical).

Pour $v \in V$, le morphisme de variétés

$$\pi_v : H \rightarrow \mathcal{O}_v, h \mapsto h \cdot v$$

se factorise en un morphisme bijectif de variétés

$$\bar{\pi}_v : H/\text{Stab}_H(v) \rightarrow \mathcal{O}_v$$

qui n'est en général pas un isomorphisme. Notons $T_v(\mathcal{O}_v)$ l'espace tangent de \mathcal{O}_v au point v et $d(\pi_v)_1 : \text{Lie}(H) \rightarrow T_v(\mathcal{O}_v)$ la différentielle de π_v au point 1. Alors on a les inclusions

$$\text{Lie}(\text{Stab}_H(v)) \subset \ker(d(\pi_v)_1) \quad \text{et} \quad d(\pi_v)_1(\text{Lie}(H)) \subset T_v(\mathcal{O}_v).$$

D'après [B, ch. AG, 10.1], on a toujours l'égalité

$$\dim(H) = \dim(\text{Stab}_H(v)) + \dim(\mathcal{O}_v).$$

On en déduit le lemme suivant [B, ch. II, 6.7] :

LEMME 2.1.3. — *Pour $v \in V$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\bar{\pi}_v$ est un isomorphisme de variétés, i.e. la H -orbite \mathcal{O}_v est « le » quotient géométrique de H par $\text{Stab}_H(v)$;
- (ii) π_v est un morphisme séparable ;
- (iii) $\text{Lie}(\text{Stab}_H(v)) = \ker(d(\pi_v)_1)$;
- (iv) $\text{Im}(d(\pi_v)_1) = T_v(\mathcal{O}_v)$;
- (v) le stabilisateur schématique $H_{\mathbb{F}}^v$ est lisse (i.e. réduit), autrement dit il coïncide avec $\text{Stab}_H(v)$.

Pour $v \in V$, on dira que la H -orbite \mathcal{O}_v est *séparable* si les conditions équivalentes du lemme 2.1.3 sont vérifiées (ces conditions ne dépendent que de l'orbite \mathcal{O}_v et pas du point-base v dans cette orbite). Si $p = 1$, toutes les orbites sont séparables.

Par abus de langage, lorsque V est le groupe H lui-même muni de l'action par conjugaison, on dira aussi qu'un élément $x \in H$ est séparable⁽¹⁴⁾ si sa H -orbite \mathcal{O}_x est séparable. Par exemple si $x \in H$ est semi-simple, alors il est séparable ; et si de plus $x \in H(F)$, alors $\text{Stab}_H(x)$ est défini sur F (cf. [B, ch. III, 9.1]), autrement dit le centralisateur schématique H^x de x dans H est lisse (i.e. géométriquement réduit).

¶ *Conventions topologiques.* — Tout sous-ensemble X d'une variété V est muni de la topologie de Zariski induite par celle de V . Sauf mention expresse du contraire, les notions d'ouvert, de fermé, de densité (etc.) se réfèrent à la topologie de Zariski. Pour un sous-ensemble X de V , la fermeture (de Zariski) de X dans V est notée \bar{X} . Si X est une partie d'une F -variété V (i.e. $X \subset V(\bar{F})$), la F -fermeture de X dans

⁽¹⁴⁾À ne pas confondre avec un élément de $H(F^{\text{sép}})$!

V au sens [B, ch. AG, §12] est notée $\overline{X}^{(F)}$; c'est le plus petit sous- F -schéma fermé réduit de V contenant $X^{(15)}$.

Si V est une G -variété affine définie sur F (cf. 2.2), on peut la munir de la c - F - G -topologie, ou simplement c - F -topologie (sous-entendu pour la F -action de G sur V), définie par l'action de l'ensemble $\check{X}_F(G)$ des co-caractères algébriques de G qui sont définis sur F (cf. l'annexe B). La c - F -fermeture d'une partie X de V est notée $\overline{X}^{(c-F)}$. La c - F -topologie sur V ne nécessite aucune topologie sur F (mais bien sûr elle dépend de la F -action de G sur V) : elle a un sens pour tout corps commutatif F .

Si F est un corps commutatif topologique (séparé, non discret) et V est une F -variété, on peut munir l'ensemble $V(F)$ des points F -rationnels de V de la topologie (forte) définie par F , cf. 2.8. Nous la noterons Top_F . Par exemple si F est un corps global et v est une place de F , le complété $\widehat{F} = F_v$ de F en v est un corps topologique localement compact (non archimédien si v est finie) ; pour toute F -variété V , l'ensemble $V(F)$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -dense dans $V(\widehat{F})$.

Ces topologies — Zariski et c - F -topologie pour un corps (commutatif) quelconque ; Top_F pour un corps topologique — sont les seules que nous utiliserons dans cet article.

2.2. Le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford. — Dans cette sous-section, on introduit le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford puis on rappelle le théorème de Kempf-Rousseau géométrique (2.2.5), c'est-à-dire sur $F = \overline{F}^{(16)}$, ainsi qu'une version rationnelle de ce dernier dans le cas où F est parfait (2.2.9).

Soit V une G -variété affine, c'est-à-dire une variété algébrique affine munie d'une action algébrique à gauche $G \times V \rightarrow V$, $(g, v) \mapsto g \cdot v$. Rappelons qu'un *co-caractère* (algébrique) de G est un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}_m \rightarrow G$. On note $\check{X}(G)$ l'ensemble des co-caractères de G .

DÉFINITION 2.2.1. — Un élément $\lambda \in \check{X}(G)$ est dit *primitif* ou *indivisible* s'il n'existe aucun $\lambda' \in \check{X}(G)$ tel que $\lambda = k\lambda'$ avec $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Observons que $\check{X}(G)$ est un groupe si G est commutatif et que c'est un \mathbb{Z} -module libre de rang fini si G est un tore. L'ensemble $\check{X}(G)$ est muni d'une action de G donnée par

$$g \bullet \lambda = \text{Int}_g \circ \lambda \quad \text{pour tout } (g, \lambda) \in G \times \check{X}(G).$$

⁽¹⁵⁾Rappelons que nous identifions une sous-variété F -fermée de V au sens de loc. cit. à un sous- F -schéma fermé réduit de V (cf. 2.1).

⁽¹⁶⁾Nous avons choisi de rappeler brièvement la théorie géométrique plutôt que démarrer d'emblée par la théorie rationnelle, ce qui est discutable puisque la seconde ne se déduit en général pas de la première. D'un autre côté la théorie rationnelle peut être vue comme une variante de la théorie géométrique, qui consiste à ne tester que les co-caractères qui sont définis sur F ou, ce qui revient au même, sur $F^{\text{sép}}$. Le lecteur familier avec la théorie géométrique peut directement commencer la lecture par la sous-section 2.3.

Pour $(v, \lambda) \in V \times \check{X}(G)$, on note $\phi_{v,\lambda} : \mathbb{G}_m \rightarrow V$ le morphisme de variétés $t \mapsto t^\lambda \cdot v$ ⁽¹⁷⁾. On note Λ_v l'ensemble des $\lambda \in \check{X}(G)$ tels que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v$ existe, au sens où $\phi_{v,\lambda}$ se prolonge en un morphisme de variétés $\phi_{v,\lambda}^+ : \mathbb{G}_a \rightarrow V$. Ce prolongement est alors unique et l'on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v = \phi_{v,\lambda}^+(0).$$

Observons que

$$\Lambda_{g \cdot v} = g \bullet \Lambda_v \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Pour $v \in V$, la fermeture de Zariski $\overline{\mathcal{O}_v}$ de la G -orbite $\mathcal{O}_v = G \cdot v$ contient une unique G -orbite fermée que l'on note \mathcal{F}_v . Le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford dit qu'il existe un co-caractère $\lambda \in \Lambda_v$ tel que la limite $\phi_{\lambda,v}^+(0)$ appartienne à \mathcal{F}_v . Puisque pour tout $\lambda \in \Lambda_v$, la limite $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ appartient à $\overline{\mathcal{O}_v}$, on a en particulier : l'orbite \mathcal{O}_v est fermée (dans V) si et seulement si $\phi_{v,\lambda}^+(0) \in \mathcal{O}_v$ pour tout $\lambda \in \Lambda_v$.

¶ *Définition « dynamique » des sous-groupes paraboliques.* — À tout co-caractère $\lambda \in \check{X}(G)$ est associé comme suit un sous-groupe parabolique P_λ de G muni d'une décomposition de Levi $P_\lambda = M_\lambda \ltimes U_\lambda$:

$$P_\lambda = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(g) \text{ existe}\},$$

$$U_\lambda = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(g) = 1\},$$

$$M_\lambda = \{g \in G \mid \text{Int}_g \circ \lambda = \lambda\}.$$

On a un morphisme surjectif naturel $P_\lambda \rightarrow M_\lambda$ donné par $g \mapsto \phi_{v,\lambda}^+(0)$. Enfin on sait que pour tout sous-groupe parabolique P de G et toute composante de Levi M de P , il existe un $\lambda \in \check{X}(G)$ tel que $P = P_\lambda$ et $M = M_\lambda$ (voir B.2.2 pour la preuve d'une variante plus générale de ce résultat).

¶ *Le théorème de Kempf-Rousseau.* Le théorème de Kempf-Rousseau (voir 2.2.5) est une version renforcée du critère de Hilbert-Mumford.

Soit \mathcal{Q} une sous-variété fermée G -invariante⁽¹⁸⁾ non vide de V . Pour $v \in V$ et $\lambda \in \Lambda_v$, on définit comme suit un invariant $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si $v \in \mathcal{Q}$, c'est-à-dire si la G -orbite \mathcal{O}_v est contenue dans \mathcal{Q} , on pose $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) = +\infty$. Si $v \notin \mathcal{Q}$, la fibre schématique $(\phi_{v,\lambda}^+)^{-1}(\mathcal{Q})$ est un sous- \mathbb{G}_m -schéma fermé de \mathbb{G}_a , où \mathbb{G}_m opère sur \mathbb{G}_a par multiplication. C'est donc un diviseur (effectif) de support $t = 0$ et on note $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) \in \mathbb{N}$ son degré. En résumé on a :

- $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) = 0$ si et seulement si $\phi_{v,\lambda}^+(0) \notin \mathcal{Q}$;
- $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $v \notin \mathcal{Q}$ et $\phi_{v,\lambda}^+(0) \in \mathcal{Q}$;
- $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) = +\infty$ si et seulement si $v \in \mathcal{Q}$.

⁽¹⁷⁾L'ensemble $\check{X}(G)$ n'est en général pas un groupe mais on le note néanmoins additivement : pour $\lambda, \lambda' \in \check{X}(G)$, l'application $t \mapsto t^\lambda t^{\lambda'}$ n'est *a priori* pas un élément de $\check{X}(G)$; c'en est un si les co-caractères λ et λ' commutent entre eux, auquel cas on le note $\lambda + \lambda'$. Ainsi pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \check{X}(G)$, on note $n\lambda$ l'élément $t \mapsto (t^\lambda)^n$ de $\check{X}(G)$. Enfin on note « 0 » le co-caractère trivial $t \mapsto 1 (= e_G)$.

⁽¹⁸⁾Au sens où $G \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$. Plus généralement, sauf mention expresse du contraire, nous utiliserons le terme « invariant » pour « globalement invariant ».

Observons que

$$m_{\Omega, g \cdot v}(g \bullet \lambda) = m_{\Omega, v}(\lambda) \quad \text{pour tout } g \in G.$$

LEMME 2.2.2 ([K1]). — Pour $v \in V$, $\lambda \in \Lambda_v$ et $p \in P_\lambda$, on a

$$\lambda \in \Lambda_{p \cdot v} \quad \text{et} \quad m_{\Omega, p \cdot v}(\lambda) = m_{\Omega, v}(\lambda).$$

Fixons une *norme* G -invariante sur $\check{X}(G)$, i.e. une application $\|\cdot\| : \check{X}(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\|g \cdot \lambda\| = \|\lambda\|$ pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in \check{X}(G)$;
- pour tout tore maximal T de G , il existe une forme bilinéaire symétrique définie positive $(\cdot, \cdot) : \check{X}(T) \times \check{X}(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $(\lambda, \lambda)^{\frac{1}{2}} = \|\lambda\|$ pour tout $\lambda \in \check{X}(T)$.

L'existence d'une telle norme est une conséquence de la propriété de conjugaison dans $G = G(\bar{F})$ des tores maximaux de G . Il suffit en effet de fixer un tore maximal T_0 de G et une forme bilinéaire symétrique définie positive $(\cdot, \cdot) : \check{X}(T_0) \times \check{X}(T_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui soit invariante sous l'action du groupe de Weyl $W^G(T_0)$. La norme $W^G(T_0)$ -invariante sur $\check{X}(T_0)$ définie par $\|\lambda\| = (\lambda, \lambda)^{\frac{1}{2}}$ se prolonge (de manière unique) en une norme G -invariante sur $\check{X}(G)$.

REMARQUE 2.2.3. — Soit $X(T_0)$ le groupe des caractères algébriques de T_0 , naturellement identifié à $\text{Hom}(\check{X}(T_0), \mathbb{Z})$. Observons que la forme bilinéaire symétrique définie positive $W^G(T_0)$ -invariante sur $\check{X}(T_0)$ ne permet en général pas d'identifier $X(T_0)$ à $\check{X}(T_0)$. Elle permet en revanche toujours d'identifier $\check{X}(T_0)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à $X(T_0)_{\mathbb{Q}} = \text{Hom}(\check{X}(T_0), \mathbb{Q})$.

Pour $v \in V$ et $\lambda \in \Lambda_v$, on pose

$$\rho_{\Omega, v}(\lambda) = \frac{m_{\Omega, v}(\lambda)}{\|\lambda\|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Observons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho_{\Omega, v}(k\lambda) = \rho_{\Omega, v}(\lambda)$. On définit comme suit un sous-ensemble de co-caractères (Ω, v) -optimaux (relativement à l'action de G sur V)

$$\Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}} \subset \Lambda_v.$$

Si $v \in \Omega$, on pose $\Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}} = \{0\}$; sinon, on note $\Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}}$ l'ensemble des $\lambda \in \Lambda_v \setminus \{0\}$ qui sont primitifs et tels que $\phi_{\lambda, v}^+(0) \in \Omega$ avec $\rho_{\Omega, v}(\lambda) \geq \rho_{\Omega, v}(\lambda')$ pour tout $\lambda' \in \Lambda_v$. Observons que si $\lambda \in \Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}}$ alors $\rho_{\Omega, v}(\lambda) > 0$. On a

$$\Lambda_{\Omega, g \cdot v}^{\text{opt}} = g \bullet \Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}} \quad \text{pour tout } g \in G.$$

REMARQUE 2.2.4. — *A priori* la notion d'optimalité dépend du choix de la norme G -invariante sur $\check{X}(G)$.

THÉORÈME 2.2.5 ([K1], voir aussi [R, K2]). — Soit $v \in V$ tel que $\overline{\Theta_v} \cap \Omega \neq \emptyset$.

- (i) L'ensemble $\Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}}$ est non vide.
- (ii) Le sous-groupe parabolique P_λ ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_{\Omega, v}^{\text{opt}}$; on le note $P_{\Omega, v}$.

- (iii) Le radical unipotent $U_{\mathcal{Q},v}$ de $P_{\mathcal{Q},v}$ opère simplement transitivement sur $\Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$. En d'autres termes, pour toute composante de Levi M de $P_{\mathcal{Q},v}$, il existe un unique $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$ tel que $M_\lambda = M$.
- (iv) L'invariant $m_{\mathcal{Q},v}(\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$; on le note $m_{\mathcal{Q},v}$.

COROLLAIRE 2.2.6. — (i) Pour $g \in G$, on a $P_{\mathcal{Q},g \cdot v} = \text{Int}_g(P_{\mathcal{Q},v})$.

(ii) Pour $g \in G$, on a $m_{\mathcal{Q},g \cdot v} = m_{\mathcal{Q},v}$.

(iii) Le stabilisateur $\text{Stab}_G(v) = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ est contenu dans $P_{\mathcal{Q},v}$.

DÉFINITION 2.2.7. — Les éléments $v \in V$ tels que $\overline{\mathcal{O}_v} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ sont dits (G, \mathcal{Q}) -*instables* ou simplement \mathcal{Q} -*instables* (sous-entendu pour l'action de G sur V).

On note

$$\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q}) \subset V$$

le sous-ensemble formé des éléments \mathcal{Q} -instables. Tout élément $v \in V$ est par définition \mathcal{F}_v -instable et l'on a

$$\mathcal{N}^G(V, \mathcal{F}_v) = \{v' \in V \mid \mathcal{F}_{v'} = \mathcal{F}_v\} = \{v' \in V \mid \mathcal{F}_v \subset \overline{\mathcal{O}_{v'}}\}.$$

REMARQUE 2.2.8. —

- (i) D'après [K1, lemma 1.1.b], il existe un G -module W , c'est-à-dire un \overline{F} -espace vectoriel (de dimension finie) muni d'une action algébrique linéaire de G (i.e. un morphisme de variétés $G \rightarrow \text{GL}(W)$), et un morphisme de variétés G -équivariant $\pi : V \rightarrow W$ tels que \mathcal{Q} soit la fibre schématique $\pi^{-1}(0)$ au-dessus de la sous-variété fermée $\{0\}$ de W . Ce morphisme permet de ramener l'étude du sous-ensemble $\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q}) \subset V$ à celle de $\mathcal{N}^G(W, 0) \subset W$.
- (ii) Supposons que V soit un G -module et considérons la sous-variété G -invariante fermée $\mathcal{Q} = \{0\}$ de V . Un élément $v \in V$ est dit *instable* s'il appartient à $\mathcal{N}^G(V, 0)$ et *semi-stable* sinon. Notons $\overline{F}[V]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V et $\overline{F}[V]^G \subset \overline{F}[V]$ la sous- F -algèbre formée des éléments G -invariants. On sait que $\overline{F}[V]^G$ est une \overline{F} -algèbre unifère de type fini (Nagata). La « conjecture de Mumford » dit qu'un élément $v \in V \setminus \{0\}$ est semi-stable si et seulement s'il existe une fonction polynomiale $f \in \overline{F}[V]^G$ homogène de degré ≥ 1 telle que $f(v) \neq 0$. Si $p = 1$, c'est une conséquence du théorème de Weyl sur la complète réductibilité des représentations de G ; d'ailleurs on peut prendre f de degré 1. Si $p > 1$, la conjecture de Mumford a été prouvée par Haboush [Ha] ; et l'on peut prendre f de degré une puissance de p .

¶ *Une version rationnelle du théorème de Kempf-Rousseau.* — Supposons de plus que la G -variété (affine) V soit définie sur F , c'est-à-dire que le groupe G , la variété V et l'action de G sur V soient définis sur F . On peut supposer que la norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$ est une F -norme, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\|\gamma\lambda\| = \|\lambda\|$ pour tout $\lambda \in \check{X}(G)$ et tout $\gamma \in \Gamma_F$. Il suffit pour cela de fixer un tore maximal T_0 de G qui soit défini sur F . Ce tore se déploie sur une sous-extension finie F'/F de F^{sep}/F , par conséquent l'action de Γ_F sur $\check{X}(T_0)$ se factorise par un quotient fini et l'on peut s'arranger pour que la forme bilinéaire symétrique définie positive $W^G(T_0)$ -invariante $(\cdot, \cdot) : \check{X}(T_0) \times \check{X}(T_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ soit aussi Γ_F -invariante.

On suppose aussi que la sous-variété fermée G -invariante \mathcal{Q} de V est définie sur F . Sous ces hypothèses, on peut toujours choisir un morphisme G -équivariant $\pi : V \rightarrow W$ comme dans la remarque 2.2.8 (i) qui soit défini sur F . De plus Kempf [K1] donne une version rationnelle de son résultat, valable seulement si F est *parfait* (i.e. $F = F^{\text{rad}}$) :

PROPOSITION 2.2.9 ([K1]). — *On suppose que F est parfait. Soit $v \in V(F)$ tel que $\overline{\mathcal{O}}_v \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.*

- (i) *L'ensemble $\Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$ est Γ_F -invariant.*
- (ii) *Le sous-groupe parabolique $P_{\mathcal{Q},v}$ de G est défini sur F .*
- (iii) *Il existe un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$ qui soit défini sur F .*

REMARQUE 2.2.10. — Pour $v \in V(F)$, l'ensemble $\mathcal{O}_v(F)$ est réunion de $G(F)$ -orbites. Si F est parfait, la structure de ces $G(F)$ -orbites est contrôlée par le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\Gamma_F, G^v(F))$. La structure des $G(F)$ -orbites contenues dans $\overline{\mathcal{O}}_v(F)$ est nettement plus compliquée, encore plus si F n'est pas parfait.

EXEMPLE 2.2.11. — Supposons F non parfait, de caractéristique p . Considérons l'action par conjugaison de $G = \text{GL}_p$ sur lui-même. Soit $\gamma \in G(F)$ un élément primitif tel que l'extension $F[\gamma]/F$ soit radicielle (de degré p). Le polynôme caractéristique de γ est de la forme $(T - \delta)^p$ pour un élément $\delta \in F^{\text{rad}}$ tel que $\delta^p = \det(\gamma)$. La G -orbite fermée \mathcal{F}_γ dans $\overline{\mathcal{O}}_\gamma$ est donnée par $\mathcal{F}_\gamma = \{\gamma_1\}$ avec $\gamma_1 = \text{diag}(\delta, \dots, \delta) \in G(F^{\text{rad}})$. Il existe un co-caractère $\lambda_1 \in \check{X}(G)$ défini sur $F[\delta]$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^{\lambda_1}}(\gamma) = \gamma_1$. En revanche il n'existe aucun co-caractère $\lambda \in \check{X}(G)$ qui soit défini sur F et tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(\gamma) = \gamma_1$. En effet si un tel λ existait, on aurait $\gamma \in P_\lambda(F)$ ce qui contredit l'hypothèse de primitivité sur γ (puisque $\gamma \notin \mathcal{O}_{\gamma_1} = \{\gamma_1\}$, on a $P_\lambda \subsetneq G$).

2.3. Le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford rationnel. — On continue avec les hypothèses du dernier paragraphe de 2.2 : G , V et l'action de G sur V sont définis sur F ; $\|\cdot\|$ est une F -norme G -invariante sur $\check{X}(G)$; \mathcal{Q} est une sous- F -variété fermée G -invariante de V .

La suppression de l'hypothèse « F parfait » dans la version rationnelle du résultat de Kempf (2.2.9) est due à Hesselink [H1], dans le cas où $\mathcal{Q} = \{e_V\}$ pour un point F -rationnel G -invariant e_V de V . Le cas d'une sous- F -variété fermée G -invariante \mathcal{Q} quelconque est dû à Bart-Herpel-Martin-Röhrle-Tange [BMRT, BHRM]. Dans les deux cas, les auteurs prouvent une version « uniforme » du critère de Hilbert-Mumford rationnel. C'est cette version uniforme que nous reprenons ici.

Soit

$$\check{X}_F(G) \subset \check{X}(G)$$

le sous-ensemble formé des co-caractères de G qui sont définis sur F . Observons que pour $v \in V(F)$ et $\lambda \in \check{X}_F(G)$, le morphisme $\phi_{v,\lambda}$ est défini sur F ; si de plus $\lambda \in \Lambda_v$ alors le morphisme $\phi_{v,\lambda}^+$ est lui aussi défini sur F et $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ appartient à $V(F)$.

Pour tout sous-ensemble non vide $Z \subset V$, on pose

$$\Lambda_Z = \bigcap_{v \in Z} \Lambda_v \quad \text{et} \quad \Lambda_{F,Z} = \check{X}_F(G) \cap \Lambda_Z.$$

On a

$$\Lambda_{F,g\cdot Z} = g \bullet \Lambda_{F,Z} \quad \text{pour tout } g \in G(F).$$

DÉFINITION 2.3.1. — Un sous-ensemble non vide $Z \subset V$ est dit *uniformément* (F, G, \mathcal{Q}) -*instable*, ou simplement *uniformément* (F, \mathcal{Q}) -*instable* (sous-entendu pour l'action de G sur V), s'il existe un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,Z}$ tel que $\phi_{\lambda,v}^+(0) \in \mathcal{Q}$ pour tout $v \in Z$.

Pour $\lambda \in \Lambda_Z$, on pose

$$m_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) = \inf\{m_{\mathcal{Q},v}(\lambda) \mid v \in Z\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

On a donc :

- $m_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) = 0$ si et seulement s'il existe un $v \in Z$ tel que $\phi_{\lambda,v}^+(0) \notin \mathcal{Q}$;
- $m_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $Z \not\subset \mathcal{Q}$ et $\phi_{\lambda,v}^+(0) \in \mathcal{Q}$ pour tout $v \in Z$;
- $m_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) = +\infty$ si et seulement si $Z \subset \mathcal{Q}$.

On pose aussi

$$\rho_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) = \frac{m_{\mathcal{Q},Z}(\lambda)}{\|\lambda\|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On définit comme plus haut un sous-ensemble de co-caractères (F, \mathcal{Q}, Z) -*optimaux* (relativement à l'action de G sur V)

$$\Lambda_{F,\mathcal{Q},Z}^{\text{opt}} \subset \Lambda_{F,Z}.$$

Si $Z \subset \mathcal{Q}$, on pose $\Lambda_{F,\mathcal{Q},Z}^{\text{opt}} = \{0\}$; sinon, on note $\Lambda_{F,\mathcal{Q},Z}^{\text{opt}}$ l'ensemble des $\lambda \in \Lambda_{F,Z} \setminus \{0\}$ qui sont primitifs et tels que :

- $\phi_{\lambda,v}^+(0) \in \mathcal{Q}$ pour tout $v \in Z$;
- $\rho_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) \geq \rho_{\mathcal{Q},Z}(\lambda')$ pour tout $\lambda' \in \Lambda_{F,Z}$.

Observons que si $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{Q},Z}^{\text{opt}}$ alors $\rho_{\mathcal{Q},Z}(\lambda) > 0$. On a

$$\Lambda_{F,\mathcal{Q},g\cdot Z}^{\text{opt}} = g \bullet \Lambda_{F,\mathcal{Q},Z}^{\text{opt}} \quad \text{pour tout } g \in G(F).$$

REMARQUE 2.3.2. — Comme dans le cas géométrique ($\overline{F} = F$), la notion de F -optimalité dépend *a priori* du choix de la F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$. Plus précisément, elle dépend de la norme $G(F)$ -invariante sur $\check{X}_F(G)$ induite par $\|\cdot\|$.

CONVENTION 2.3.3. — Lorsque $Z = \{v\}$ pour un élément $v \in V$, on supprimera l'adjectif « uniformément » et on remplacera l'indice $\{v\}$ par un indice v dans les notations. Lorsque $F = \overline{F}$, on supprimera l'indice F dans les notations. Ainsi pour $Z = \{v\}$ et $F = \overline{F}$, on retrouve les notations de 2.2.

REMARQUE 2.3.4. — Soit $v \in V(F^{\text{rad}})$ tel que $\overline{\mathcal{O}}_v \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. D'après 2.2.9, l'ensemble $\Lambda_{F^{\text{rad}},\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$ est non vide et il est égal à $\check{X}_{F^{\text{rad}}}(G) \cap \Lambda_{\mathcal{Q},v}^{\text{opt}}$.

On note

$${}_F\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q})$$

le sous-ensemble formé des éléments qui sont (F, \mathcal{Q}) -instables et on pose

$$\mathcal{N}_F^G(V, \mathcal{Q}) = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q}).$$

REMARQUE 2.3.5. — Soit $v \in V$.

- (i) Si $v \in V(F)$, l'orbite \mathcal{O}_v est définie sur F , par conséquent la G -orbite fermée $\mathcal{F}_v \subset \overline{\mathcal{O}_v}$ l'est aussi. Mais cela n'implique pas que l'ensemble $\mathcal{F}_v(F)$ soit non vide. Si de plus il existe un $\lambda \in \Lambda_{F,v}$ tel que $\phi_{v,\lambda}^+(0) \in \mathcal{F}_v$, alors $\mathcal{F}_v(F) \neq \emptyset$ (car $\phi_{v,\lambda}^+(0) \in \mathcal{F}_v(F)$).
- (ii) Si $v \in V(F)$ et si la G -orbite fermée \mathcal{F}_v n'est pas définie sur F , alors il n'existe aucun co-caractère qui soit (F, \mathcal{F}_v, v) -optimal (cf. l'exemple 2.2.11).
- (iii) Si $\lambda \in \Lambda_{F,\Omega,v}^{\text{opt}}$, alors $\overline{\mathcal{O}_v} \cap \Omega \neq \emptyset$ et pour tout $\mu \in \Lambda_{\Omega,v}^{\text{opt}}$, on a $\rho_{\Omega,v}(\lambda) \geq \rho_{\Omega,v}(\mu)$. Si F n'est pas parfait, cette inégalité est en général stricte : un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,v}$ peut être (F, Ω, v) -optimal sans être (Ω, v) -optimal (voir plus loin l'exemple 2.6.8 (ii)).

Le résultat suivant [BMRT, theorem 4.5], valable pour F quelconque, est la version uniforme du critère de Hilbert-Mumford rationnel.

THÉORÈME 2.3.6. — Soit $Z \subset V$ un sous-ensemble non vide uniformément (F, Ω) -instable.

- (i) L'ensemble $\Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$ est non vide.
- (ii) Le F -sous-groupe parabolique P_λ de G ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$; on le note ${}_F P_{\Omega,Z}$ et on pose $P_{F,\Omega,Z} = {}_F P_{\Omega,Z}(F)$.
- (iii) On note ${}_F U_{\Omega,Z}$ le radical unipotent de ${}_F P_{\Omega,Z}$ et on pose $U_{F,\Omega,Z} = {}_F U_{\Omega,Z}(F)$. Le groupe $U_{F,\Omega,Z}$ opère simplement transitivement sur $\Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$. En d'autres termes, pour toute F -composante de Levi M de ${}_F P_{\Omega,Z}$, il existe un unique co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$ tel que $M_\lambda = M$.
- (iv) L'invariant $m_{\Omega,Z}(\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda \in \Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$; on le note $m_{F,\Omega,Z}$.

COROLLAIRE 2.3.7. — (i) Pour $g \in G(F)$, on a ${}_F P_{\Omega,g,Z} = \text{Int}_g({}_F P_{\Omega,Z})$.

(ii) Pour $g \in G(F)$, on a $m_{F,\Omega,g,Z} = m_{F,\Omega,Z}$.

(iii) Si $Z = \{v\}$, le stabilisateur $G^v(F)$ de v dans $G(F)$ est contenu dans $P_{F,\Omega,v}$.

DÉFINITION 2.3.8. — Si $Z \subset V$ est un sous-ensemble non vide uniformément (F, Ω) -instable, un tore F -déployé maximal S de G est dit (F, Ω, Z) -optimal (relativement à l'action de G sur V) s'il est contenu dans ${}_F P_{\Omega,Z}$. Pour un tel S , on a (d'après 2.3.6 (iii))

$$\check{X}(S) \cap \Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}} = \{\lambda\}.$$

¶ *Descente séparable.* — Pour tout sous-ensemble non vide $Z \subset V$, on note $\overline{Z}^{(F)}$ la F -fermeture de Z dans V au sens de Borel [B, ch. AG, 11.3], c'est-à-dire le plus petit sous- F -schéma fermé réduit de V contenant Z . C'est une sous-variété fermée de V définie sur F^{rad} ou, ce qui revient au même, Γ_F -invariante pour l'action de $\Gamma_F = \text{Gal}(\overline{F}/F^{\text{rad}})$ sur V (cf. [B, ch. AG, 14.3]). On a toujours l'inclusion

$$\overline{Z} \subset \overline{Z}^{(F)}$$

où \overline{Z} est la fermeture de Zariski de Z dans V . Observons que pour tout sous-ensemble Γ_F -stable non vide $Z \subset V(F^{\text{sép}})$, en particulier pour tout sous-ensemble non vide

$Z \subset V(F)$, la fermeture de Zariski \overline{Z} de Z dans V est définie sur F [B, ch. AG, 14.4] ; en particulier elle coïncide avec $\overline{Z}^{(F)}$.

REMARQUE 2.3.9. — Si $v \in V(F^{\text{sép}})$, alors $v \in V(E)$ pour une sous-extension galoisienne finie E/F de $F^{\text{sép}}/F$ et la F -fermeture $\overline{Z}^{(F)}$ de $Z = \{v\}$ est la Γ_F -orbite

$$\Gamma_F(v) = \{\gamma(v) \mid \gamma \in \Gamma_F\} = \{\gamma(v) \mid \gamma \in \text{Gal}(E/F)\}.$$

On a la propriété de descente séparable [BMRT, theorem 4.7] :

THÉORÈME 2.3.10. — Soit $Z \subset V$ un sous-ensemble non vide.

- (i) Z est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable si et seulement si $\overline{Z}^{(F)}$ est uniformément $(F^{\text{sép}}, \mathcal{Q})$ -instable.
- (ii) Si Z est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable, alors $\Lambda_{F, \mathcal{Q}, Z}^{\text{opt}} = \check{X}_F(G) \cap \Lambda_{F^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, \overline{Z}^{(F)}}^{\text{opt}}$ et $m_{F, Z, \mathcal{Q}} = m_{F^{\text{sép}}, \overline{Z}^{(F)}, \mathcal{Q}}$.

LEMME 2.3.11. — Le théorème 2.3.10 reste vrai si l'on remplace $F^{\text{sép}}$ par n'importe quelle extension séparable (algébrique ou non) E de F telle que $(E^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(E^{\text{sép}})} = F$. (Rappelons que cette égalité est toujours vérifiée si l'extension E/F est algébrique ou de degré de transcendance infini.)

Démonstration. — D'après la preuve de [BMRT, theorem 4.7], Z est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable si et seulement si $\overline{Z}^{(F)}$ est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable, auquel cas

$$\Lambda_{F, Z, \mathcal{Q}}^{\text{opt}} = \Lambda_{F, \overline{Z}^{(F)}, \mathcal{Q}}^{\text{opt}} \quad \text{et} \quad m_{F, Z, \mathcal{Q}} = m_{F, \overline{Z}^{(F)}, \mathcal{Q}}.$$

On peut donc supposer que $Z = \overline{Z}^{(F)}$, c'est-à-dire que Z est une sous-variété F -fermée de V . Alors $Z_E = Z \times_F E$ est une sous-variété E -fermée de V_E . Si E/F est algébrique, on peut prendre $E^{\text{sép}} = F^{\text{sép}}$ et le résultat est directement impliqué par 2.3.10 (appliqué à $F^{\text{sép}}/F$ et à $E^{\text{sép}}/E$).

Supposons que E/F ne soit pas algébrique. Si $Z (= \overline{Z}^{(F)})$ est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable, alors Z est *a fortiori* uniformément (E, \mathcal{Q}) -instable. Réciproquement, supposons que Z soit uniformément (E, \mathcal{Q}) -instable. Alors (d'après 2.3.6 (i)) on peut choisir un $\lambda \in \Lambda_{E, \mathcal{Q}, Z}^{\text{opt}}$. Puisque Z est Γ_F -invariant, le sous-groupe parabolique $P_{E^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, Z} = P_\lambda(E^{\text{sép}})$ de $G(E^{\text{sép}})$ vérifie

$$\sigma(P_{E^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, Z}) = P_{E^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, Z} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in \text{Aut}_F(E^{\text{sép}}).$$

On en déduit d'après A.2.1 que le sous-groupe parabolique ${}_{E^{\text{sép}}}P_{\mathcal{Q}, Z} = P_\lambda$ de G est défini sur F . On peut donc choisir un tore $E^{\text{sép}}$ -déployé maximal T de ${}_{E^{\text{sép}}}P_{\mathcal{Q}, Z}$ qui soit défini sur F . On peut aussi supposer que λ appartient à $\check{X}(T)$, c'est-à-dire que λ soit l'unique élément de $\check{X}(T) \cap \Lambda_{E^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, Z}^{\text{opt}}$. Alors $\sigma(\lambda) = \lambda$ pour tout $\sigma \in \text{Aut}_F(E^{\text{sép}})$, ce qui entraîne (à nouveau d'après A.2.1) que λ est défini sur F . Cela prouve que Z est uniformément (F, \mathcal{Q}) -instable si et seulement si Z est uniformément $(E^{\text{sép}}, \mathcal{Q})$ -instable, et que dans ce cas on a l'égalité

$$\Lambda_{F, \mathcal{Q}, Z}^{\text{opt}} = \check{X}_F(G) \cap \Lambda_{E^{\text{sép}}, \mathcal{Q}, Z}^{\text{opt}} \quad \text{et} \quad m_{F, Z, \mathcal{Q}} = m_{E^{\text{sép}}, Z, \mathcal{Q}}.$$

D'où le lemme, d'après 2.3.10 appliqué à l'extension $E^{\text{sép}}/E$. \square

2.4. La variante de Hesselink (cas d'une G -variété pointée). — On suppose dans cette sous-section que V est une G -variété affine *pointée* au sens des G -variétés, c'est-à-dire qu'elle est munie d'un point (fermé) G -invariant e_V . On note

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^G(V, e_V)$$

l'ensemble des $v \in V$ tels que e_V appartienne à $\overline{\mathcal{O}_v}$; ou, ce qui revient au même, tels que $\mathcal{F}_v = \{e_V\}$. C'est une sous-variété fermée G -invariante de V : d'après le critère de Hilbert-Mumford géométrique, \mathcal{N} est l'ensemble des $v \in V$ tels que $f(v) = 0$ pour toute fonction polynomiale G -invariante f sur V telle que $f(e_V) = 0$.

On suppose de plus comme en 2.3 que G , V et l'action de G sur V sont définis sur F et que $\check{X}(G)$ est muni d'une F -norme G -invariante $\|\cdot\|$. On suppose aussi que e_V appartient à $V(F)$. On conserva ces hypothèses jusqu'à la fin de la section 2. Si de plus V est un groupe, sauf mention expresse du contraire, on supposera toujours que e_V est l'élément neutre (e.g. $e_V = 0$ si V est un G -module). D'après le critère galoisien, la variété \mathcal{N} est définie sur F^{rad} .

Le point e_V va jouer le rôle de la sous- F -variété fermée G -invariante \mathcal{Q} de 2.3. Pour alléger l'écriture et quand aucun risque de confusion ne sera possible, on supprimera l'indice e_V dans les notations : on écrira $\Lambda_{F,Z} = \Lambda_{F,e_V,Z}$ et pour $\lambda \in \Lambda_{F,Z}$, on écrira $m_Z(\lambda) = m_{e_V,Z}(\lambda)$. Au lieu de (F, e_V) -instable, resp. uniformément (F, e_V) -instable, on dira simplement F -instable, resp. *uniformément F -instable*. Si $Z \subset V$ est un sous-ensemble (non vide) uniformément F -instable, on écrira

$$\Lambda_{F,Z}^{\text{opt}} = \Lambda_{F,e_V,Z}^{\text{opt}}, \quad m_{F,Z} = m_{F,e_V,Z}, \quad {}_F P_Z = {}_F P_{e_V,Z}, \quad \text{etc.}$$

Lorsqu'on voudra spécifier le groupe G relativement auquel sont définis ces objets, on les affublera d'un exposant G .

On pose

$${}_F \mathcal{N} = {}_F \mathcal{N}^G(V, e_V) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_F = \mathcal{N}_F^G(V, e_V) (= V(F) \cap {}_F \mathcal{N}).$$

Ainsi ${}_F \mathcal{N}$, resp. \mathcal{N}_F , est l'ensemble des éléments F -instables de V , resp. $V(F)$. Tout sous-ensemble uniformément F -instable de V est contenu dans ${}_F \mathcal{N}$. Les éléments de $V \setminus {}_F \mathcal{N}$ sont dits *F -semi-stables*⁽¹⁹⁾. Plus généralement, on introduit la

DÉFINITION 2.4.1. — Soit H est un sous-groupe fermé de G défini sur F (par forcément réductif ni même connexe). Un élément $v \in V$ est dit (F, H) -instable s'il existe un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,v}^H = \check{X}_F(H) \cap \Lambda_{F,v}$ tel que $\phi_{v,\lambda}^+(0) = e_V$ et il est dit (F, H) -semi-stable sinon. On note ${}_F \mathcal{N}^H = {}_F \mathcal{N}^H(V, e_V)$ l'ensemble des éléments (F, H) -instables de V et $\mathcal{N}_F^H = \mathcal{N}_F^H(V, e_V)$ l'ensemble $V(F) \cap {}_F \mathcal{N}^H$.

REMARQUE 2.4.2. —

- (i) Un élément de V qui est F -instable est *a fortiori* \overline{F} -instable. Mais en général il existe des éléments dans \mathcal{N} ($= \overline{F}\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\overline{F}}$), et même dans $\mathcal{N} \cap V(F)$, qui ne sont pas F -instables (cf. l'exemple 1.2.1).

⁽¹⁹⁾La terminologie, empruntée à la théorie géométrique ($F = \overline{F}$) est un peu perturbante mais standard : le contraire de « F -instable » n'est pas « F -stable ».

(ii) Si $H \subset G$ est un tore F -déployé, puisque $\check{X}_F(H) = \check{X}(H)$, un élément $v \in V$ est (F, H) -instable si et seulement s'il est (\overline{F}, H) -instable.

¶ *Propriétés des ensembles ${}_F\mathcal{N}$ et \mathcal{N}_F .* — Les ensembles ${}_F\mathcal{N}$ et \mathcal{N}_F sont $G(F)$ -invariants. On a les inclusions

$${}_F\mathcal{N} \subset \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_F \subset V(F) \cap \mathcal{N}.$$

Insistons sur le fait que si $F \neq \overline{F}$, les deux inclusions ci-dessus sont en général strictes. D'après 2.2.9, on a cependant le

LEMME 2.4.3. — *Si F est parfait, alors $\mathcal{N}_F = V(F) \cap \mathcal{N}$.*

Même si ${}_F\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{N}$, on peut toujours munir ${}_F\mathcal{N}$, resp. \mathcal{N}_F , de la topologie de Zariski induite par celle de \mathcal{N} ; mais il faut faire attention car ${}_F\mathcal{N}$, resp. \mathcal{N}_F , n'est en général pas fermé dans \mathcal{N} , resp. $V(F) \cap \mathcal{N}$, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.4.4. — Considérons le cas où $V = G = \mathrm{PGL}_2$ est muni de l'action par conjugaison. Notons $\pi : \tilde{G} = \mathrm{GL}_2 \rightarrow G$ l'application naturelle. Supposons $p = 2$. Alors :

- \mathcal{N} est l'image par π de l'ensemble des éléments de \tilde{G} de trace nulle ;
- ${}_F\mathcal{N}$ est l'image par π de l'ensemble des éléments de \tilde{G} de trace nulle et de déterminant un carré dans F^\times ;
- $\mathcal{N}_F = G(F) \cap {}_F\mathcal{N}$ est l'image par π de l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ de trace nulle et de déterminant un carré dans F^\times ;
- $G(F) \cap \mathcal{N}$ est l'image par π de l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tels que $\gamma^2 \in F^\times$ (où l'on identifie F^\times au centre de $\tilde{G}(F)$).

Si F est infini, \mathcal{N}_F est Zariski-dense dans \mathcal{N} ; et si de plus F n'est pas parfait, il est distinct de $G(F) \cap \mathcal{N}$. Si F n'est pas parfait, la propriété « être un carré dans F^\times » définit un sous-ensemble de F^\times qui n'est pas un *ensemble algébrique*.

REMARQUE 2.4.5. — Si V est distinct de \mathcal{N} , c'est-à-dire s'il existe un élément de V qui soit \overline{F} -semi-stable, alors $V \setminus {}_F\mathcal{N}$ contient l'ouvert non vide $V \setminus \mathcal{N}$ de V . Si de plus V est irréductible, alors $V \setminus {}_F\mathcal{N}$ est dense dans V .

Compte-tenu de la définition de ${}_F\mathcal{N}$, il est naturel de considérer la c - F -topologie donnée par l'action de $\check{X}_F(G)$ sur V (voir l'annexe B) :

LEMME 2.4.6. — *${}_F\mathcal{N}$ est c - F -fermé (dans V).*

Démonstration. — D'après B.1.5, \mathcal{N}_F est l'ensemble des éléments $v \in V(F)$ tels que $\mathcal{F}_{F,v} = \{e_V\}$ où (rappel) $\mathcal{F}_{F,v}$ est l'unique $G(F)$ -orbite c - F -fermée contenue dans la c - F -fermeture \overline{X}^{c-F} de la $G(F)$ -orbite $X = \mathcal{O}_{F,v}$ de v . D'où le lemme puisque (d'après loc. cit.) $\overline{X}^{c-F} \subset {}_F\mathcal{N}$. \square

¶ *Co-caractères « virtuels » et optimalité.* — La variante de Hesselink consiste à normaliser les co-caractères optimaux de telle sorte qu'au lieu de maximaliser la valeur $\rho_Z(\lambda) = \frac{m_Z(\lambda)}{\|\lambda\|}$, on se ramène à minimiser la norme d'un co-caractère virtuel.

Soit $\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ le quotient de $\mathbb{N} \times \check{X}(G)$ par la relation d'équivalence

$$(n, \lambda) \sim (m, \lambda') \quad \text{si et seulement si} \quad m\lambda = n\lambda'.$$

L'action de G sur $\check{X}(G)$ se prolonge naturellement en une action sur $\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$. Si T est un tore, alors $\check{X}(T)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel (de dimension finie). Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$, on note P_{μ} le sous-groupe parabolique de G défini par $P_{\mu} = P_{\lambda}$ pour un (i.e. pour tout) $\lambda \in \check{X}(G) \cap \mathbb{N}^* \mu$; on définit de la même manière U_{μ} et M_{μ} .

Pour un sous-ensemble non vide $Z \subset V$, on note $\tilde{\Lambda}_Z$ l'ensemble des $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ tels que $n\mu \in \Lambda_Z (= \Lambda_{\overline{F}, e_V, Z})$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On étend la mesure de l'instabilité $m_Z(\mu) = m_{e_V, Z}(\mu)$ à tout $\mu \in \tilde{\Lambda}_Z$ de la manière suivante : on choisit un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\mu \in \Lambda_Z$ et on pose

$$m_Z(\mu) = n^{-1} m_Z(n\mu) \in \mathbb{Q}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On a donc $m_Z(\mu) > 0$ si et seulement s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\mu \in \check{X}(G)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{n\mu} \cdot v = e_V$ pour tout $v \in Z$; auquel cas Z est uniformément instable. Observons que pour $Z = \{e_V\}$, on a

$$m_Z(\mu) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad \mu \in \tilde{\Lambda}_Z = \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}.$$

On définit de la même manière l'ensemble $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$; c'est un sous-ensemble de $\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$. L'action de $G(F)$ sur $\check{X}_F(G)$ se prolonge naturellement en une action sur $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$. Pour $Z \subset V$, $Z \neq \emptyset$, on pose

$$\tilde{\Lambda}_{F, Z} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \tilde{\Lambda}_Z.$$

La F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$ se prolonge naturellement à $\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$. On rappelle qu'on l'a définie à partir d'une norme Γ_F -invariante et $W^G(T_0)$ -invariante sur $\check{X}(T_0)$ pour un tore maximal T_0 de G défini sur F . On commence par étendre linéairement cette dernière au \mathbb{Q} -espace vectoriel $\check{X}(T_0)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, puis on pose $\|g \bullet \mu\| = \|\mu\|$ pour tout $g \in G$ et tout $\mu \in \check{X}(T_0)_{\mathbb{Q}}$. Pour un sous-ensemble (non vide) $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, $Z \neq \{e_V\}$, on pose

$$\mathbf{q}_F(Z) = \inf\{\|\mu\| \mid \mu \in \tilde{\Lambda}_{F, Z}, m_Z(\mu) \geq 1\} > 0$$

et

$$\mathbf{\Lambda}_{F, Z} = \{\mu \in \tilde{\Lambda}_{F, Z} \mid m_Z(\mu) \geq 1, \|\mu\| = \mathbf{q}_F(v)\}.$$

On a clairement

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_F(v) &= \inf\{\|\mu\| \mid \mu \in \tilde{\Lambda}_{F, Z}, m_Z(\mu) = 1\} \\ &= (\sup\{\rho_Z(\mu) \mid \mu \in \mathbf{\Lambda}_{F, Z} \setminus \{0\}\})^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F, Z} \Rightarrow m_Z(\mu) = 1.$$

On pose aussi

$$\mathbf{q}_F(e_V) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{\Lambda}_{F, e_V} = \{0\}.$$

Pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable et $\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{F, Z}$ tels que $m_Z(\lambda) > 0$, on pose

$$\tilde{\lambda}_Z = \frac{1}{m_Z(\lambda)} \lambda \in \tilde{\Lambda}_{F, Z}.$$

Puisque

$$\|\tilde{\lambda}_Z\| = \rho_Z(\lambda)^{-1} \quad \text{et} \quad m_Z(\tilde{\lambda}_Z) = 1,$$

on en déduit le

LEMME 2.4.7. — Pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, l'application $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}_Z$ induit une bijection de $\Lambda_{F,Z}^{\text{opt}}$ sur $\Lambda_{F,Z}$.

REMARQUE 2.4.8. — Si la G -variété affine pointée V est de *type adjoint* au sens de [H1, 7.1], alors d'après [H1, 7.2] la notion de F -optimalité pour les sous-ensembles uniformément F -instables $Z \subset V$ ne dépend pas du choix de la F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$: l'ensemble $\Lambda_{F,Z}^{\text{opt}}$, l'invariant $m_{F,Z}$ et le F -sous-groupe parabolique ${}_F P_Z$ ne dépendent pas de $\|\cdot\|$. Observons que le groupe $V = G$ lui-même muni de l'action par conjugaison, est de type adjoint [H1, 7.1 (c)].

REMARQUE 2.4.9. — Soit $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable. Pour tout $v \in Z$, on a $\mathbf{q}_F(v) \leq \mathbf{q}_F(Z)$. On en déduit que pour $v' \in {}_F\mathcal{N}$ et $\mu \in \Lambda_{F,Z} \cap \tilde{\Lambda}_{v'}$, on a

$$m_{v'}(\mu) \geq 1 \Rightarrow \mathbf{q}_F(v') \leq \mathbf{q}_F(Z) = \|\mu\|.$$

¶ *Des filtrations.* — Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}_+ \cup \{+\infty\}$, on pose

$$V_{\mu,r} = \{v \in V \mid \mu \in \tilde{\Lambda}_v, m_v(\mu) \geq r\}.$$

C'est une sous-variété fermée P_{μ} -invariante de V . On a :

- $V_{\mu,r} \subset V_{\mu,s}$ si $r \geq s$;
- $V_{\mu,0} = \{v \in V \mid \mu \in \tilde{\Lambda}_v\}$;
- $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} V_{\mu,r} = V_{\mu,+\infty} = \{e_V\}$;
- $m_v(\mu) = \sup\{r \in \mathbb{Q}_+ \cup \{+\infty\} \mid v \in V_{\mu,r}\}$ pour tout $v \in \mathcal{N}$;
- $V_{g\bullet\mu,r} = g \cdot V_{\mu,r}$ pour tout $g \in G$.

La famille $(V_{\mu,r})_{r \in \mathbb{Q}_+}$ est appelée la μ -filtration de V . On pose aussi

$$V_{\mu}(0) = \{v \in V \mid t^{\lambda} \cdot v = v, \forall t \in \overline{F}^{\times}\}$$

pour un (i.e. pour tout) $\lambda \in \check{X}(G) \cap \mathbb{N}^* \mu$. C'est une sous-variété fermée M_{μ} -invariante de $V_{\mu,0}$.

REMARQUE 2.4.10. — Pour $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$, les sous-variétés fermées $V_{\mu,r}$ ($r \in \mathbb{Q}_+$) et $V_{\mu}(0)$ de V sont *a priori* seulement F -fermées dans V . On verra plus loin qu'elles sont toujours définies sur F (2.4.15).

Si $\lambda \in \check{X}(G) \cap \mathbb{N}^* \mu$, on a :

- $\phi_{\lambda,v}^+(0) \in V_{\mu}(0) = V_{\lambda}(0)$ pour tout $v \in V_{\mu,0} = V_{\lambda,0}$;
- $\phi_{\lambda,v}^+(0) = e_V$ si et seulement si $v \in V_{\mu,s}$ pour un $s > 0$.

Puisque pour tout $s \in \mathbb{Q}_+^*$, on a $V_{\mu,s} = V_{\perp s,1}$, on obtient que

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}} V_{\mu,1} \quad \text{et} \quad {}_F\mathcal{N} = \bigcup_{\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}} V_{\mu,1}.$$

Pour $V = G$ muni de l'action par conjugaison (avec $e_V = e_G = 1$), $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}_+$, on pose

$$G_{\mu,r} = V_{\mu,r}.$$

D'après [H1, 2.5, 5.1], on a les propriétés :

- $G_{\mu,r}$ est un sous-groupe algébrique fermé de G ;
- $G_{\mu,0} = P_{\mu}$, $G_{\mu}(0) = M_{\mu}$ et $\bigcup_{r>0} G_{\mu,r} = U_{\mu}$;
- pour $r > 0$, $G_{\mu,r}$ est un sous-groupe unipotent connexe distingué de P_{μ} ;
- $G_{\mu,r}$ est défini sur F si $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$ (c'est évident si $r = 0$ car $G_{\mu,0} = P_{\mu}$; si $r > 0$, cela résulte de [BT, 3.13] car $G_{\mu,r}$ est un sous-groupe F -fermé connexe de G normalisé par M_{μ}).

¶ *Interlude sur le cas des G -modules.* — Le cas des G -modules est l'archétype de la théorie, c'est pourquoi nous le reprenons brièvement ici (cf. [K2, H1]). On peut toujours s'y ramener grâce au résultat bien connu suivant (cf. [K1, 1.1], [H1, 2.3]) :

LEMME 2.4.11. — *Soit (V, e_V) une G -variété pointée définie sur F . Il existe un G -module W défini sur $F^{(20)}$, et une F -immersion fermée G -équivariante $\iota : V \rightarrow W$ telle que $\iota(e_V) = 0$.*

On suppose dans ce paragraphe que V est un G -module défini sur F (avec $e_V = 0$). On a toujours $\mathcal{N} = \mathcal{N}^G(V, 0)$, ${}_F\mathcal{N} = {}_F\mathcal{N}^G(V, 0)$ et $\mathcal{N}_F = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}$.

Pour $\lambda \in \check{X}(G)$ et $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$V_{\lambda}(i) = \{v \in V \mid t^{\lambda} \cdot v = t^i v, \forall t \in \overline{F}^{\times}\}.$$

C'est un sous-espace M_{λ} -invariant de V . Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$V'_{\lambda,k} = \bigoplus_{i \geq k} V_{\lambda}(i).$$

C'est un sous-espace P_{λ} -invariant de V . Observons que pour $v \in V'_{\lambda,k}$, la composante $v_{\lambda}(k)$ de v sur $V_{\lambda}(k)$ est donnée par

$$v_{\lambda}(k) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} t^{\lambda} \cdot v.$$

On verra plus loin (2.4.14) que pour $k \geq 0$, le sous-espace $V'_{\lambda,k}$ coïncide avec la variété $V_{\lambda,k}$ définie plus haut.

REMARQUE 2.4.12. — D'après [B, ch. II, 5.2], pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$ et $k \in \mathbb{Z}$, les sous-espaces $V_{\lambda}(k)$ et $V'_{\lambda,k}$ de V sont définis sur F .

Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on écrit $\mu = \frac{1}{n}\lambda$ et $r = \frac{k}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \check{X}(G)$ et $k \in \mathbb{Z}$; et l'on pose

$$V_{\mu}(r) = V_{\lambda}(k) \quad \text{et} \quad V'_{\mu,r} = V'_{\lambda,k}.$$

⁽²⁰⁾ C'est-à-dire un \overline{F} -espace vectoriel W défini sur F muni d'un morphisme de variétés $G \rightarrow \text{GL}(W)$ lui aussi défini sur F .

Si T est un tore de G (pas forcément maximal, ni même défini sur F), on a la décomposition

$$V = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_\chi \quad \text{avec} \quad V_\chi = \{v \in V \mid t \cdot v = t^\chi v, \forall t \in T\}.$$

On note⁽²¹⁾ $\mathcal{R}'_T(V) \subset X(T)$ le sous-ensemble (fini) formé des χ tels que $V_\chi \neq \{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des « poids » de T dans V . Pour $v \in V$, on écrit $v = \sum_\chi v_\chi$ avec $v_\chi \in V_\chi$ et on pose

$$\mathcal{R}'_T(v) = \{\chi \in X(T) \mid v_\chi \neq 0\} \subset \mathcal{R}'_T(V).$$

On a donc $\mathcal{R}'_T(0) = \emptyset$. Pour $Z \subset V$, $Z \neq \emptyset$, on pose

$$\mathcal{R}'_T(Z) = \bigcup_{v \in Z} \mathcal{R}'_T(v);$$

et pour $\mu \in \check{X}(T)_\mathbb{Q}$, on pose

$$m'_Z(\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{\langle \chi, \mu \rangle \mid \chi \in \mathcal{R}'_T(Z)\}$$

avec par convention $m'_Z(\mu) = +\infty$ si $Z = \{0\}$. Ainsi μ appartient à $\tilde{\Lambda}_Z$ si et seulement si $m'_Z(\mu) \geq 0$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = n\mu \in \check{X}(T)$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v$ existe et vaut 0 pour tout $v \in Z$ si et seulement si $m'_Z(\mu) > 0$ (observons que $m'_Z(\lambda) = nm'_Z(\mu)$). Cette définition ne dépend pas du tore T tel que $\mu \in X(T)_\mathbb{Q}$: on a $T \subset M_\mu$ et quitte à remplacer T par un tore plus gros, on peut supposer que T est un tore maximal de M_μ ; ensuite on utilise la propriété de M_μ -conjugaison des tores maximaux de M_μ . Si de plus $\mu \in \tilde{\Lambda}_Z$, cette définition coïncide avec la précédente :

LEMME 2.4.13. — Soit $Z \subset V$, $Z \neq \emptyset$. Pour $\mu \in \check{X}(T)_\mathbb{Q} \cap \tilde{\Lambda}_Z$, on a

$$m'_Z(\mu) = m_Z(\mu) (= m_{0,Z}(\mu)) \geq 0.$$

Démonstration. — Puisque

$$m'_Z(\mu) = \inf\{m'_v(\mu) \mid v \in Z\} \quad \text{et} \quad m_Z(\lambda) = \inf\{m_v(\lambda) \mid v \in Z\},$$

on peut supposer que $Z = \{v\}$ avec $v \neq 0$. On peut aussi supposer que $\mu \in X(T)$. Écrivons $v = \sum_{\chi \in \mathcal{R}'_T(v)} v_\chi$ avec $v_\chi \in V_\chi$. Pour $\chi \in \mathcal{R}'_T(v)$, posons $m_\chi = \langle \chi, \mu \rangle \in \mathbb{N}$. S'il existe un $\chi \in \mathcal{R}'_T(v)$ tel que $m_\chi = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu \cdot v \neq 0$ et dans ce cas on a $m'_v(\mu) = 0 = m_{0,v}(\mu)$. On peut donc supposer $m'_v(\mu) \geq 1$. La fibre schématique $\phi^{-1}(0)$ du morphisme $\phi = \phi_{v,\mu}^+ : \mathbb{G}_a \rightarrow V_{\mu,1}$ donné par

$$\phi(t) = \sum_{\chi \in \mathcal{R}'_T(v)} t^{m_\chi} v_\chi$$

est d'algèbre affine $\overline{F}[T]/I$ où I est l'idéal engendré par les T^{m_χ} pour $\chi \in \mathcal{R}'_T(v)$. Donc $I = (T^k)$ avec $k = \min\{m_\chi \mid \chi \in \mathcal{R}'_T(v)\}$. Cela prouve le lemme. \square

⁽²¹⁾Le « prime » dans la notation est dû au fait que pour $V = \text{Lie}(G)$ muni de l'action adjointe, on notera \mathcal{R}_T l'ensemble des racines de T dans $\text{Lie}(G)$ et on posera $\mathcal{R}'_T = \mathcal{R}_T \cup \{0\}$.

REMARQUE 2.4.14. — Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}$, le sous-espace $V'_{\mu,r}$ est donné par

$$V'_{\mu,r} = \{v \in V \mid m'_{\mu}(v) \geq r\}.$$

Si $r \geq 0$, d'après 2.4.13, on a l'égalité $V'_{\mu,r} = V_{\mu,r}$.

Soit $\iota_T : X(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme \mathbb{Q} -linéaire donné par

$$(\iota_T(\chi), \lambda) = \langle \chi, \lambda \rangle \quad \text{pour tout } \lambda \in \check{X}(T).$$

Pour $Z \subset V$, $Z \neq \emptyset$, on note $\mathcal{K}_T(Z)$ l'enveloppe convexe (i.e. le polytope de Newton) de $\iota_T(\mathcal{R}'_T(Z))$ dans $\check{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ avec par convention $\mathcal{K}_T(0) = \{0\}$. Pour $\mu \in \check{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ et $Z \neq \{0\}$, on a donc

$$m'_Z(\mu) = \inf\{(\eta, \mu) \mid \eta \in \mathcal{K}_T(Z)\}.$$

Par convexité, il existe un unique élément $\mu^T(Z) \in \mathcal{K}_T(Z)$ qui minimise la norme $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ (cf. [H1, 3.2]). On a $\mu^T(Z) \neq 0$ si et seulement si $0 \notin \mathcal{K}_T(Z)$, auquel cas, d'après le théorème de la projection sur un convexe fermé, $(\eta - \mu^T(Z), \mu^T(Z)) \geq 0$ pour tout $\eta \in \mathcal{K}_T(Z)$ et donc

$$\|\mu^T(Z)\|^2 = m'_Z(\mu^T(Z)) = m_Z(\mu^T(Z)) > 0.$$

Si $0 \notin \mathcal{K}_T(Z)$, l'élément $\tilde{\mu}^T(Z) = \frac{\mu^T(Z)}{m_Z(\mu^T(Z))}$ vérifie $m_Z(\tilde{\mu}^T(Z)) = 1$ et (cf. loc. cit.)

$$\|\tilde{\mu}^T(Z)\| = \inf\{\|\mu\| \mid \mu \in \check{X}(T)_{\mathbb{Q}}, m_Z(\mu) \geq 1\} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{q}^T(Z).$$

Enfin, toujours si $0 \notin \mathcal{K}_T(Z)$, on note $\lambda^T(Z)$ l'unique élément primitif de $\check{X}(T)$ qui soit de la forme $k\tilde{\mu}^T(Z)$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$.

Si maintenant $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ est uniformément F -instable et si S est un tore F -déployé maximal de G , on a toujours

$$\mathbf{q}_F(Z) = \mathbf{q}_F^G(Z) \leq \mathbf{q}_F^S(Z) = \mathbf{q}^S(Z).$$

La propriété de $G(F)$ -conjugaison des tores F -déployés maximaux de G entraîne que

$$\mathbf{q}_F(Z) = \inf\{\mathbf{q}^{g^{-1}Sg}(Z) \mid g \in G(F)\} = \inf\{\mathbf{q}^S(g \cdot v) \mid g \in G(F)\}.$$

Si S est choisi (F, Z) -optimal, c'est-à-dire contenu dans ${}_F P_Z$, alors

$$\mathbf{q}_F(Z) = \mathbf{q}^S(Z) = \|\tilde{\mu}^S(Z)\| \quad \text{et} \quad \Lambda_{F,Z} \cap \check{X}(S)_{\mathbb{Q}} = \{\tilde{\mu}^S(Z)\}.$$

En écrivant $\lambda^S(v) = k\tilde{\mu}^S(Z)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$m_Z(\lambda^S(Z)) = k \quad \text{et} \quad \Lambda_{F,Z}^{\text{opt}} \cap \check{X}(S) = \{\lambda^S(Z)\}.$$

¶ *Les sous-ensembles F -saturés.* — Reprenons les hypothèses du début de 2.4 : (V, e_V) est une G -variété pointée définie sur F , avec $e_V \in V(F)$.

LEMME 2.4.15. — Pour $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}_+$, la sous-variété fermée $V_{\mu,r}$ de V est définie sur F ; et la sous-variété fermée $V_{\mu}(0)$ de V est elle aussi définie sur F .

Démonstration. — D'après 2.4.11, il existe un G -module W défini sur F et une F -immersion fermée G -équivariante $\iota : V \rightarrow W$ telle que $\iota(e_V) = 0$. Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{Q}_+$, on a $\iota(V_{\mu,r}) = \iota(V) \cap W_{\mu,r}$. Or d'après 2.4.14 et 2.4.12, le sous-espace $W_{\mu,r}$ de W est défini sur F . D'autre part on a $\iota(V_{\mu}(0)) = \iota(V) \cap W_{\mu}(0)$ et le sous-espace $W_{\mu}(0)$ de W est défini sur F (2.4.12). D'où le lemme. \square

Si $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ est uniformément F -instable, l'ensemble $\mathbf{\Lambda}_{F,Z}$ forme une seule orbite sous le F -sous-groupe parabolique ${}_FP_Z$ de G . Par conséquent le sous-ensemble (lui aussi uniformément F -instable) $V_{\mu,1} \subset {}_F\mathcal{N}$ ne dépend pas de $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,Z}$. On pose

$${}_F\mathcal{X}_Z = V_{\mu,1} \quad \text{pour un (i.e. pour tout) } \mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,Z}.$$

De manière équivalente, on a

$${}_F\mathcal{X}_Z = V_{\lambda, m_Z(\lambda)} \quad \text{pour un (i.e. pour tout) } \lambda \in \Lambda_{F,Z}^{\text{opt}}.$$

D'après 2.4.15, ${}_F\mathcal{X}_Z$ est une sous-variété fermée de V définie sur F .

DÉFINITION 2.4.16. — Pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, le sous-ensemble ${}_F\mathcal{X}_Z \subset {}_F\mathcal{N}$ est appelé le F -saturé de Z . Un sous-ensemble uniformément F -instable de ${}_F\mathcal{N}$ est dit F -saturé s'il coïncide avec son F -saturé.

On a la version rationnelle de [H2, lemma 2.8] :

LEMME 2.4.17. — Soient Z et Z' deux sous-ensembles (non vides) de ${}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instables. Posons $X = {}_F\mathcal{X}_Z$ et $X' = {}_F\mathcal{X}_{Z'}$.

- (i) X est uniformément F -instable et $\mathbf{\Lambda}_{F,X} = \mathbf{\Lambda}_{F,Z}$.
- (ii) $Z \subset X = {}_F\mathcal{X}_X$.
- (iii) $\mathbf{\Lambda}_{F,Z} = \mathbf{\Lambda}_{F,Z'}$ si et seulement si $\mathbf{q}_F(Z) = \mathbf{q}_F(Z')$ et $Z \subset X'$.
- (iv) ${}_FP_Z = \{g \in G \mid g \cdot Z \subset X\}$.

Démonstration. — Les points (i) et (ii) sont clairs. On en déduit que $\mathbf{\Lambda}_{F,Z} = \mathbf{\Lambda}_{F,Z'}$ si et seulement si $X = X'$, d'où le point (iii). Quant au point (iv), si $g \cdot Z \subset X$, d'après (iii) on a $g \bullet {}_FP_Z = {}_FP_{g \cdot Z} = {}_FP_Z$. Puisque ${}_FP_Z$ est son propre normalisateur, cela entraîne que $g \in {}_FP_Z$. Réciproquement si $g \in {}_FP_Z$, puisque X est par définition ${}_FP_Z$ -invariant, *a fortiori* on a $g \cdot Z \subset X$. \square

Pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, on pose

$${}_F\mathfrak{X}_Z = G(F) \cdot {}_F\mathcal{X}_Z = \bigcup_{g \in G(F)} {}_F\mathcal{X}_{g \cdot Z}.$$

Pour $s \in \mathbb{Q}_+$, on pose

$${}_F\mathcal{N}_{<s} = \{v \in {}_F\mathcal{N} \mid \mathbf{q}_F(v) < s\}.$$

On a vu que pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, ${}_F\mathcal{X}_Z$ est une sous- F -variété fermée de V . En revanche ${}_F\mathfrak{X}_Z$, tout comme ${}_F\mathcal{N}$, n'est en général pas fermé dans V . On a cependant la variante rationnelle suivante de [H2, 2.9] :

PROPOSITION 2.4.18. — (i) Il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles ${}_F\mathfrak{X}_Z$ avec $Z \subset V$ uniformément F -instable, c'est-à-dire de $G(F)$ -orbites de sous-ensembles F -saturés de ${}_F\mathcal{N}$.

- (ii) Pour $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, ${}_F\mathfrak{X}_Z$ est c - F -fermé (dans V).
- (iii) Pour $s \in \mathbb{Q}_+$, ${}_F\mathcal{N}_{<s}$ est c - F -fermé (dans V) ; c'est la réunion (finie) des ensembles ${}_F\mathfrak{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que $\mathbf{q}_F(v) < s$.

Démonstration. — On peut grâce à 2.4.11 supposer que V est un G -module défini sur F (avec $e_V = 0$).

Prouvons (i). Soit S un tore F -déployé maximal de G . Rappelons qu'on a noté $\mathcal{R}'_S(V)$ l'ensemble (fini) des poids de S dans V et $\mathcal{R}'_S(Z) \subset \mathcal{R}'_S(V)$ le sous-ensemble formé des poids de S dans Z . La propriété de $G(F)$ -conjugaison des tores F -déployés maximaux de G entraîne qu'il existe un $g \in G(F)$ tel que S soit $(F, g \cdot Z)$ -optimal, c'est-à-dire que $\Lambda_{F, g \cdot Z} \cap \check{X}(S)_{\mathbb{Q}} = \{\tilde{\mu}_S(g \cdot Z)\}$ avec $\tilde{\mu}_S(g \cdot Z) = \frac{\mu_S(g \cdot Z)}{m_Z(\mu_S(g \cdot Z))} > 0$. On a donc

$${}_F\mathcal{X}_Z = g^{-1} \cdot {}_F\mathcal{X}_{g \cdot Z} = g^{-1} \cdot V_{\tilde{\mu}_S(g \cdot Z), 1}.$$

Le co-caractère virtuel $\tilde{\mu}_S(g \cdot Z) \in \check{X}(S)_{\mathbb{Q}}$ ne dépend que de l'ensemble $\mathcal{R}'_S(g \cdot Z)$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-ensembles de $\mathcal{R}'_S(V)$, cela prouve (i).

Prouvons (ii). Soient $v_1 \in {}_F\mathfrak{X}_Z$ et $\mu \in \Lambda_{F, v_1}$. On veut prouver que $v' = \phi_{\mu, v_1}^+(0)$ appartient à ${}_F\mathfrak{X}_Z$. Soit S un tore F -déployé maximal de M_{μ} et soit P_0 un F -sous-groupe parabolique minimal de G tel que $S \subset P_0 \subset P_{\mu}$. Quitte à remplacer Z par $g \cdot Z$ pour un $g \in G(F)$, on peut supposer que $P_0 \subset {}_F P_Z$. Écrivons ${}_F\mathcal{X}_Z = V_{\lambda, k}$ avec $\check{X}(S) \cap \Lambda_{F, Z}^{\text{opt}} = \{\lambda\}$ et $k = m_Z(\lambda) \geq 1$. Soit $x \in G(F)$ tel que $x^{-1} \cdot v_1 \in {}_F\mathcal{X}_Z$; l'élément v_1 appartient donc à $x \cdot V_{\lambda, k} \cap V_{\mu, 0}$. Écrivons (décomposition de Bruhat) $x = un_w p$ avec $u \in U_{P_0}(F)$, $w \in W^G(S) = N^G(S)/Z^G(S)$ et $p \in P_0(F)$, où n_w désigne un représentant de w dans $N^G(S)(F)$. Puisque $V_{\lambda, k}$ et $V_{\mu, 0}$ sont P_0 -invariant, $u^{-1} \cdot v_1$ appartient à $n_w \cdot V_{\lambda, k} \cap V_{\mu, 0} = V_{w \bullet \lambda, k} \cap V_{\mu, 0}$. Comme $S \subset P_{w \bullet \lambda} = n_w P_{\lambda} n_w^{-1}$, pour tout $v_2 \in V_{w \bullet \lambda, k} \cap V_{\mu, 0}$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\mu} \cdot v_2$ existe et elle appartient à $V_{w \bullet \lambda, k}$. D'autre part puisque $u \in U_0(F) \subset P_{\mu}(F)$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\mu} u t^{-\mu}$ existe et elle appartient à $M_{\mu}(F)$; on la note m . On a donc

$$v' = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\mu} \cdot v_1 = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{\mu} u t^{-\mu} \right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{\mu} \cdot (u^{-1} \cdot v_1) \right) \in m \cdot V_{w \bullet \lambda, k}.$$

Par conséquent $v' \in m n_w \cdot V_{\lambda, k} \subset G(F) \cdot V_{\lambda, k} = {}_F\mathfrak{X}_Z$.

Le point (iii) est clair. \square

REMARQUE 2.4.19. —

- (i) Pour $s \in \mathbb{Q}_+$, posons

$${}_F\mathcal{N}_{\leq s} = \{v \in {}_F\mathcal{N} \mid \mathbf{q}_F(v) \leq s\}.$$

D'après 2.4.18(i), c'est la réunion (finie) des ensembles ${}_F\mathfrak{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que $\mathbf{q}_F(v) \leq s$. Observons que ${}_F\mathcal{N}_{\leq s} = \bigcap_{s < r} {}_F\mathcal{N}_{< r}$ et qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que ${}_F\mathcal{N}_{\leq s} = {}_F\mathcal{N}_{< s + \epsilon}$.

- (ii) Pour tout sous-ensemble $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, puisque le quotient $G/{}_F P_Z$ est une variété projective (donc complète), l'ensemble

$$G \cdot {}_F\mathcal{X}_Z = \{g \cdot v \mid g \in G, v \in {}_F\mathcal{X}_Z\}$$

est une sous-variété fermée de V (cf. la preuve de [B, ch. IV, 11.9(1)]). Si le corps F est infini, puisque $G(F)$ est dense dans G [B, 18.3], on en déduit que

- ${}_F\mathfrak{X}_Z = G(F) \cdot {}_F\mathcal{X}_Z$ est dense dans $G \cdot {}_F\mathcal{X}_Z$. Par conséquent (toujours si F est infini), l'ensemble ${}_F\mathfrak{X}_Z$ est fermé dans ${}_F\mathcal{N}$ si et seulement s'il coïncide avec l'intersection $(G \cdot {}_F\mathcal{X}_Z) \cap {}_F\mathcal{N}$ (c'est bien sûr toujours le cas si $F = \overline{F}$).
- (iii) Si pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, ${}_F\mathfrak{X}_v$ est fermé dans ${}_F\mathcal{N}$, alors pour tout $s \in \mathbb{Q}_+$, ${}_F\mathcal{N}_{<s}$ est fermé dans ${}_F\mathcal{N}$.

¶ *Une hypothèse de régularité.* — Jusqu'à présent on n'a fait aucune hypothèse de régularité sur le point-base e_V . On la fait maintenant.

HYPOTHÈSE 2.4.20. — *Le point-base e_V est régulier (i.e. non singulier) dans la variété V . (Cela n'entraîne pas que e_V soit régulier dans $\mathcal{N} = \mathcal{N}^G(V, e_V)$!)*

On suppose jusqu'à la fin de 2.4 que l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée.

Hesslink a prouvé [H2, 3.8] que pour tout sous-ensemble $Z \subset \mathcal{N}$ uniformément instable, la sous-variété fermée $\mathcal{X}_Z = \overline{F}\mathcal{X}_Z$ de $\mathcal{N} = \overline{F}\mathcal{N}$ est isomorphe à son espace tangent $T_{e_V}(\mathcal{X}_Z)$, qui est un espace affine ; en particulier elle est irréductible et non-singulière. Puisque G est connexe donc irréductible, la sous-variété fermée (d'après 2.4.19 (ii)) G -invariante $\mathfrak{X}_Z = G \cdot \mathcal{X}_Z$ de \mathcal{N} est elle aussi irréductible.

On a un résultat analogue à [H2, 3.8] pour les sous-ensembles $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ qui sont uniformément F -instables :

PROPOSITION 2.4.21. — *(On suppose que l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée.) Soit $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ un sous-ensemble uniformément F -instable. L'espace tangent $T_{e_V}(X)$ du F -saturé $X = {}_F\mathcal{X}_Z$ de Z est un sous-ensemble F -saturé de $T_{e_V}(V)$ qui est F -isomorphe à X et vérifie*

$$\Lambda_{F, T_{e_V}(X)} = \Lambda_{F, X} = \Lambda_{F, Z}.$$

Démonstration. — Elle est identique à celle de [H2, 3.8], compte-tenu de la propriété suivante : si S est un tore F -déployé maximal de G , puisque S est linéairement réductif, il existe un S -logarithme $\phi : V \rightarrow T_{e_V}(V)$ au sens de [H2, 3.1] qui soit défini sur F (cf. [EGA-IV, 17.6]). □

Si $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ est uniformément F -instable, d'après 2.4.21, son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_Z$ est un F -espace affine (i.e. ${}_F\mathcal{X}_Z \simeq_F \mathbb{A}_F^n$) ; en particulier c'est une variété irréductible non singulière.

REMARQUE 2.4.22. — Supposons que le corps F soit infini. Puisque F^n est (Zariski-)dense dans \mathbb{A}_F^n , pour tout sous-ensemble $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable, l'ensemble $\mathcal{X}_{F, Z} = V(F) \cap {}_F\mathcal{X}_Z$ est dense dans X .

2.5. La stratification de Hesslink. — Continuons avec les hypothèses de 2.4. On ne suppose pas que e_V soit régulier dans V (hypothèse 2.4.20).

¶ *Les F -lames et les F -strates.* — Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, on pose

$${}_F\mathcal{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{N} \mid \Lambda_{F, v'} = \Lambda_{F, v}\}.$$

LEMME 2.5.1. — *Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, on a*

$${}_F\mathcal{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{N} \mid \Lambda_{F, v'}^{\text{opt}} = \Lambda_{F, v}^{\text{opt}} \text{ et } m_{F, v'} = m_{F, v}\}.$$

Démonstration. — Si $v = e_V$, il n'y a rien à démontrer. Si $v \in {}_F\mathcal{N} \setminus \{e_V\}$, l'inclusion

$$\{v' \in \mathcal{N} \mid \Lambda_{F,v'}^{\text{opt}} = \Lambda_{F,v}^{\text{opt}} \text{ et } m_{F,v'} = m_{F,v}\} \subset {}_F\mathcal{Y}_v$$

est claire (d'après 2.4.7). Quant à l'inclusion inverse, soient $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$. Puisque $\tilde{\lambda} = \frac{1}{k}\lambda$ appartient à $\Lambda_{F,v}$ (2.4.7), pour $v' \in {}_F\mathcal{Y}_v$ on a $m_{v'}(\tilde{\lambda}) \geq 1$ c'est-à-dire $m_{v'}(\lambda) \geq k$. Par conséquent ${}_F\mathcal{Y}_v \subset V_{\lambda,k} (= {}_F\mathcal{X}_v)$. Si $v' \in V_{\lambda,k+1}$, alors $\lambda' = \frac{1}{k+1}\lambda$ vérifie $m_{v'}(\lambda') \geq 1$ et $\|\lambda'\| = \frac{k}{k+1}\|\tilde{\lambda}_v\| < \|\tilde{\lambda}_v\|$; par conséquent $v' \notin {}_F\mathcal{Y}_v$. D'où l'inclusion inverse. \square

Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, on pose

$${}_F\mathfrak{Y}_v = G(F) \cdot {}_F\mathcal{Y}_v = \bigcup_{g \in G(F)} {}_F\mathcal{Y}_{g \cdot v}.$$

Puisque $\Lambda_{F,g \cdot v} = g \bullet \Lambda_{F,v}$ pour tout $g \in G(F)$, on a aussi

$${}_F\mathfrak{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{N} \mid \text{il existe un } g \in G(F) \text{ tel que } \Lambda_{F,v'} = g \bullet \Lambda_{F,v}\}.$$

DÉFINITION 2.5.2. — Les ensembles ${}_F\mathcal{Y}_v$, resp. ${}_F\mathfrak{Y}_v$, avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ sont appelés *F-lames*, resp. *F-strates* (de ${}_F\mathcal{N}$). Les *F-strates* sont donc les classes de $G(F)$ -conjugaison de *F-lames*.

REMARQUE 2.5.3. — D'après 2.4.11, il existe un G -module W défini sur F et une F -immersion fermée G -équivariante $\iota : V \rightarrow W$ tels que $\iota(e_V) = 0$. Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$. Posons $w = \iota(v)$; c'est un élément de ${}_F\mathcal{N}^G(W, 0)$. Il définit comme plus haut des sous-ensembles ${}_F\mathcal{X}_w, {}_F\mathcal{Y}_w, {}_F\mathfrak{X}_w$ et ${}_F\mathfrak{Y}_w$ de ${}_F\mathcal{N}^G(W, 0)$. Puisque $\Lambda_{F,w} = \Lambda_{F,v}$, on a

$$\iota({}_F\mathcal{X}_v) = \iota(V) \cap {}_F\mathcal{X}_w \quad \text{et} \quad \iota({}_F\mathcal{Y}_v) = \iota(V) \cap {}_F\mathcal{Y}_w.$$

On a aussi

$$\iota({}_F\mathfrak{X}_v) = \iota(V) \cap {}_F\mathfrak{X}_w \quad \text{et} \quad \iota({}_F\mathfrak{Y}_v) = \iota(V) \cap {}_F\mathfrak{Y}_w.$$

On peut donc en principe ramener la plupart des questions concernant les *F-lames* et les *F-strates* de ${}_F\mathcal{N}$ au cas où V est un G -module défini sur F (avec $e_V = 0$).

LEMME 2.5.4. — Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$.

- (i) ${}_F\mathcal{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{X}_v \mid \mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v)\}$.
- (ii) $v' \in {}_F\mathcal{X}_v \Rightarrow \mathbf{q}_F(v') \leq \mathbf{q}_F(v)$.
- (iii) ${}_F\mathfrak{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathfrak{X}_v \mid \mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v)\}$.
- (iv) $v' \in {}_F\mathfrak{X}_v \Rightarrow \mathbf{q}_F(v') \leq \mathbf{q}_F(v)$.
- (v) ${}_F\mathcal{X}_v$ est ${}_FP_v$ -invariant et ${}_F\mathcal{Y}_v$ est $P_{F,v}$ -invariant.

Démonstration. — Écrivons ${}_F\mathcal{X}_v = V_{\mu,1}$ avec $\mu \in \Lambda_{F,v}$.

Prouvons (i). Si $v' \in {}_F\mathcal{Y}_v$ alors $\mu \in \Lambda_{F,v'}$; par conséquent $v' \in V_{\mu,1} = {}_F\mathcal{X}_v$ et $\mathbf{q}_F(v') = \|\mu\| = \mathbf{q}_F(v)$. Inversement si $v' \in {}_F\mathcal{X}_v$ vérifie $\mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v) = \mu$, alors μ appartient à $\Lambda_{F,v'}$ et $\Lambda_{F,v'} = P_\mu \bullet \mu = \Lambda_{F,v}$.

Prouvons (ii). Si $v' \in {}_F\mathcal{X}_v$, puisque $m_{v'}(\mu) \geq 1$, on a $\mathbf{q}_F(v') \leq \|\mu\| = \mathbf{q}_F(v)$.

Puisque $\mathbf{q}_F(g \cdot v') = \mathbf{q}_F(v')$ pour tout $g \in G(F)$, les points (iii) et (iv) résultent de (i) et (ii).

Prouvons (v). L'ensemble ${}_F\mathcal{X}_v = V_{\mu,0}$ est clairement ${}_FP_v (= P_\mu)$ -invariant. Quant à ${}_F\mathcal{Y}_v$, si $p \in P_{F,v}$ et $v' \in {}_F\mathcal{Y}_v$, alors $p \cdot v'$ est dans ${}_F\mathcal{X}_v$ et comme $\mathbf{q}_F(p \cdot v') = \mathbf{q}_F(v')$, il est dans ${}_F\mathcal{Y}_v$ (d'après (i)). \square

Observons que pour $v, v' \in {}_F\mathcal{N}$, on a

$$\begin{aligned} {}_F\mathcal{Y}_v &= {}_F\mathcal{Y}_{v'} & \text{si et seulement si} & \quad {}_F\mathcal{X}_v = {}_F\mathcal{X}_{v'}, \\ {}_F\mathfrak{Y}_v &= {}_F\mathfrak{Y}_{v'} & \text{si et seulement si} & \quad {}_F\mathfrak{X}_v = {}_F\mathfrak{X}_{v'}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} {}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v &= {}_F\mathcal{X}_v \cap {}_F\mathcal{N}_{<\mathbf{q}_F(v)}, \\ {}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v &= {}_F\mathfrak{X}_v \cap {}_F\mathcal{N}_{<\mathbf{q}_F(v)}. \end{aligned}$$

La géométrie du bord ${}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$ est *a priori* assez compliquée. Pour $v' \in {}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$, la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_{v'}$ n'est pas forcément contenu dans ${}_F\mathfrak{X}_v$; ou, ce qui revient au même, la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_{v'}$ n'est pas forcément contenu dans ${}_F\mathfrak{X}_v$ (même si $F = \overline{F}$ [H2, 4.3, remark]). En général, on a

$${}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v = \bigcup_{v' \in {}_F\mathcal{N} \mid \mathbf{q}_F(v') < \mathbf{q}_F(v)} {}_F\mathfrak{X}_{v'} \cap {}_F\mathfrak{X}_v = \coprod_{\mathfrak{Y}'} \mathfrak{Y}' \cap {}_F\mathfrak{X}_v$$

où \mathfrak{Y}' parcourt l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathcal{N}$ telles que $\mathfrak{Y}' \cap ({}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v) \neq \emptyset$; ou, ce qui revient au même, telles que $\mathfrak{Y}' \cap ({}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v) \neq \emptyset$. On parle néanmoins de « stratification » car la fonction \mathbf{q}_F définit un ordre total strict sur ${}_F\mathcal{N}$.

Les F -lames sont en bijection avec les sous-ensembles ${}_F\mathcal{X}_v \subset {}_F\mathcal{N}$ ($v \in {}_F\mathcal{N}$) qui sont des cas particuliers d'ensembles F -saturés ${}_F\mathcal{X}_Z$ ($Z \subset {}_F\mathcal{N}$ uniformément F -instable). Déterminer parmi les sous-ensembles F -saturés de ${}_F\mathcal{N}$ ceux qui sont de la forme ${}_F\mathcal{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ est une question difficile, reliée à l'autre question difficile suivante : pour deux F -strates ${}_F\mathfrak{Y}_v, {}_F\mathfrak{Y}_{v'}$ de ${}_F\mathcal{N}$, quand a-t-on l'inclusion ${}_F\mathfrak{Y}_{v'} \subset {}_F\mathfrak{X}_v$? Pour ces questions dans le cas géométrique (i.e. $F = \overline{F}$), on renvoie à [H2, 5]. Cela nous amène naturellement à considérer l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2.5.5. — *Pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, le bord ${}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$ est réunion (finie) de F -strates de ${}_F\mathcal{N}$; en d'autres termes pour tout $v' \in {}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$, on a ${}_F\mathfrak{Y}_{v'} \subset {}_F\mathfrak{X}_v$.*

REMARQUE 2.5.6. —

- (i) L'hypothèse 2.5.5 n'est en général pas vérifiée, même si $F = \overline{F}$ [H2, 4.3, remark] (cf. l'exemple des « ternary sextic forms » dans [H2, 6.4]).
- (ii) Supposons $F = \overline{F}$. Supposons aussi que V soit le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison. Clarke et Premet « démontrent » dans [CP] que les strates de \mathcal{N} coïncident avec les *morceaux unipotents* de Lusztig [L2]. La preuve de [CP, theorem 5.2 (ii)] utilise la proposition [CP, 2.7], qui n'est valable que si l'hypothèse 2.5.5 est vérifiée. Pour que le résultat de [CP] soit complet, il faudrait donc prouver que l'hypothèse 2.5.5 est toujours vérifiée (dans le cas où V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison). Observons que si $p = 1$ ou $p \gg 1$, les morceaux unipotents de Lusztig sont exactement les orbites géométriques unipotentes et ces dernières coïncident avec les strates géométriques unipotentes (cf. 3.5.2 pour un résultat plus précis); dans ce cas l'hypothèse 2.5.5 est vérifiée.

D'après 2.4.18, on a la

- PROPOSITION 2.5.7.** — (i) Il n'y a qu'un nombre fini de F -strates ${}_F\mathfrak{Y}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$.
(ii) ${}_F\mathcal{N}$ est la réunion (finie) disjointe des F -strates ${}_F\mathfrak{Y}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$.
(iii) Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est la réunion disjointe (en général infinie) des F -lames qu'elle contient : on a ${}_F\mathfrak{Y}_v = \coprod_{g \in G(F)/P_{F,v}} {}_F\mathcal{Y}_{g \cdot v}$.
(iv) Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, ${}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$ est c - F -fermé (dans V).
(v) Pour $s \in \mathbb{Q}_+$, l'ensemble ${}_F\mathcal{N}_{\leq s} \setminus {}_F\mathcal{N}_{< s}$ est la réunion (éventuellement vide) des F -strates ${}_F\mathfrak{Y}_v$ avec $v \in \mathcal{N}_F$ tel que $\mathbf{q}_F(v) = s$.

COROLLAIRE 2.5.8. — Les F -strates sont localement c - F -fermées (dans V).

Démonstration. — Pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est c - F -ouverte dans ${}_F\mathfrak{X}_v$ (2.5.7 (iv)) et d'après 2.4.18 (ii), ${}_F\mathfrak{X}_v$ est c - F -fermé (dans V), d'où le corollaire. \square

REMARQUE 2.5.9. — Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, le fait que la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_v$ soit c - F -ouverte dans ${}_F\mathfrak{X}_v$ n'implique *a priori* pas qu'elle soit c - F -dense dans ${}_F\mathfrak{X}_v$: on a toujours $\overline{{}_F\mathfrak{Y}_v}^{(c-F)} \subset {}_F\mathfrak{X}_v$ mais l'inclusion peut être stricte.

REMARQUE 2.5.10. —

- (i) Si $F = \overline{F}$, les lames et les strates de \mathcal{N} sont des sous-variétés localement fermées dans V . En effet les ensembles \mathfrak{X}_v ($v \in \mathcal{N}$) sont des sous-variétés fermées de V , par conséquent les ensembles $\mathcal{N}_{< s}$ ($s \in \mathbb{Q}_+$) sont eux aussi des sous-variétés fermées de V ; et pour tout $v \in \mathcal{N}$, on a :
– $\mathcal{Y}_v = \mathcal{X}_v \setminus (\mathcal{X}_v \cap \mathcal{N}_{< \mathbf{q}(v)})$ est une sous-variété ouverte de \mathcal{X}_v ;
– $\mathfrak{Y}_v = \mathfrak{X}_v \setminus (\mathfrak{X}_v \cap \mathcal{N}_{< \mathbf{q}(v)})$ est une sous-variété ouverte de \mathfrak{X}_v .
(ii) Si pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, ${}_F\mathfrak{X}_v$ est (Zariski-)fermé dans ${}_F\mathcal{N}$, alors pour tout $s \in \mathbb{Q}_+$, ${}_F\mathcal{N}_{< s}$ est fermé dans ${}_F\mathcal{N}$. Dans ce cas pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, on a (comme dans le cas où $F = \overline{F}$) :
– la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est (Zariski-)ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$;
– la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est ouverte dans ${}_F\mathfrak{X}_v$.
(iii) Supposons F infini. Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, l'ensemble ${}_F\mathfrak{X}_v$ est fermé dans ${}_F\mathcal{N}$ si et seulement s'il coïncide avec l'intersection $(G \cdot {}_F\mathcal{X}_v) \cap {}_F\mathcal{N}$ (cf. 2.4.19 (ii)). Il est en général difficile de calculer cette intersection car ${}_F\mathcal{N}$ n'est pas (en général) un sous-ensemble algébrique de V (cf. 2.4.4).

¶ *F-lames standard.* — Soit P_0 un F -sous-groupe parabolique minimal de G . Un F -sous-groupe parabolique P de G est dit *standard* s'il contient P_0 .

DÉFINITION 2.5.11. — Un élément $v \in {}_F\mathcal{N}$ est dit *en position standard* si le F -sous-groupe parabolique ${}_FP_v$ de G est standard. Une F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ de ${}_F\mathcal{N}$ est dite *standard* si v (i.e. si tout élément de ${}_F\mathcal{Y}_v$) est en position standard.

Si ${}_F\mathcal{Y}_v$ et ${}_F\mathcal{Y}_{v'}$ sont deux F -lames standard de ${}_F\mathcal{N}$ avec ${}_F\mathcal{Y}_{v'} = g \cdot {}_F\mathcal{Y}_v$ pour un élément $g \in G(F)$, alors ${}_FP_{v'} = g({}_FP_v)g^{-1}$; par suite on a ${}_FP_{v'} = {}_FP_v$ (puisque les F -sous-groupes paraboliques ${}_FP_v$ et ${}_FP_{v'}$ sont standard) et $g \in P_{F,v} = {}_FP_v(F)$ (car ${}_FP_v$ est son propre normalisateur), donc ${}_F\mathcal{Y}'_v = {}_F\mathcal{Y}_v$. Ainsi toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$

contient une unique F -lame standard et l'application ${}_F\mathcal{Y}_v \mapsto {}_F\mathfrak{Y}_v = G(F) \cdot {}_F\mathcal{Y}_v$ est une bijection de l'ensemble des F -lames standard de ${}_F\mathcal{N}$ sur l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathcal{N}$. Les ensembles *finis* suivants sont naturellement en bijection :

- les F -lames standard de ${}_F\mathcal{N}$;
- les ensembles F -saturés ${}_F\mathcal{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ en position standard ;
- les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$;
- les ensembles ${}_F\mathfrak{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$;

Soit A_0 un tore F -déployé maximal de P_0 . Si $v \in {}_F\mathcal{N}$, il existe un $g \in G(F)$ tel que la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_{g \cdot v}$ soit standard. Alors le co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ défini par $\mathbf{\Lambda}_{F,g \cdot v} \cap \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} = \{\mu\}$ est *en position standard* (relativement à (P_0, A_0)), c'est-à-dire qu'il vérifie $P_0 \subset P_{\mu}$ et $A_0 \subset M_{\mu}$; on dit alors que μ est un co-caractère virtuel F -optimal (au sens où il est (F, v) -optimal pour un $v \in {}_F\mathcal{N}$) en position standard. Observons que μ est l'unique élément de $G(F) \bullet \mathbf{\Lambda}_{F,v} = \{\text{Int}_g \circ \mu \mid g \in G(F), \mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,v}\}$ qui soit en position standard. On obtient de cette manière une bijection naturelle entre :

- l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathcal{N}$;
- le sous-ensemble (fini)

$$\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}} = \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^G(V, e_V) \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$$

formé des co-caractères virtuels qui sont F -optimaux et en position standard.

REMARQUE 2.5.12. —

- (i) Notons ${}_F\mathcal{N}'_{\text{st}}$ l'ensemble des éléments de ${}_F\mathcal{N}$ en position standard, c'est-à-dire la réunion (finie) des F -lames standard, et posons

$${}_F\mathcal{N}'_{\text{st}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{v \in {}_F\mathcal{N}'_{\text{st}}} {}_F\mathcal{X}_v \subset {}_F\mathcal{N}.$$

Observons que ${}_F\mathcal{N}'_{\text{st}}$ est $P_0(F)$ -invariant et ${}_F\mathcal{N}_{\text{st}}$ est P_0 -invariant, et que l'on a

$$G(F) \cdot {}_F\mathcal{N}'_{\text{st}} = G(F) \cdot {}_F\mathcal{N}_{\text{st}} = {}_F\mathcal{N}.$$

Puisque ${}_F\mathcal{N}'_{\text{st}}$ est la réunion *finie* des ensembles ${}_F\mathcal{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ en position standard, c'est une sous-variété fermée de V définie sur F . Par exemple si V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison, alors ${}_F\mathcal{N}'_{\text{st}}$ est le radical unipotent $U_0 = U_{P_0}$ de P_0 .

- (ii) On définit comme en 2.5.11 la notion de sous-ensemble uniformément F -instable $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ *en position standard*. Notons $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{u-st}}$ le sous-ensemble de $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ formé des μ tels que $\mathbf{\Lambda}_{F,Z} \cap \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} = \{\mu\}$ pour un sous-ensemble uniformément F -instable $Z \subset {}_F\mathcal{N}$ en position standard. Puisque $\mathbf{\Lambda}_{F,Z} = \mathbf{\Lambda}_{F,{}_F\mathcal{X}_Z}$ (2.4.17 (i)) et que l'ensemble des classes de $G(F)$ -conjugaison de sous-ensembles F -saturés de ${}_F\mathcal{N}$ est fini (2.4.18 (i)), l'ensemble $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{u-st}}$ est lui aussi fini. On a clairement l'inclusion $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}} \subset \mathbf{\Lambda}_{F,\text{u-st}}$. Supposons de plus que V soit un G -module. Alors on peut comme en [H2, 5.4] définir la notion de sous-ensemble (F -instable) F -saturé de l'ensemble des poids $\mathcal{R}'_{A_0}(V)$ de A_0 dans V , et prouver l'analogie de la proposition [H2, 5.5] : $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{u-st}}$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes de $W^G(A_0)$ -conjugaison de sous-ensembles F -saturés de $\mathcal{R}'_{A_0}(V)$.

¶ *Les applications ${}_F\pi_v$ et ${}_F\pi'_v$.* — Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, notons $G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{X}_v$ le quotient du produit $G(F) \times {}_F\mathcal{X}_v$ par $P_{F,v}$ pour l'action de $P_{F,v}$ à droite donnée par

$$(g, x) \cdot p = (gp, p^{-1} \cdot x).$$

Pour un élément $(g, x) \in G(F) \times {}_F\mathcal{X}_v$, on note $[g, x]$ son image dans $G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{X}_v$ et on munit $G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{X}_v$ de l'action de $G(F)$ (à gauche) donnée par

$$g' \cdot [g, x] = [g'g, x] \quad \text{pour tout } g' \in G(F).$$

Considérons l'application

$${}_F\pi_v : G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{X}_v \rightarrow {}_F\mathfrak{X}_v, \quad [g, x] \mapsto g \cdot x.$$

Elle est $G(F)$ -équivariante et surjective.

LEMME 2.5.13. — *Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$.*

$$(i) \quad ({}_F\pi_v)^{-1}({}_F\mathfrak{Y}_v) = G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{Y}_v.$$

$$(ii) \quad {}_F\pi_v \text{ induit une application bijective } {}_F\pi'_v : G(F) \times^{P_{F,v}} {}_F\mathcal{Y}_v \rightarrow {}_F\mathfrak{Y}_v.$$

Démonstration. — Pour $(g, v') \in G(F) \times {}_F\mathcal{X}_v$, si $g \cdot v' \in {}_F\mathfrak{Y}_v$, alors $\mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v)$ et $v' \in {}_F\mathcal{Y}_v$. Cela prouve (i). Quant au point (ii), soient (g_1, v_1) et (g_2, v_2) deux éléments de $G(F) \times {}_F\mathcal{Y}_v$ tels que $g_1 \cdot v_1 = g_2 \cdot v_2$. Posons $g = g_1^{-1}g_2$. On a donc $g \cdot v_2 = v_1 \in {}_F\mathcal{Y}_v = {}_F\mathcal{Y}_{v_1} \subset {}_F\mathcal{X}_{v_1}$. Cela entraîne que g appartient à $P_{F,v_1} = P_{F,v}$ et donc que $[g_1, v_1] = [g_1g, g^{-1} \cdot v_1] = [g_2, v_2]$. \square

¶ *Points F -rationnels.* — Rappelons que l'on a posé

$$\mathcal{N}_F = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}.$$

Pour $s \in \mathbb{Q}_+$, on pose

$$\mathcal{N}_{F, < s} = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}_{< s} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{F, \leq s} = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}_{\leq s}.$$

Pour $v \in \mathcal{N}_F$, on pose

$$\mathcal{X}_{F,v} = V(F) \cap {}_F\mathcal{X}_v \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{F,v} = V(F) \cap {}_F\mathfrak{X}_v,$$

$$\mathcal{Y}_{F,v} = V(F) \cap {}_F\mathcal{Y}_v \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,v} = V(F) \cap {}_F\mathfrak{Y}_v.$$

On a donc

$$\mathfrak{X}_{F,v} = G(F) \cdot \mathcal{X}_{F,v} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,v} = G(F) \cdot \mathcal{Y}_{F,v}.$$

DÉFINITION 2.5.14. — Par abus de langage, on utilise la même définition que 2.5.2 pour les ensembles de points F -rationnels : les ensembles $\mathcal{Y}_{F,v}$, resp. $\mathfrak{Y}_{F,v}$, avec $v \in \mathcal{N}_F$ sont appelés F -lames, resp. F -strates, de \mathcal{N}_F . Les F -strates de \mathcal{N}_F sont donc les classes de $G(F)$ -conjugaison de F -lames de \mathcal{N}_F .

Les principales propriétés des F -lames et les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$ restent vraies pour les F -lames et les F -strates de \mathcal{N}_F . En particulier :

- Il n'y a qu'un nombre fini de F -strates de \mathcal{N}_F .
- On a les décompositions en union disjointe : $\mathcal{N}_F = \coprod_v \mathfrak{Y}_{F,v}$ où $v \in \mathcal{N}_F$ parcourt un ensemble (fini) de représentants des F -strates de \mathcal{N}_F ; et pour chaque $v \in \mathcal{N}_F$, $\mathfrak{Y}_{F,v} = \coprod_{g \in G(F)/P_{F,v}} g \cdot \mathcal{Y}_{F,v}$.

– Pour $v \in \mathcal{N}_F$,

$$\mathcal{X}_{F,v} \setminus \mathcal{X}_{F,v} = \mathcal{X}_{F,v} \cap \mathcal{N}_{F, < \mathbf{q}_F(v)},$$

$$\mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{X}_{F,v} = \mathfrak{X}_{F,v} \cap \mathcal{N}_{F, < \mathbf{q}_F(v)}.$$

– Pour $v \in \mathcal{N}_F$, l'application ${}_F\pi_v$ donne par restriction une application $G(F)$ -équivariante surjective

$$\pi_{F,v} : G(F) \times^{P_{F,v}} \mathcal{X}_{F,v} \rightarrow \mathfrak{X}_{F,v}$$

qui (d'après 2.5.13) vérifie $(\pi_{F,v})^{-1}(\mathfrak{Y}_{F,v}) = G(F) \times^{P_{F,v}} \mathcal{Y}_{F,v}$ et induit une application bijective $\pi'_{F,v} : G(F) \times^{P_{F,v}} \mathcal{Y}_{F,v} \rightarrow \mathfrak{Y}_{F,v}$.

Pour $v, v' \in \mathcal{N}_F$, on a

$$\mathcal{Y}_{F,v} = \mathcal{Y}_{F,v'} \quad \text{si et seulement si} \quad {}_F\mathcal{Y}_v = {}_F\mathcal{Y}_{v'},$$

$$\mathfrak{Y}_{F,v} = \mathfrak{Y}_{F,v'} \quad \text{si et seulement si} \quad {}_F\mathfrak{Y}_v = {}_F\mathfrak{Y}_{v'}.$$

D'après ce qui précède, l'application $Y \mapsto V(F) \cap Y$ induit une bijection entre :

- les F -lames, resp. F -strates, de ${}_F\mathcal{N}$ qui possèdent un point F -rationnel ;
- les F -lames, resp. F -strates, de \mathcal{N}_F .

On note

$$\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^* = \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^{G,*}(V, e_V) \subset \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$$

le sous-ensemble associé aux F -strates de ${}_F\mathcal{N}$ qui possèdent un point F -rationnel. Observons qu'un élément $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$ est dans $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^*$ si et seulement s'il existe un $v \in \mathcal{N}_F$ tel que $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,v}$; auquel cas v appartient à $V_{\mu,1}(F)$. On aimerait que l'inclusion ci-dessus soit une égalité, c'est-à-dire que toute F -lame, ou ce qui revient au même toute F -strate, de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel.

LEMME 2.5.15. — *Supposons F infini et que l'hypothèse 2.4.20 soit vérifiée. Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que la F -lame ${}_F\mathcal{X}_v$ soit ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$, on a $\mathcal{Y}_{F,v} \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Puisque ${}_F\mathcal{X}_v \simeq {}_F\mathbb{A}_F^n$ (d'après 2.4.21), l'ensemble $\mathcal{X}_{F,v}$ est dense dans ${}_F\mathcal{X}_v$ et tout ouvert de ${}_F\mathcal{X}_v$ intersecte $\mathcal{X}_{F,v}$ non trivialement. \square

Considérons la variante (moins forte) suivante⁽²²⁾ de l'hypothèse sur le bord 2.5.5 :

HYPOTHÈSE 2.5.16. — *Pour tout $v \in \mathcal{N}_F$, le bord $\mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{Y}_{F,v}$ est réunion (finie) de F -strates de \mathcal{N}_F ; i.e. pour tout $v' \in \mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{Y}_{F,v}$, on a $\mathfrak{Y}_{F,v'} \subset \mathfrak{X}_{F,v}$.*

Si toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel, les hypothèses 2.5.5 et 2.5.16 sont équivalentes.

¶ *Descente séparable.* — Soit E/F une extension séparable (algébrique ou non) telle que $(E^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(E^{\text{sép}})} = F$. Le lemme suivant est une conséquence de 2.3.10 et 2.3.11.

LEMME 2.5.17. — $\mathcal{N}_F = V(F) \cap \mathcal{N}_E$.

⁽²²⁾On s'attend à ce que dans le cas où F est un corps localement compact ou un corps global et V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison (avec $e_V = 1$), l'hypothèse 2.5.16 soit toujours vérifiée.

D'après 2.3.10, 2.3.11 et 2.4.7, on a aussi :

LEMME 2.5.18. — Soit $v \in \mathcal{N}_F^{(23)}$.

- (i) $\Lambda_{F,v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E,v}$ et $\mathbf{q}_F(v) = \mathbf{q}_E(v)$.
- (ii) ${}_F\mathcal{X}_v = {}_E\mathcal{X}_v$ et ${}_F\mathcal{Y}_v = {}_E\mathcal{Y}_v$.
- (iii) $\mathcal{X}_{F,v} = V(F) \cap \mathcal{X}_{E,v}$ et $\mathcal{Y}_{F,v} = V(F) \cap \mathcal{Y}_{E,v}$.

On en déduit la

PROPOSITION 2.5.19. — Pour $v \in \mathcal{N}_F$, on a $\mathfrak{Y}_{F,v} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v}$.

Démonstration. — L'inclusion $\mathfrak{Y}_{F,v} (= G(F) \cdot \mathcal{Y}_{F,v}) \subset V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v}$ est claire. Pour l'inclusion inverse, soit $v' \in V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v}$ ($\subset \mathcal{N}_F$). Fixons des éléments $\mu \in \Lambda_{F,v}$ et $\mu' \in \Lambda_{F,v'}$. Puisque l'extension E/F est séparable, μ appartient à $\Lambda_{E,v}$ et μ' appartient à $\Lambda_{E,v'}$ (2.3.10 et 2.3.11). Puisque $\mathfrak{Y}_{E,v'} = G(E) \cdot \mathcal{Y}_{E,v'}$, d'après 2.3.6, il existe un $y \in G(E)$ tel que $y \cdot v \in \mathcal{Y}_{E,v'}$ et $y \bullet \mu = \mu'$. On a donc

$$P_{\mu'} = yP_{\mu}y^{-1} \quad \text{et} \quad M_{\mu'} = yM_{\mu}y^{-1}$$

Comme les paires paraboliques (P_{μ}, M_{μ}) et $(P_{\mu'}, M_{\mu'})$ sont conjuguées dans $G(E)$ et définies sur F , elles sont conjuguées dans $G(F)$: il existe un $x \in G(F)$ tel que

$$P_{\mu'} = xP_{\mu}x^{-1} \quad \text{et} \quad M_{\mu'} = xM_{\mu}x^{-1}.$$

Posons $g = x^{-1}y \in G(E)$. On a donc

$$gP_{\mu}g^{-1} = P_{\mu'} \quad \text{et} \quad gM_{\mu}g^{-1} = M_{\mu'}.$$

Cela entraîne que g appartient à $M_{\mu}(E)$. Par conséquent $g \bullet \mu = \mu$ et $\mu' = x \bullet \mu$. Donc $\Lambda_{F,v'} = x \bullet \Lambda_{F,v}$ et $\mathfrak{Y}_{F,v'} = \mathfrak{Y}_{F,v}$, ce qui prouve l'inclusion $V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v} \subset \mathfrak{Y}_{F,v}$. \square

REMARQUE 2.5.20. —

- (i) Pour $v \in \mathcal{N}_F$, on a bien sûr l'inclusion $\mathfrak{X}_{F,v} \subset V(F) \cap \mathfrak{X}_{E,v}$ mais en général cette inclusion est stricte. Précisément, on a l'égalité

$$V(F) \cap \mathfrak{X}_{E,v} = \mathfrak{Y}_{F,v} \cup ((V(F) \cap \mathfrak{X}_{E,v}) \setminus \mathfrak{Y}_{F,v})$$

avec

$$(V(F) \cap \mathfrak{X}_{E,v}) \setminus \mathfrak{Y}_{F,v} = \mathfrak{X}_{E,v} \cap \mathcal{N}_{F, < \mathbf{q}_F(v)}$$

et l'inclusion $\mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{Y}_{F,v} \subset \mathfrak{X}_{E,v} \cap \mathcal{N}_{F, < \mathbf{q}_F(v)}$ est en général stricte.

- (ii) Supposons de plus que l'extension E/F soit algébrique. On peut supposer $E \subset F^{\text{sép}}$. Pour $v \in \mathcal{N}_F$, tout élément $v' \in V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v}$ définit de la manière suivante un élément

$$z_v(v') \in H^1(\Gamma_F, P_{E,v}).$$

On commence par écrire $v' = g \cdot v''$ avec $g \in G(E)$ et $v'' \in \mathcal{Y}_{E,v}$. Pour $\gamma \in \Gamma_F$, puisque $v' = \gamma(v') = \gamma(g) \cdot \gamma(v'')$, d'après 2.5.13 (ii) il existe un (unique) élément $p_{\gamma} \in P_{E,v}$ tel que $\gamma(g) = gp_{\gamma}$ et $\gamma(v'') = p_{\gamma}^{-1} \cdot v''$. L'application $\gamma \mapsto p_{\gamma}$ est un cocycle de Γ_F à valeurs dans $P_{E,v}$. Ce cocycle définit un élément de $H^1(\Gamma_F, P_{E,v})$

⁽²³⁾L'hypothèse « $v \in \mathcal{N}_F$ » est indispensable ici : pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, la Γ_F -orbite $\Gamma_F(v) = \{\gamma(v) \mid \gamma \in \Gamma_F\}$ est uniformément E -instable et on a $\Lambda_{F,v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E, \Gamma_F(v)}$.

qui ne dépend pas de la décomposition $v' = g \cdot v''$ choisie ; on le note $z_v(v')$. On écrit simplement « $z_v(v') = 0$ » au lieu de « le cocycle $\gamma \mapsto p_\gamma$ est un cobord ». La proposition 2.5.19 dit précisément que l'on a toujours $z_v(v') = 0$.

D'après ce qui précède, l'application qui à $v \in \mathcal{N}_F$ associe $\mathcal{Y}_{E,v}$, resp. $\mathfrak{Y}_{E,v}$, induit une bijection entre :

- les F -lames, resp. F -strates, de \mathcal{N}_F ;
- les E -lames, resp. E -strates, de \mathcal{N}_E qui possèdent un point F -rationnel.

La bijection réciproque est donnée par l'application $Y \mapsto V(F) \cap Y$.

Soit (P_1, A_1) une E -paire parabolique minimale de G telle que $A_0 \subset A_1$ et $P_1 \subset P_0$. On peut supposer que le tore E -déployé maximal A_1 de G est défini sur F . À l'aide de cette paire (P_1, A_1) , on définit comme plus haut le sous-ensemble $\Lambda_{E,\text{st}} = \Lambda_{E,\text{st}}^G(V, e_V)$ de $\check{X}_F(A_1)_{\mathbb{Q}}$.

LEMME 2.5.21. — *On a les inclusions*

$$\Lambda_{F,\text{st}}^* \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E,\text{st}} \subset \Lambda_{F,\text{st}}.$$

En particulier si $\Lambda_{F,\text{st}} = \Lambda_{F,\text{st}}^$, i.e. si toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel, ces inclusions sont des égalités.*

Démonstration. — Puisque $\check{X}_F(A_1)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, l'inclusion $\Lambda_{F,\text{st}}^* \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E,\text{st}}$ est impliquée par 2.5.18 (i). Quant à l'autre inclusion, si $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E,\text{st}}$, alors $P_\mu \supset P_0$. La sous-variété fermée $V_{\mu,1} \subset V$ est contenue dans ${}_F\mathcal{N}$ et pour tout v' dans la E -lame standard $\{v \in V_{\mu,1} \mid \mathbf{q}_E(v) = \|\mu\|\}$ $\subset V_{\mu,1}$ de ${}_E\mathcal{N}$ associée à μ , puisque $\mathbf{q}_F(v') \geq \mathbf{q}_E(v') = \|\mu\|$, on a $\mathbf{q}_F(v') = \|\mu\|$. Par conséquent μ appartient $\Lambda_{F,\text{st}}$. \square

REMARQUE 2.5.22. — Si le rang F -déployé de G coïncide avec son rang E -déployé (i.e. si $A_1 = A_0$), alors $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{E,\text{st}} = \Lambda_{E,\text{st}}$. En ce cas l'inclusion $\Lambda_{E,\text{st}} \subset \Lambda_{F,\text{st}}$ fournit une injection naturelle entre les E -strates de ${}_E\mathcal{N}$ et les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$, qui est une bijection si $\Lambda_{F,\text{st}} = \Lambda_{F,\text{st}}^*$.

NOTATION 2.5.23. — Pour alléger l'écriture, on introduit les notations suivantes. Si \mathcal{Y} est une F -lame de \mathcal{N}_F , on note $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ son F -saturé, c'est-à-dire le sous-ensemble de \mathcal{N}_F défini par $\mathcal{X}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}_{F,v}$ pour un (i.e. pour tout $v \in \mathcal{Y}_{F,v}$) ; et si \mathfrak{Y} est une F -strate de \mathcal{N}_F , on note $\mathfrak{X}(\mathfrak{Y})$ le sous-ensemble de \mathcal{N}_F défini par $\mathfrak{X}(\mathfrak{Y}) = G(F) \cdot \mathcal{X}(\mathfrak{Y})$ pour une (i.e. pour toute) F -lame \mathcal{Y} de \mathcal{N}_F contenue dans \mathfrak{Y} .

(On suppose toujours que E/F est une extension séparable.) Si \mathcal{Y} est une F -lame de \mathcal{N}_F , on note \mathcal{Y}_E la E -lame de \mathcal{N}_E définie par $\mathcal{Y}_E = \mathcal{Y}_{E,v}$, pour un (i.e. pour tout) $v \in \mathcal{Y}$; et si \mathfrak{Y} est une F -strate de \mathcal{N}_F , on note \mathfrak{Y}_E la E -strate de \mathcal{N}_E définie par $\mathfrak{Y}_E = \mathfrak{Y}_{E,v}$ pour un (i.e. pour tout) $v \in \mathfrak{Y}$. On définit $\mathcal{X}(\mathcal{Y}_E)$ et $\mathfrak{X}(\mathfrak{Y}_E)$ comme plus haut (en remplaçant F par E). On a donc les égalités

$$\mathcal{Y} = V(F) \cap \mathcal{Y}_E, \quad \mathcal{X}(\mathcal{Y}) = V(F) \cap \mathcal{X}(\mathcal{Y}_E) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_E.$$

2.6. Comparaison avec la stratification géométrique. — Continuons avec les hypothèses de 2.4 et 2.5. À l'exception du lemme 2.6.1, tous les autres résultats de cette sous-section supposent que l'hypothèse 2.4.20 (e_V est régulier dans V) est vérifiée.

Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, on a l'inégalité $\mathbf{q}(v) \leq \mathbf{q}_F(v)$ avec égalité si et seulement si il existe un $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,v}$ tel que $\|\mu\| = \mathbf{q}(v)$, i.e. si et seulement si l'intersection $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$ est non vide. On en déduit un critère très simple assurant que la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$:

LEMME 2.6.1. — *Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$. Si $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$ alors*

$$\mathbf{\Lambda}_{F,v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v, \quad {}_F\mathcal{X}_v = \mathcal{X}_v \quad \text{et} \quad {}_F\mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_v.$$

Dans ce cas, la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est (Zariski-)ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$.

Démonstration. — Soit $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$. Puisque $\mathbf{\Lambda}_{F,v}$, resp. $\mathbf{\Lambda}_v$, est un espace principal homogène sous $U_{\mu}(F)$, resp. U_{μ} , pour $\mu' = u \bullet \mu \in \mathbf{\Lambda}_v$ avec $u \in U_{\mu}$, on a

$$\mu' \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow u \in U_{\mu}(F) \Leftrightarrow \mu' \in \mathbf{\Lambda}_{F,v};$$

d'où l'égalité $\mathbf{\Lambda}_{F,v} = \check{X}_F(G) \cap \mathbf{\Lambda}_v$. D'autre part on a (par définition)

$${}_F\mathcal{Y}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{N} \mid \mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,v'}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_v = \{v' \in \mathcal{N} \mid \mu \in \mathbf{\Lambda}_{v'}\}.$$

Par conséquent ${}_F\mathcal{Y}_v = {}_F\mathcal{N} \cap \mathcal{Y}_v$. Comme d'autre part

$$\mathcal{Y}_v \subset \mathcal{X}_v = V_{\mu,1} = {}_F\mathcal{X}_v \subset {}_F\mathcal{N},$$

on obtient que la F -strate ${}_F\mathcal{Y}_v$ coïncide avec la \overline{F} -strate \mathcal{Y}_v , laquelle est ouverte dans ${}_F\mathcal{X}_v = \mathcal{X}_v$. \square

REMARQUE 2.6.2. — Supposons F infini. Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$.

- (i) D'après [B, ch. V, 18.3], le groupe $G(F)$ est (Zariski-)dense dans G . Puisque ${}_F\mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_v$ est ouvert (dense) dans ${}_F\mathcal{X}_v = \mathcal{X}_v$, on en déduit que la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_v = G(F) \cdot {}_F\mathcal{Y}_v$ de ${}_F\mathcal{N}$ est dense dans $\mathfrak{X}_v = G \cdot \mathcal{X}_v$.
- (ii) Supposons de plus que l'hypothèse 2.4.20 soit vérifiée. Alors ${}_F\mathcal{X}_v \simeq_F \mathbb{A}_F^n$ (d'après 2.4.21) et $\mathcal{Y}_{F,v}$ est dense dans ${}_F\mathcal{X}_v$. Comme $G(F)$ est dense dans G (loc. cit.), on en déduit que la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,v} = G(F) \cdot \mathcal{Y}_{F,v}$ de \mathcal{N}_F est dense dans $\mathfrak{X}_v = G \cdot \mathcal{X}_v$.

Jusqu'à la fin de 2.6, on suppose de plus de plus que l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée : e_V est régulier dans V . Cela assure que les sous-ensembles F -saturés de ${}_F\mathcal{N}$ — et donc en particulier les variétés ${}_F\mathcal{X}_v$ avec $v \in {}_F\mathcal{N}$ — sont des F -variétés affines.

Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, puisque les \overline{F} -strates de $\mathcal{N} = \overline{F}\mathcal{N}$ sont localement fermées dans V , il en existe une et une seule \mathfrak{Y}_{v_1} (avec $v_1 \in \mathcal{N}$ que l'on peut choisir dans ${}_F\mathcal{X}_v$) telle que l'intersection $\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{X}_v$ soit dense dans la variété irréductible ${}_F\mathcal{X}_v$; on la note

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F\mathcal{X}_v) = \mathfrak{Y}_{v_1}.$$

Le corps F étant fixé dans toute cette section 2.6, pour alléger l'écriture on la notera plus simplement

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F\mathcal{X}_v).$$

Observons que l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est ouverte dans ${}_F\mathcal{X}_v$. On pose aussi

$$\mathbf{q}_{\text{géo}}(v) = \mathbf{q}(v_1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{X}_{v_1} = G \cdot \mathcal{X}_{v_1}.$$

On a donc $\mathbf{q}_{\text{géo}}(v) = \mathbf{q}(v')$ et $\mathfrak{X}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{X}_{v'}$ pour tout $v' \in \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$. Puisque $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$ est ouvert (dense) dans la sous-variété fermée irréductible $\mathfrak{X}_{\text{géo}}(v)$ de V , on a l'inclusion ${}_F\mathcal{X}_v \subset \mathfrak{X}_{\text{géo}}(v)$. On en déduit que

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{X}_v = \{v' \in {}_F\mathcal{X}_v \mid \mathbf{q}(v') = \mathbf{q}_{\text{géo}}(v)\}.$$

Puisque $v \in \mathfrak{X}_{\text{géo}}(v)$, on a toujours l'inégalité

$$\mathbf{q}(v) \leq \mathbf{q}_{\text{géo}}(v)$$

avec égalité si et seulement si $v \in \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$.

LEMME 2.6.3. — *Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$.*

- (i) *Si $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$, alors $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{Y}_v$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{X}_v = {}_F\mathcal{Y}_v$.*
- (ii) *Si $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v = \emptyset$, alors $\mathbf{q}_{\text{géo}}(v) < \mathbf{q}_F(v)$ et on distingue deux cas : ou bien $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est contenu dans le bord ${}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v$; ou bien l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{Y}_v$ est non vide et pour tout $v' \in \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{Y}_v$, on a*

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v') = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \quad \text{et} \quad \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{v'} = \emptyset.$$

Démonstration. — Écrivons $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{Y}_{v_1}$ avec $v_1 \in {}_F\mathcal{X}_v$.

Supposons que l'intersection $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$ soit non vide. Puisque ${}_F\mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_v$ est ouvert (dense) dans ${}_F\mathcal{X}_v$ (2.6.1), on peut prendre $v_1 = v$. On a donc $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{Y}_v$. L'inclusion $\mathcal{Y}_v = {}_F\mathcal{Y}_v \subset \mathfrak{Y}_v \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est claire. D'autre part si $v' \in \mathfrak{Y}_v \cap {}_F\mathcal{X}_v$, on a

$$\mathbf{q}(v') \leq \mathbf{q}_F(v') \leq \mathbf{q}_F(v) = \mathbf{q}(v).$$

Or $\mathbf{q}(v') = \mathbf{q}(v)$ par conséquent toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités et $v' \in {}_F\mathcal{Y}_v$. D'où l'inclusion $\mathfrak{Y}_v \cap {}_F\mathcal{X}_v \subset {}_F\mathcal{Y}_v$. Cela prouve (i).

Supposons maintenant que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v = \emptyset$, i.e. $\mathbf{q}(v) < \mathbf{q}_F(v)$. On a donc *a priori* les inégalités

$$\mathbf{q}(v) \leq \mathbf{q}(v_1) \leq \mathbf{q}_F(v_1) \leq \mathbf{q}_F(v).$$

Si l'intersection $\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{Y}_v$ est vide, alors $v_1 \in {}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v$ par suite $\mathbf{q}_F(v_1) < \mathbf{q}_F(v)$ et donc $\mathbf{q}(v_1) < \mathbf{q}_F(v)$. Supposons qu'il existe un $v' \in \mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{Y}_v$. On a ${}_F\mathcal{Y}_{v'} = {}_F\mathcal{Y}_v$ et ${}_F\mathcal{X}_{v'} = {}_F\mathcal{X}_v$, par conséquent

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v') = \mathfrak{Y}_{v_1}.$$

Si $\mathbf{q}(v') = \mathbf{q}_F(v')$, alors $\mathfrak{Y}_{v'} = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v')$ et d'après (1) on a l'égalité $\mathfrak{Y}_{v'} \cap {}_F\mathcal{X}_v = {}_F\mathcal{Y}_v$; en particulier v appartient à $\mathfrak{Y}_{v'}$, par conséquent $\mathbf{q}(v) = \mathbf{q}(v') = \mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v)$ ce qui contredit l'hypothèse $\mathbf{q}(v) < \mathbf{q}_F(v)$. On a donc

$$\mathbf{q}(v_1) = \mathbf{q}(v') < \mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v).$$

Cela prouve (ii). □

L'application qui à $v \in {}_F\mathcal{N}$ associe la \overline{F} -strate $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$ de \mathcal{N} est constante sur les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$: on a

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v') = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \quad \text{pour tout } v' \in {}_F\mathfrak{Y}_v.$$

L'application ${}_F\mathfrak{Y}_v \mapsto \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$ n'est en général ni injective ni surjective.

LEMME 2.6.4. — *Soit $v \in \mathcal{N}$ tel que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap G \bullet \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$. Il existe une unique F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1}$ de ${}_F\mathcal{N}$ (avec $v_1 \in {}_F\mathcal{N}$) telle que*

$$\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{v_1} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v_1) = \mathfrak{Y}_v.$$

Démonstration. — Supposons $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap G \bullet \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$. Soit $g \in G$ tel que l'intersection $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{g \cdot v}$ soit non vide, et soit $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{g \cdot v}$. Quitte à remplacer g par un élément de $G(F)g$, on peut supposer que $P_{\mu} \supset P_0$. On peut aussi supposer que $\text{Im}(\mu) \subset A_0$. Alors

$$\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{g \cdot v} = \{\mu\} = \mathbf{\Lambda}_{\text{st}} \cap G \bullet \mathbf{\Lambda}_v.$$

L'élément $v_1 = g \cdot v$ appartient à ${}_F\mathcal{N}$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v_1) = \mathfrak{Y}_{v_1} = \mathfrak{Y}_v$. Le co-caractère virtuel μ appartient à $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$ et ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1}$ est la F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ associée à μ . \square

Observons que si le groupe G est F -déployé, puisque $\mathbf{\Lambda}_{\text{st}} \subset \check{X}(A_0) \subset \check{X}_F(G)$, on a

$$\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap G \bullet \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{N}.$$

PROPOSITION 2.6.5. — *Supposons que F soit infini et que G soit F -déployé (e.g. si $F = F^{\text{sévp}}$). Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v = \emptyset$, le sous-ensemble*

$$\{v' \in {}_F\mathcal{X}_v \mid \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{v'} \neq \emptyset \text{ et } \mathfrak{Y}_{v'} = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)\} \subset \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) \cap {}_F\mathcal{X}_v$$

est dense dans ${}_F\mathcal{X}_v$ (en particulier il est non vide) et contenu dans ${}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$.

Démonstration. — Soit $v \in {}_F\mathcal{N}$ tel que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v = \emptyset$. D'après 2.6.4, il existe une unique F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1}$ de ${}_F\mathcal{N}$ telle que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{v_1} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v_1) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v)$. On a $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v_1) = \mathfrak{Y}_{v_1}$ et $\mathbf{q}_{\text{géo}}(v) = \mathbf{q}(v_1) = \mathbf{q}_F(v_1)$. Puisque le corps F est infini, la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1} = G(F) \cdot {}_F\mathfrak{Y}_{v_1}$ est dense dans la \overline{F} -strate $\mathfrak{Y}_{v_1} = G \cdot \mathfrak{Y}_{v_1}$ (2.6.2 (i)). Comme l'intersection $\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est un ouvert (dense) de ${}_F\mathcal{X}_v$, on obtient que l'intersection ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est dense dans ${}_F\mathcal{X}_v$. Cette intersection coïncide avec le sous-ensemble de l'énoncé (d'après la propriété d'unicité dans 2.6.4). Observons que puisque l'ensemble ${}_F\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{X}_v$ est non vide, on peut prendre v_1 dans ${}_F\mathcal{X}_v$. D'après 2.6.3 (ii), on a $(\mathbf{q}_F(v_1) = \mathbf{q}_{\text{géo}}(v) < \mathbf{q}_F(v)$. D'autre part pour $v' \in {}_F\mathfrak{Y}_{v_1} \cap {}_F\mathcal{X}_v$, on a $\mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}_F(v_1)$; donc $\mathbf{q}_F(v') < \mathbf{q}_F(v)$ et $v' \in {}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$. \square

COROLLAIRE 2.6.6. — *(Sous les hypothèses de 2.6.5.) Pour $v \in {}_F\mathcal{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$;
- (ii) la F -lame ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est ouverte dans ${}_F\mathcal{X}_v$;
- (iii) la F -lame ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est ${}_F P_v$ -invariante⁽²⁴⁾.

⁽²⁴⁾Rappelons que pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, on sait seulement que la F -lame ${}_F\mathfrak{Y}_v$ est ${}_F P_{v}$ -invariante.

Démonstration. — Si $\check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_v \neq \emptyset$ alors ${}_F\mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_v$; par conséquent (i) \Rightarrow (ii) et (i) \Rightarrow (iii). Si la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est ouverte dans ${}_F\mathcal{X}_v$, le bord ${}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v$ est fermé dans ${}_F\mathcal{X}_v$ et il ne peut pas être dense dans ${}_F\mathcal{X}_v$; par conséquent (ii) \Rightarrow (i) (d'après 2.6.5).

Prouvons (iii) \Rightarrow (ii). Choisissons un tore maximal T' de G (pas forcément défini sur F) qui soit contenu dans ${}_FP_v \cap P_v$. Il existe un $p \in {}_FP_v$ tel que $T = pT'p^{-1}$ soit un tore F -déployé maximal de ${}_FP_v$. Soit $v' = p' \cdot v$. On a

$$P_{v'} = p'P_v p'^{-1} \supset p'T'p'^{-1} = T \quad \text{et} \quad \check{X}(T)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_{v'} = \{\mu'\}.$$

En particulier v' appartient à ${}_F\mathcal{N}$ et $\check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_{v'} \neq \emptyset$ ce qui assure que la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_{v'}$ est ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_{v'}$. Si la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est ${}_FP_v$ -invariante, alors v' appartient à ${}_F\mathcal{Y}_v$, ${}_F\mathcal{Y}_{v'} = {}_F\mathcal{Y}_v$ et ${}_F\mathcal{X}_{v'} = {}_F\mathcal{X}_v$. Par conséquent (iii) \Rightarrow (ii). \square

COROLLAIRE 2.6.7. — *Pour $v \in \mathcal{N}_F (= V(F) \cap {}_F\mathcal{N})$, la proposition 2.6.5 et le corollaire 2.6.6 restent vrais sans hypothèse sur F ou G (hormis l'hypothèse 2.4.20 que l'on suppose toujours vérifiée).*

Démonstration. — Pour $v \in \mathcal{N}_F$, on a (2.5.18)

$$\mathbf{A}_{F,v} = \check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_{F^{\text{sep}},v}, \quad {}_F\mathcal{X}_v = {}_{F^{\text{sep}}}\mathcal{X}_v, \quad {}_F\mathcal{Y}_v = {}_{F^{\text{sep}}}\mathcal{Y}_v.$$

D'où le corollaire puisque F^{sep} est infini et que G est F^{sep} -déployé. \square

EXEMPLE 2.6.8. — Reprenons l'exemple de [H1, 5.6]. Supposons $p > 1$.

- (i) Considérons l'action du groupe $G = \text{SL}_2$ sur $V = \mathbb{A}_F^2$ définie par le morphisme $G \rightarrow G$, $g \mapsto \rho(g)$ donné par $\rho(g)_{i,j} = g_{i,j}^p$ (pour $g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$) ; c'est-à-dire que pour $v = (x, y) \in V$, on note $g \cdot v = (x', y') \in V$ l'élément défini par $\rho(v) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Supposons $xy \neq 0$ et $xy^{-1} \notin F^p$. L'élément v n'est pas F -instable : il appartient à $V(F) \setminus \mathcal{N}_F$. En revanche il appartient à $\mathcal{N}_{F^{\text{rad}}}$: pour $\alpha \in F^{\text{rad}}$ tel que $\alpha^p = xy^{-1}$, le co-caractère $\lambda_\alpha \in \check{X}_{F[b]}(G)$ défini par $t^{\lambda_\alpha} = \begin{pmatrix} t^{-1} & \alpha(t - t^{-1}) \\ 0 & t \end{pmatrix}$ vérifie $t^{\lambda_\alpha} \cdot v = t^p v$.
- (ii) Considérons l'action du groupe $G = \text{SL}_3$ sur $V = \mathbb{A}_F^3$ définie comme en (i) par le morphisme $G \rightarrow G$, $(g_{i,j}) \mapsto (g_{i,j}^p)$. L'élément $v = (x, y, 0)$ est dans \mathcal{N}_F . Supposons $xy \neq 0$ et $xy^{-1} \notin F^p$. Le co-caractère $t \mapsto \text{diag}(t, t, t^{-2})$ appartient à $\Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$; d'autre part le co-caractère $t \mapsto \text{diag}(t^{\lambda_\alpha}, 1)$ appartient à Λ_v^{opt} , où l'on a identifié diagonalement SL_2 à $\text{SL}_2 \times \{1\} \subset \text{SL}_3$. Dans ce cas on a $\check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_v = \emptyset$. La F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ de ${}_F\mathcal{N}$ est l'ensemble des $v' = (x', y', z')$ tels que $z' = 0$, $x'y' \neq 0$ et $x'y'^{-1} \notin F^p$. Son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$ est le sous-espace $\overline{F} \times \overline{F} \times \{0\}$ de V . La \overline{F} -lame \mathcal{Y}_v de \mathcal{N} est l'ensemble des $v' = (x', y', z')$ tels que $z' = 0$, $x'y' \neq 0$ et $yx' = xy'$. Son \overline{F} -saturé \mathcal{X}_v est le sous-espace $\{(x', yx^{-1}x', 0) \mid x' \in \overline{F}\}$ de V . D'autre part pour tout $v' \in {}_F\mathcal{X}_v \setminus {}_F\mathcal{Y}_v$ tel que $x'y' \neq 0$, on a $\check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{A}_{v'} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(v) = \mathfrak{Y}_{v'}$.

¶ *Une hypothèse simplificatrice.* — On a vu en 2.5 que les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$ qui possèdent un point F -rationnel — ou, ce qui revient au même, les F -strates de \mathcal{N}_F

— se comportent bien par extension séparable (algébrique ou non) du corps de base. On ramène donc facilement la théorie au cas où $F = F^{\text{sép}}$, ce qui entraîne automatiquement que G est F -déployé. Le passage de $F = F^{\text{sép}}$ à $\bar{F} = F^{\text{rad}}$ est, comme on vient de le voir, nettement plus compliqué.

Les difficultés proviennent des éléments $v \in \mathcal{N}_F$ tels que $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v = \emptyset$. Pour F quelconque, ces difficultés disparaissent si l'on fait l'hypothèse suivante⁽²⁵⁾ :

HYPOTHÈSE 2.6.9. — *Pour tout $v \in \mathcal{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$.*

Considérons aussi l'hypothèse (plus forte) suivante :

HYPOTHÈSE 2.6.10. — *Pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$.*

Soit $\tilde{F} \subset F^{\text{sép}}$ une extension galoisienne finie de F déployant G . Fixons une \tilde{F} -paire parabolique minimale $(\tilde{P}_0, \tilde{A}_0)$ de G telle que $A_0 \subset \tilde{A}_0$ et $\tilde{P}_0 \subset P_0$. On peut supposer que le tore \tilde{F} -déployé maximal \tilde{A}_0 de G est défini sur F . La paire $(\tilde{P}_0, \tilde{A}_0)$ définit un sous-ensemble

$$\Lambda_{\tilde{F}, \text{st}} = \Lambda_{\tilde{F}, \text{st}}^G(V, e_V) \subset \check{X}(\tilde{A}_0)_{\mathbb{Q}}$$

de co-caractères virtuels \tilde{F} -optimaux qui sont en position standard (relativement à $(\tilde{P}_0, \tilde{A}_0)$). Elle définit aussi un sous-ensemble

$$\Lambda_{\text{st}} = \Lambda_{\text{st}}^G(V, e_V) \subset \check{X}(\tilde{A}_0)_{\mathbb{Q}}$$

de co-caractères virtuels \bar{F} -optimaux qui sont en position standard (relativement à $(\tilde{P}_0, \tilde{A}_0)$). D'après 2.6.4, on a l'inclusion

$$\Lambda_{\text{st}} \subset \Lambda_{\tilde{F}, \text{st}}$$

avec égalité si l'hypothèse 2.6.10 est vérifiée pour \tilde{F} , c'est-à-dire si $\check{X}_{\tilde{F}}(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$ pour tout $v \in {}_{\tilde{F}}\mathcal{N}$.

LEMME 2.6.11. — *Si l'hypothèse 2.6.10 est vérifiée, on a l'égalité*

$$\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\text{st}} = \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\tilde{F}, \text{st}}.$$

Démonstration. — On a clairement l'inclusion $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\text{st}} \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\tilde{F}, \text{st}}$. Soit $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\tilde{F}, \text{st}}$ et soit $v \in V_{\mu, 1}$ tel que $\mu \in \Lambda_{\tilde{F}, v}$. On a donc $\check{X}(\tilde{A}_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\tilde{F}, v} = \{\mu\}$ et $V_{\mu, 1} = {}_{\tilde{F}}\mathcal{X}_v$. Puisque par hypothèse le co-caractère virtuel μ est défini sur F , la variété $V_{\mu, 1}$ est contenue dans ${}_F\mathcal{N}$ et μ appartient à $\Lambda_{F, v}$ (i.e. $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{F, v} = \{\mu\}$). Si l'hypothèse 2.6.10 est vérifiée, alors $\mathbf{q}(v) = \mathbf{q}_F(v)$ et μ appartient à Λ_v . \square

LEMME 2.6.12. — *On a l'inclusion*

$$\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\text{st}} \subset \Lambda_{F, \text{st}}$$

avec égalité si F est infini et si l'hypothèse 2.6.10 est vérifiée (on suppose toujours que l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée) ; auquel cas toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point

⁽²⁵⁾On verra dans la section 3 que dans le cas où F est un corps localement compact ou un corps global et V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison (avec $e_V = 1$), l'hypothèse 2.6.9 est toujours vérifiée.

F -rationnel et l'application $Y \mapsto {}_F\mathcal{N} \cap Y$ induit une bijection entre les \overline{F} -strates de \mathcal{N} qui intersectent non trivialement ${}_F\mathcal{N}$ et les F -strates de ${}_F\mathcal{N}$.

Démonstration. — Puisque $\mathbf{\Lambda}_{\text{st}} \subset \mathbf{\Lambda}_{\tilde{F},\text{st}}$, on a $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\text{st}} \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\tilde{F},\text{st}}$. D'autre part puisque l'extension \tilde{F}/F est séparable, on a $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\tilde{F},\text{st}} \subset \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$ avec égalité si toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel (2.5.21). D'où l'inclusion $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\text{st}} \subset \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$.

Supposons que F soit infini et que l'hypothèse 2.6.10 soit vérifiée. Jointes à 2.4.20, ces hypothèses assurent que toute F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel (cf. 2.5.15). D'où l'égalité $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}} = \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\tilde{F},\text{st}}$; puis l'égalité $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\text{st}} = \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$ (grâce à 2.6.11). Quant à la dernière assertion du lemme, soit $v' \in \mathfrak{J}_v \cap {}_F\mathcal{N}$ pour un élément $v \in {}_F\mathcal{N}$. Soient μ et μ' les éléments de $\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}$ associés respectivement à v et v' . Quitte à remplacer v par $g \cdot v$ et v' par $g' \cdot v'$ pour des éléments $g, g' \in G(F)$, on peut supposer que ${}_F P_v \supset P_0$ et ${}_F P_{v'} \supset P_0$. Posons $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F,v} = \{\mu\}$ et $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F,v'} = \{\mu'\}$. Alors $\mu \in \mathbf{\Lambda}_v$ et $\mu' \in \mathbf{\Lambda}_{v'}$. Puisque μ et μ' appartiennent à $\mathbf{\Lambda}_{\text{st}}$ et que v et v' sont dans la même \overline{F} -strate de \mathcal{N} , on a forcément $\mu = \mu'$. Par conséquent v et v' sont dans la même F -strate de ${}_F\mathcal{N}$. \square

LEMME 2.6.13. — Si l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée, on a l'inclusion

$$\mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^* \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\text{st}}$$

et l'application $Y \mapsto \mathcal{N}_F \cap Y$ induit une bijection entre les \overline{F} -strates de \mathcal{N} qui intersectent non trivialement \mathcal{N}_F et les F -strates de \mathcal{N}_F .

Démonstration. — Pour $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,\text{st}}^*$, il existe un $v \in V_{\mu,1}(F)$ tel que $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,v}$. Puisque $v \in \mathcal{N}_F$, si l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée, on a $\mathbf{\Lambda}_{F,v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$. Par conséquent μ appartient à $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{\text{st}}$. On prouve la dernière assertion du lemme comme dans la preuve de 2.6.12. \square

2.7. Le critère de Kirwan-Ness (cas d'un G -module). — Dans cette sous-section, on suppose que V est un G -module défini sur F (avec $e_V = 0$). Puisque V est lisse, l'hypothèse de régularité 2.4.20 est automatiquement vérifiée. On reprend les notations introduites en 2.4 (\blacktriangleright *Interlude dans le cas d'un G -module*).

Pour un co-caractère $\lambda \in \check{X}(G) \setminus \{0\}$ et un tore T de M_λ contenant $\text{Im}(\lambda)$, notons T^λ le sous-tore de T défini par

$$T^\lambda = \langle \text{Im}(\mu) \mid \mu \in \check{X}(T), (\mu, \lambda) = 0 \rangle.$$

On a la décomposition

$$T = T^\lambda \text{Im}(\lambda) \quad \text{et} \quad \check{X}(T^\lambda)_{\mathbb{Q}} = \left\{ \mu - \frac{(\mu, \lambda)}{(\lambda, \lambda)} \lambda \mid \mu \in \check{X}(T)_{\mathbb{Q}} \right\}.$$

Précisément, le morphisme produit $T^\lambda \times \text{Im}(\lambda) \rightarrow T$ est surjectif et c'est une isogénie (pas forcément séparable), d'où la décomposition

$$\check{X}(T)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(T^\lambda)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}\lambda.$$

On a défini en 2.4 des isomorphismes \mathbb{Q} -linéaires

$$\iota_T : X(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(T)_{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad \iota_{T^\lambda} : X(T^\lambda)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(T^\lambda)_{\mathbb{Q}}.$$

Pour $\chi \in X(T)$, on a

$$\iota_{T^\lambda}(\chi|_{T^\lambda}) = \iota_T(\chi) - \frac{(\iota_T(\chi), \lambda)}{(\lambda, \lambda)} \lambda.$$

REMARQUE 2.7.1. — Si $v \in V_\lambda(k) \setminus \{0\}$ pour un entier $k > 0$, alors

$$\mathcal{K}_{T^\lambda}(v) = \left\{ \mu - \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda \mid \mu \in \mathcal{K}_T(v) \right\}$$

et (puisque λ est orthogonal à $\check{X}(T^\lambda)_{\mathbb{Q}}$)

$$\mu^{T^\lambda}(v) = \mu^T(v) - \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda.$$

Supposons de plus que T soit un tore maximal de M_λ . On pose alors

$$M_\lambda^\perp = \langle T^\lambda, (M_\lambda)_{\text{der}} \rangle.$$

Puisque $\text{Int}_m(T^\lambda) = (\text{Int}_m(T))^\lambda$ pour tout $m \in M_\lambda$ et que $(M_\lambda)_{\text{der}}$ est distingué dans M_λ , le groupe M_λ^\perp ne dépend pas de T . On a la décomposition

$$M_\lambda^\perp = T^\lambda (M_\lambda)_{\text{der}}$$

et le groupe M_λ^\perp est réductif connexe ([**Sp**, cor. 2.2.7], [**B**, IV.14.2]). Si α est une racine de T dans M_λ , alors $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ d'où $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle = 0$ et $\text{Im}(\check{\alpha}) \subset T^\lambda$. Puisque les $\text{Im}(\check{\alpha})$ engendrent un tore maximal du groupe dérivé $(M_\lambda)_{\text{der}}$, cela prouve que T^λ est un tore maximal de M_λ^\perp .

¶ *Le critère de Kirwan-Ness géométrique.* — Pour un co-caractère $\lambda \in \check{X}(G) \setminus \{0\}$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$, le \overline{F} -espace vectoriel $V_\lambda(k)$ est muni d'une structure de M_λ -module. Si de plus λ est primitif, le critère de Kirwan-Ness géométrique dit que la v -optimalité de λ pour un élément $v \in V_{\lambda, k}$ équivaut à la M_λ^\perp -semi-simplicité de la composante $v_\lambda(k)$ de v sur $V_\lambda(k)$. Précisément (cf. [**Ts**, 2.8] pour une démonstration valable en toute caractéristique) :

PROPOSITION 2.7.2. — $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ si et seulement si $v_\lambda(k)$ est M_λ^\perp -semi-stable, i.e. appartient à $V_\lambda(k) \setminus \mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$; auquel cas $\Lambda_v^{\text{opt}} = \Lambda_{v_\lambda(k)}^{\text{opt}}$ et $P_\lambda = P_v = P_{v_\lambda(k)}$.

En particulier on a

$$\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}} \Rightarrow \mathcal{Y}_v + V_{\lambda, k+1} = \mathcal{Y}_v.$$

REMARQUE 2.7.3. — D'après 2.2.8(ii), on a aussi que $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ si et seulement s'il existe une fonction polynomiale $f \in \overline{F}[V_\lambda(k)]^{M_\lambda^\perp}$ homogène de degré ≥ 1 telle que $f(v_\lambda(k)) \neq 0$.

L'espace projectif

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\overline{F}^\times$$

est encore un G -module. On note $q = q_V : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ la projection naturelle. Pour $v \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$, d'après le critère de Kirwan-Ness, la composante $\overline{v} = v_\lambda(k)$ de v sur $V_\lambda(k)$ est dans la lame \mathcal{Y}_v et elle vérifie

$$\overline{F}^\times \cdot \overline{v} \subset M_\lambda \cdot \overline{v} \subset V_\lambda(k) \cap \mathcal{Y}_v.$$

On en déduit (grâce à loc. cit.) que

$$\overline{F}^\times \cdot \mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_v.$$

Notons $\text{Stab}_G(q(\overline{v})) = G^{q(\overline{v})}(\overline{F})$ le stabilisateur de $q(\overline{v})$ dans G [B, ch. II, 1.7] :

$$\text{Stab}_G(q(\overline{v})) = \{g \in G \mid g \cdot \overline{v} \in \overline{F}^\times \overline{v}\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de G qui contient $\text{Im}(\lambda)$ et le stabilisateur $\text{Stab}_G(\overline{v})$ de \overline{v} dans G .

LEMME 2.7.4. — Soient $v \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$, $k = m_v(\lambda)$ et $\overline{v} = v_\lambda(k)$.

(i) On a $\text{Stab}_G(q(\overline{v})) = \text{Im}(\lambda) \rtimes \text{Stab}_G(\overline{v})$.

(ii) Si T^\natural est un tore maximal de $\text{Stab}_G(q(\overline{v}))$, on a $\check{X}(T^\natural) \cap \Lambda_v^{\text{opt}} = \{\lambda^\natural\}$.

Démonstration. — Posons $G^\natural = \text{Stab}_G(q(\overline{v}))$. Pour $g \in G^\natural$, notons $a_g \in \overline{F}^\times$ l'élément défini par $g \cdot \overline{v} = a_g \overline{v}$. L'application $g \mapsto a_g$ est un élément de $X(G^\natural)$ et pour chaque $g \in G^\natural$, il existe un $t \in \overline{F}^\times$ tel que $t^\lambda a_g = 1$. Cela implique (i).

Comme $\text{Stab}_G(\overline{v}) \subset P_{\overline{v}} = P_\lambda$ et $\text{Im}(\lambda) \subset P_\lambda$, d'après (i) on a l'inclusion $G^\natural \subset P_\lambda$. Soit T^\natural un tore maximal de G^\natural . Puisque tous les tores maximaux de G^\natural sont conjugués dans G^\natural , il existe un $g^\natural \in G^\natural$ tel que

$$\text{Im}(g^\natural \bullet \lambda) = g^\natural \bullet \text{Im}(\lambda) \subset T^\natural.$$

Comme $g^\natural \in P_\lambda$, le co-caractère $\lambda^\natural = g^\natural \bullet \lambda$ est v -optimal et c'est l'unique élément de $\check{X}(T^\natural) \cap \Lambda_v^{\text{opt}}$. \square

¶ *Le critère de Kirwan-Ness rationnel.* — On prouve dans ce paragraphe la version F -rationnelle du critère de Kirwan-Ness. Il suffit pour cela de reprendre la preuve de Tsuji [Ts, 2.8] en remplaçant les tores maximaux par les tores F -déployés maximaux.

Pour $\lambda \in \check{X}_F(V)$ et $i \in \mathbb{Z}$, le sous-espace $V_\lambda(i)$ est muni d'une structure de M_λ -module défini sur F . La projection $V_{\lambda,i} \rightarrow V_\lambda(i)$, $v \mapsto v_\lambda(i)$ est elle aussi définie sur F . On a défini plus haut le sous-groupe $M_\lambda^\perp = \langle T^\lambda, (M_\lambda)_{\text{der}} \rangle$ de M_λ , où T est un tore maximal de M_λ . C'est un groupe réductif connexe, défini sur F puisque M_λ l'est (il suffit de prendre T défini sur F). Soit S un tore de M_λ contenant $\text{Im}(\lambda)$. Si S est défini sur F , resp. F -déployé, alors S^λ l'est aussi ; et si S est un tore F -déployé maximal de M_λ , alors S^λ est un tore F -déployé maximal de M_λ^\perp . En effet dans ce dernier cas, en prenant pour T un tore maximal de M_λ défini sur F et contenant S , on a

$$\check{X}(S) = \check{X}_F(T) \quad \text{et} \quad S^\lambda = S \cap T^\lambda.$$

LEMME 2.7.5. — Soit S un tore F -déployé maximal de G et soit $v \in V \setminus \{0\}$ un élément S -instable (donc (F, S) -instable puisque $\check{X}_F(S) = \check{X}(S)$). Posons $\lambda = \lambda^S(v)$ et $k = m_v(\lambda)$. Pour tout $v' \in v + V_{\lambda, k+1}$, on a $\mu^S(v') = \mu^S(v)$ et $\lambda^S(v') = \lambda$ (cf. 2.4 pour les notations).

Démonstration. — La preuve est identique à celle de [Ts, lemma 2.7] ; le fait que S ne soit pas un tore maximal de G ne change rien à l'affaire. \square

PROPOSITION 2.7.6. — Soient $\lambda \in \check{X}_F(G)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $v \in V$ tels que $m_v(\lambda) = k$. On suppose que λ est primitif. Alors $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ si et seulement si $v_\lambda(k)$ est (F, M_λ^\perp) -semi-stable, i.e. appartient à $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$, auquel cas

$$\Lambda_{F,v}^{\text{opt}} = \Lambda_{F, v_\lambda(k)}^{\text{opt}} \quad \text{et} \quad P_\lambda = {}_F P_v = {}_F P_{v_\lambda(k)}.$$

Démonstration. — On reprend celle de [Ts, theorem 2.8]. Observons que l'élément $\bar{v} = v_\lambda(k)$ est (F, M_λ^\perp) -semi-stable si et seulement si pour tout tore F -déployé maximal S de M_λ , il est S^λ -semi-stable ; ce qui équivaut à $\mu^{S^\lambda}(\bar{v}) = 0$, ou encore (d'après 2.7.1) à $\mu^S(\bar{v}) = \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda$. Soit S un tore F -déployé maximal de M_λ . Puisque $\text{Im}(\lambda) \subset S$, v est S -instable. Posons $\lambda_1 = \lambda^S(v)$ et $k_1 = m_v(\lambda_1)$. D'après 2.7.5, on a donc

$$\mu^S(v) = \mu^S(v_{\lambda_1}(k_1)) \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda^S(v_{\lambda_1}(k_1)).$$

Supposons que λ soit (F, v) -optimal. Alors S est (F, v) -optimal (relativement à l'action de G sur V) et $\lambda_1 = \lambda$. Par conséquent $\mu^S(\bar{v})$ et λ sont proportionnels, ce qui équivaut (d'après 2.7.1) à $\mu^{S^\lambda}(\bar{v}) = 0$. Puisque cela vaut pour tout tore F -déployé maximal S de M_λ , on a montré que \bar{v} est (F, M_λ^\perp) -semi-stable.

Réciproquement, supposons que \bar{v} soit (F, M_λ^\perp) -semi-stable. Soit S' un tore F -déployé maximal de G contenu dans $P_\lambda \cap {}_F P_v$. Choisissons un $u \in U_\lambda(F)$ tel que $S = uS'u^{-1}$ soit contenu dans M_λ . Alors \bar{v} est S^λ -semi-stable par hypothèse. Par conséquent $\mu^{S^\lambda}(\bar{v}) = 0$ et $\lambda = \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \mu^S(\bar{v})$ (2.7.1). On a donc $\lambda = \lambda^S(\bar{v}) = \lambda^S(v)$ (2.7.5). Puisque $u \cdot v - v \in V_{\lambda, k+1}$, on a $(u \cdot v)_\lambda(k) = \bar{v}$. On a donc aussi $\lambda = \lambda^S(u \cdot v)$. Or ${}_F P_{u \cdot v} = u({}_F P_v)u^{-1} \supset S$ et S est un tore F -déployé maximal de G qui est $(F, u \cdot v)$ -optimal. Donc $\check{X}(S) \cap \Lambda_{F, u \cdot v}^{\text{opt}} = \{\lambda\}$ et $\Lambda_{F, u \cdot v}^{\text{opt}} = \Lambda_{F, v}^{\text{opt}}$. \square

COROLLAIRE 2.7.7. — Si $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ alors ${}_F \mathcal{Y}_v + V_{\lambda, k+1} = {}_F \mathcal{Y}_v$.

On aimerait pouvoir tester la F -semi-stabilité sur un tore F -déployé maximal de M_λ^\perp plutôt que sur le groupe M_λ^\perp tout entier. L'intersection $P_\lambda \cap {}_F P_v$ contient un tore F -déployé maximal S' de G et l'on peut toujours choisir un élément $u \in U_\lambda(F)$ tel que le tore $S = uS'u^{-1}$ soit contenu dans M_λ (cet argument est utilisé dans la preuve de 2.7.6). On en déduit le

COROLLAIRE 2.7.8. — (Sous les hypothèses de 2.7.6.) $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ si et seulement s'il existe un tore F -déployé maximal S de M_λ et un élément $u \in U_\lambda(F)$ tel que $u^{-1}Su \subset {}_F P_{v_\lambda(k)}$ et $v_\lambda(k)$ soit S^λ -semi-stable.

Démonstration. — Posons $\bar{v} = v_\lambda(k)$. Si $\lambda \in \Lambda_{F,\bar{v}}^{\text{opt}}$, alors \bar{v} est (F, M_λ^\perp) -semi-stable et ${}_F P_{\bar{v}} = {}_F P_v = P_\lambda$. Dans ce cas, pour tout tore F -déployé maximal S de M_λ et tout élément $u \in U_\lambda(F)$, on a $u^{-1}Su \subset {}_F P_{\bar{v}}$ et \bar{v} est S^λ -semi-stable. Réciproquement, supposons qu'il existe une telle paire (S, u) . Alors S est contenu dans ${}_F P_{v'}$ où l'on a posé $v' = u \cdot \bar{v}$. Par conséquent $\check{X}(S) \cap \Lambda_{F,v'}^{\text{opt}} = \{\lambda'\}$ et λ' est l'unique co-caractère primitif de S qui soit proportionnel à $\mu^S(v')$. Comme $v' \in \bar{v} + V_{\lambda,k+1}$, on a (d'après 2.7.1) $\mu^S(v') = \mu^S(\bar{v})$; et comme \bar{v} est S^λ -semi-stable, on obtient $\mu^S(v') = \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda$. Donc $\lambda' = \lambda$ appartient à $\Lambda_{F,v'}^{\text{opt}}$. Comme $v' - v$ appartient à $V_{\lambda,k+1}$ et que (d'après 2.7.7) ${}_F \mathcal{Z}_{v'} + V_{\lambda,k+1} = {}_F \mathcal{Z}_{v'}$, cela entraîne que v appartient à ${}_F \mathcal{Z}_{v'}$ et donc que λ appartient à $\Lambda_{F,v}^{\text{opt}} = \Lambda_{F,v'}^{\text{opt}}$. \square

Notons A_λ le tore central F -déployé maximal de M_λ et posons

$$A_\lambda^\perp = (A_\lambda)^\lambda (= \langle \text{Im}(\mu) \mid \mu \in \check{X}(A_\lambda), (\lambda, \mu) = 0 \rangle).$$

Observons que le F -sous-groupe parabolique P_λ de G est minimal (parmi les F -sous-groupes paraboliques de G) si et seulement si A_λ est l'unique tore F -déployé maximal de M_λ ; auquel cas un élément est (F, M_λ^\perp) -semi-stable si et seulement s'il est A_λ^\perp -semi-stable. En général (i.e. sans supposer P_λ minimal), on se ramène au tore A_λ grâce au

LEMME 2.7.9. — *(Sous les hypothèses de 2.7.6.) Soit S un tore F -déployé maximal de M_λ . L'élément $v_\lambda(k)$ est S^λ -semi-stable si et seulement s'il est A_λ^\perp -semi-stable et $\|\mu^S(v_\lambda(k))\| = \|\mu^{A_\lambda}(v_\lambda(k))\|$.*

Démonstration. — Posons $\bar{v} = v_\lambda(k)$. Rappelons qu'on a noté $\mathcal{R}'_S(\bar{v})$ l'ensemble des $\chi \in X(S)$ tels que $\bar{v}_\chi \neq 0$ et $\mathcal{K}_S(\bar{v})$ l'enveloppe convexe de $\iota_S(\mathcal{R}'_S(\bar{v}))$ dans $\check{X}(S)_\mathbb{Q}$. La surjection naturelle $X(S) \rightarrow X(A_\lambda)$, $\chi \mapsto \chi|_{A_\lambda}$ se restreint en une application surjective $\mathcal{R}'_S(\bar{v}) \rightarrow \mathcal{R}'_{A_\lambda}(\bar{v})$. Posons

$$\bar{X} = \ker(X(S) \rightarrow X(A_\lambda)) = \ker(X(S^\lambda) \rightarrow X(A_\lambda^\perp)).$$

On a la décomposition

$$\check{X}(S)_\mathbb{Q} = \check{X}(A_\lambda)_\mathbb{Q} \oplus \text{Hom}(\bar{X}, \mathbb{Q})$$

et $\mathcal{K}_{A_\lambda}(\bar{v})$ est la projection orthogonale de $\mathcal{K}_S(\bar{v})$ sur $\check{X}(A_\lambda)_\mathbb{Q}$. D'où l'inégalité

$$\|\mu^{A_\lambda}(\bar{v})\| \leq \|\mu^S(\bar{v})\|.$$

D'autre part on a

$$\mu^{A_\lambda}(\bar{v}) = \mu^{A_\lambda^\perp}(\bar{v}) + \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda \quad \text{et} \quad \mu^S(\bar{v}) = \mu^{S^\lambda}(\bar{v}) + \frac{k}{(\lambda, \lambda)} \lambda.$$

On en déduit que $\mu^{S^\lambda}(\bar{v}) = 0$ si et seulement si $\mu^{A_\lambda^\perp}(\bar{v}) = 0$ et $\|\mu^S(\bar{v})\| = \|\mu^{A_\lambda}(\bar{v})\|$. D'où le lemme. \square

On peut comparer le critère de Kirwan-Ness rationnel avec le critère de Kirwan-Ness géométrique :

PROPOSITION 2.7.10. — Soient $v \in {}_F\mathcal{N}$, $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$. Supposons que F soit infini et G soit F -déployé ; ou bien que v appartienne à \mathcal{N}_F . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ (i.e. $\frac{1}{k}\lambda \in \mathbf{\Lambda}_v$) ;
- (ii) $v_\lambda(k) \notin \mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$;
- (iii) $\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0) \neq V_\lambda(k)$;
- (iv) l'ensemble $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est ouvert dans $V_\lambda(k)$;
- (v) l'ensemble $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est M_λ -invariant.

Démonstration. — L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est le critère de Kirwan-Ness géométrique. D'après le critère de Kirwan-Ness rationnel (2.7.6) on a

$$V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0) = \{v'_\lambda(k) \mid v' \in {}_F\mathcal{Z}_v\}.$$

D'après 2.7.7, on en déduit que $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est ouvert dans $V_\lambda(k)$ si et seulement si ${}_F\mathcal{Z}_v$ est ouvert dans $V_{\lambda,k}$; et que $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est M_λ -invariant si et seulement si ${}_F\mathcal{Z}_v$ est P_λ -invariant. Grâce à 2.6.6 et 2.6.7, on obtient que les conditions (i), (iv) et (v) sont équivalentes.

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est claire. Supposons que $\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0) \neq V_\lambda(k)$. Puisque $\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est fermé dans $V_\lambda(k)$ et contient ${}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$, cela entraîne que $V_\lambda(k) \setminus {}_F\mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ contient un ouvert non vide de $V_\lambda(k)$. Par conséquent la F -lame ${}_F\mathcal{Z}_v$ contient un ouvert non vide de ${}_F\mathcal{Z}_v = V_{\lambda,k}$, ce qui n'est possible que si $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ (d'après 2.6.5 et 2.6.7). Donc (iii) \Rightarrow (i). \square

¶ *Séparabilité et rationalité.* — Reprenons l'espace projectif

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\overline{F}^\times$$

et la projection naturelle $q = q_V : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Soient $v \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Lambda_v^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda) \in \mathbb{N}^*$. Notons $\overline{v} = v_\lambda(k)$ la composante de v sur $V_\lambda(k)$.

Si λ' est un autre élément de Λ_v^{opt} , alors $\lambda' = u \bullet \lambda$ pour un unique $u \in U_v = U_\lambda$ et

$$v_{\lambda'}(k) = (u \cdot v)_{\lambda'}(k) = u \cdot \overline{v} \in \overline{v} + V_{\lambda,k+1} ;$$

en particulier $v_{\lambda'}(k)$ est séparable si et seulement si \overline{v} est séparable.

Plus généralement, pour $p \in P_v = P_\lambda$, on a

$$(p \cdot v)_{p \bullet \lambda}(k) = p \cdot \overline{v} \in m \cdot \overline{v} + V_{\lambda,k+1} \quad \text{si } p \in mU_v \text{ avec } m \in M_\lambda.$$

On en déduit que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- \overline{v} est séparable ;
- il existe un $w \in P_v \cdot v$ et un $\lambda' \in \Lambda_v^{\text{opt}} = \Lambda_w^{\text{opt}}$ tels que $w_{\lambda'}(k)$ soit séparable.

LEMME 2.7.11. — Supposons que l'élément $\overline{v} = v_\lambda(k)$ soit séparable, i.e. que le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{v}}$, $g \mapsto g \cdot \overline{v}$ soit séparable.

(i) L'élément $q(\overline{v})$ est séparable, i.e. le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}_{q(\overline{v})}$, $g \mapsto g \cdot q(\overline{v}) = q(g \cdot \overline{v})$ est séparable.

(ii) Si $\overline{v} \in V(F)$, alors \overline{v} appartient à \mathcal{N}_F , $\mathbf{\Lambda}_{F,\overline{v}} = \check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \mathbf{\Lambda}_v$, ${}_F P_{\overline{v}} = P_v$ et

$$\mathcal{Z}_{F,\overline{v}} = V(F) \cap \mathcal{Z}_v.$$

(iii) Si $\bar{v} \in V(F)$ et si pour tout $v' \in V(F) \cap (\mathfrak{Y}_v \setminus \mathfrak{Z}_v)$, il existe un élément $w \in \mathfrak{Z}_{v'}$ et un co-caractère $\lambda' \in \Lambda_w^{\text{opt}} = \Lambda_{v'}^{\text{opt}}$ tels que l'élément $w_{\lambda'}(k)$ soit séparable et appartienne à $V(F)$, alors

$$\mathfrak{Y}_{F,\bar{v}} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_v.$$

Démonstration. — Prouvons (i). Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\bar{v}}$ et $\mathbf{O} = \mathcal{O}_{q(\bar{v})}$. Notons $\pi_{\bar{v}} : G \rightarrow \mathcal{O}$ et $\pi_{q(\bar{v})} : G \rightarrow \mathbf{O}$ les morphismes orbites. Le morphisme $d(\pi_{\bar{v}})_1 : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\bar{v}}(\mathcal{O})$ est par hypothèse surjectif. Puisque $\pi_{q(\bar{v})} = (\mathcal{O} \xrightarrow{q} \mathbf{O}) \circ \pi_{\bar{v}}$, pour prouver que le morphisme $\pi_{q(\bar{v})}$ est séparable, il suffit de prouver que le morphisme $q|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{O}$ est séparable. Comme $t^\lambda \cdot \bar{v} = t^k \bar{v}$ pour tout $t \in \bar{F}^\times$, la G -orbite \mathcal{O} contient $\bar{F}^\times \bar{v}$ et $q|_{\mathcal{O}}$ est un \mathbb{G}_m -fibré principal localement trivial. Cela assure que pour chaque $v' \in \mathcal{O}$, le morphisme

$$d(q|_{\mathcal{O}})_{v'} : T_{v'}(\mathcal{O}) \rightarrow T_{q(v')}(\mathbf{O})$$

est surjectif.

Prouvons (ii). Supposons $\bar{v} \in V(F)$. Alors $q(\bar{v}) \in \mathbb{P}(V)(F)$ et puisque $q(\bar{v})$ est séparable (d'après (i)), le stabilisateur schématique $G^\natural = G^{q(\bar{v})}$ est lisse, i.e. il coïncide avec le stabilisateur $\text{Stab}_G(q(\bar{v}))$ au sens de Borel (cf. [B, ch. II, 6.7]). On peut donc choisir un tore maximal T^\natural de G^\natural qui soit défini sur F . D'après 2.7.4 (ii), on a $\check{X}(T^\natural) \cap \Lambda_v^{\text{opt}} = \{\lambda^\natural\}$. Puisque T se déploie sur $F^{\text{sép}}$, le co-caractère λ^\natural est défini sur $F^{\text{sép}}$. En particulier \bar{v} appartient à $V(F) \cap \mathcal{N}_{F^{\text{sép}}} = \mathcal{N}_F$ et l'on a

$$\mathbf{\Lambda}_{F^{\text{sép}},\bar{v}} = \check{X}_{F^{\text{sép}}}(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F^{\text{sép}},\bar{v}} = V(F^{\text{sép}}) \cap \mathfrak{Z}_v.$$

Par descente séparable (2.5.18), on a aussi

$$\mathbf{\Lambda}_{F,\bar{v}} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F^{\text{sép}},\bar{v}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,\bar{v}} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_{F^{\text{sép}},\bar{v}}.$$

Cela prouve (ii).

Prouvons (iii). Puisque $\mathfrak{Y}_{F,\bar{v}} = G(F) \cdot \mathfrak{Y}_{F,\bar{v}}$ et (d'après (ii)) $\mathfrak{Y}_{F,\bar{v}} = V(F) \cap \mathfrak{Z}_v$, on a l'inclusion $\mathfrak{Y}_{F,\bar{v}} \subset V(F) \cap \mathfrak{Y}_v$. Quant à l'inclusion inverse, d'après (ii) il suffit de prouver l'inclusion

$$V(F) \cap (\mathfrak{Y}_v \setminus \mathfrak{Z}_v) \subset \mathfrak{Y}_{F,\bar{v}}.$$

Soient v' , w et λ' comme dans l'énoncé. Posons $\bar{w} = w_{\lambda'}(k)$; par hypothèse \bar{w} est séparable et appartient à $V(F)$. Il s'agit de prouver que \bar{v} et \bar{w} sont dans la même F -strate. D'après (ii), il existe des co-caractères $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$ et $\mu' \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_w$. Puisque v et w sont dans la même \bar{F} -strate, il existe un $g \in G = G(\bar{F})$ tel que $\mu' = \text{Int}_g \circ \mu$. On a donc $(P_{\mu'}, M_{\mu'}) = \text{Int}_g(P_\mu, M_\mu)$. Comme les paires paraboliques (P_μ, M_μ) et $(P_{\mu'}, M_{\mu'})$ sont définies sur F et conjuguées dans G , elles le sont dans $G(F)$: il existe un $x \in G(F)$ tel que $(P_{\mu'}, M_{\mu'}) = \text{Int}_x(P_\mu, M_\mu)$. L'élément $y = x^{-1}g$ stabilise (P_μ, M_μ) ; il appartient donc à M_μ et $y \bullet \mu = \mu$. On a donc $\mu' = x \bullet \mu$. Puisque (d'après (ii)) $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,\bar{v}}$ et $\mu' \in \mathbf{\Lambda}_{F,\bar{w}}$, cela entraîne que \bar{v} et \bar{w} sont dans la même F -strate et donc que $V(F) \cap \mathfrak{Y}_{v'} = \mathfrak{Y}_{F,\bar{w}}$ est une F -lame contenue dans $\mathfrak{Y}_{F,\bar{v}}$. D'où le point (iii). \square

2.8. Le cas d'un corps topologique. — Si F est un corps commutatif topologique (séparé, non discret) et si X est une variété définie sur F , on peut munir $X(F)$ de la topologie (forte) définie par F . On a (pour des F -variétés X et Y) :

- si $X = \mathbb{G}_a$, la topologie définie par F sur $X(F) = F$ est celle de F ;
- tout morphisme de F -variétés $\alpha : X \rightarrow Y$ induit une application continue $\alpha_F : X(F) \rightarrow Y(F)$ qui est un morphisme topologiquement fermé, resp. ouvert, si α est une immersion fermée, resp. ouverte.
- la bijection canonique $(X \times Y)(F) \rightarrow X(F) \times Y(F)$ est un homéomorphisme.

Pour alléger l'écriture, nous dirons « Top_F » au lieu de « la topologie définie par F ». Nous dirons aussi Top_F -ouvert, resp. Top_F -fermé (etc.), pour ouvert pour Top_F , fermé pour Top_F (etc.).

Continuons avec les hypothèses de 2.4. Il n'est pas nécessaire ici de supposer vérifiée l'hypothèse de régularité 2.4.20. On suppose jusqu'à la fin de 2.8 que F est un corps topologique et on munit $V(F)$ et $G(F)$ de Top_F . Cela fait de $V(F)$ un $G(F)$ -espace *topologique*, c'est-à-dire que l'application $G(F) \times V(F) \rightarrow V(F)$, $(g, v) \mapsto g \cdot v$ est continue pour Top_F .

Supposons tout d'abord que F soit un corps commutatif *localement compact* (non discret), c'est-à-dire :

- un corps local archimédien (i.e. isomorphe à \mathbb{R} ou \mathbb{C}) ;
- un corps local non archimédien (i.e. une extension finie de \mathbb{Q}_p ou une extension fini du corps des séries formelles $\mathbb{F}_p((t))$).

D'après [MB, 2.1.1], on a le

LEMME 2.8.1. — (F est un corps commutatif localement compact.) Soit X une F -variété irréductible et non singulière (i.e. lisse). Si Ω est un sous-ensemble non vide Top_F -ouvert de $X(F)$, alors Ω est Zariski-dense dans X .

REMARQUE 2.8.2. — D'après loc. cit., si de plus $X = \mathbb{A}_F^n$, le lemme 2.8.1 reste vrai pour n'importe quel corps commutatif topologique F (séparé, non discret).

Si P est un F -sous-groupe parabolique de G , puisque la variété quotient G/P est projective, l'ensemble $(G/P)(F) = G(F)/P(F)$ [B, ch. V, 20.5] de ses points F -rationnels est Top_F -compact. C'est cette propriété qui implique toutes les assertions qui vont suivre.

Pour $v \in \mathcal{N}_F$, l'ensemble $\mathcal{X}_{F,v}$ est Top_F -fermé dans $V(F)$. Comme l'espace quotient $G(F)/P_{F,v}$ est Top_F -compact, l'ensemble $\mathfrak{X}_{F,v} = G(F) \cdot \mathcal{X}_{F,v}$ est lui aussi Top_F -fermé dans $V(F)$. Puisque d'après 2.4.18 (i), il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles $\mathfrak{X}_{F,v}$ avec $v \in \mathcal{N}_F$, l'ensemble \mathcal{N}_F est Top_F -fermé dans $V(F)$; et pour $s \in \mathbb{Q}_+$, l'ensemble $\mathcal{N}_{F,<s}$ est lui aussi Top_F -fermé dans $V(F)$. Par conséquent pour $v \in \mathcal{N}_F$, les ensembles

$$\mathcal{X}_{F,v} \setminus \mathcal{Y}_{F,v} = \mathcal{X}_{F,v} \cap \mathcal{N}_{F,<q_F(v)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,v} \setminus \mathfrak{Z}_{F,v} = \mathfrak{X}_{F,v} \cap \mathcal{N}_{F,<q_F(v)}$$

sont Top_F -fermés dans $V(F)$; en d'autres termes, la F -lame $\mathcal{Y}_{F,v}$ est Top_F -ouverte dans $\mathcal{X}_{F,v}$ et la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,v}$ est Top_F -ouverte dans $\mathfrak{X}_{F,v}$. En particulier les F -lames et les F -strates de \mathcal{N}_F sont des sous-ensembles localement fermés de $V(F)$ pour Top_F .

Supposons maintenant que le corps (commutatif) topologique F soit un *corps valué admissible*, c'est-à-dire qu'il soit muni d'une valeur absolue ν telle que :

- (F, ν) est hensélien (i.e. si F' est une extension finie de F , il existe une *unique* valeur absolue ν' sur F' qui prolonge ν) ;
- le complété \widehat{F} de F pour la valeur absolue ν est une extension séparable de F .

REMARQUE 2.8.3. — Tout corps localement compact est *a fortiori* un corps valué admissible. D'autre part si F est un corps global et si v est une place de F , le corps valué (F, ν) est admissible (cf. A.1.5) et le complété F_v de F en v est un corps localement compact.

D'après [GMB, 3.6.2], on a la

PROPOSITION 2.8.4. — *((F, ν) est un corps valué admissible.)*

- (i) *Si X est une F -variété, alors $X(F)$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -dense dans $X(\widehat{F})$.*
- (ii) *Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre de F -variétés, alors $\pi_F(X(F))$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -fermé dans $Y(F)$.*

COROLLAIRE 2.8.5. — *Pour $v \in \mathcal{N}_F$, $\mathfrak{X}_{F,v}$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -fermé dans $V(F)$.*

Démonstration. — On reprend en l'adaptant celle de [B, ch. IV, 11.9]. Soit $v \in \mathcal{N}_F$. Posons $P = {}_F P_v$ et $X = {}_F \mathcal{X}_v$. Considérons les F -morphisms

$$\alpha : G \times V \rightarrow G \times V \quad \text{et} \quad \beta : G \times V \rightarrow G/P \times V$$

définis par $\alpha(g, v) = (g, g \cdot v)$ et $\beta(g, v) = (\dot{g}, v)$ avec $\dot{g} = gP$. Observons que α est un isomorphisme et que β est un morphisme ouvert. Posons $W = \beta \circ \alpha(G \times X)$. Puisque X est une sous- F -variété fermée P -invariante de V , $\beta^{-1}(W) = \alpha(G \times X)$ est une sous- F -variété fermée de $G \times V$ et (puisque β est ouverte) W est une sous- F -variété fermée de $G/P \times V$. L'immersion fermée $\iota : W \hookrightarrow G/P \times V$ et la projection naturelle $q : G/P \times V \rightarrow V$ sont des F -morphisms propres ; donc $\pi = q \circ \iota : W \rightarrow V$ est un F -morphisme propre. On lui applique 2.8.4 (ii) : $\pi_F(W(F))$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -fermé dans $V(F)$. Il nous reste à identifier $\pi_F(W(F))$. Observons que

$$W = \{(\dot{g}, v) \in G/P \times V \mid g^{-1} \cdot v \in X\}$$

(la condition $g^{-1} \cdot v \in X$ ne dépend que de \dot{g} car X est P -invariant). Par conséquent $W(F)$ est l'ensemble des $(\dot{g} \times v) \in G(F)/P(F) \times V(F)$ tels que $g^{-1} \cdot v \in X(F) = \mathcal{X}_{F,v}$; et $\pi_F(W(F)) = G(F) \cdot \mathcal{X}_{F,v} = \mathfrak{X}_{F,v}$. \square

Comme dans le cas où F est localement compact, on en déduit que :

- \mathcal{N}_F est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -fermé dans $V(F)$;
- pour $s \in \mathbb{Q}_+$, $\mathcal{N}_{F, < s}$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -fermé dans $V(F)$;
- pour $v \in \mathcal{N}_F$, la F -lame $\mathcal{Y}_{F,v}$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -ouverte dans $\mathcal{X}_{F,v}$ et la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,v}$ est $\text{Top}_{\widehat{F}}$ -ouverte dans $\mathfrak{X}_{F,v}$.
- les F -lames, resp. F -strates, de \mathcal{N}_F sont des sous-ensembles localement fermés de $V(F)$ pour $\text{Top}_{\widehat{F}}$.

¶ *Sur l'hypothèse 2.6.9.* — On utilisera ce paragraphe dans la section 3 pour prouver dans le cas où F est un corps global et V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison, l'hypothèse 2.6.9 est toujours vérifiée.

Soit \mathcal{G} un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif (connexe), c'est-à-dire un \mathbb{Z} -groupe réductif de Chevalley-Demazure (cf. [Dem]), et soit \mathcal{V} un \mathbb{Z} -schéma affine réduit. On dit que \mathcal{G} opère sur \mathcal{V} si pour chaque \mathbb{Z} -algèbre A , il existe une application

$$\rho_A : \mathcal{G}(A) \times \mathcal{V}(A) \rightarrow \mathcal{V}(A), (g, v) \mapsto \rho_A(g, v) = g \cdot_A v$$

donnée par des polynômes en A , qui soit fonctorielle en A . Si \mathcal{V} est l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ (vu comme un \mathbb{Z} -schéma), on dit que cette action est linéaire si pour toute \mathbb{Z} -algèbre A et tout $g \in \mathcal{G}(A)$, l'application $A^n \rightarrow A^n, v \mapsto g \cdot_A v$ est A -linéaire. Dans ce cas le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ fournit une action F -linéaire du F -groupe réductif $\mathcal{G}_F = \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}} F$ sur le F -espace affine $\mathcal{V}_F = \mathbb{A}_F^n$; c'est-à-dire que \mathcal{V}_F est muni d'une structure de \mathcal{G}_F -module défini sur F .

Le résultat suivant est dû à Seshadri [Se]. Il permet en particulier de transférer la semi-stabilité géométrique de la caractéristique > 0 à la caractéristique nulle (et réciproquement).

THÉORÈME 2.8.6. — *Soit \mathcal{G} un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif opérant linéairement sur l'espace affine $\mathcal{V} = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\mathcal{W} = \text{Spec}(B)$ un sous-schéma fermé \mathcal{G} -invariant de \mathcal{V} .*

- (i) *Soit $w \in \mathcal{W}(\overline{F})$ un point $(\overline{F}, \mathcal{G}_{\overline{F}})$ -semi-stable, i.e. tel que la fermeture de Zariski de la $\mathcal{G}(\overline{F})$ -orbite de w dans $\mathcal{W}(\overline{F})$ ne contienne pas 0. Il existe un polynôme $f \in \mathbb{Z}[\mathcal{V}]^{\mathcal{G}}$ homogène de degré strictement positif tel que $f(w) \neq 0$.*
- (ii) *Il existe un sous-schéma ouvert \mathcal{W}^{ss} de \mathcal{W} tel que pour tout corps (commutatif) \mathbf{k} algébriquement clos, $\mathcal{W}^{\text{ss}}(\mathbf{k})$ soit l'ensemble des points $(\mathbf{k}, \mathcal{G}_{\mathbf{k}})$ -semi-stables de $\mathcal{W}(\mathbf{k})$. Précisément, $\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^{\text{ss}}$ est le sous-schéma fermé de \mathcal{W} défini par l'idéal de B engendré par les images des polynômes homogènes de degré strictement positifs $f \in \mathbb{Z}[\mathcal{V}]^{\mathcal{G}}$ par le morphisme naturel $\mathbb{Z}[\mathcal{V}] \rightarrow B$.*

Si \mathcal{G} est un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif opérant linéairement sur l'espace affine $\mathcal{V} = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$, en identifiant \mathcal{G}_F à un groupe algébrique réductif connexe défini sur F et \mathcal{V}_F à une variété algébrique affine définie sur F , on a le sous-ensemble

$${}_F\mathcal{N}^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) \subset \mathcal{V}(\overline{F}) = \overline{F}^n$$

des éléments (F, \mathcal{G}_F) -instable de $\mathcal{V}(\overline{F}) = \overline{F}^n$ et le sous-ensemble

$$\mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) = \mathcal{V}(F) \cap {}_F\mathcal{N}^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) \subset \mathcal{V}(F) = F^n.$$

PROPOSITION 2.8.7. — *Soit \mathcal{G} un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif opérant linéairement sur l'espace affine $\mathcal{V} = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et soit F un corps localement compact. On a*

$$\mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) \neq \mathcal{V}(F) \Rightarrow \mathcal{V}^{\text{ss}}(\overline{F}) \neq \emptyset.$$

Autrement dit s'il existe un élément de $\mathcal{V}(F)$ qui soit (F, \mathcal{G}_F) -semi-stable, alors il existe un élément de $\mathcal{V}(\overline{F})$ qui soit $(\overline{F}, \mathcal{G}_{\overline{F}})$ -semi-stable.

Démonstration. — Observons tout d’abord que si F est archimédien (i.e. $F \simeq \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) ou si F est une extension finie d’un corps p -adique \mathbb{Q}_p , il n’y a rien à démontrer : si $v \in \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{N}^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0)$, puisque d’après Kempf [K1] (cf. 2.2.9) $\check{X}_F(G) \cap \mathbf{A}_v \neq \emptyset$, v est forcément (F, \mathcal{G}_F) -instable ; par conséquent

$$v \in \mathcal{V}(F) \setminus \mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) \Rightarrow v \notin \mathcal{N}^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0) (= \mathcal{N}^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_{\overline{F}}, 0)) \Leftrightarrow v \in \mathcal{V}^{\text{ss}}(\overline{F}).$$

On va se ramener à ce résultat par la méthode des corps proches.

On suppose que F est de caractéristique $p > 1$, c’est-à-dire que $F \simeq \mathbb{F}_q((\varpi))$ avec $q = p^f$. Notons \mathfrak{o}_F l’anneau des entiers de F et \mathfrak{p}_F l’idéal maximal de \mathfrak{o}_F . Fixons un tore maximal \mathcal{A}_0 de \mathcal{G} et un sous-groupe de Borel \mathcal{P}_0 de \mathcal{G} (cf. [Dem]). Posons $G = \mathcal{G}_F$, $A_0 = \mathcal{A}_0 \times_{\mathbb{Z}} F$ et $P_0 = \mathcal{P}_0 \times_{\mathbb{Z}} F$. Posons aussi $V = \mathcal{V}_F$, ${}_F\mathcal{N} = {}_F\mathcal{N}^G(V, 0)$ et $\mathcal{N}_F = V(F) \cap {}_F\mathcal{N}$. Le groupe $K = \mathcal{G}(\mathfrak{o}_F)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F)$ pour Top_F et on a la décomposition d’Iwasawa

$$G(F) = KP_0(F) = P_0(F)K.$$

La paire (P_0, A_0) définit un sous-ensemble (fini) $\mathbf{A}_{F, \text{st}} \subset \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ de co-caractères virtuels F -optimaux en position standard ; on a aussi le sous-ensemble $\mathbf{A}_{F, \text{st}}^* \subset \mathbf{A}_{F, \text{st}}$ correspondant aux F -strate de ${}_F\mathcal{N}$ qui possèdent un point F -rationnel (cf. 2.5). Pour $v \in \mathcal{N}_F$, il existe un $k \in K$ tel que $k \cdot v$ appartienne à une F -lame standard de \mathcal{N}_F . On en déduit qu’un élément $v \in V(F)$ est dans \mathcal{N}_F si et seulement s’il existe un $\mu \in \mathbf{A}_{F, \text{st}}^*$ tel que $K \cdot v \cap V_{\mu, 1} \neq \emptyset$.

Le groupe $\check{X}(A_0)$ s’identifie à $\check{X}(\mathcal{A}_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_m/\mathbb{Z}, \mathcal{A}_0)$, c’est-à-dire que tout co-caractère $\lambda \in \check{X}(A_0)$ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d’un élément de $\check{X}(\mathcal{A}_0)$, encore noté λ . On a donc une identification $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(\mathcal{A}_0)_{\mathbb{Q}}$ et pour chaque $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, la sous- F -variété fermée $V_{\mu, 1}$ de V provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d’un sous- \mathbb{Z} -schéma fermé $\mathcal{V}_{\mu, 1}$ de \mathcal{V} .

Soit $v \in V(F) \setminus \mathcal{N}_F$. Quitte à multiplier v par un élément de F^\times , on peut supposer que v appartient à $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \setminus \mathfrak{p}_F \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$. Puisque $V(F) \setminus \mathcal{N}_F$ est Top_F -ouvert dans $V(F)$, il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tel que $v + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ soit contenu dans $V(F) \setminus \mathcal{N}_F$. Alors $K \cdot (v + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)) = K \cdot v + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ est contenu dans $V(F) \setminus \mathcal{N}_F$. On a donc

$$(K \cdot v + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)) \cap V_{\mu, 1}(F) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}.$$

Observons que $K \cdot v + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ est contenu dans $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ et que pour tout $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, on a $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \cap V_{\mu, 1}(F) = \mathcal{V}_{\mu, 1}(\mathfrak{o}_F)$. Notons $\mathfrak{o}_{F, m}$ l’anneau tronqué $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F^m$ et

$$\pi_{F, m} : \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F, m}) = \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)/\mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$$

la projection naturelle. Elle est K -équivariante pour l’action de K sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F, m})$ donnée par la projection naturelle $K \rightarrow \mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F, m})$. On obtient les égalités dans $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F, m})$:

$$\mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F, m}) \cdot \pi_{F, m}(v) \cap \mathcal{V}_{\mu, 1}(\mathfrak{o}_{F, m}) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}.$$

Soit F'/\mathbb{Q}_p une extension finie telle que les anneaux tronqués $\mathfrak{o}_{F', m}$ et $\mathfrak{o}_{F, m}$ soient isomorphes (i.e. telle que $\mathfrak{o}_{F'}/\mathfrak{p}_{F'} = \mathbb{F}_q$ et l’indice de ramification de F'/\mathbb{Q}_p soit $\geq m$). Fixons un tel isomorphisme d’anneaux $\phi : \mathfrak{o}_{F, m} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{o}_{F', m}$. Pour tout \mathbb{Z} -schéma \mathcal{S} , ϕ induit par transport de structure une application bijective $\phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(\mathfrak{o}_{F, m}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{o}_{F', m})$

qui est un isomorphisme de groupes si \mathcal{S} est un \mathbb{Z} -schéma en groupes. L'application bijective $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F,m}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ vérifie les propriétés :

- $\phi_{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{o}_{F,m}$ -modules pour l'action de $\mathfrak{o}_{F,m}$ sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ donnée par l'isomorphisme d'anneaux ϕ ;
- $\phi_{\mathcal{V}}$ est $\mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F,m})$ -équivariante pour l'action de $\mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F,m})$ sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ donnée par l'isomorphisme de groupes $\phi_{\mathcal{G}}$;
- pour tout co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, la restriction de $\phi_{\mathcal{V}}$ à $\mathcal{V}_{\mu,1}$ coïncide avec $\phi_{\mathcal{V}_{\mu,1}} : \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_{F,m}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_{F',m})$.

Soit $v' \in \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F'})$ tel que

$$\pi_{F',m}(v') = \phi_{\mathcal{V}} \circ \pi_{F,m}(v).$$

D'après ce qui précède, on a

$$\mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F',m}) \cdot \pi_{F',m}(v') \cap \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_{F',m}) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}.$$

On en déduit que $\mathcal{G}(\mathfrak{o}_{F'}) \cdot v' \cap \mathcal{V}_{\mu,1}(F') = \emptyset$ pour tout $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, donc *a fortiori* pour tout $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F',st}^*$, ce qui assure que v' appartient à $\mathcal{V}(F') \setminus \mathcal{N}_{F'}$. Par conséquent (d'après le premier paragraphe de la démonstration) $v' \notin \mathcal{N}^{\mathcal{G}_{F'}}(\mathcal{V}_{F'}, 0)$, i.e. $v' \in \mathcal{V}^{ss}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On a donc prouvé que $\mathcal{V}^{ss}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \neq \emptyset$. Grâce à 2.8.6, cela entraîne que $\mathcal{V}^{ss}(\overline{F}) \neq \emptyset$ (et aussi que $\mathcal{V}^{ss}(\overline{\mathbb{F}}_p) \neq \emptyset$). \square

Soit \mathcal{G} un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif opérant linéairement sur l'espace affine $\mathcal{V} = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. Posons $G = \mathcal{G}_F$ et $V = \mathcal{V}_F$. Pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$, on a le F -sous-groupe parabolique $P_{\lambda} = M_{\lambda} \rtimes U_{\lambda}$ de G . Le facteur de Levi M_{λ} de G est un F -sous-groupe fermé de G qui provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un sous- \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif fermé de \mathcal{G} : en notant \mathcal{M}_{λ} le centralisateur schématique de λ dans \mathcal{G} , on a $M_{\lambda} = \mathcal{M}_{\lambda} \times_{\mathbb{Z}} F$. D'après [CP, 4.3], le F -sous-groupe fermé M_{λ}^{\perp} de M_{λ} provient lui aussi par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un sous- \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif fermé $\mathcal{M}_{\lambda}^{\perp}$ de \mathcal{M}_{λ} .

Soit $v \in {}_F\mathcal{N}^G(V, 0)$. Le F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$ de la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ de ${}_F\mathcal{N}^G(V, 0)$ est muni d'une structure de ${}_F P_v$ -module défini sur F . Pour $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$, on a ${}_F P_v = P_{\lambda}$ et ${}_F\mathcal{X}_v = V_{\lambda,k}$. La sous-variété fermée $V_{\lambda}(k)$ de $V_{\lambda,k}$ est munie d'une structure de M_{λ} -module défini sur F . On peut demander que cette action F -linéaire de M_{λ} sur $V_{\lambda}(k)$ provienne par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire de \mathcal{M}_{λ} sur un espace affine $\mathcal{V}' \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. Observons que cette propriété ne dépend pas du choix de $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ (par transport de structure, puisque tout co-caractère $\lambda_1 \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ est de la forme $\lambda_1 = u \bullet \lambda$ pour un (unique) $u \in U_{\lambda}(F)$).

COROLLAIRE 2.8.8. — (Sous les hypothèses de 2.8.7.) Soit $v \in \mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0)$ tel que pour un (i.e. pour tout) $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$, l'action F -linéaire de M_{λ} sur $V_{\lambda}(k)$ avec $k = m_v(\lambda)$ provienne par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire de \mathcal{M}_{λ} sur un espace affine $\mathcal{V}' \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. Alors $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$.

Démonstration. — Posons $\mathcal{G}' = \mathcal{M}_{\lambda}^{\perp}$. D'après le critère de Kirwan-Ness rationnel (2.7.6), l'élément $v_{\lambda}(k)$ appartient à $\mathcal{V}'(F) \setminus \mathcal{N}_F^{\mathcal{G}'}(\mathcal{V}_F, 0)$. D'après la proposition

2.8.7 appliquée au couple $(\mathcal{G}', \mathcal{V}')$, on a $\mathcal{V}'^{\text{ss}}(\overline{F}) \neq \emptyset$. D'après le critère de Kirwan-Ness géométrique (cf. 2.7.2), il existe un $v' \in V_{\lambda, k}(\overline{F})$ tel que $\lambda \in \Lambda_{v'}^{\text{opt}}$. Posons $\mu = \frac{1}{k}\lambda$. Alors ${}_F\mathcal{X}_{v'} = \mathcal{X}_{v'} = V_{\mu, 1} = {}_F\mathcal{X}_v$. Comme $\mathbf{q}_F(v') = \mathbf{q}(v') = \|\mu\| = \mathbf{q}_F(v)$, on a aussi ${}_F\mathcal{Y}_{v'} = \mathcal{Y}_{v'} = {}_F\mathcal{Y}_v$. La \overline{F} -lame $\mathcal{Y}_{v'}$ de \mathcal{N} est ouverte dans son \overline{F} -saturé $\mathcal{X}_{v'}$. Par conséquent la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ de ${}_F\mathcal{N}$ est ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$, ce qui assure (d'après 2.6.6 et 2.6.7) que μ appartient à Λ_v . \square

COROLLAIRE 2.8.9. — (Sous les hypothèses de 2.8.7.) Supposons que tout élément de $\mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0)$ vérifie l'hypothèse de 2.8.8. Alors l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée : pour tout $v \in \mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0)$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$.

On peut affaiblir les hypothèses et remplacer le corps de base (supposé local non archimédien) par un corps global :

LEMME 2.8.10. — La proposition 2.8.7 et les corollaires 2.8.8 et 2.8.9 restent vrais si l'on remplace le corps de base (supposé localement compact dans loc. cit.) par un corps valué admissible (F, ν) tel que le complété \widehat{F} de F en ν soit un corps localement compact vérifiant la propriété $(\widehat{F}^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(\widehat{F}^{\text{sép}})} = F$; e.g. un corps global F muni d'une place finie ν (cf. A.1.5).

Démonstration. — Les hypothèses sont celles de 2.8.7 (à l'exception bien sûr de celle sur le corps de base). Posons $\mathcal{N}_F = \mathcal{N}_F^{\mathcal{G}_F}(\mathcal{V}_F, 0)$ et $\mathcal{N}_{\widehat{F}} = \mathcal{N}_{\widehat{F}}^{\mathcal{G}_{\widehat{F}}}(\mathcal{V}_{\widehat{F}}, 0)$. D'après 2.5.17, on a $\mathcal{N}_F = \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{N}_{\widehat{F}}$. Par suite si $\mathcal{V}(\widehat{F}) = \mathcal{N}_{\widehat{F}}$, alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{N}_{\widehat{F}} = \mathcal{N}_F$. Puisque \widehat{F} est un corps localement compact, si \mathbf{k} est une clôture algébrique de \widehat{F} , on a (d'après 2.8.7 pour \widehat{F})

$$\mathcal{N}_F \neq \mathcal{V}(F) \Rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{F}} \neq \mathcal{V}(\widehat{F}) \Rightarrow \mathcal{V}^{\text{ss}}(\mathbf{k}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{V}^{\text{ss}}(\overline{F}) \neq \emptyset.$$

Cela prouve 2.8.7 pour F . Quant aux corollaires 2.8.8 et 2.8.9, pour tout $v \in \mathcal{N}_F$, d'après 2.5.18, on a $\Lambda_{F, v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{\widehat{F}, v}$. On en déduit que si $\check{X}_{\widehat{F}}(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$, alors puisque $\Lambda_{\widehat{F}, v} = \check{X}_{\widehat{F}}(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v$, on a $\Lambda_{F, v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v$. Par conséquent les corollaires 2.8.8 et 2.8.9 pour \widehat{F} impliquent les mêmes corollaires pour F . \square

2.9. Récapitulatif des hypothèses dans la section 2. — Pour une G -variété pointée (V, e_V) définie sur F avec $e_V \in V(F)$, on a introduit plusieurs hypothèses qui, si elles sont vérifiées, permettent d'obtenir des propriétés intéressantes. On rappelle ici ces hypothèses et les propriétés qui en découlent.

Tout d'abord une hypothèse de régularité :

(2.4.20) le point-base e_V est régulier (i.e. non singulier) dans V .

L'hypothèse 2.4.20 assure que pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, le F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$ de la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est F -isomorphe à son espace tangent $T_{e_V}({}_F\mathcal{X}_v)$; en particulier c'est un F -espace affine (i.e. ${}_F\mathcal{X}_v \simeq_F \mathbb{A}_F^n$) et donc une F -variété irréductible.

Ensuite une hypothèse simplificatrice :

(2.6.10) pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$.

Et aussi celle (moins forte) :

(2.6.9) pour tout $v \in \mathcal{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_v \neq \emptyset$.

L'hypothèse 2.6.10, resp. 2.6.9, assure que pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, resp. tout $v \in \mathcal{N}_F$, la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_v$; si de plus l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée, cela entraîne que la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_v$ est dense dans la F -variété irréductible ${}_F\mathcal{X}_v$. Si F est infini, les hypothèses 2.4.20 et 2.6.10 assurent que toute F -lame, ou ce qui revient au même toute F -strate, de ${}_F\mathcal{N}$ possède un point F -rationnel. Dans le cas où V est un G -module défini sur F , l'hypothèse 2.6.10, resp. 2.6.9, assure que pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, resp. tout $v \in \mathcal{N}_F$, si $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$ et $k = m_v(\lambda)$, la sous-variété (ouverte) $V_\lambda(k) \setminus \mathcal{N}^{M_\lambda^\perp}(V_\lambda(k), 0)$ est non vide.

Enfin l'hypothèse sur le bord :

(2.5.5) pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, le bord ${}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$ est réunion (finie) de F -strates de ${}_F\mathcal{N}$; en d'autres termes pour tout $v' \in {}_F\mathfrak{X}_v \setminus {}_F\mathfrak{Y}_v$, on a ${}_F\mathfrak{Y}_{v'} \subset {}_F\mathfrak{X}_v$.

Et aussi celle (moins forte) :

(2.5.16) pour tout $v \in {}_F\mathcal{N}$, le bord $\mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{Y}_{F,v}$ est réunion (finie) de F -strates de \mathcal{N}_F ; en d'autres termes pour tout $v' \in \mathfrak{X}_{F,v} \setminus \mathfrak{Y}_{F,v}$, on a $\mathfrak{Y}_{F,v'} \subset \mathfrak{X}_{F,v}$.

Si F est infini et si les hypothèses 2.4.20 et 2.6.10 sont vérifiées, alors les hypothèses 2.5.5 et 2.5.16 sont équivalentes.

3. Le cas de la variété unipotente

Les hypothèses sont celles de la section 2. On se limite désormais à l'action de G sur lui-même par conjugaison (c'est-à-dire que $V = G$ et $e_V = e_G = 1$) donnée par

$$g \bullet x = gxg^{-1}.$$

3.1. Les ensembles ${}_F\mathfrak{U}$ et \mathfrak{U}_F . — Le groupe G est une G -variété pointée pour l'action par conjugaison, lisse et définie sur F . On note $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^G$ la variété précédemment notée $\mathcal{N}^G(G, 1)$. C'est la sous-variété fermée de G , définie sur $F^{(26)}$ et G -invariante, formée des éléments $x \in G$ tels que $\mathcal{F}_x = \{1\}$; où \mathcal{F}_x est l'unique G -orbite fermée contenue dans la fermeture de Zariski de la G -orbite $\mathcal{O}_x = G \bullet x$. D'après le critère d'instabilité de Hilbert-Mumford, un élément de G est dans \mathfrak{U} si et seulement s'il est dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de G . On note ${}_F\mathfrak{U} = {}_F\mathfrak{U}^G$ l'ensemble précédemment noté ${}_F\mathcal{N}^G(G, 1)$, c'est-à-dire le sous-ensemble de \mathfrak{U} formé des éléments qui sont (F, G) -instables. Un élément $u \in G$ est dans ${}_F\mathfrak{U}$ si et seulement s'il est dans le radical unipotent d'un F -sous-groupe parabolique de G . Enfin on note $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$ l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $G(F)$:

$$\mathfrak{U}_F = G(F) \cap {}_F\mathfrak{U}.$$

Pour $u \in {}_F\mathfrak{U}$, on a défini les sous-ensembles

$$\begin{aligned} {}_F\mathcal{Y}_u &\subset {}_F\mathcal{X}_u = G_{\mu,1} \subset U_\mu \subset {}_F\mathfrak{U} \quad \text{avec } \mu \in \Lambda_{F,u}, \\ {}_F\mathfrak{Y}_u &= G(F) \bullet {}_F\mathcal{Y}_u \subset {}_F\mathfrak{X}_u = G(F) \bullet {}_F\mathcal{X}_u \subset {}_F\mathfrak{U}. \end{aligned}$$

⁽²⁶⁾Puisque $\mathfrak{U} = G \cdot \tilde{U}_0$ où \tilde{U}_0 est le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de G défini sur $F^{\text{sép}}$, la variété \mathfrak{U} est définie sur $F^{\text{sép}}$; donc sur F d'après le critère galoisien (2.1.1).

Rappelons que ces ensembles sont définis via le choix d'une F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$ mais qu'ils ne dépendent pas de ce choix (cf. 2.4.8). En revanche la fonction $\mathbf{q}_F : {}_F\mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dépend bien sûr du choix de $\|\cdot\|$. Les ensembles ${}_F\mathscr{Y}_u$ et ${}_F\mathscr{Z}_u$ sont respectivement les F -lames et les F -strates de ${}_F\mathfrak{U}$; on les appellera aussi F -lames unipotentes et F -strates unipotentes de G .

L'hypothèse 2.4.20 est vérifiée ($e_G = 1$ est régulier).

Pour $\mu \in \check{X}_F(G)$ et $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, la variété $G_{\mu,r}$ est un F -sous-groupe unipotent connexe de G . Cela s'applique en particulier au F -saturé ${}_F\mathscr{X}_u$ d'une F -lame ${}_F\mathscr{Y}_u$ de ${}_F\mathfrak{U}$ (avec $u \in {}_F\mathfrak{U}$) : on a ${}_F\mathscr{X}_u = G_{\mu,1}$ avec $\mu \in \Lambda_{F,u}$.

Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, on a noté $\mathscr{Y}_{F,u}$, resp. $\mathscr{X}_{F,u}$, $\mathscr{Z}_{F,u}$, $\mathfrak{X}_{F,u}$ l'intersection de ${}_F\mathscr{Y}_u$, resp. ${}_F\mathscr{X}_u$, ${}_F\mathscr{Z}_u$, ${}_F\mathfrak{X}_u$ avec $G(F)$, c'est-à-dire avec \mathfrak{U}_F . Les ensembles $\mathscr{Y}_{F,u}$ et $\mathscr{Z}_{F,u}$ sont respectivement les F -lames et les F -strates de \mathfrak{U}_F ; on les appellera aussi F -lames unipotentes et F -strates unipotentes de $G(F)$.

¶ *Passage au groupe dérivé.* — On note avec un exposant « der » les objets définis comme ci-dessus en remplaçant G par son groupe dérivé G_{der} . La sous- F -variété fermée $\mathfrak{U}^{\text{der}} = \mathfrak{U}^{G_{\text{der}}}$ de G_{der} coïncide avec \mathfrak{U} et le sous-ensemble ${}_F\mathfrak{U}^{\text{der}} = {}_F\mathfrak{U}^{G_{\text{der}}}$ de \mathfrak{U} coïncide avec ${}_F\mathfrak{U}$. La F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$ définit par restriction une F -norme G_{der} -invariante sur $\check{X}_F(G_{\text{der}})$ et donc une fonction $\mathbf{q}_F^{\text{der}} : {}_F\mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui coïncide avec \mathbf{q}_F .

LEMME 3.1.1. — Soit $u \in {}_F\mathfrak{U}$.

- (i) $\Lambda_{F,u}^{\text{der}} = \Lambda_{F,u}$ et ${}_F P_u^{\text{der}} = G_{\text{der}} \cap {}_F P_u$.
- (ii) ${}_F\mathscr{X}_u^{\text{der}} = {}_F\mathscr{X}_u$ et ${}_F\mathscr{Y}_u^{\text{der}} = {}_F\mathscr{Y}_u$.
- (iii) ${}_F\mathfrak{X}_u^{\text{der}} = {}_F\mathfrak{X}_u$ et ${}_F\mathscr{Z}_u^{\text{der}} = {}_F\mathscr{Z}_u$.

Démonstration. — D'après [H1, 7.3], l'ensemble $\Lambda_{F,u}$ est contenu dans $\check{X}(G^{\text{der}})_{\mathbb{Q}}$. Cela prouve (i) et (ii). Si S est un tore F -déployé maximal de ${}_F P_u$, on a l'égalité

$$G(F) = G_{\text{der}}(F)G^S(F)$$

où G^S est le centralisateur de S dans G . Comme $G^S(F) \subset P_{F,u}$, le point (iii) est une conséquence de (ii). \square

3.2. Morphismes et optimalité. — Soit H un groupe réductif connexe défini sur F . On note avec un exposant H les objets définis comme précédemment en remplaçant G par H . Ainsi $\mathfrak{U}_F^H = H(F) \cap {}_F\mathfrak{U}^H$ est l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $H(F)$. Pour un F -morphisme de groupes $f : G \rightarrow H$, resp. $f : H \rightarrow G$, on peut se demander ce que devient la théorie de l'optimalité à travers f . Si $H = G^{\text{der}}$ et $f : H \rightarrow G$ est l'immersion fermée naturelle (donnée par l'inclusion), on a vu que la réponse est très simple (3.1.1). On se limite ici aux deux cas particuliers suivants : le cas d'un sous-groupe *critique* et le cas d'un morphisme *spécial*. Les F -morphisms naturels $G \rightarrow G_{\text{ad}}$ et $G_{\text{sc}} \rightarrow G$ sont spéciaux.

¶ *Le cas d'un sous-groupe critique* [H1, 9.4]. — Soit $H = G^S$ le centralisateur dans G d'un tore $S \subset G$. C'est un sous-groupe fermé réductif connexe de G . Un

tel sous-groupe $H \subset G$ est dit *critique*⁽²⁷⁾. Si de plus S est défini sur F , ce que l'on suppose, alors H l'est aussi. La norme $\|\cdot\|$ définie par restriction une F -norme H -invariante sur $\check{X}_F(H)$ et donc une fonction $\mathbf{q}_F^H : {}_F\mathfrak{U}^H \rightarrow \mathbb{R}_+$. On a clairement les inclusions

$${}_F\mathfrak{U}^H \subset {}_F\mathfrak{U} \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_F^H \subset \mathfrak{U}_F.$$

D'après [H1, 9.4], on a le

LEMME 3.2.1. — Soient $S \subset G$ un F -tore, $H = G^S$ et $u \in {}_F\mathfrak{U}^H$.

- (i) $\Lambda_{F,u}^H = \check{X}_F(H)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{F,u}$, $\mathbf{q}_F^H(u) = \mathbf{q}_F(u)$ et ${}_F P_u^H = H \cap {}_F P_u$;
- (ii) ${}_F \mathcal{X}_u^H = H \cap {}_F \mathcal{X}_u$ et ${}_F \mathcal{Y}_u^H = H \cap {}_F \mathcal{Y}_u$;
- (iii) ${}_F \mathfrak{X}_u^H \subset H \cap \mathfrak{X}_{F,u}$ et ${}_F \mathfrak{Y}_u^H \subset H \cap {}_F \mathfrak{Y}_u$.

Démonstration. — Puisque $H = G^S$, le F -tore S est contenu dans le centralisateur G^u de u dans G . Or d'après 2.3.7 (iii) et 2.3.10, on a

$$G^u(F^{\text{sép}}) \subset P_{F^{\text{sép}},u} = {}_F P_u(F^{\text{sép}}).$$

Comme $S(F^{\text{sép}})$ est Zariski-dense dans S , on a $S \subset {}_F P_u$. On peut donc choisir un tore F -déployé maximal S' dans ${}_F P_u$ tel que $S \subset S'$. Ce tore S' est (F, u) -optimal relativement à l'action de G par conjugaison et comme il est contenu dans H , il est aussi (F, u) -optimal relativement à l'action de H par conjugaison. On a donc

$$\Lambda_{F,u} \cap \check{X}(S')_{\mathbb{Q}} = \Lambda_{F,u}^H \cap \check{X}(S')_{\mathbb{Q}} = \{\mu\}.$$

On en déduit (i). D'autre part, on a

$${}_F \mathcal{X}_u^H = H_{\mu,1} = H \cap G_{\mu,1} = H \cap {}_F \mathcal{X}_u.$$

Un élément $x \in {}_F \mathcal{X}_u^H$ appartient à ${}_F \mathcal{Y}_u^H$ si et seulement si $\mathbf{q}_F^H(x) = \|\mu\|$. D'après le point (i) et l'égalité ${}_F \mathcal{X}_u^H = H \cap {}_F \mathcal{X}_u$, on obtient

$${}_F \mathcal{Y}_u^H = H \cap {}_F \mathcal{Y}_u.$$

Cela prouve (ii). Quant aux inclusions du point (iii), elles se déduisent des égalités du point (ii) par conjugaison dans $H(F) \subset G(F)$. \square

¶ *Le cas d'un morphisme spécial.* — Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme surjectif de groupes algébriques réductifs connexes. Si T un tore maximal de G , alors $T_H = f(T)$ est un tore maximal de H et f induit des morphismes \mathbb{Z} -linéaires

$$\varphi_T = X(T_H) \rightarrow X(T) \quad \text{et} \quad \phi_T : \check{X}(T) \rightarrow \check{X}(T_H).$$

Le morphisme f est dit *spécial* si φ_T envoie le système de racines de H dans celui de G . Cette définition ne dépend pas du choix de T . Observons que f est spécial si et seulement le morphisme $f_{\text{der}} : G_{\text{der}} \rightarrow H_{\text{der}}$ est (surjectif et) spécial.

REMARQUE 3.2.2. — Si le morphisme surjectif $f : G \rightarrow H$ est séparable, ou s'il est central⁽²⁸⁾, alors il est spécial [B, 22.4].

⁽²⁷⁾Typiquement, un facteur de Levi de G est un sous-groupe critique.

⁽²⁸⁾Rappelons qu'un morphisme surjectif f est central si et seulement si $\ker(f)$ est central dans G et $\ker(\text{Lie}(f))$ est central dans $\text{Lie}(G)$. Si $p > 1$, le morphisme naturel $\text{SL}_p \rightarrow \text{PGL}_p$ est une isogénie centrale mais il n'est pas séparable.

Le morphisme (surjectif) $f : G \rightarrow H$ induit des applications

$$\phi : \check{X}(G) \rightarrow \check{X}(H) \quad \text{et} \quad \phi_{\mathbb{Q}} : \check{X}(G)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(H)_{\mathbb{Q}}.$$

Si de plus f est défini sur F , ce que l'on suppose, alors les applications ϕ et $\phi_{\mathbb{Q}}$ le sont aussi, c'est-à-dire qu'elles sont Γ_F -équivariantes. Elles induisent des applications

$$\phi_F : \check{X}_F(G) \rightarrow \check{X}_F(H) \quad \text{et} \quad \phi_{F,\mathbb{Q}} : \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}_F(H)_{\mathbb{Q}}.$$

On a les inclusions

$$f({}_F\mathfrak{U}) \subset {}_F\mathfrak{U}^H \quad \text{et} \quad f(\mathfrak{U}_F) \subset \mathfrak{U}_F^H.$$

Pour $\mu \in \check{X}(H)_{\mathbb{Q}}$, notons $\iota_{\mathbb{Q}}(\mu)$ l'unique élément de $\phi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mu)$ de norme minimale. Cela définit une application $\iota_{\mathbb{Q}} : \check{X}(H)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ qui vérifie les propriétés [H1, 10.3] :

- $\iota_{\mathbb{Q}}$ est une « section » de $\phi_{\mathbb{Q}}$, i.e. $\phi_{\mathbb{Q}} \circ \iota_{\mathbb{Q}} = \text{Id}$;
- pour tout tore maximal T de G , $\iota_{\mathbb{Q}}$ se restreint en une application \mathbb{Q} -linéaire $\iota_{T,\mathbb{Q}} : \check{X}(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(T_H)_{\mathbb{Q}}$.

Par construction, l'application $\iota_{\mathbb{Q}}$ est définie sur F . Pour $\mu \in \check{X}(H)_{\mathbb{Q}}$, on pose

$$\|\mu\| = \inf\{\|\lambda\| \mid \lambda \in \phi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mu)\} = \|\iota_{\mathbb{Q}}(\mu)\|.$$

Cela définit une F -norme H -invariante sur $\check{X}(H)_{\mathbb{Q}}$, laquelle définit par restriction une F -norme H -invariante sur $\check{X}(H)$. On a donc une fonction $\mathbf{q}_F^H : {}_F\mathfrak{U}^H \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. D'après [H1, 10.6], on a la

PROPOSITION 3.2.3. — *Soit $f : G \rightarrow H$ un F -morphisme de groupes algébriques réductifs connexes définis sur F , tel que le morphisme $f_{\text{der}} : G_{\text{der}} \rightarrow H_{\text{der}}$ soit surjectif et spécial. Soit $u \in {}_F\mathfrak{U}$.*

- (i) $\phi_{\mathbb{Q}}(\mathbf{\Lambda}_{F,u}) \subset \mathbf{\Lambda}_{F,f(u)}^H$, $\mathbf{q}_F(u) \geq \mathbf{q}_F^H(f(u))$ et $f({}_FP_u) \subset {}_FP_{f(u)}^H$. Si de plus f est surjectif, on a l'égalité $f({}_FP_u) = {}_FP_{f(u)}^H$.
- (ii) $f({}_F\mathcal{X}_u) \subset {}_F\mathcal{X}_{f(u)}^H$ et $f({}_F\mathcal{Y}_u) \subset {}_F\mathcal{Y}_{f(u)}^H$.
- (iii) $f({}_F\mathfrak{X}_u) \subset {}_F\mathfrak{X}_{f(u)}^H$ et $f({}_F\mathfrak{Y}_u) \subset {}_F\mathfrak{Y}_{f(u)}^H$.

Démonstration. — D'après 3.1.1, quitte à remplacer G et H par leurs groupes dérivés, on peut supposer f surjectif. Alors d'après [H1, 10.6], on a $\phi_{\mathbb{Q}}(\mathbf{\Lambda}_{F,u}) \subset \mathbf{\Lambda}_{F,f(u)}^H$ et $f({}_FP_u) = {}_FP_{f(u)}^H$. Pour $\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{F,u}$ et $\mu = \phi_{\mathbb{Q}}(\lambda) \in \mathbf{\Lambda}_{F,f(u)}^H$, on a donc

$$\mathbf{q}_F^H(f(u)) = \|\mu\| = \|\iota_{\mathbb{Q}}(\mu)\| \leq \|\lambda\| = \mathbf{q}_F(u).$$

Cela prouve (i). Puisque ${}_F\mathcal{X}_u = G_{\lambda,1}$ et $f(G_{\lambda,1}) = H_{\mu,1}$, on a

$$f({}_F\mathcal{X}_u) = f(G_{\lambda,1}) \subset H_{\mu,1} = {}_F\mathcal{X}_{f(u)}^H.$$

Si $u' \in {}_F\mathcal{Y}_u$, alors $\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{F,u'}$ et (d'après (i)) $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,f(u')}$, par conséquent

$$\mathbf{q}_F^H(f(u')) = \|\mu\| = \mathbf{q}_F^H(f(u))$$

et $f(u') \in {}_F\mathcal{Y}_{f(u)}^H$. Cela prouve (ii). On en déduit (iii) par conjugaison dans $G(F)$ grâce à l'inclusion $f(G(F)) \subset H(F)$. \square

D'après [H1, 10.7], on a le

COROLLAIRE 3.2.4. — *(Sous les hypothèses de 3.2.3.)*

(i) $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \phi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathbf{\Lambda}_{F,f(u)}^H)$, $\mathbf{q}_F(u) = \mathbf{q}_F^H(f(u))$ et ${}_F P_u = f^{-1}({}_F P_{f(u)}^H)$.
(ii) Les inclusions 3.2.3 (ii) sont des égalités. De plus

$${}_F \mathcal{X}_u = f^{-1}({}_F \mathcal{X}_{f(u)}^H) \quad \text{et} \quad {}_F \mathcal{Y}_u = f^{-1}({}_F \mathcal{Y}_{f(u)}^H).$$

(iii) Les inclusions 3.2.3 (iii) sont des égalités. De plus

$${}_F \mathfrak{X}_u = f^{-1}({}_F \mathfrak{X}_{f(u)}^H) \quad \text{et} \quad {}_F \mathfrak{Y}_u = f^{-1}({}_F \mathfrak{Y}_{f(u)}^H).$$

(iv) f induit une application bijective ${}_F \mathfrak{U} \rightarrow {}_F \mathfrak{U}^H$.

Démonstration. — D'après 3.1.1, quitte à remplacer G et H par leurs groupes dérivés, on peut supposer que f est une isogénie centrale. Alors d'après [H1, 10.7 (a)], l'application $\phi_{\mathbb{Q}} : \check{X}(G)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(H)_{\mathbb{Q}}$ est bijective et elle induit une application bijective $\phi_{F,\mathbb{Q}} : \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}_F(H)_{\mathbb{Q}}$. D'après [H1, 10.7 (b)], on a $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \phi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathbf{\Lambda}_{F,f(u)}^H)$ et ${}_F P_u = f^{-1}({}_F P_{f(u)}^H)$. De plus, avec les notations de la preuve de 3.2.3, on a $\iota_{\mathbb{Q}}(\mu) = \lambda$ par conséquent $\mathbf{q}_F^H(f(u)) = \mathbf{q}_F(u)$. Cela prouve (i). Le point (ii) est une conséquence de [B, 22.4] : pour tout sous-groupe fermé unipotent connexe $U \subset G$, f induit un isomorphisme de U sur $f(U)$. En particulier f induit un F -isomorphisme de $G_{\lambda,1}$ sur $f(G_{\lambda,1}) = H_{\mu,1}$. Compte-tenu de (i), cela prouve (ii). Quant au point (iii), soit S un tore F -déployé maximal de ${}_F P_u$ et soit $M = G^S$ le centralisateur de S dans G . Alors $S_H = f(S)$ est un tore F -déployé maximal de ${}_F P_{f(u)}^H = f({}_F P_u)$ et $M_H = f(M)$ est le centralisateur H^{S_H} de S_H dans H . Soit $G^* \subset G$ le F -sous-groupe distingué engendré par les sous-groupes radiciels $U_{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathcal{R}_S$; où $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_S^G$ est l'ensemble des racines de S dans G . On a

$$G(F) = M(F)G^*(F) = G^*(F)M(F).$$

On définit de la même manière $H^* = \langle U_{(\beta)}^H \mid \beta \in \mathcal{R}_{S_H}^H \rangle \subset H$; on a aussi

$$H(F) = M_H(F)H^*(F) = H^*(F)M_H(F).$$

D'après [B, ch. V, 22.6], le morphisme \mathbb{Z} -linéaire $\varphi_T : X(S_H) \rightarrow X(S)$ induit par envoi $\mathcal{R}_{S_H}^H$ bijectivement sur \mathcal{R}_S ; par conséquent si $\beta \in \mathcal{R}_{S_H}^H$ et $\alpha = \varphi_T(\beta)$, f induit un F -isomorphisme de $U_{(\alpha)}$ sur $U_{(\beta)}$. On a donc

$$H(F) = M_H(F)f(G^*(F)) = f(G^*(F))M_H(F).$$

Puisque

$${}_F \mathfrak{X}_u = G^*(F) \bullet {}_F \mathcal{X}_u \quad \text{et} \quad {}_F \mathfrak{Y}_u = G^*(F) \bullet {}_F \mathcal{Y}_u,$$

le point (iii) découle de (ii) par conjugaison dans $G^*(F)$. Quant au point (iv), c'est une conséquence de (ii) et (iii). \square

COROLLAIRE 3.2.5. — (Sous les hypothèses de 3.2.3.) f induit une application bijective ${}_F \mathfrak{U} \rightarrow {}_F \mathfrak{U}^H$ qui envoie bijectivement les F -lames, resp. F -strates, de ${}_F \mathfrak{U}$ sur celles de ${}_F \mathfrak{U}^H$.

¶ *Application : passage au groupe adjoint.* — On note $G_{\text{ad}} \subset \text{Aut}(\text{Lie}(G))$ le groupe adjoint de G . Le corollaire 3.2.4 s'applique au F -morphisme naturel

$$f = \text{Ad} : G \rightarrow G_{\text{ad}} (\subset \text{Aut}(\text{Lie}(G))).$$

D'après le début de la preuve de 3.2.4, le F -morphisme $f_{\text{der}} : G_{\text{der}} \rightarrow G_{\text{ad}}$ induit une identification canonique

$$\check{X}_F(G_{\text{der}})_{\mathbb{Q}} = \check{X}_F(G_{\text{ad}})_{\mathbb{Q}}.$$

On remplace l'exposant $H = G_{\text{ad}}$ par un simple exposant « ad » dans les notations précédentes. D'après 3.2.4 (iv), le morphisme $f = \text{Ad}$ induit une application bijective ${}_F\mathfrak{U} = {}_F\mathfrak{U}^{\text{der}} \rightarrow {}_F\mathfrak{U}^{\text{ad}}$ via laquelle on identifie ${}_F\mathfrak{U}$ et ${}_F\mathfrak{U}^{\text{ad}}$.

COROLLAIRE 3.2.6. — Soit $u \in {}_F\mathfrak{U}$.

- (i) $\Lambda_{F,u} (= \Lambda_{F,u}^{\text{der}}) = \Lambda_{F,u}^{\text{ad}}$, $\mathbf{q}_F(u) = \mathbf{q}_F^{\text{ad}}(u)$ et ${}_F P_u = f^{-1}({}_F P_u^{\text{ad}})$;
- (ii) ${}_F \mathcal{X}_u = {}_F \mathcal{X}_u^{\text{ad}}$ et ${}_F \mathcal{Y}_u = {}_F \mathcal{Y}_u^{\text{ad}}$;
- (iii) ${}_F \mathfrak{X}_u = {}_F \mathfrak{X}_u^{\text{ad}}$ et ${}_F \mathfrak{Y}_u = {}_F \mathfrak{Y}_u^{\text{ad}}$.

¶ *Application : passage au revêtement simplement connexe.* — Le corollaire 3.2.4 s'applique aussi au F -morphisme naturel

$$f : G_{\text{sc}} \rightarrow G,$$

c'est-à-dire le revêtement simplement connexe de G_{der} . Il induit une identification canonique

$$\check{X}_F(G_{\text{sc}})_{\mathbb{Q}} = \check{X}_F(G_{\text{der}})_{\mathbb{Q}}.$$

On remplace l'exposant $H = G_{\text{sc}}$ par un simple exposant « sc » dans les notations précédentes. D'après 3.2.4 (iv), le morphisme f induit une application bijective ${}_F\mathfrak{U}^{\text{sc}} \rightarrow {}_F\mathfrak{U} = {}_F\mathfrak{U}^{\text{der}}$ via laquelle on identifie ${}_F\mathfrak{U}^{\text{sc}}$ et ${}_F\mathfrak{U}$.

COROLLAIRE 3.2.7. — Soit $u \in {}_F\mathfrak{U}$.

- (i) $\Lambda_{F,u}^{\text{sc}} = \Lambda_{F,u} (= \Lambda_{F,u}^{\text{der}})$, $\mathbf{q}_F^{\text{sc}}(u) = \mathbf{q}_F(u)$ et ${}_F P_u^{\text{sc}} = f^{-1}({}_F P_u)$;
- (ii) ${}_F \mathcal{X}_u^{\text{sc}} = {}_F \mathcal{X}_u$ et ${}_F \mathcal{Y}_u^{\text{sc}} = {}_F \mathcal{Y}_u$;
- (iii) ${}_F \mathfrak{X}_u^{\text{sc}} = {}_F \mathfrak{X}_u$ et ${}_F \mathfrak{Y}_u^{\text{sc}} = {}_F \mathfrak{Y}_u$.

3.3. F -lames standard de ${}_F\mathfrak{U}$. — On fixe une F -paire parabolique minimale (P_0, A_0) de G , c'est-à-dire un F -sous-groupe parabolique minimal P_0 de G et un tore F -déployé maximal A_0 de P_0 . On note M_0 le centralisateur de A_0 dans G et U_0 le radical unipotent de P_0 . Ils sont tous les deux définis sur F et $P_0 = M_0 \times U_0$. On note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_0}^G \subset X(A_0)$ l'ensemble des racines de A_0 dans G et $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ le sous-ensemble formé des racines dans P_0 . Pour un co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$, on note A_{μ} le tore central F -déployé maximal de M_{μ} . Rappelons que μ est dit *en position standard* (relativement à (P_0, M_0)) si la paire parabolique (P_{μ}, A_{μ}) est standard, c'est-à-dire si $P_0 \subset P_{\lambda}$ et $A_{\mu} \subset A_0$; auquel cas μ appartient à $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$. Inversement, un co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ est en position standard si et seulement si $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}^+$.

REMARQUE 3.3.1. — Pour $\lambda \in \check{X}(A_0)$ en position standard et $u \in U_0$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t\lambda}(u)$ existe ; et elle vaut 1 si et seulement si u appartient à U_{λ} .

Notons $\Delta_0 = \Delta_{P_0} \subset \mathcal{R}^+$ le sous-ensemble formé des racines simples et posons

$$\mathbf{d}_0(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{\langle \alpha, \lambda \rangle \mid \alpha \in \Delta_0\}.$$

Observons que λ est en position standard si et seulement si $\mathbf{d}_0(\lambda) \geq 0$. Observons aussi que $(P_\lambda, A_\lambda) = (P_0, A_0)$ si et seulement si $\mathbf{d}_0(\lambda) > 0$, auquel cas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t\lambda}(u) = 1 \quad \text{pour tout } u \in U_0.$$

Par conséquent $U_0 \subset {}_F\mathfrak{U}$ et $G(F) \bullet U_0 \subset {}_F\mathfrak{U}$. Réciproquement, tout élément $u \in {}_F\mathfrak{U}$ est contenu dans le radical unipotent ${}_F U_u$ de ${}_F P_u$. En choisissant un $g \in G(F)$ tel que $g({}_F P_u)g^{-1} = {}_F P_{g \bullet u}$ contienne P_0 , on obtient que $g \bullet u \in U_0$. On en déduit que

$${}_F\mathfrak{U} = G(F) \bullet U_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_F = G(F) \bullet U_0(F).$$

On a défini en 2.5.11 les notions d'élément de ${}_F\mathfrak{U}$ en position standard et de F -lame standard de ${}_F\mathfrak{U}$ (relativement à P_0). Un élément $u \in {}_F\mathfrak{U}$ est en position standard si et seulement si le tore A_0 est (F, u) -optimal et si l'unique (d'après 2.3.6 (iii)) élément de $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0)$ est en position standard ; auquel cas u appartient à $U_\lambda \subset U_0$. Tout élément de ${}_F\mathfrak{U}$ est $G(F)$ -conjugué à un élément en position standard et on a vu (cf. 2.5) que :

- deux F -lames standard de \mathfrak{U}_F qui sont conjuguées dans $G(F)$ sont égales ;
- l'application $v \mapsto {}_F\mathfrak{Y}_v$ induit une bijection de l'ensemble des F -lames standard de ${}_F\mathfrak{U}$ sur l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathfrak{U}$.

3.4. Du groupe à l'algèbre de Lie. — Posons $\mathfrak{u}_0 = \text{Lie}(U_0)$ et fixons un F -isomorphisme de variétés $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$ qui soit compatible à l'action de A_0 , c'est-à-dire tel que

$$j_0 \circ \text{Ad}_a = \text{Int}_a \circ j_0 \quad \text{pour tout } a \in A_0$$

(cf. la preuve de [LL, 9.1.1]). Puisque tout élément de ${}_F\mathfrak{U}$ est $G(F)$ -conjugué à un élément de ${}_F\mathfrak{U}$ en position standard, via j_0 on ramène l'étude de l'action par conjugaison de $\check{X}_F(G)$ sur \mathfrak{U}_F à celle de l'action adjointe de $\check{X}(A_0)$ sur $\mathfrak{u}_0(F)$.

¶ *L'algèbre de Lie comme G -module.* — Posons

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G).$$

On considère \mathfrak{g} comme un G -module pour l'action adjointe donnée par

$$g \cdot X = \text{Ad}_g(X).$$

C'est en particulier une G -variété pointée (avec $e_{\mathfrak{g}} = 0$). On note $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^G$ la variété précédemment notée $\mathcal{N}^G(\mathfrak{g}, 0)$. C'est une sous-variété fermée de \mathfrak{g} définie sur F et G -invariante. On note ${}_F\mathfrak{N}$ le sous-ensemble de \mathfrak{N} précédemment noté ${}_F\mathcal{N}^G(\mathfrak{g}, 0)$ et on pose $\mathfrak{N}_F = \mathfrak{g}(F) \cap {}_F\mathfrak{N}$. On a donc

$${}_F\mathfrak{N} = G(F) \cdot \mathfrak{u}_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_F = G(F) \cdot \mathfrak{u}_0(F).$$

On définit comme en 3.3 les notions d'élément de ${}_F\mathfrak{N}$ en position standard et de F -lames standard de \mathfrak{N}_F .

Soit S un tore F -déployé maximal de G . On note G^S le centralisateur de S dans G et on pose $\mathfrak{g}^S = \text{Lie}(G^S)$. Observons que \mathfrak{g}^S coïncide avec l'intersection des noyaux $\mathfrak{g}^t = \ker(\text{Ad}_t - \text{Id} | \mathfrak{g})$ pour $t \in S$. On note $\mathcal{R}_S \subset \check{X}(S)$ l'ensemble des racines de S dans G et, pour chaque $\alpha \in \mathcal{R}_S$, on note $\mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ le sous-espace radiciel associé à α ;

c'est-à-dire le sous-espace noté V_α en 2.4 (¶ *Interlude sur le cas des G -modules*) pour $V = \mathfrak{g}$. On a la décomposition en somme directe, définie sur F ,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^S \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}_S} \mathfrak{u}_\alpha \right).$$

Posons $\mathcal{R}'_S = \mathcal{R}_S \cup \{0\}$ et pour $X \in \mathfrak{g}$, écrivons $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}'_S} X_\alpha$ avec $X_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ et $X_0 \in \mathfrak{g}^S$. Pour $\lambda \in \tilde{X}(S)$, on a

$$\mathrm{Ad}_{t^\lambda}(X) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}'_S} t^{\langle \alpha, \lambda \rangle} X_\alpha.$$

La somme porte en fait sur le sous-ensemble $\mathcal{R}'_S(X) \subset \mathcal{R}'_S$ formé des $\alpha \in \mathcal{R}'_S$ tels que $X_\alpha \neq 0$. On définit l'invariant $m'_X(\lambda) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ comme en 2.4 : si $X = 0$, on pose $m'_X(\lambda) = +\infty$ et sinon, on pose

$$m'_X(\lambda) = \min\{\langle \alpha, \lambda \rangle \mid \alpha \in \mathcal{R}'_S(X)\} \in \mathbb{Z}.$$

Si la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot X$ existe (i.e. si $m'_X(\lambda) \geq 0$), on a (2.4.13)

$$m'_X(\lambda) = m_X(\lambda) (= m_{0,X}(\lambda)).$$

Pour $\lambda \in \tilde{X}(S)$ et $i \in \mathbb{Z}$, on a défini en 2.4 des sous-espaces $\mathfrak{g}_\lambda(i)$ et $\mathfrak{g}_{\lambda,i}$ de \mathfrak{g} . Notons $\mathcal{R}_{S,\lambda}(i)$ l'ensemble des racines $\alpha \in \mathcal{R}_S$ telles que $\langle \alpha, \lambda \rangle = i$. On a

$$\mathfrak{g}_\lambda(i) = \begin{cases} \mathfrak{g}^S \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}_{S,\lambda}(0)} \mathfrak{u}_\alpha \right) & \text{si } i = 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}_{S,\lambda}(i)} \mathfrak{u}_\alpha & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{\lambda,i} = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{g}_\lambda(j).$$

Observons que

$$\mathfrak{g}_{\lambda,0} = \mathrm{Lie}(P_\lambda), \quad \mathfrak{g}_{\lambda,1} = \mathrm{Lie}(U_\lambda) \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_\lambda(0) = \mathrm{Lie}(M_\lambda).$$

Puisque λ est défini sur F , la filtration $\{\mathfrak{g}_{\lambda,i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ et la graduation $\mathfrak{g}_\lambda(i)$ de \mathfrak{g} définies ci-dessus le sont aussi. Rappelons que d'après 2.4.13, la filtration $\{\mathfrak{g}_{\lambda,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ coïncide avec celle définie en 2.4 dans le cas d'un G -variété pointée quelconque.

¶ *Passage du groupe à l'algèbre de Lie.* — Commençons par préciser la construction du F -isomorphisme $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$. Fixons une extension galoisienne finie $\tilde{F} \subset F^{\mathrm{sép}}$ de F déployant G et un tore \tilde{F} -déployé maximal \tilde{A}_0 de G , défini sur F et contenant A_0 . Soit $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\tilde{A}_0}$ l'ensemble des racines de \tilde{A}_0 dans G . Pour $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{R}}$, fixons un \tilde{F} -isomorphisme $e_{\tilde{\alpha}} : \mathbb{G}_{\tilde{a}/F} \rightarrow U_{\tilde{\alpha}}$. Posons

$$\epsilon_{\tilde{\alpha}} = e_{\tilde{\alpha}}(1) \quad \text{et} \quad E_{\tilde{\alpha}} = \mathrm{Lie}(e_{\tilde{\alpha}}(1)).$$

Alors pour $t \in \tilde{F}$ et $X \in \tilde{F}[t] \otimes_{\tilde{F}} \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{Ad}_{e_{\tilde{\alpha}}(t)}(X) \equiv X + t[E_{\tilde{\alpha}}, X] \pmod{t^2 \tilde{F}[t] \otimes_{\tilde{F}} \mathfrak{g}}.$$

Puisque l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}$ est Γ_F -invariant, on peut imposer $\gamma(e_{\tilde{\alpha}}) = e_{\gamma(\tilde{\alpha})}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_F$ et tout $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{R}}$; alors $\gamma(\epsilon_{\tilde{\alpha}}) = \epsilon_{\gamma(\tilde{\alpha})}$ et $\gamma(E_{\tilde{\alpha}}) = E_{\gamma(\tilde{\alpha})}$. La restriction à A_0 donne une application $\tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{0\}$ d'image \mathcal{R} ou \mathcal{R}' (l'image est \mathcal{R} si et

seulement si G est déployé sur F). Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, notons $\tilde{\mathcal{R}}(\alpha) \subset \tilde{\mathcal{R}}$ la fibre au-dessus de α . Comme en [B, 21.7], on pose

$$(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha, 2\alpha\} & \text{si } 2\alpha \in \mathcal{R} \\ \{\alpha\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on note $U_{(\alpha)}$ le sous-groupe unipotent de G correspondant à (α) . On pose $U_{2\alpha} = \{1\}$ si $2\alpha \notin \mathcal{R}$. Alors le choix d'un ordre $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{r(\alpha)}$ sur $\tilde{\mathcal{R}}(\alpha)$ permet de définir un F -isomorphisme de variétés

$$j_\alpha : \mathfrak{u}_\alpha \rightarrow U_\alpha/U_{2\alpha}, \quad \sum_{i=1}^{r(\alpha)} t_i E_{\tilde{\alpha}_i} \mapsto e_{\tilde{\alpha}_1}(t_1) \cdots e_{\tilde{\alpha}_{r(\alpha)}}(t_{r(\alpha)}) U_{2\alpha} \quad \text{avec } t_i \in \overline{F}.$$

Par construction j_α est compatible à l'action de A_0 et même à celle de \tilde{A}_0 . Si $2\alpha \in \mathcal{R}$, on définit de même un F -isomorphisme de variétés $j_{2\alpha} : \mathfrak{u}_{2\alpha} \rightarrow U_{2\alpha}$ compatible à l'action de A_0 et on note

$$j_{(\alpha)} : \mathfrak{u}_{(\alpha)} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{u}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_{2\alpha} \rightarrow U_{(\alpha)}$$

le F -isomorphisme de variétés obtenu en composant $j_\alpha \times j_{2\alpha}$ avec un F -isomorphisme de variétés $U_\alpha/U_{2\alpha} \times U_{2\alpha} \rightarrow U_{(\alpha)}$ compatible à l'action de A_0 (cf. [B, 21.19, 21.20]). Le choix d'un ordre $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sur les racines non-divisibles dans \mathcal{R}^+ permet alors de définir j_0 : on pose

$$j_0 = j_{(\alpha_1)} \times \cdots \times j_{(\alpha_s)} : \mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{u}_{(\alpha_i)} \rightarrow U_{(\alpha_1)} U_{(\alpha_2)} \cdots U_{(\alpha_s)} = U_0.$$

REMARQUE 3.4.1. — Pour tout F -sous-groupe parabolique standard Q de G , j_0 induit par restriction un F -isomorphisme de variétés A_0 -équivariant

$$j_Q : \mathfrak{u}_Q = \text{Lie}(U_Q) \rightarrow U_Q.$$

Pour $\mu \in \check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$, on a défini en 2.4 une filtration $(G_{\lambda,r})_{r \in \mathbb{Q}_+}$. Les $G_{\mu,r}$ sont des sous-groupes fermés de G , qui sont définis sur F si $\mu \in \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$. D'après 2.4.13, pour $\lambda \in \check{X}(A_0)$ en position standard, on a

$$m_u(\lambda) = m'_{j_0^{-1}(u)}(\lambda) \quad \text{pour tout } u \in U_\lambda.$$

On en déduit que pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$ et $i \in \mathbb{N}^*$, $G_{\lambda,i}$ est le sous-groupe de U_λ engendré par les sous-groupes radiciels $U_{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathcal{R}_S$ avec $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq i$; où S est un tore F -déployé maximal de G contenant $\text{Im}(\lambda)$. De plus

$$\mathfrak{g}_{\lambda,i} = \text{Lie}(G_{\lambda,i}).$$

Pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$ et $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$G_\lambda(i) = G_{\lambda,i}/G_{\lambda,i+1}.$$

Puisque le groupe $G_{\lambda,i+1}$ est distingué dans $G_{\lambda,0} = P_\lambda$, il l'est *a fortiori* dans $G_{\lambda,i}$. Par conséquent $G_\lambda(i)$ est un groupe algébrique, défini sur F puisque λ l'est. Observons que

$$G_\lambda(0) = P_\lambda/U_\lambda.$$

Observons aussi que pour $i \in \mathbb{N}$, l'action par conjugaison de P_λ sur $G_\lambda(i)$ se factorise en une action de $G_\lambda(0) (\simeq M_\lambda)$.

Pour $\lambda \in \check{X}(A_0)$ en position standard et $k \in \mathbb{N}^*$, j_0 induit un F -isomorphisme de variétés $\mathfrak{g}_{\lambda,k} \rightarrow G_{\lambda,k}$ qui se factorise en un F -isomorphisme de variétés

$$j_\lambda(k) : \mathfrak{g}_\lambda(k) = \mathfrak{g}_{\lambda,k}/\mathfrak{g}_{\lambda,k+1} \rightarrow G_\lambda(k).$$

Par construction $j_\lambda(k)$ est A_0 -équivariant.

LEMME 3.4.2. — *Pour $\lambda \in \check{X}(A_0)$ en position standard et $k \in \mathbb{N}^*$, $j_\lambda(k)$ est M_λ -équivariant et c'est un F -isomorphisme de groupes. En particulier, $j_\lambda(k)$ munit $G_\lambda(k)$ d'une structure de M_λ -module défini sur \tilde{F} .*

Démonstration. — Notons $\mathcal{R}_\lambda(k)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{R}$ tels que $\langle \alpha, \lambda \rangle = k$. On définit de la même manière $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda(k)$. Si $\alpha \in \mathcal{R}_\lambda(k)$ alors $2\alpha \notin \mathcal{R}_\lambda(k)$ et l'inclusion $U_{(\alpha)} \subset G_{\lambda,k}$ induit par passage aux quotients une application injective $U_{(\alpha)}/U_{2\alpha} \rightarrow G_\lambda(k)$. En la composant avec j_α , on obtient un F -morphisme injectif $\mathfrak{u}_\alpha \rightarrow G_\lambda(k)$ qui est \tilde{A}_0 -équivariant. Pour $X \in \mathfrak{g}_\lambda(k)$, on écrit $X = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{R}}_\lambda(k)} x_{\tilde{\alpha}} E_{\tilde{\alpha}}$ avec $x_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{F}$. D'après les relations de commutateurs de Chevalley, $j_\lambda(k)(X)$ est l'image de $\prod_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{R}}_\lambda(k)} e_{\tilde{\alpha}}(x_{\tilde{\alpha}})$ dans $G_\lambda(k)$ pour n'importe quel ordre sur le produit. En particulier $j_\lambda(k)$ est un F -isomorphisme de groupes. Par construction $j_\lambda(k)$ est \tilde{A}_0 -équivariant et munit $G_\lambda(k)$ d'une action linéaire de \tilde{A}_0 . À nouveau d'après les relations de commutateurs de Chevalley, pour $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{R}}$ tel que $\langle \tilde{\alpha}, \lambda \rangle = 0$, $j_\lambda(k)$ est $U_{\tilde{\alpha}}$ -équivariant et munit $G_\lambda(k)$ d'une action linéaire de $U_{\tilde{\alpha}}$. Par conséquent $j_\lambda(k)$ est M_λ -équivariant et munit $G_\lambda(k)$ d'une structure de M_λ -module. Puisque les $E_{\tilde{\alpha}}$ sont \tilde{F} -rationnels, cette structure est définie sur \tilde{F} . \square

PROPOSITION 3.4.3. — *Soient $\lambda \in \check{X}_F(G)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in G_{\lambda,k}(F) \setminus G_{\lambda,k+1}(F)$. Alors $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ si et seulement si l'image $u_\lambda(k)$ de u dans $G_\lambda(k)$ est $(\tilde{F}, M_\lambda^\perp)$ -semi-stable.*

Démonstration. — Quitte à remplacer λ (et u) par un conjugué dans $G(F)$, on peut supposer λ en position standard. Alors d'après 3.4.2 et le critère de Kirwan-Ness rationnel (2.7.6), $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ si et seulement si $u_\lambda(k)$ est $(\tilde{F}, M_\lambda^\perp)$ -semi-stable. D'où le lemme, puisque $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} = \check{X}_F(G) \cap \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ (2.5.18 (i)). \square

COROLLAIRE 3.4.4. — *Soient $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda)$. On a*

$${}_F \mathcal{Y}_u G_{\lambda,k+1} = G_{\lambda,k+1} {}_F \mathcal{Y}_u = {}_F \mathcal{Y}_u.$$

Démonstration. — Puisque λ appartient à $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$, on a (2.7.7)

$$\tilde{F} \mathcal{Y}_u G_{\lambda,k+1} = G_{\lambda,k+1} \tilde{F} \mathcal{Y}_u = \tilde{F} \mathcal{Y}_u.$$

Or ${}_F \mathcal{Y}_u = \tilde{F} \mathcal{Y}_u$ (2.5.18 (ii)). D'où le corollaire. \square

PROPOSITION 3.4.5. — *Soit $X \in \mathfrak{u}_0(F)$.*

(i) Si $\lambda \in \check{X}(A_0)$ est en position standard, alors

$$\lambda \in \Lambda_{F,X}^{\text{opt}} \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda \in \Lambda_{F,j_0(X)}^{\text{opt}}.$$

(ii) Si X est en position standard, alors $j_0(X)$ l'est aussi et

$${}_F\mathcal{Y}_{j_0(X)} = \{u \in {}_F\mathfrak{U} \mid \mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,X}\}.$$

(iii) L'application $X \mapsto j_0(X)$ induit une bijection entre l'ensemble des F -lames standard de ${}_F\mathfrak{N}$ qui possèdent un point F -rationnel et l'ensemble des F -lames standard de ${}_F\mathfrak{N}$ qui possèdent un point F -rationnel.

Démonstration. — Puisque $j_0(0) = 1$, on peut supposer $X \neq 0$. Notons u l'élément $j_0(X) \in U_0(F) \setminus \{1\}$.

Prouvons (i). Posons $k = m_X(\lambda)$. On a $m_u(\lambda) = k$. Si $k = 0$ il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer $k > 0$. D'après 3.4.2, la composante $X_\lambda(k)$ de X sur $\mathfrak{g}_\lambda(k)$ est $(\tilde{F}, M_\lambda^\perp)$ -semi-stable si et seulement si l'image $u_\lambda(k)$ de u dans $G_\lambda(k) = G_{\lambda,k}/G_{\lambda,k+1}$ est $(\tilde{F}, M_\lambda^\perp)$ -semi-stable. D'après 2.7.6 et 3.4.3, on a donc

$$\lambda \in \Lambda_{\tilde{F},X}^{\text{opt}} \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda \in \Lambda_{\tilde{F},u}^{\text{opt}}.$$

D'où le point (i) grâce à 2.5.18 (i).

Prouvons (ii). On suppose X en position standard. Si $\Lambda_{F,X}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0) = \{\lambda\}$, alors d'après (i) on a $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0) = \{\lambda\}$, d'où l'on déduit l'égalité $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} = \Lambda_{F,X}^{\text{opt}}$. Comme $m_u(\lambda) = k = m_X(\lambda)$, on a aussi l'égalité $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,X}$. Cela prouve (ii).

Le point (iii) découle de (ii). \square

COROLLAIRE 3.4.6. — Soit $u \in \mathfrak{U}_F$. Pour $u' \in {}_F\mathcal{Y}_u$, u'^{-1} appartient à ${}_F\mathcal{Y}_u$.

Démonstration. — On peut supposer $u \neq 1$. On peut aussi supposer u en position standard. Soient $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda)$. Soit $X = j_0^{-1}(u)$. Soient aussi $u' \in {}_F\mathcal{Y}_u$ et $X' = j_0^{-1}(u') \in {}_F\mathcal{Y}_X$. Alors $j_0^{-1}(u'^{-1}) = X'' \in -X' + \mathfrak{g}_{\lambda,k+1}$. Comme $-X' \in {}_F\mathcal{Y}_X$ et ${}_F\mathcal{Y}_X + \mathfrak{g}_{\lambda,k+1} = {}_F\mathcal{Y}_X$ (d'après 2.7.7), X'' appartient à ${}_F\mathcal{Y}_X$. On en déduit que

$$\mathbf{\Lambda}_{F,u^{-1}} = \mathbf{\Lambda}_{F,X''} = \mathbf{\Lambda}_{F,X} = \mathbf{\Lambda}_{F,u},$$

ce qui prouve le corollaire. \square

COROLLAIRE 3.4.7. — (i) Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, l'ensemble

$${}_F\mathcal{Y}_X^G \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathfrak{U}_F \mid \mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,X}\}$$

est une F -lame de ${}_F\mathfrak{U}$.

(ii) L'application $X \mapsto {}_F\mathcal{Y}_X^G$ induit une bijection entre l'ensemble des F -lames qui possèdent un point F -rationnel et l'ensemble F -lames de ${}_F\mathfrak{U}$ qui possèdent un point F -rationnel.

Démonstration. — Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on choisit un $g \in G(F)$ tel que $X' = \text{Ad}_g(X)$ soit en position standard. Alors

$${}_F\mathcal{Y}_X^G = g^{-1} \bullet {}_F\mathcal{Y}_{X'}^G = g^{-1} \bullet {}_F\mathcal{Y}_{j_0(X')},$$

ce qui prouve (i). Si $X, X' \in \mathfrak{N}_F$ sont tels que ${}_F\mathcal{Y}_{X'}^G = {}_F\mathcal{Y}_X^G$, alors $\Lambda_{F,X'} = \Lambda_{F,X}$ et par conséquent ${}_F\mathcal{Y}_{X'} = {}_F\mathcal{Y}_X$; d'où l'injectivité dans (ii). Si $u \in \mathfrak{U}_F$, on choisit un $g \in G(F)$ tel que $u' = g \bullet u$ soit en position standard et on pose $X = \text{Ad}_{g^{-1}}(j_0^{-1}(u'))$. Alors

$${}_F\mathcal{Y}_u = g^{-1} \bullet {}_F\mathcal{Y}_{u'} = g^{-1} \bullet {}_F\mathcal{Y}_{j_0^{-1}(u')}^G = {}_F\mathcal{Y}_X^G ;$$

d'où la surjectivité dans (ii). \square

La bijection 3.4.7 (ii) s'étend naturellement aux F -strates :

COROLLAIRE 3.4.8. — (i) Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, l'ensemble

$${}_F\mathfrak{Y}_X^G \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathfrak{U}_F \mid \exists g \in G(F) \text{ tel que } \Lambda_{F,u} = g \bullet \Lambda_{F,X}\}$$

est une F -strate de ${}_F\mathfrak{U}$.

(ii) L'application $X \mapsto {}_F\mathfrak{Y}_X^G$ induit une bijection entre l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathfrak{N}$ qui possèdent un point F -rationnel et l'ensemble des F -strates de ${}_F\mathfrak{U}$ qui possèdent un point F -rationnel.

Démonstration. — Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on a ${}_F\mathfrak{Y}_X^G = G(F) \bullet {}_F\mathcal{Y}_X^G$ ce qui prouve (i) (d'après 3.4.7 (i)). Si $X, X' \in \mathfrak{N}_F$ sont tels que ${}_F\mathfrak{Y}_{X'}^G = {}_F\mathfrak{Y}_X^G$, alors $\Lambda_{F,X'} = g \bullet \Lambda_{F,X}$ pour un $g \in G(F)$, ce qui entraîne l'égalité ${}_F\mathcal{Y}_{X'} = {}_F\mathcal{Y}_X$; d'où l'injectivité dans (ii). D'autre part toute F -strate de ${}_F\mathfrak{U}$ qui possède un point F -rationnel est de la forme ${}_F\mathfrak{Y}_u$ avec $u \in \mathfrak{U}_F$ en position standard, et on a ${}_F\mathfrak{Y}_u = {}_F\mathfrak{Y}_{j_0^{-1}(u)}^G$; d'où la surjectivité dans (ii). \square

REMARQUE 3.4.9. — La bijection de 3.4.7 (ii) est entièrement caractérisée par l'égalité de 3.4.7 (i) et la bijection de 3.4.8 (ii) est entièrement caractérisée par l'égalité de 3.4.8 (i) : elles ne dépendent ni du choix du F -isomorphisme A_0 -équivariant $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$, ni de celui de la F -paire parabolique minimale (P_0, M_0) de G .

¶ *L'hypothèse 2.6.9 pour G .* — Le passage du groupe à l'algèbre de Lie permet aussi de prouver l'hypothèse 2.6.9 pour (la G -variété pointée) G , c'est-à-dire pour les éléments de \mathfrak{U}_F , à partir de l'hypothèse 2.6.9 pour le G -module \mathfrak{g} , c'est-à-dire pour les éléments de \mathfrak{N}_F .

Le cas suivant est celui qui nous servira par la suite :

PROPOSITION 3.4.10. — Soit (F, ν) un corps (commutatif) valué admissible tel que le complété \widehat{F} de F en ν soit un corps localement compact vérifiant la propriété $(\widehat{F}^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(\widehat{F}^{\text{sép}})} = F$; e.g. un corps localement compact $F = \widehat{F}$ ou un corps global F muni d'une place finie ν (cf. A.1.5). L'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour le G -module \mathfrak{g} : pour tout $X \in \mathfrak{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_X \neq \emptyset$.

Démonstration. — Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on a $\Lambda_{F,X} = \check{X}_F(G) \cap \Lambda_{\widehat{F},X}$; par conséquent si $\check{X}_{\widehat{F}}(G) \cap \Lambda_X \neq \emptyset$, auquel cas $\Lambda_{\widehat{F},X} = \check{X}_{\widehat{F}}(G) \cap \Lambda_X$, alors $\check{X}_F(G) \cap \Lambda_X \neq \emptyset$. Quitte à remplacer (F, ν) par $(\widehat{F}, \widetilde{\nu})$ où $\widetilde{\nu}$ est l'unique valuation de \widehat{F} prolongeant ν , on peut donc supposer que G est déployé sur F (i.e. $\widehat{F} = F$).

On suppose aussi, ce qui est loisible, que G provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif \mathcal{G} (cf. 2.8), c'est-à-dire que $G = \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}} F$. Le tore maximal F -déployé A_0 de G provient lui aussi par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un tore maximal \mathcal{A}_0 de \mathcal{G} . Chaque racine $\alpha \in \mathcal{R}$ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un morphisme de \mathbb{Z} -schémas en groupes $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$, encore noté α ; et chaque co-caractère $\lambda \in \check{X}(A_0)$ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow A_0$ d'un élément de $\check{X}(\mathcal{A}_0) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}, \mathcal{A}_0)$, encore noté λ . Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, on note \mathcal{U}_{α} le sous- \mathbb{Z} -schéma en groupes fermé lisse de \mathcal{G} associé à α , de sorte que $U_{\alpha} = \mathcal{U}_{\alpha} \times_{\mathbb{Z}} F$. On peut supposer que la famille d'épinglages $(e_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{R}}$ fixée plus haut (rappelons que $\tilde{F} = F$) soit un F -système de Chevalley définissant la donnée radicielle schématique $(\mathcal{A}_0, (\mathcal{U}_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{R}})$, c'est-à-dire que chaque F -isomorphisme $e_{\alpha} : \mathbb{G}_a \rightarrow U_{\alpha}$ se prolonge en un isomorphisme de \mathbb{Z} -schémas en groupes $\mathbb{G}_{a/\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha}$. Cela entraîne en particulier que les relations de commutateurs $(e_{\alpha}(x), e_{\beta}(y))$ pour $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\beta \neq -\alpha$, sont à coefficients dans \mathbb{Z} .

Rappelons que l'on a posé $E_{\alpha} = \text{Lie}(e_{\alpha})(1)$. Soit $\mathcal{V} \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n'}$ l'espace affine défini par le \mathbb{Z} -module libre de type fini $L = \check{X}(\mathcal{A}_0) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathbb{Z}E_{\alpha}$; c'est-à-dire que pour chaque \mathbb{Z} -algèbre A , on a $\mathcal{V}(A) = L \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Le \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif \mathcal{G} opère linéairement sur \mathcal{V} : pour chaque \mathbb{Z} -algèbre A , le groupe $\mathcal{G}(A)$ opère A -linéairement sur $\mathcal{V}(A)$. Observons que $\mathcal{V}_F = \mathfrak{g} (= \text{Lie}(G))$. Pour $\lambda \in \check{X}(A_0) = \check{X}(\mathcal{A}_0)$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{V}_{\lambda}(k) \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n'_k}$ l'espace affine défini par le \mathbb{Z} -module libre de type fini $L' = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}_{\lambda}(k)} \mathbb{Z}E_{\alpha}$ avec (rappel) $\mathcal{R}_{\lambda}(k) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle = k\}$. Ainsi $\mathcal{V}_{\lambda}(k)$ est un sous- \mathbb{Z} -schéma en groupes fermé de \mathcal{V} et $\mathcal{V}_{\lambda}(k)_F = \mathfrak{g}_{\lambda}(k)$. Par construction l'action F -linéaire de M_{λ} sur $V_{\lambda}(k)$ provient par le changement de base $F \rightarrow \mathbb{Z}$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire de \mathcal{M}_{λ} sur $\mathcal{V}_{\lambda}(k)$. Cela s'applique en particulier au cas où $\lambda \in \Lambda_{F,X}^{\text{opt}}$ et $k = m_X(\lambda)$ pour un élément $X \in \mathfrak{N}_F$. On peut donc appliquer 2.8.9. \square

COROLLAIRE 3.4.11. — (Sous les hypothèses de 3.4.10.) L'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour la G -variété G : pour tout $u \in \mathfrak{U}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_u \neq \emptyset$.

Démonstration. — On peut supposer que G est F -déployé (cf. le début de la démonstration de 3.4.10). D'autre part il suffit de vérifier l'hypothèses 2.6.9 pour les $u \in \mathfrak{U}_F$ qui sont en position standard. Pour un tel u , posons $X = j_0^{-1}(U) \in \mathfrak{N}_F$. D'après 3.4.5 pour $F = \overline{F}$, on a $\Lambda_u = \Lambda_X$. D'où le corollaire. \square

On sait que si $p \geq 1$ est très bon pour G , toutes les G -orbites de \mathfrak{g} sont séparables (cf. 2.1.3). On en déduit le cas particulier suivant :

LEMME 3.4.12. — Si $p \geq 1$ est très bon pour G , l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour le G -module \mathfrak{g} et pour la G -variété G (sans hypothèse supplémentaire sur F).

Démonstration. — Si $p = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $p > 1$ est très bon pour G , ce que l'on suppose, alors toutes les orbites unipotentes de \mathfrak{g} sont séparables. On en déduit (2.7.11 (ii)) que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour le G -module \mathfrak{g} : pour tout $X \in \mathfrak{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_X \neq \emptyset$. Maintenant si $u \in \mathfrak{U}_F$, on choisit un $g \in G(F)$ tel que $u' = gug^{-1}$ soit en position standard et on pose $X' = j_0^{-1}(u') \in \mathfrak{N}_F$. D'après la preuve de 3.4.5, on a $\Lambda_{F,u'} = \Lambda_{F,X'}$ et on a aussi $\Lambda_{u'} = \Lambda_{X'}$. Puisque

$\Lambda_{F,X'} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_{X'}$, on a donc $\Lambda_{F,u'} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_u$. En conjugant par g^{-1} , on obtient l'égalité $\Lambda_{F,u} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \Lambda_u$. \square

3.5. F -strates et orbites géométriques. — On a déjà dit (2.5.6 (ii)) que si $p = 1$ ou $p \gg 1$, les \overline{F} -strates unipotentes de Hesselink coïncident avec les orbites géométriques unipotentes. Dans cette sous-section, on précise cette affirmation et on en déduit une description analogue pour les F -strates unipotentes, resp. nilpotentes, de \mathfrak{U}_F avec F quelconque.

Commençons par rappeler la

DÉFINITION 3.5.1. —

- (i) Pour G (absolument) quasi-simple, on dit que $p \geq 1$ est « bon » pour G si $p = 1$ ou si $p > 1$ ne divise aucun coefficient de la plus grande racine (exprimée comme combinaison linéaire de racines simples) du système de racines de G . Ainsi les « mauvais » $p > 1$ pour G , c'est-à-dire ceux qui ne sont pas bons, sont :
 - aucun si G est de type \mathbf{A}_n ;
 - $p = 2$ si G n'est pas de type \mathbf{A}_n ;
 - $p = 3$ si G est de type exceptionnel (\mathbf{G}_2 , \mathbf{F}_4 ou \mathbf{E}_*) ;
 - $p = 5$ si G est de type \mathbf{E}_8 .
- (ii) Pour G réductif connexe quelconque, on dit que p est « bon » pour G si pour tout sous-groupe distingué quasi-simple H de G , p est bon pour H .
- (iii) Pour G comme en (ii), on dit que p est « très bon » pour G si $p = 1$ ou si $p > 1$ est bon pour G et pour tout sous-groupe distingué quasi-simple de G de type \mathbf{A}_n , p ne divise pas $n+1$. Observons que cette définition (aujourd'hui standard) n'est pas celle de Morris dans [M, 3.13].

LEMME 3.5.2 ([CP, L2]). — *Si p est bon pour G , les \overline{F} -strates unipotentes de G coïncident avec les orbites géométriques unipotentes et les \overline{F} -strates nilpotentes de \mathfrak{g} coïncident avec les orbites géométriques nilpotentes.*

REMARQUE 3.5.3. —

- (i) Supposons que $p \geq 1$ soit bon pour G . Pour un élément unipotent v de G , la \overline{F} -strate unipotente \mathfrak{Y}_v coïncide avec l'orbite géométrique $\mathcal{O}_v = \{gug^{-1} \mid g \in G\}$, caractérisée par la propriété d'être l'unique G -orbite ouverte dans \mathfrak{X}_v ; et \mathfrak{Z}_v est l'unique P_v -orbite ouverte dans \mathcal{X}_v . Observons que le bord $\mathfrak{X}_v \setminus \mathfrak{Y}_v = \overline{\mathcal{O}_v} \setminus \mathcal{O}_v$ est une réunion (finie) de strates, c'est-à-dire d'orbites géométriques unipotentes, et l'hypothèse 2.5.5 est vérifiée (pour $F = \overline{F}$). Si de plus $\mathcal{X}_v = U_{P_v}$, alors \mathfrak{Z}_v est la P_v -orbite de Richardson dans U_{P_v} .
- (ii) Si $p > 1$ n'est pas bon pour G , une \overline{F} -strate unipotente peut contenir plusieurs orbites géométriques unipotentes (cf. l'exemple [H1, 8.5]).

On s'intéresse maintenant à la version F -rationnelle de 3.5.2. D'après 2.5.19 (en prenant $E = F^{\text{sép}}$), pour $p \geq 1$ et $u, u' \in \mathfrak{U}_F$, les trois conditions équivalentes suivantes sont équivalentes :

- u et u' sont dans la même F -strate de \mathfrak{U}_F ;
- u et u' sont dans la même $F^{\text{sép}}$ -strate de $\mathfrak{U}_{F^{\text{sép}}}$;

– il existe un $g \in G(F^{\text{sép}})$ tel que $g \bullet \Lambda_{F^{\text{sép}},u} = \Lambda_{F^{\text{sép}},u'}$.

On en déduit que si $p = 1$, pour $u, u' \in \mathfrak{U}_F$, les trois conditions suivantes sont équivalentes (d'après 3.5.2) :

- u et u' sont dans la même F -strate de ${}_F\mathfrak{U}$;
- u et u' sont conjugués dans $G (= G(\overline{F}) = G(F^{\text{sép}}))$;
- il existe un $g \in G$ tel que $g \bullet \Lambda_u = \Lambda_{u'}$.

Nous allons vérifier que cela reste vrai si $p > 1$ est *très bon* pour G .

D'après Richardson-Springer-Steinberg [SS, ch. I, §5] (cf. [Ti, 2.3]), on a le

LEMME 3.5.4. — *Si $p \geq 1$ est très bon pour G , alors tous les éléments de G sont séparables (au sens de 2.1.3) et tous les éléments de \mathfrak{g} sont séparables.*

REMARQUE 3.5.5. — Rappelons que la séparabilité est une notion géométrique (on peut donc supposer $F = \overline{F}$). Notons C_G le tore central maximal de G . Le morphisme produit

$$\tilde{\pi} : \tilde{G} = C_G \times G_{\text{sc}} \rightarrow G = C_G \cdot G_{\text{der}}$$

est une isogénie centrale (pas forcément séparable) ; où $G_{\text{sc}} \rightarrow G_{\text{der}}$ est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G . Supposons de plus que p soit très bon pour G . Alors il existe une forme bilinéaire \tilde{G} -invariante non dégénérée *symétrique* $B(\cdot, \cdot)$ sur $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{Lie}(\tilde{G})$. De plus $\tilde{\pi}$ est séparable, i.e. $d(\tilde{\pi})_1 : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme, et B est une forme bilinéaire G -invariante non dégénérée symétrique sur \mathfrak{g} . Cette propriété assure que G vérifie la condition (*) de [SS, ch. I, 5.1].

Pour les éléments séparables, les points F -rationnels de l'orbite géométrique sont contenus dans la F -strate :

LEMME 3.5.6. — (i) *Pour $u \in \mathfrak{U}_F$ séparable, on a l'inclusion $\mathcal{O}_u(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,u}$.*
(ii) *Pour $X \in \mathfrak{N}_F$ séparable, on a l'inclusion $\mathcal{O}_X(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,X}$.*

Démonstration. — Soit $u \in \mathfrak{U}_F$ séparable. Le centralisateur schématique G^u lisse, i.e. géométriquement réduit (d'après [B, ch. II, 6.7]) et le F -morphisme de variétés $G \rightarrow \mathcal{O}_u$, $g \mapsto gug^{-1}$ se factorise en un F -isomorphisme $G/G^u \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_u$. De plus on a la suite exacte courte (cf. [M, 3.1])

$$1 \rightarrow G^u(F^{\text{sép}}) \rightarrow G(F^{\text{sép}}) \rightarrow \mathcal{O}_u(F^{\text{sép}}) \rightarrow 1.$$

On en déduit que si $u' \in \mathcal{O}_u(F)$, alors u' est conjugué à u dans $G(F^{\text{sép}})$ et par conséquent u' appartient à $\mathfrak{Y}_{F,u}$ (d'après 2.5.19). D'où l'inclusion

$$\mathcal{O}_u(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,u}.$$

L'inclusion de (ii) s'obtient de la même manière. □

PROPOSITION 3.5.7. — *On suppose que p est très bon pour G .*

- (i) *Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, on a $\mathcal{O}_u(F) = \mathfrak{Y}_{F,u}$.*
- (ii) *Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on a $\mathcal{O}_X(F) = \mathfrak{Y}_{F,X}$.*

Démonstration. — Soit $u \in \mathfrak{U}_F$. Quitte à remplacer u par un conjugué dans $G(F)$, on peut supposer u en position standard. Soit $X \in \mathfrak{u}_0(F)$ tel que $j_0(X) = u$. Soient $\lambda \in \Lambda_X^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda) \in \mathbb{N}^*$.

D'après 3.5.5, il existe une forme bilinéaire G -invariante symétrique non dégénérée B sur \mathfrak{g} . On en déduit comme dans la preuve de [J, lemma 5.7] que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$[X, \mathfrak{g}_\lambda(n-k)] = \mathfrak{g}_\lambda(n) \Leftrightarrow \mathfrak{g}^X \cap \mathfrak{g}_\lambda(-n) = \{0\}$$

où l'on a posé (rappel) $\mathfrak{g}^X = \{H \in \mathfrak{g} \mid [X, H] = 0\}$. Puisque $G^X \subset P_\lambda$ et que X est séparable (d'après 3.5.4), on a $\mathfrak{g}^X \subset \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{g}_{\lambda,0}$. On en déduit que

$$[X, \mathfrak{g}_\lambda(n-k)] = \mathfrak{g}_\lambda(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où l'égalité (cf. la démonstration de [Ts, prop. 3.1])

$$\text{Ad}_{U_\lambda}(X) = X + \mathfrak{g}_{\lambda, k+1}.$$

Par conséquent quitte à remplacer λ par $\text{Int}_{u'} \circ \lambda$ pour un $u' \in {}_F U_X = U_\lambda$, on peut supposer que X appartient à $\mathfrak{g}_\lambda(k)$. On peut donc appliquer 2.7.11 (iii) :

$$\mathfrak{Y}_{F,X} = \mathfrak{g}(F) \cap \mathfrak{Y}_X.$$

Or $\mathfrak{Y}_X = \mathcal{O}_X$ (3.5.2), d'où le point (ii).

Quant au point (i), d'après 2.5.19, on peut supposer $F = F^{\text{séparé}}$. En ce cas P_0 est un sous-groupe de Borel de G (défini sur F). Puisque $\mathfrak{Y}_{F,u} = \mathfrak{Y}_{F,u}^{\text{sc}}$ (3.2.7 (iii)), on peut aussi supposer G quasi-simple et simplement connexe. Il existe un F -isomorphisme G -équivariant (appelé F -isomorphisme de Springer) [SS, ch. III, 3.12] $\zeta : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U}$. Il se restreint en un F -isomorphisme P_0 -équivariant $\zeta_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$. En particulier ζ induit une bijection entre les orbites géométriques nilpotentes qui rencontrent $\mathfrak{u}_0(F)$ et les orbites géométriques unipotentes qui rencontrent $U_0(F)$. D'autre part, d'après 3.4.8, on a une bijection canonique

$$\mathfrak{Y}_{F,X} \mapsto \mathfrak{Y}_{F,X}^G = G(F) \cap {}_F \mathfrak{Y}_X^G$$

entre les F -strates de \mathfrak{N}_F et les F -strates de \mathfrak{U}_F qui, d'après 3.4.9, coïncide avec celle construite à partir de ζ_0 : pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on choisit $X_0 \in \mathfrak{Y}_{F,X}$ en position standard ; alors on a $\mathfrak{Y}_{F,X}^G = \mathfrak{Y}_{F,\zeta_0(X)}$. D'après 3.5.2 et le point (ii) déjà prouvé, les F -strates de \mathfrak{N}_F sont en bijection avec les orbites géométriques nilpotentes de \mathfrak{g} qui rencontrent $\mathfrak{u}_0(F)$. On en déduit qu'une F -strate de \mathfrak{U}_F rencontre au plus une orbite géométrique unipotente. Cela prouve que l'inclusion $\mathcal{O}_u(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,u}$ (3.5.7 (i)) est une égalité, c'est-à-dire le point (i). \square

REMARQUE 3.5.8. — Supposons G quasi-simple. Si $p \geq 1$ est très bon pour G , on a utilisé dans la preuve 3.5.7 l'existence d'un F -isomorphisme de Springer $\zeta : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U}$; observons qu'un tel F -isomorphisme existe même si G n'est pas simplement connexe (pourvu que p soit très bon pour G). Il induit une bijection entre les G -orbites de \mathfrak{N} qui rencontrent \mathfrak{N}_F et les G -orbites de \mathfrak{U} qui rencontrent \mathfrak{U}_F . Compte-tenu des égalités de 3.5.7, cette bijection coïncide avec celle déduite de 3.4.8 (ii). En particulier elle ne dépend pas du F -isomorphisme de Springer choisi pour la définir. Pour $F = \overline{F}$, cela redonne un résultat connu.

3.6. Induction parabolique des ensembles F -saturés. — On appelle F -facteur de Levi de G une composante de Levi définie sur F d'un F -sous-groupe parabolique de G . Si M est un F -facteur de Levi de G , on note A_M le sous-tore F -déployé maximal du centre (schématique) Z_M de M .

Soit P un F -sous-groupe parabolique de G . Supposons pour commencer que P soit standard (i.e. $P_0 \subset P$). La composante de Levi semi-standard M_P de P (c'est-à-dire celle contenant M_0) est définie sur F et on pose $A_P = A_{M_P}$. Puisque $M_0 \subset M_P$, on a l'inclusion $A_P \subset A_0 = A_{P_0}$. D'autre part l'inclusion $A_P \subset P$ définit un morphisme injectif à conoyau fini $X_F(P) \rightarrow X(A_P)$ qui, dualement, donne un isomorphisme de \mathbb{Q} -espaces vectoriels

$$\check{X}(A_P)_{\mathbb{Q}} = \text{Hom}(X(A_P), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}} = \text{Hom}(X_F(P), \mathbb{Q}).$$

L'inclusion $P_0 \subset P$ induit une inclusion $X_F(P) \subset X_F(P_0)$ et donc un morphisme surjectif $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}} = \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}} \rightarrow \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$. D'autre part l'inclusion $\check{X}(A_P) \subset \check{X}(A_0)$ induit un morphisme injectif $\check{X}(A_P)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ qui, compte-tenu des isomorphismes $\check{X}(A_P)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$ et $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$, fournit une section de la surjection $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}} \rightarrow \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$. On a donc la décomposition

$$\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}} = \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}} \oplus \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}^P \quad \text{avec} \quad \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}^P = \ker[\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}} \rightarrow \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}].$$

On identifie l'ensemble $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_0}$ des racines de A_0 dans G à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ via l'isomorphisme $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$. L'ensemble Δ_0^P des racines simples de A_0 dans $M_P \cap U_0$ est une base du dual $(\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}^P)^* = \text{Hom}(\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}^P, \mathbb{Q})$. On dispose aussi de l'ensemble $\Delta_P = \Delta_P^G$ des restrictions non nulles des éléments de $\Delta_0 = \Delta_{P_0}^G$ au sous-espace $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$ de $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$; c'est une base du dual $(\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G)^*$ de $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G = \ker[\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}} \rightarrow \mathfrak{a}_{G, \mathbb{Q}}]$. Notons $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}, 1}$ le cône dans $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$ formé des éléments μ tels que $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. On note μ_P l'élément de norme minimale dans $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}, 1}$ ⁽²⁹⁾. Cet élément existe par convexité et il appartient au cône $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}, 1} \cap \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ de $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$. On l'identifie à un élément de $\check{X}(A_P)_{\mathbb{Q}}$ via l'isomorphisme $\check{X}(A_P)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$. Notons $\{\mu_{P, \alpha} \mid \alpha \in \Delta_P\}$ la base de $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ duale de Δ_P . Observons que l'application

$$\Delta_0 \setminus \Delta_0^P \rightarrow \Delta_P, \quad \alpha \mapsto \alpha_P = \alpha|_{\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}}$$

est bijective et que pour tout $\alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^P$, on a $\mu_{P_0, \alpha} = \mu_{P, \alpha_P}$.

LEMME 3.6.1. — $\mu_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} \mu_{P, \alpha}$.

⁽²⁹⁾Rappelons que la F -norme G -invariante sur $\check{X}(G)$ est construite à partir d'une forme bilinéaire symétrique définie positive $W^G(T)$ -invariante et Γ_F -invariante (\cdot, \cdot) sur $\check{X}(T)$, où T est un tore maximal de G défini sur F . Si T contient A_0 , ce que l'on peut supposer, cette forme induit une forme \mathbb{Q} -bilinéaire symétrique définie positive $W^G(A_0)$ -invariante sur $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}$. À chaque composante irréductible \mathcal{R}_i du système de racine $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_0}$ correspond un sous-espace vectoriel V_i de $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^G$ et (\cdot, \cdot) se restreint en une forme bilinéaire symétrique définie positive sur V_i qui est déterminée de manière unique à une constante positive près. En particulier la structure euclidienne sur $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^G$ définie par (\cdot, \cdot) est compatible à la décomposition $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^G = \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^P \oplus \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^G \oplus \mathfrak{a}_{G, \mathbb{Q}}^G$.

Démonstration. — Écrivons $\mu_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} a_\alpha \mu_{P,\alpha}$ avec $a_\alpha \in \mathbb{Q}$. Pour $\alpha \in \Delta_P$, on a $\langle \alpha, \mu_P \rangle = a_\alpha \geq 1$. D'autre part on a

$$\|\mu_P\|^2 = \sum_{\alpha \in \Delta_P} \sum_{\beta \in \Delta_P} a_\alpha a_\beta (\mu_{P,\alpha}, \mu_{P,\beta}).$$

Or on sait (cf. [LW, 1.2.6]) que $\{\mu_{P,\alpha} \mid \alpha \in \Delta_P\}$ est une base aigüe de $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}^G$: pour tous $\alpha, \beta \in \Delta_P$, on a $(\mu_{P,\alpha}, \mu_{P,\beta}) \geq 0$. Cela entraîne le lemme. \square

REMARQUE 3.6.2. — Rappelons que pour construire le F -isomorphisme A_0 -équivariant $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$, on a introduit une sous-extension galoisienne finie \tilde{F}/F de $F^{\text{sé}p}/F$ déployant G (cf. 3.4). On a choisi un tore maximal \tilde{A}_0 de G défini sur F et contenant A_0 . Soit $\tilde{P}_0^{M_0}$ un sous-groupe de Borel de M_0 contenant \tilde{A}_0 ; on note $\tilde{U}_0^{M_0}$ son radical unipotent. Alors $\tilde{P}_0 = \tilde{P}_0^{M_0} \times U_0$ est un sous-groupe de Borel de G contenant U_0 , de radical unipotent $\tilde{U}_0 = \tilde{U}_0^{M_0} \times U_0$. Soit $\tilde{\Delta}_0$ l'ensemble des racines simples de \tilde{A}_0 dans \tilde{U}_0 . On note $\tilde{\mathfrak{a}}_{0,\mathbb{Q}}, \tilde{\mathfrak{a}}_{P,\mathbb{Q}}, \tilde{\mathfrak{a}}_{0,\mathbb{Q}}^P$ (etc.), les objets définis comme plus haut en remplaçant F par \tilde{F} . Soit $\{\tilde{\mu}_{\tilde{P}_0, \tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_0\}$ la base de $\tilde{\mathfrak{a}}_{0,\mathbb{Q}}^G$ duale de $\tilde{\Delta}_0$ et soit $\{\tilde{\mu}_{P, \tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_P\}$ la base de $\tilde{\mathfrak{a}}_{P,\mathbb{Q}}^G$ duale de $\tilde{\Delta}_P$. Posons

$$\tilde{\mu}_P = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_P} \tilde{\mu}_{P, \tilde{\alpha}} = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_0 \setminus \tilde{\Delta}_0^P} \tilde{\mu}_{\tilde{P}_0, \tilde{\alpha}}.$$

Soit $\tilde{A}_P = \tilde{A}_{M_P}$ le sous-tore \tilde{F} -déployé maximal du centre Z_{M_P} de M_P . Le morphisme de restriction $X(\tilde{A}_P) \rightarrow X(A_P)$ induit une application surjective $\tilde{\Delta}_P \rightarrow \Delta_P$ et pour $\alpha \in \Delta_P$, on a $\mu_{P,\alpha} = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_P(\alpha)} \tilde{\mu}_{P, \tilde{\alpha}}$ où $\tilde{\Delta}_P(\alpha) \subset \tilde{\Delta}_P$ est la fibre au-dessus de α . D'après 3.6.1, on a donc

$$\tilde{\mu}_P = \mu_P.$$

Puisque U_P est une sous- F -variété de V uniformément F -instable, l'égalité ci-dessus se déduit aussi de 2.3.10.

La base Δ_P de $(\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}^G)^*$ est indépendante du choix du F -sous-groupe parabolique minimal $P_0 \subset P$ (elle ne dépend pas non plus du choix de la composante de Levi M_0 de P_0 définie sur F). On peut donc définir $\mu_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q},1} \cap \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}^G$ sans supposer P standard. Si M est une composante de Levi de P définie sur F , on note $\mu_{M,P} \in \check{X}(A_M)_\mathbb{Q}$ l'élément correspondant à μ_P via l'isomorphisme naturel $\check{X}(A_M)_\mathbb{Q} \simeq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$ (si P est standard, on a donc l'identification $\mu_P = \mu_{M,P}$). Si M' est une autre composante de Levi de P définie sur F , il existe un unique $u \in U_P(F)$ tel que $M' = uMu^{-1}$ et on a $\mu_{M',P} = u \bullet \mu_{M,P}$. En particulier le sous-ensemble

$$\{\mu_{M,P} \mid M \text{ composante de Levi de } P \text{ définie sur } F\} \subset \check{X}_F(P)_\mathbb{Q}$$

est un espace principal homogène sous $U_P(F)$.

Le sous-ensemble $U_P \subset {}_F\mathfrak{U}$ est uniformément F -instable : pour M une composante de Levi de P définie sur F et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = n\mu_{M,P} \in \check{X}(A_M)$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \bullet u = 1 \quad \text{pour tout } u \in U_P.$$

Il lui est donc associé un sous-ensemble $\mathbf{\Lambda}_{F,U_P}$ de $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$. Rappelons que le F -saturé ${}_F\mathcal{X}_{U_P}$ de U_P est le sous-ensemble uniformément F -instable de ${}_F\mathfrak{A}$ défini par

$${}_F\mathcal{X}_{U_P} = G_{\mu,1} \quad \text{pour un (i.e. pour tout)} \quad \mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,U_P}.$$

LEMME 3.6.3. — *Soit P un F -sous-groupe parabolique de G .*

- (i) $\mathbf{\Lambda}_{F,U_P} = \{\mu_{M,P} \mid M \text{ composante de Levi de } P \text{ définie sur } F\}$ et ${}_F P_{U_P} = P$.
- (ii) ${}_F\mathcal{X}_{U_P} = U_P$ (i.e. U_P est F -saturé).
- (iii) U_P est le F -saturé d'une F -lame de ${}_F\mathfrak{A}$ si et seulement si il existe un élément $u \in U_P$ tel que $\mathbf{q}_F(u) = \mathbf{q}_F(U_P)$, i.e. si et seulement si l'ensemble

$${}_F\mathcal{Y}_{U_P} \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in U_P \mid \mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,U_P}\}$$

est non vide ; auquel ${}_F\mathcal{Y}_{U_P}$ est la F -lame en question.

- (iv) Si P est un F -sous-groupe parabolique minimal de G , alors ${}_F\mathcal{Y}_{U_P} \neq \emptyset$. Précisément (pour $P = P_0$), ${}_F\mathcal{Y}_{U_0}$ est l'ensemble des $u = j_0(X)$ avec $X \in \mathfrak{u}_0$ tels que pour toute racine $\alpha \in \Delta_0$, la composante X_α de X sur \mathfrak{u}_α soit non nulle.

Démonstration. — On peut supposer P standard.

Si $\mu' \in \mathbf{\Lambda}_{F,U_P}$, tout élément de $G(F)$ qui normalise U_P normalise aussi $P_{\mu'} = {}_F P_{U_P}$. Puisque le normalisateur de U_P dans $G(F)$ est égal à $P(F)$ et que $P_{\mu'}$ est son propre normalisateur, on obtient l'inclusion $P(F) \subset P_{\mu'}(F)$. D'où l'inclusion $P \subset P_{\mu'}$. Le tore A_0 est donc (F, U_P) -optimal (relativement à l'action de G par conjugaison). L'unique élément de $\mathbf{\Lambda}_{F,U_P} \cap \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ est le co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ tel que $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 1$ pour toute racine α de A_0 dans U_P et $\|\mu\|$ soit minimal pour cette propriété. Identifions μ à un élément de $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}$ via l'isomorphisme naturel $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}$. La projection orthogonale de μ sur $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ pour la décomposition

$$\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}} = \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^P \oplus \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G \oplus \mathfrak{a}_{G, \mathbb{Q}}$$

appartient au cône $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}, 1} \cap \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ de $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ et la condition de minimalité sur μ entraîne que μ appartient déjà à ce cône. Donc $\mu = \mu_P$. Par conséquent ${}_F P_{U_P} = P_\mu = P$ et ${}_F\mathcal{X}_{U_P} = G_{\mu,1} = U_P$. Puisque

$$\mathbf{\Lambda}_{F,U_P} = \{u \bullet \mu \mid u \in U_P(F)\} \quad \text{et} \quad u \bullet \mu = \mu_{u M_P u^{-1}, P},$$

les points (i) et (ii) sont démontrés.

Quant au point (iii), pour $u \in U_P$, on a $\mathbf{q}_F(u) \leq \|\mu_P\| (= \mathbf{q}_F(U_P))$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,U_P}$ (2.4.17 (iii)).

Supposons $P = P_0$ et prouvons (iv). Soit un élément $u = j_0(X) \in U_0$. Écrivons $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} X_\alpha$ avec $X_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$. On a $\mathbf{q}_F(u) \leq \|\mu_{P_0}\| (= \mathbf{q}_F(U_0))$ et on veut prouver que

$$u \in {}_F\mathcal{Y}_{U_0} \Leftrightarrow X_\alpha \neq 0 \text{ pour toute racine } \alpha \in \Delta_0.$$

Supposons que $X_\alpha \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Soit S un tore F -déployé maximal de G qui soit contenu dans $P_0 \cap {}_F P_X$. Alors $A_0 = u' S u'^{-1}$ pour un $u' \in U_0(F)$ et puisque $A_0 \subset u' ({}_F P_X) u'^{-1} = {}_F P_{X'}$ avec $X' = \text{Ad}_{u'}(X)$, le tore A_0 est (F, X') -optimal. Observons que pour tout $\alpha \in \Delta_0$, on a $X'_\alpha = X_\alpha \neq 0$. Soit η l'unique élément de $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F, X'}$. Écrivons $\eta = \eta_G + \sum_{\alpha \in \Delta_0} a_\alpha \mu_{P_0, \alpha}$ avec $\eta_G \in \mathfrak{a}_G$ et $a_\alpha \in \mathbb{Q}$. La condition de minimalité sur $\|\eta\|$ assure que $\eta_G = 0$. Pour $\alpha \in \Delta_0$, comme $X'_\alpha \neq 0$,

on a $a_\alpha \geq 1$; et puisque $\{\mu_{P,\alpha} \mid \alpha \in \Delta_0\}$ est une base aigüe de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ (cf. [LW, 1.2.6]), on a $\|\eta\| \geq \|\mu_{P_0}\|$ avec égalité si et seulement si $a_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$, i.e. si et seulement si $\eta = \mu_{P_0}$. Comme d'autre part $\mathbf{q}_F(X') = \|\eta\| \leq \|\mu_{P_0}\|$, cela prouve que $\eta = \mu_{P_0}$. On en déduit que $\mathbf{\Lambda}_{F,X'} = \mathbf{\Lambda}_{F,U_0}$ et donc que $\mathbf{\Lambda}_{F,X} = u'^{-1} \bullet \mathbf{\Lambda}_{F,U_0} = \mathbf{\Lambda}_{F,U_0}$. En particulier X est en position standard ce qui entraîne que u l'est aussi et que l'on a $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,X} = \mathbf{\Lambda}_{F,U_0}$; i.e. $u \in {}_F\mathcal{U}_{U_0}$. Réciproquement, supposons que $X_\alpha = 0$ pour une racine $\alpha \in \Delta_0$. Soit k le plus petit entier ≥ 1 tel que $\lambda = k\mu_{P_0}$ appartienne à $\check{X}(A_0)$ et soit $\eta \in \check{X}(A_0)_\mathbb{Q}$ le co-caractère virtuel défini par

$$\eta = \frac{k}{k+1} \mu_{P_0,\alpha} + \sum_{\beta \in \Delta_0 \setminus \{\alpha\}} \mu_{P_0,\beta}.$$

Puisque $\langle \gamma, \eta \rangle \geq 1$ pour toute racine $\gamma \in \mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}$, on a $m_u(\eta) = m_X(\eta) \geq 1$. Comme $\{\mu_{P_0,\alpha} \mid \alpha \in \Delta_0\}$ est une base aigüe de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ (cf. loc. cit.), on a $\|\eta\| < \|\mu_{P_0}\|$. Par conséquent $\mathbf{q}_F(u) < \|\mu_{P_0}\|$ et $u \notin {}_F\mathcal{U}_{U_0}$. Cela achève la preuve du point (iv). \square

¶ *L'application $Z \mapsto {}_F i_P(Z)$.* — Continuons avec le F -sous-groupe parabolique P de G . Soit M une composante de Levi de P définie sur F . On note avec un exposant M les objets définis comme précédemment en remplaçant G par M (cf. 3.2)⁽³⁰⁾.

Posons

$$\check{X}(A_M, P) = \{\mu \in \check{X}(A_M) \mid P_\mu = P\}.$$

Un co-caractère $\mu \in \check{X}(A_M)$ est dans $\check{X}(A_M, P)$ si et seulement si $\langle \alpha, \mu \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. Pour $\lambda \in \check{X}(M)$ et $\mu \in \check{X}(A_M)$, puisque λ et μ commutent entre eux, le co-caractère $\lambda + \mu$ est bien défini.

LEMME 3.6.4. — *Soient $\lambda \in \check{X}_F(M)$ et $\mu \in \check{X}(A_M, P)$. Il existe un entier $m_0 > 0$ tel que pour tout entier $m \geq m_0$, on ait*

$$P_{\lambda+m\mu} = P_\lambda^M U_P \subset P \quad \text{avec} \quad P_\lambda^M = M \cap P_\lambda.$$

Démonstration. — Choisissons un tore F -déployé maximal T dans M contenant $\text{Im}(\lambda)$. Pour $m_0 \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, la propriété suivante est vérifiée : pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}_T$ telle que $\langle \alpha, \mu \rangle \neq 0$, on a $\langle \alpha, \mu \rangle \langle \alpha, \lambda + m_0\mu \rangle > 0$; autrement dit $\langle \alpha, \lambda + m_0\mu \rangle$ est non nul et de même signe que $\langle \alpha, \mu \rangle$. Alors pour tout entier $m \geq m_0$, on a $P_{\lambda+m\mu} \subset P$ et $P_{\lambda+m\mu} = (M \cap P_\lambda) U_P$. \square

Pour $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$, $\lambda \in \Lambda_{F,w}^M$, $v \in U_P$ et $\mu \in \check{X}(A_M, P)$, puisque $\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu \bullet v = 1$, le co-caractère $\lambda + \mu$ appartient à $\Lambda_{F,wv}$: on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\lambda+\mu} \bullet wv = \lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \bullet \left(w \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu \bullet v \right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \bullet w.$$

Si de plus $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \bullet w = 1$, par exemple si $\lambda \in \Lambda_{F,w}^{M,\text{opt}}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\lambda+\mu} \bullet u = 1$ pour tout $u \in wU_P$. D'où le

LEMME 3.6.5. — ${}_F\mathfrak{U} \cap P = {}_F\mathfrak{U}^M U_P$.

⁽³⁰⁾Pour $\lambda \in \check{X}(G)$, on a noté $M_\lambda = G_\lambda(0)$ le facteur de Levi de G associé à λ . Pour $\lambda \in \check{X}(M)$, le conflit de notations empêche de noter $M_\lambda^M = M_\lambda(0)$ le facteur de Levi de M associé à λ ; pour éviter toute ambiguïté, on le notera donc $G_\lambda(0) \cap M$.

Démonstration. — L'inclusion ${}_F\mathfrak{U}^M U_P \subset {}_F\mathfrak{U} \cap P$ est claire. Pour l'autre inclusion, soit $u \in {}_F\mathfrak{U} \cap P$. Soit T un tore F -déployé maximal de G contenu dans ${}_F P_u \cap P$ et soit M' une F -composante de Levi de P contenant T . Alors $\check{X}(T) \cap \Lambda_{F,x}^{\text{opt}} = \{\lambda'\}$ et

$$u \in U_{\lambda'} \cap P \subset U_{\lambda'}^{M'} U_P \subset {}_F\mathfrak{U}^{M'} U_P.$$

Soit $u' \in U_P$ tel que $M' = u' M u'^{-1}$. On a ${}_F\mathfrak{U}^{M'} = u' {}_F\mathfrak{U}^M u'^{-1} \subset {}_F\mathfrak{U}^M U_P$. Par conséquent ${}_F\mathfrak{U}^{M'} U_P = {}_F\mathfrak{U}^M U_P$ et le lemme est démontré. \square

Si $Z \subset {}_F\mathfrak{U}^M$ est un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable, c'est-à-dire uniformément F -instable pour l'action de M par conjugaison, alors $ZU_P \subset {}_F\mathfrak{U} \cap P$ est un sous-ensemble uniformément (F, G) -instable. Il lui est donc associé un sous-ensemble Λ_{F,ZU_P} de $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$.

PROPOSITION 3.6.6. — *Soit $Z \subset {}_F\mathfrak{U}^M$ un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable.*

- (i) $\Lambda_{F,ZU_P} = U_P(F) \bullet (\Lambda_{F,Z}^M + \mu_{M,P})$ et ${}_F P_{ZU_P} = {}_F P_Z^M \times U_P$.
- (ii) ${}_F \mathcal{X}_{ZU_P} = {}_F \mathcal{X}_Z^M U_P$; en particulier ZU_P est (F, G) -saturé si et seulement si Z est (F, M) -saturé.
- (iii) ${}_F \mathcal{X}_{ZU_P}$ est le F -saturé d'une F -lame de ${}_F\mathfrak{U}$ si et seulement si il existe un élément $u \in ZU_P$ tel que $\mathbf{q}_F(u) = \mathbf{q}_F(ZU_P)$, i.e. si et seulement si l'ensemble

$${}_F \mathcal{Z}_{ZU_P} \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in {}_F\mathfrak{U} \mid \Lambda_{F,u} = \Lambda_{F,ZU_P}\}$$

est non vide ; auquel cas ${}_F \mathcal{Z}_{ZU_P}$ est la F -lame en question.

- (iv) Si Z est le radical unipotent d'un F -sous-groupe parabolique minimal de M , alors ${}_F \mathcal{Z}_{ZU_P} \neq \emptyset$.

Démonstration. — On peut supposer P standard et $M = M_P$. On peut aussi supposer que Z est en position standard, c'est-à-dire que le F -sous-groupe parabolique ${}_F P_Z^M$ de M contient $P_0^M = P_0 \cap M$. Alors le tore A_0 est (F, Z) -optimal relativement à l'action de M par conjugaison.

Prouvons (i). Soit ξ l'unique élément de $\Lambda_{F,Z}^M \cap \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$. On l'identifie à un élément de $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}$ via l'isomorphisme naturel $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}$. Par minimalité, ξ appartient à $\mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^P$: $\xi_G = 0$ et $\langle \alpha, \xi \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. D'autre part puisque ${}_F P_Z^M \supset P_0^M$, on a $\langle \alpha, \xi \rangle \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^P$. D'après la preuve de 3.6.4, cela assure que $P_{\xi + \mu_P} = P_{\xi}^M \times U_P$ où (rappel) on a identifié $\mu_P \in \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}^G$ à $\mu_{M,P}$. À nouveau par minimalité, l'élément $\eta = \xi + \mu_P$ appartient à Λ_{F,ZU_P} ; c'est donc l'unique élément de $\Lambda_{F,ZU_P} \cap \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$. Puisque Λ_{F,ZU_P} est formé d'une unique orbite sous $U_{\lambda}(F) = U_{\xi}^M(F) \times U_P(F)$, on obtient que

$$\Lambda_{F,ZU_P} = U_{\eta}(F) \bullet \eta = U_P(F) \bullet ((U_{\xi}^M(F) \bullet \xi) + \mu_P).$$

Or $U_{\xi}^M(F) \bullet \xi = \Lambda_{F,Z}^M$. D'où le point (i).

D'après (i), on a ${}_F \mathcal{X}_{ZU_P} = G_{\eta,1}$. Pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}$, en écrivant $\alpha = \alpha^P + \alpha_P$ avec $\alpha^P \in \mathfrak{a}_{P_0, \mathbb{Q}}^P$ et $\alpha_P (= \alpha|_{\mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}}) \in \mathfrak{a}_{P, \mathbb{Q}}$, on a

$$\langle \alpha, \eta \rangle = \langle \alpha^P, \xi \rangle + \langle \alpha_P, \mu_P \rangle.$$

On en déduit que $G_{\eta,1} = M_{\xi,1}G_{\mu_P,1}$ avec $M_{\xi,1} (= G_{\xi,1} \cap M) = {}_F\mathcal{X}_Z^M$ et $G_{\mu_P,1} = U_P$. D'où le point (ii).

Quant au point (iii), pour $u \in ZU_P$, on a $\mathbf{q}_F(u) \leq \|\eta\| (= \mathbf{q}_F(ZU_P))$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \mathbf{\Lambda}_{F,ZU_P}$ (2.4.17 (iii)).

Le point (iv) est une conséquence de 3.6.3 (iv) : si $Z = U_0^M$, on a $ZU_P = U_0$. \square

LEMME 3.6.7. — *L'application $Z \mapsto ZU_P$ induit une bijection entre :*

- les sous-ensembles uniformément (F, M) -instables de ${}_F\mathfrak{U}^M$;
- les sous-ensembles uniformément F -instables Z' de ${}_F\mathfrak{U}$ vérifiant

$$Z'U_P = Z' \subset P.$$

La bijection réciproque est donnée par $Z' \mapsto Z' \cap M$.

Démonstration. — On peut supposer P standard et $M = M_P$. Si Z' est un sous-ensemble uniformément F -instable de ${}_F\mathfrak{U}$ vérifiant $Z'U_P = Z' \subset P$, on a l'égalité

$$Z' = (Z' \cap M)U_P.$$

Il suffit donc de prouver que pour un tel Z' , $Z' \cap M$ est uniformément (F, M) -instable. Soit S un tore F -déployé maximal de G qui soit contenu dans ${}_FP_Z \cap P_0$. Il existe un $u' \in U_0(F)$ tel que $u'Su'^{-1} = A_0$. Puisque $Z'U_P = Z'$, on a $u'Z'u'^{-1} = Z'$. Par conséquent le tore A_0 est (F, Z') -optimal. Soit η l'unique élément de $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F,Z'}$. Par minimalité, η appartient à $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$. Écrivons $\eta = \eta^P + \eta_P$ avec $\eta^P \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^P$ et $\eta_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}^G$. On en déduit qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $k\eta_P$ soit dans $\check{X}(A_P, P)$; et par minimalité on a forcément $\eta_P = \mu_P$. Si de plus $k\eta^P \in \check{X}(A_0)$ (en identifiant η^P à un élément de $\check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$), pour tout $w \in Z' \cap M$ et tout $v \in U_P$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{k\eta} \bullet wv = \lim_{t \rightarrow 0} t^{k\eta^P} \bullet w = 1.$$

Par conséquent $Z' \cap M$ est uniformément (F, M) -instable. \square

Pour $Z \subset {}_F\mathfrak{U}^M$ un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable, on note ${}_Fi^P(Z)$ le sous-ensemble F -saturé de ${}_F\mathfrak{U}$ défini par

$${}_Fi^P(Z) = {}_F\mathcal{X}_Z^M U_P = {}_F\mathcal{X}_{ZU_P}.$$

Il ne dépend que du (F, M) -saturé ${}_F\mathcal{X}_Z^M$ de Z : on a

$${}_Fi^P(Z) = {}_Fi^P({}_F\mathcal{X}_Z^M).$$

On pose aussi

$$i_F^P(Z) = {}_Fi^P(Z)(F) = \mathcal{X}_{F,Z}^M U_P(F) \quad \text{avec} \quad \mathcal{X}_{F,Z}^M = M(F) \cap {}_F\mathcal{X}_Z^M.$$

Si F est infini, puisque ${}_Fi^P(Z)$ est F -isomorphe à \mathbb{A}_F^n , l'ensemble $i_F^P(Z)$ est dense dans ${}_Fi^P(Z)$; en particulier il est non vide.

3.7. Induction parabolique des F -strates. — Pour les orbites géométriques unipotentes, on a une notion d'induction parabolique due à Lusztig et Spaltenstein [LS]. On définit dans cette sous-section une variante de cette construction pour les F -strates unipotentes (en supposant F infini et l'hypothèse 2.6.9 vérifiée pour G).

¶ *L'application $Z \mapsto {}_F I_P^G(Z)$.* — Soient P un F -sous-groupe parabolique de G et M une composante de Levi de P définie sur F . Pour tout sous-ensemble uniformément (F, M) -instable Z de ${}_F \mathfrak{U}^M$, le sous-ensemble F -saturé ${}_F i^P(Z) = {}_F \mathcal{X}_{ZU_P}$ de ${}_F \mathfrak{U}$ est un F -sous-groupe unipotent fermé connexe de P ; on a

$${}_F i^P(Z) = G_{\mu,1} \quad \text{pour un (i.e. pour tout) } \mu \in \Lambda_{F,ZU_P}.$$

En particulier ${}_F i^P(Z)$ est une F -variété irréductible. Puisque $\mathfrak{U} = \overline{F}\mathfrak{U}$ est réunion finie de \overline{F} -strates et que ces \overline{F} -strates sont localement fermées dans G , il en existe une et une seule \mathfrak{Y}_u (avec $u \in \mathfrak{U}$ que l'on peut choisir dans ${}_F i^P(Z)$) telle que l'intersection $\mathfrak{Y}_u \cap {}_F i^P(Z)$ soit dense dans ${}_F i^P(Z)$ ⁽³¹⁾ ; on la note

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F i^P(Z)) = \mathfrak{Y}_u.$$

Le corps F étant fixé dans toute cette sous-section 3.7 (à l'exception du paragraphe sur la descente séparable), on la notera aussi

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F i^P(Z)).$$

Observons que l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap {}_F i^P(Z)$ est ouverte dans ${}_F i^P(Z)$.

On aimerait associer à cette strate unipotente géométrique $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$ une F -strate unipotente. On dispose pour cela du lemme 2.6.4 : si pour un (i.e. pour tout) $u \in \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$, on a $\check{X}_F(G) \cap G \bullet \Lambda_u \neq \emptyset$, alors il existe une unique F -strate ${}_F \mathfrak{Y}_{u'}$ de ${}_F \mathfrak{U}$ (avec $u' \in {}_F \mathfrak{U}$) telle que $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u')$ ($= \mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F \mathcal{X}_{u'})$).

LEMME 3.7.1. — *Supposons que le corps F soit infini et que l'hypothèse 2.6.9 soit vérifiée pour G . Alors pour tout sous-ensemble uniformément (F, M) -instable Z de ${}_F \mathfrak{U}^M$, l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap i_F^P(Z)$ est non vide et on a*

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u) \quad \text{pour tout } u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P).$$

Démonstration. — La F -variété ${}_F i^P(Z) = {}_F \mathcal{X}_Z^M U_P$ est un F -espace affine, par conséquent $i_F^P(Z) = {}_F i^P(Z)(F)$ est dense dans ${}_F i^P(Z)$. On en déduit que l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap i_F^P(Z)$ est non vide. L'hypothèse 2.6.9 assure que pour tout $u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$, on a $\check{X}_F(G) \cap \Lambda_u \neq \emptyset$. On conclut grâce à 2.6.4. \square

Désormais et jusqu'à la fin de 3.7, on suppose que le corps F est infini et que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour G ⁽³²⁾. Pour tout sous-ensemble uniformément (F, M) -instable Z de ${}_F \mathfrak{U}^M$, on note ${}_F I_P^G(Z)$ la F -strate de ${}_F \mathfrak{U}$ définie par

$${}_F I_P^G(Z) = {}_F \mathfrak{Y}_u \quad \text{pour un (i.e. pour tout) } u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P).$$

⁽³¹⁾ Il s'agit là d'une simple variante de la construction de 2.6 : pour $P = G$ et $Z = \{w\}$, on a ${}_F i^G(w) = {}_F \mathcal{X}_w$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, G)$ est la \overline{F} -strate de \mathfrak{U} notée $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}({}_F \mathcal{X}_w)$ dans loc. cit.

⁽³²⁾ On peut aussi supposer d'emblée que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour tous les F -facteurs de Levi de G , ce qui est le cas si F est un corps global ; mais ce n'est pas nécessaire pour définir ${}_F I_P^G(w)$.

Par construction, la F -strate ${}_F I_P^G(Z)$ de ${}_F \mathfrak{U}$ possède un point F -rationnel, que l'on peut choisir dans $i_F^P(Z) = {}_F i^P(Z)(F)$. On note $I_{F,P}^G(Z)$ la F -strate de \mathfrak{U}_F définie par

$$I_{F,P}^G(Z) = G(F) \cap {}_F I_P^G(Z).$$

Rappelons que l'application $Y \mapsto G(F) \cap Y$ induit une bijection entre l'ensemble des strates de ${}_F \mathfrak{U}$ qui possèdent un point F -rationnel et l'ensemble des F -strates de \mathfrak{U}_F .

LEMME 3.7.2. — *Soit $Z \subset {}_F \mathfrak{U}^M$ un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable.*

- (i) $I_{F,P}^G(Z) = \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$.
- (ii) ${}_F I_P^G(Z)$ est l'unique F -strate de ${}_F \mathfrak{U}$ telle que l'intersection ${}_F I_P^G(Z) \cap i_F^P(Z) = I_{F,P}^G(Z) \cap i_F^P(Z)$ soit dense dans $i_F^P(Z)$.
- (iii) Pour $m \in M(F)$, on a ${}_F I_P^G(m \bullet Z) = {}_F I_P^G(Z)$ et donc $I_{F,P}^G(m \bullet Z) = I_{F,P}^G(Z)$.

Démonstration. — Le point (i) résulte de 2.6.13.

Prouvons (ii). Observons que si une F -strate ${}_F \mathfrak{Y}_u$ de ${}_F \mathfrak{U}$ (avec $u \in {}_F \mathfrak{U}$) intersecte non trivialement $i_F^P(Z)$, alors elle possède un point F -rationnel ; on peut donc prendre u dans \mathfrak{U}_F et elle est entièrement déterminée par la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,u}$ de \mathfrak{U}_F . Cela étant dit, puisque $i_F^P(Z)$ est dense dans ${}_F i^P(Z)$ et que $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap {}_F i^P(Z)$ est ouvert (dense) dans ${}_F i^P(Z)$, l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap i_F^P(Z)$ est dense dans $i_F^P(Z)$. Or d'après (i), $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P) \cap i_F^P(Z)$ coïncide avec $I_{F,P}^G(Z) \cap i_F^P(Z)$. Quant à l'unicité, si $\mathfrak{Y}_{F,u'}$ est une autre F -strate de \mathfrak{U}_F (avec $u' \in \mathfrak{U}_F$) telle que $\mathfrak{Y}_{F,u'} \cap i_F^P(Z)$ soit dense dans $i_F^P(Z)$, alors $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u') = \mathfrak{Y}_{u'}$ et $\mathfrak{Y}_{u'} \cap i_F^P(Z) = {}_F \mathfrak{Y}_{u'} \cap i_F^P(Z)$. Par conséquent $\mathfrak{Y}_{u'} \cap i_F^P(Z)$ est dense dans ${}_F i^P(Z)$. Donc $\mathfrak{Y}_{u'} = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$ et (puisque $u' \in \mathfrak{U}_F$) ${}_F I_P^G(Z) = {}_F \mathfrak{Y}_{u'}$. Cela prouve (ii).

Prouvons (iii). Pour $m \in M(F)$, l'ensemble $m \bullet Z = mZm^{-1}$ est uniformément (F, M) -instable et on a

$${}_F i^P(m \bullet Z) = (m \bullet {}_F \mathcal{X}_Z) U_P = m \bullet {}_F i^P(Z).$$

Puisque les \overline{F} -strates de \mathfrak{U} sont G -invariantes, on a

$$\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(m \bullet Z, P) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P).$$

D'où le point (iii). (On peut aussi le déduire directement de (ii).) \square

REMARQUE 3.7.3. — Supposons P standard et $M = M_P$. Soit $Z \subset {}_F \mathfrak{U}^M$ un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable et soit ${}_F \mathfrak{Y}_{u'}$ une F -strate de ${}_F \mathfrak{U}$ avec $u' \in {}_F \mathfrak{U}$ en position standard. Pour déterminer si l'intersection ${}_F \mathfrak{Y}_{u'} \cap i_F^P(Z)$ est dense dans $i_F^P(Z)$, quitte à remplacer Z par $m \bullet Z$ pour un $m \in M(F)$, on peut d'après 3.7.2 (iii) supposer que le F -sous-groupe parabolique ${}_F P_Z^M$ de M associé à Z est standard, c'est-à-dire qu'il contient $P_0^M = M \cap P_0$. Puisque la F -lame ${}_F \mathcal{X}_{u'}$ de ${}_F \mathfrak{U}$ est $P_0(F)$ -invariante, d'après la décomposition de Bruhat on a

$${}_F \mathfrak{Y}_{u'} = U_0(F) W_0 \bullet {}_F \mathcal{X}_{u'} \quad \text{avec} \quad W_0 = N^G(A_0)/M_0.$$

Puisque $i_F^P(Z) = \mathcal{X}_{F,Z}^M U_P(F)$ avec $\mathcal{X}_{F,Z}^M = M(F) \cap {}_F \mathcal{X}_Z^M$ et que $\mathcal{X}_{F,Z}^M$ est $P_0^M(F)$ -invariant, l'ensemble $i_F^P(Z)$ est $P_0(F)$ -invariant et donc *a fortiori* $U_0(F)$ -invariant.

On en déduit que

$${}_F\mathfrak{Y}_{u'} \cap i_F^P(Z) = U_0(F) \bullet (W_0 \bullet {}_F\mathfrak{Z}_{u'} \cap i_F^P(Z)) .$$

LEMME 3.7.4. — Soit $Z \subset {}_F\mathfrak{U}^M$ un sous-ensemble uniformément (F, M) -instable. Si l'ensemble ${}_F i^P(Z)$ est le F -saturé d'une F -lame de ${}_F\mathfrak{U}$ qui possède un point F -rationnel, i.e. (compte-tenu de l'hypothèse 2.6.9) si l'ensemble ${}_F\mathfrak{Z}_{U_P}$ défini en 3.6.6 (iii) est un ouvert non vide de ${}_F i^P(Z)$, alors on a

$${}_F I_P^G(Z) = G(F) \cdot {}_F\mathfrak{Z}_{U_P} .$$

Démonstration. — Si $u \in {}_F\mathfrak{Z}_{U_P}$, alors ${}_F\mathfrak{Z}_{U_P} = {}_F\mathfrak{Z}_u$ et ${}_F i^P(Z) = {}_F\mathfrak{X}_u$. Si de plus on peut choisir u dans $G(F)$, i.e. dans \mathfrak{U}_F , alors (d'après 2.6.9) ${}_F\mathfrak{Z}_u$ est ouvert (dense) dans ${}_F\mathfrak{X}_u$ et $\mathfrak{Y}_{F,u}$ est dense dans $\mathfrak{X}_{F,u}$. Puisque ${}_F\mathfrak{Y}_u \cap \mathfrak{X}_{F,u} = \mathfrak{Y}_{F,u}$, on conclut grâce à 3.7.2. \square

EXEMPLE 3.7.5. — On a vu (3.6.3 (iv)) que U_0 est le F -saturé d'une F -lame ${}_F\mathfrak{Z}_{U_0}$ de ${}_F\mathfrak{U}$. On en déduit (d'après 3.7.4) que la F -strate $G(F) \cdot {}_F\mathfrak{Z}_{U_0}$ de ${}_F\mathfrak{U}$ est l'induite parabolique ${}_F I_{P_0}^G(1)$ de la F -strate triviale $\{1\}$ de ${}_F\mathfrak{U}^{M_0}$. On appelle cette induite la F -strate régulière de ${}_F\mathfrak{U}$.

¶ L'application $w \in ({}_F\mathfrak{U}^M) \mapsto {}_F I_P^G(w)$. — D'après 3.7.2 (iii), l'application qui à $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ associe la F -strate ${}_F I_P^G(w)$ de ${}_F\mathfrak{U}$ est constante sur les F -strates de ${}_F\mathfrak{U}^M$: on a

$${}_F I_P^G(w') = {}_F I_P^G(w) \quad \text{pour tout } w' \in {}_F\mathfrak{Y}_w^M .$$

REMARQUE 3.7.6. — Pour $P = G$ et $u \in \mathfrak{U}_F$, on a ${}_F I_G^G(u) = {}_F\mathfrak{Y}_u$. En revanche pour $u \in {}_F\mathfrak{U}$ tel que la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_u$ de ${}_F\mathfrak{U}$ ne possède aucun point F -rationnel, on a ${}_F I_G^G(u) \neq {}_F\mathfrak{Y}_u$.

Pour $u \in {}_F\mathfrak{U} \cap P$, on écrit $u = wv$ avec $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ et $v \in U_P$ (3.6.5), et on pose

$${}_F I_P^G(u) = {}_F I_P^G(w) \quad \text{et} \quad I_{F,P}^G(u) = G(F) \cap {}_F I_P^G(u) (= I_{F,P}^G(w)) .$$

REMARQUE 3.7.7. — Pour $u \in {}_F\mathfrak{U} \cap P$, la F -strate ${}_F I_P^G(u)$ de ${}_F\mathfrak{U}$ ne dépend pas de M (raison pour laquelle M n'apparaît pas dans la notation). En effet si M' est une autre composante de Levi de P définie sur F , alors $M' = u' M u'^{-1}$ pour un (unique) élément $u' \in U_P(F)$. Écrivons $u = wv$ avec $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ et $v \in U_P$. On a $u = w'v'$ avec $w' = u' w u'^{-1} \in {}_F\mathfrak{U}^{M'}$ et $v' = u' w^{-1} u'^{-1} w v \in U_P$. Donc

$${}_F\mathfrak{X}_{w'}^{M'} U_P = (u' \bullet {}_F\mathfrak{X}_w^M) U_P = u' \bullet ({}_F\mathfrak{X}_w^M U_P) .$$

Pour une \bar{F} -strate \mathfrak{Y}_{u_1} de \mathfrak{U} , l'intersection $\mathfrak{Y}_{u_1} \cap {}_F\mathfrak{X}_w^M U_P$ est dense dans ${}_F\mathfrak{X}_w^M U_P$ si et seulement si l'intersection $\mathfrak{Y}_{u_1} \cap {}_F\mathfrak{X}_{w'}^{M'} U_P$ est dense dans ${}_F\mathfrak{X}_{w'}^{M'} U_P$.

Le lemme 3.7.2 caractérise les F -strates de ${}_F\mathfrak{U}$ qui sont induites à partir des F -strates de ${}_F\mathfrak{U}^M$. Pour celles qui sont induites à partir des F -strates de ${}_F\mathfrak{U}^M$ qui possèdent un point F -rationnel, en supposant l'hypothèse 2.6.9 vérifiée pour M , on a la caractérisation alternative suivante :

LEMME 3.7.8. — On suppose de plus que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour M (on suppose toujours que F est infini et que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour G). Soit $w \in \mathfrak{U}_F^M (= M(F) \cap {}_F\mathfrak{U}^M)$ et soit $\mathfrak{Y} = {}_F\mathfrak{Y}_u$ une F -strate de ${}_F\mathfrak{U}$ (avec $u \in {}_F\mathfrak{U}$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{Y} = {}_FI_P^G(w)$, auquel cas on peut prendre u dans \mathfrak{U}_F et même dans $i_F^P(w)$.
- (ii) $\mathfrak{Y} \cap {}_F\mathcal{Z}_w^M U_P$ est dense dans ${}_Fi^P(w)$;
- (iii) $\mathfrak{Y} \cap \mathcal{Z}_{F,w}^M U_P(F)$ est dense dans $i_F^P(w)$;
- (iv) $\mathfrak{Y} \cap {}_F\mathfrak{Y}_w^M U_P$ est dense dans ${}_F\mathfrak{X}_w^M U_P$;
- (v) $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Y}_{F,w}^M U_P(F)$ est dense dans $\mathfrak{X}_{F,w}^M U_P(F)$;

Démonstration. — L'hypothèse 2.6.9 pour M assure que la F -lame ${}_F\mathcal{Z}_w^M$ de ${}_F\mathfrak{U}^M$ est ouverte dans son (F, M) -saturé ${}_F\mathcal{X}_w^M$ (2.6.1). Par conséquent l'ensemble ${}_F\mathcal{Z}_w^M U_P$ est ouvert (dense) dans ${}_Fi^P(w)$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$ est l'unique \overline{F} -strate de \mathfrak{U} qui intersecte ${}_F\mathcal{Z}_w^M U_P$ de manière dense. D'où l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii).

Observons que l'intersection ${}_FI_P^G(w) \cap {}_F\mathcal{Z}_w^M U_P$ est ouverte dans ${}_Fi^P(w)$. Puisque ${}_F\mathcal{X}_w^M \simeq_F \mathbb{A}_F^n$, la F -lame $\mathcal{Z}_{F,w}^M$ de \mathfrak{U}_F^M est dense dans ${}_F\mathcal{X}_w^M$ (cf. 2.6.2 (ii)). Par conséquent $\mathcal{Z}_{F,w}^M U_P$ est dense dans ${}_Fi^P(w)$. On en déduit que $\mathfrak{Y} \cap {}_F\mathcal{Z}_w^M U_P$ est ouvert (dense) dans ${}_Fi^P(w)$ si et seulement si $\mathfrak{Y} \cap \mathcal{Z}_{F,w}^M U_P(F)$ est dense dans ${}_Fi^P(w)$. D'où l'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iii).

Comme

$$\mathfrak{Y} \cap {}_F\mathfrak{Y}_w^M U_P = \coprod_{m \in M(F)/P_{F,w}^M} m \bullet (\mathfrak{Y} \cap {}_F\mathcal{Z}_w^M U_P)$$

et

$${}_F\mathfrak{X}_w^M U_P = M(F) \bullet {}_Fi^P(w),$$

on a aussi l'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iv). On obtient l'équivalence (iii) \Leftrightarrow (v) de la même manière. \square

REMARQUE 3.7.9. — Observons que pour $w \in \mathfrak{U}_F^M$, non seulement la F -lame ${}_F\mathcal{Z}_w^M$ est ouverte dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_w^M$, mais on a ${}_F\mathcal{Z}_w^M = \mathcal{Z}_w^M$ et ${}_F\mathcal{X}_w^M = \mathcal{X}_w^M$ (2.6.1). Par conséquent on a aussi

$${}_Fi^P(w) = i^P(w) = \mathcal{X}_w U_P.$$

¶ *Transitivité des applications* $w \in ({}_F\mathfrak{U}^M) \mapsto {}_FI_P^G(w)$. — Soit P' un F -sous-groupe parabolique de G contenant P et soit M' l'unique composante de Levi de P' contenant M . Puisque M est défini sur F , M' l'est aussi ; et l'intersection $P \cap M'$ est un F -sous-groupe parabolique de M' de composante de Levi M .

On suppose de plus que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour M' . Pour $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$, on définit comme plus haut la F -strate ${}_FI_{P \cap M'}^{M'}(w)$ de ${}_F\mathfrak{U}^{M'}$.

LEMME 3.7.10. — Pour $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ et $w' \in {}_FI_{P \cap M'}^{M'}(w)$, on a

$${}_FI_P^G(w) = {}_FI_{P'}^G(w').$$

Démonstration. — Posons

$$\mathfrak{Y}' = {}_F I_{P \cap M'}^{M'}(w) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y} = {}_F I_{P'}^G(w').$$

Par construction $\mathfrak{Y}' = {}_F \mathfrak{Y}_{u'}$ avec $u' \in \mathfrak{U}_F^{M'} \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}^{M'}(w, P \cap M')$ et $\mathfrak{Y} = {}_F \mathfrak{Y}_u$ avec $u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w', P')$. L'ensemble $(\mathfrak{Y}_{u'}^{M'} \cap {}_F i^{P \cap M'}(w))U_{P'}$ est ouvert (dense) dans

$${}_F i^{P \cap M'}(w)U_{P'} = ({}_F \mathcal{X}_w^M U_{P \cap M'})U_{P'} = {}_F \mathcal{X}_w^M U_P = {}_F i^P(w).$$

Puisque d'autre part $\mathfrak{Y}_u \cap {}_F i^{P'}(w')$ est par définition ouvert (dense) dans ${}_F i^{P'}(w')U_{P'}$, on en déduit que l'ensemble $\mathfrak{Y}_u \cap (\mathfrak{Y}_{u'}^{M'} \cap {}_F \mathcal{X}_w^M U_{P \cap M'})U_{P'}$ est lui aussi ouvert (dense) dans ${}_F i^P(w)$; et donc *a fortiori* que l'ensemble $\mathfrak{Y}_u \cap {}_F \mathcal{X}_w^M U_{P \cap M'} U_{P'} = \mathfrak{Y}_u \cap {}_F i^P(w)$ est dense dans ${}_F i^P(w)$. Cela prouve que $\mathfrak{Y}_u = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$ et donc (puisque $u \in \mathfrak{U}_F$) que ${}_F \mathfrak{Y}_u = {}_F I_P^G(w)$. \square

¶ *Application* $w (\in \mathfrak{U}_F^M) \mapsto I_{F,P}^G(w)$ *et descente séparable.* — Soit E/F une extension séparable (algébrique ou non) telle que $(E^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(E^{\text{sép}})} = F$. D'après 2.5.17, on a

$$\mathfrak{U}_F = G(F) \cap \mathfrak{U}_E.$$

Rappelons aussi (2.5.23) que si \mathfrak{Y} est une F -strate de \mathfrak{U}_F , on a noté \mathfrak{Y}_E la E -strate de \mathfrak{U}_E définie par $\mathfrak{Y}_E = \mathfrak{Y}_{E,u}$ pour un (i.e. pour tout) $u \in \mathfrak{Y}$. D'après 2.5.19, on a

$$\mathfrak{Y} = G(F) \cap \mathfrak{Y}_E.$$

L'application qui à $w \in \mathfrak{U}_F^M$ associe la F -strate $I_{F,P}^G(w) = G(F) \cap {}_F I_P^G(w)$ de \mathfrak{U}_F commute à la descente séparable :

LEMME 3.7.11. — *Soit* $w \in \mathfrak{U}_F^M$.

- (i) $I_{F,P}^G(w)_E = I_{E,P}^G(w)$.
- (ii) $I_{F,P}^G(w) = G(F) \cap I_{E,P}^G(w)$.

Démonstration. — D'après 2.5.18 (ii), on a ${}_F \mathcal{X}_w^M = {}_E \mathcal{X}_w^M$, d'où l'égalité ${}_F i^P(w) = {}_E i^P(w)$. Pour $u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$, on a ${}_F I_P^G(w) = {}_F \mathfrak{Y}_u$; et puisque u appartient *a fortiori* à $\mathfrak{U}_E \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$, on a aussi ${}_E I_P^G(w) = {}_E \mathfrak{Y}_u$. Cela prouve (i). Le point (ii) est une conséquence de (i), d'après 2.5.19. \square

¶ *Lien avec l'induction de Lusztig-Spaltenstein [LS].* — Pour un élément unipotent w de M (i.e. $w \in \mathfrak{U}^M = \overline{F}\mathfrak{U}^M$), notons \mathcal{O}_w^M l'orbite géométrique unipotente $M \bullet u$ de M et

$$I_P^{G,\text{LS}}(w) = I_P^{G,\text{LS}}(\mathcal{O}_w^M)$$

l'induite parabolique de \mathcal{O}_w^M au sens de Lusztig-Spaltenstein [LS] : c'est l'unique orbite géométrique unipotente \mathcal{O} de G telle que l'intersection $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_w^M U_P$ soit dense dans la variété irréductible $\mathcal{O}_w^M U_P$. L'intersection $I_P^{G,\text{LS}}(\mathcal{O}_w^M) \cap \mathcal{O}_w^M U_P$ est alors ouverte dans $\mathcal{O}_w^M U_P$; et d'après [LS, theorem 1.3 (c)], elle forme une unique P -orbite.

REMARQUE 3.7.12. —

- (i) Pour $w \in \mathfrak{U}^M$, on a la caractérisation équivalente de $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)$ suivante : c'est l'unique orbite géométrique unipotente \mathcal{O} de G telle que l'intersection $\mathcal{O} \cap wU_P$ soit dense dans la variété irréductible wU_P . Cette intersection est alors ouverte dans wU_P .
- (ii) Si l'ensemble $\mathcal{O}_w^M(F) = M(F) \cap \mathcal{O}_w^M$ est non vide, i.e. si la M -orbite \mathcal{O}_w^M possède un point F -rationnel, alors la G -orbite $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)$ possède elle aussi un point F -rationnel⁽³³⁾. En effet si $w' \in \mathcal{O}_w^M(F)$, alors $M(F) \bullet w' (\subset \mathcal{O}_w^M(F))$ est dense dans \mathcal{O}_w^M ; par suite $\mathcal{O}_w^M(F)U_P(F)$ est dense dans $\mathcal{O}_w^MU_P$ et puisque l'intersection $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w) \cap \mathcal{O}_w^MU_P$ est ouverte (dense) dans $\mathcal{O}_w^MU_P$, l'intersection $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w) \cap \mathcal{O}_w^M(F)U_P(F)$ est non vide.

Pour $Z \subset {}_F\mathfrak{U}^M$ uniformément F -instable, on a défini la \overline{F} -strate $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$ de $\mathfrak{U} = \overline{F}\mathfrak{U}$ comme étant l'unique \overline{F} -strate de \mathfrak{U} qui intersecte la variété irréductible ${}_F i^P(Z)$ de manière dense. On peut faire la même construction avec les G -orbites de \mathfrak{U} , compte-tenu du fait qu'elles sont localement fermées dans G : il existe une unique G -orbite \mathcal{O}_u de \mathfrak{U} (avec $u \in \mathfrak{U}$) telle que l'intersection $\mathcal{O}_u \cap {}_F i^P(Z)$ soit dense dans ${}_F i^P(Z)$. On la note

$$\mathcal{O}_{\text{géo}}(Z, P) = \mathcal{O}_{\text{géo}}({}_F i^P(Z)) = \mathcal{O}_u.$$

Comme pour la \overline{F} -strate $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$ de \mathfrak{U} , l'intersection $\mathcal{O}_{\text{géo}}(Z, P) \cap {}_F i^P(Z)$ est ouverte dans ${}_F i^P(Z)$ et la G -orbite $\mathcal{O}_{\text{géo}}(Z, P)$ contient un point F -rationnel. De plus comme $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P)$ est réunion (finie) de G -orbites, on a l'inclusion

$$\mathcal{O}_{\text{géo}}(Z, P) \subset \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(Z, P).$$

L'application qui à $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ associe la G -orbite $\mathcal{O}_{\text{géo}}(w, P)$ ne dépend que de la F -strate ${}_F\mathfrak{Y}_w^M$ de ${}_F\mathfrak{U}^M$: on a

$$\mathcal{O}_{\text{géo}}(w', P) = \mathcal{O}_{\text{géo}}(w, P) \quad \text{pour tout } w' \in {}_F\mathfrak{Y}_w^M.$$

Pour $P = G$ et $u \in {}_F\mathfrak{U}$, on écrit simplement $\mathcal{O}_{\text{géo}}(u) = \mathcal{O}_{\text{géo}}(u, G)$; on a l'inclusion

$$\mathcal{O}_{\text{géo}}(u) \subset \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u).$$

REMARQUE 3.7.13. — L'hypothèse 2.6.9 (pour G) assure que pour tout $u \in \mathfrak{U}_F$, la F -lame ${}_F\mathcal{Y}_u$ de ${}_F\mathfrak{U}$ est ouverte (dense) dans son F -saturé ${}_F\mathcal{X}_u = \mathcal{X}_u$. Puisque $\mathcal{Y}_{F,u}$ est dense dans ${}_F\mathcal{X}_u \simeq {}_F\mathbb{A}_F^n$, cela assure aussi que l'intersection $\mathcal{O}_{\text{géo}}(u) \cap \mathcal{Y}_{F,u}$ est dense dans ${}_F\mathcal{X}_u$; en particulier elle est non vide et pour $u' \in \mathcal{O}_{\text{géo}}(u) \cap \mathcal{Y}_{F,u}$, on a $\mathcal{O}_{\text{géo}}(u) = \mathcal{O}_{u'}$. En d'autres termes, quitte à remplacer $u \in \mathfrak{U}_F$ par un élément dans $\mathcal{Y}_{F,u}$, on peut toujours supposer que $\mathcal{O}_{\text{géo}}(u) = \mathcal{O}_u$.

LEMME 3.7.14. — Soient $w \in {}_F\mathfrak{U}^M$ et $w_1 \in {}_F\mathfrak{U}^M \cap \mathcal{O}_{\text{géo}}^M(w)$.

- (i) $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w_1) = \mathcal{O}_{\text{géo}}(w, P) (\subset \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P))$.
- (ii) $\mathfrak{U}_F \cap I_P^{G, \mathbf{LS}}(w_1) \neq \emptyset$ et ${}_F I_P^G(w) = {}_F\mathfrak{Y}_u$ pour tout $u \in \mathfrak{U}_F \cap I_P^{G, \mathbf{LS}}(w_1)$.

⁽³³⁾On suppose toujours que P et M sont définis sur F même si, bien sûr, l'induction parabolique de $[\mathbf{LS}]$ est définie sans ces hypothèses (dans loc. cit. les auteurs travaillent sur \overline{F}).

Démonstration. — Posons $\mathcal{O} = I_P^{G, \mathbf{LS}}(w_1)$ et $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$.

Puisque $\mathcal{O}_{w_1}^M \cap_F \mathcal{X}_w^M$ est ouvert (dense) dans $_F \mathcal{X}_w^M$, l'ensemble

$$(\mathcal{O}_{w_1}^M \cap_F \mathcal{X}_w^M)U_P = \mathcal{O}_{w_1}^M U_P \cap_F i^P(w)$$

est ouvert (dense) dans $_F i^P(w) = _F \mathcal{X}_w^M U_P$. Comme d'autre part $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{w_1}^M U_P$ est ouvert (dense) dans $\mathcal{O}_{w_1}^M U_P$, on obtient que $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{w_1}^M U_P \cap_F i^P(w)$ est ouvert (dense) dans $_F i^P(w)$. Par suite $\mathcal{O} \cap_F i^P(w)$ est dense dans $_F i^P(w)$. Cela prouve (i).

Quant au point (ii), puisque (d'après (i)) $\mathcal{O} \cap_F i^P(w)$ est ouvert (dense) dans $_F i^P(w)$ et que $i_F^P(w)$ est dense dans $_F i^P(w)$, l'intersection $\mathcal{O} \cap i_F^P(w)$ est dense dans $i_F^P(w)$. D'où le point (ii) puisque $_F I_P^G(w) = _F \mathfrak{Y}_u$ pour tout $u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(w, P)$. \square

REMARQUE 3.7.15. —

- (i) Pour $F = \overline{F}$, si p est bon pour G , les \overline{F} -strates de \mathfrak{U} coïncident avec les orbites géométriques unipotentes (3.5.2) ; si de plus p est bon pour M , alors il en est de même pour les \overline{F} -strates de \mathfrak{U}^M et d'après 3.7.14, l'induction parabolique des \overline{F} -strates de \mathfrak{U}^M donnée par l'application $I_P^G = \overline{F}I_P^G$ coïncide avec l'induction parabolique des orbites géométriques unipotentes de Lusztig-Spaltenstein.
- (ii) Si p est très bon pour G , alors (3.5.7 (i)) les F -strates de \mathfrak{U}_F sont les points F -rationnels des orbites géométriques unipotentes de G qui rencontrent \mathfrak{U}_F . Dans ce cas pour $w \in _F \mathfrak{U}^M$, l'orbite géométrique $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)$ rencontre \mathfrak{U}_F et on a l'égalité $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)(F) = I_{F, P}^G(w)$.
- (iii) Pour $G = \text{GL}_n$, quel que soit p , les \overline{F} -strates de $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{\text{GL}_n}$ coïncident avec les orbites géométriques unipotentes, et pour une telle orbite \mathcal{O} , l'intersection $\mathcal{O}(F) = \mathcal{O} \cap G(F)$ est non vide et c'est une F -strate de $\mathfrak{U}_F^{\text{GL}_n}$. D'ailleurs il en est de même pour M puisque M est F -isomorphe à un produit $\text{GL}_{n_1} \times \cdots \times \text{GL}_{n_r}$ avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. Pour $w \in _F \mathfrak{U}^M$, quel que soit F , on a toujours les égalités $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w) = I_{F, P}^G(w)$ et $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)(F) = I_{F, P}^G(w)$.

¶ *Indépendance par rapport à P .* — L'un des principaux résultats de loc. cit. est que la G -orbite $I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)$ ne dépend pas du sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi M [LS, 2.2] : pour tout sous-groupe parabolique $P' = M \times U_{P'}$ de G , on a l'égalité $I_{P'}^{G, \mathbf{LS}}(w) = I_P^{G, \mathbf{LS}}(w)$. On peut donc la noter

$$I_M^{G, \mathbf{LS}}(w) = I_M^{G, \mathbf{LS}}(\mathcal{O}_w^M).$$

La proposition suivante est la version F -strates de [LS, 2.2]. D'ailleurs c'est une conséquence de loc. cit.

PROPOSITION 3.7.16. — *Pour $w \in _F \mathfrak{U}^M$, la F -strate $_F I_P^G(w)$ de $_F \mathfrak{U}$ ne dépend pas du F -sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi M . On peut donc poser*

$$_F I_M^G(w) = _F I_P^G(w) \quad \text{et} \quad I_{F, M}^G(w) = I_{F, P}^G(w).$$

Démonstration. — Soient $w_1 \in \mathcal{O}_{\text{géo}}^M(w)$ et $\mathcal{O} = I_P^{G, \mathbf{LS}}(w_1)$. D'après 3.7.14 (ii), pour $u \in \mathfrak{U}_F \cap \mathcal{O}$, on a $_F I_P^G(w) = _F \mathfrak{Y}_u$. Si P' est un autre F -sous-groupe parabolique

de G de composante de Levi M , puisque $\mathcal{O} = I_{P'}^{G, \mathbf{LS}}(w_1)$, d'après loc. cit. on a aussi ${}_F I_{P'}^G(w) = {}_F \mathfrak{Y}_u$. Donc ${}_F I_P^G(w) = {}_F I_{P'}^G(w)$. \square

REMARQUE 3.7.17. — Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques standard de G définis sur F , et soient $M = M_P$ et $M' = M_{P'}$ leurs composantes de Levi contenant M_0 . La proposition 3.7.16 est équivalente à l'énoncé suivant, pour $w \in {}_F \mathfrak{U}^M$ et $w' \in {}_F \mathfrak{U}^{M'}$: *s'il existe un élément $s \in W = N^G(A_0)/M_0$ tel que*

$$n_s \bullet M = M' \quad \text{et} \quad n_s \bullet {}_F \mathfrak{Y}_w^M = {}_F \mathfrak{Y}_{w'}^{M'}$$

où n_s est un représentant de w dans $N^G(A_0)(F)$, alors on a l'égalité

$${}_F I_P^G(w) = {}_F I_{P'}^G(w').$$

Dans [LS], Lusztig et Spaltenstein donnent deux démonstrations de leur théorème 2.2 sur l'indépendance de l'induite d'une orbite géométrique unipotente par rapport au parabolique induisant. La première, basée sur la théorie des représentations d'un groupe réductif connexe sur un corps fini, n'est valable que si $p > 1$. La seconde (cf. [LS, 2.8]), valable en toute caractéristique, utilise l'automorphisme d'opposition. Il est possible d'adapter ici cette seconde démonstration pour donner une preuve « directe » de 3.7.16 — c'est-à-dire sans utiliser [LS, 2.2] —, au moins pour les F -strates de ${}_F \mathfrak{U}^M$ qui possèdent un point F -rationnel (qui sont celles qui nous intéressent vraiment), en supposant que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour tous les F -facteurs de Levi de G . C'est cette preuve que nous esquissons jusqu'à la fin de 3.7.

Pour $w \in \mathfrak{U}_F^M$, puisque (d'après 3.7.11 (ii)) $I_{F, P}^G(w) = G(F) \cap I_{F^{\text{sé}}, P}^G(w)$, si P' est un autre F -sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M , on a

$${}_F I_P^G(w) = {}_F I_{P'}^G(w) \quad \text{si et seulement si} \quad {}_{F^{\text{sé}}} I_P^G(w) = {}_{F^{\text{sé}}} I_{P'}^G(w).$$

Par conséquent quitte à remplacer F par $F^{\text{sé}}$, on peut supposer que G est déployé sur F . Alors A_0 est un tore maximal de G défini et déployé sur F . Soit ϕ un F -automorphisme de G tel que $\phi(A_0) = A_0$ et ϕ opère par -1 sur le système de racines $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_0}$. Un tel ϕ existe et il est appelé *F -automorphisme d'opposition (par rapport à A_0)*. Si H est un F -sous-groupe réductif connexe fermé de G contenant A_0 , alors H est déployé sur F et la restriction de ϕ à H est un F -automorphisme d'opposition de H . On choisit ϕ de telle manière que $\phi^2 = \text{Id}_G$ et la restriction de ϕ à A_0 soit le passage à l'inverse. L'automorphisme de $W = N^G(A_0)/A_0$ induit par ϕ est l'identité et si $w_0 \in W$ est l'élément de plus grande longueur, alors $w_0 \circ \phi$ est l'unique automorphisme involutif de \mathcal{R} qui laisse invariants \mathcal{R}^+ et Δ .

LEMME 3.7.18. — *(On suppose que G est F -déployé.) Soit ϕ un F -automorphisme d'involution de G . Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, on a $\phi({}_F \mathfrak{Y}_u) = {}_F \mathfrak{Y}_u$.*

Démonstration. — Soit $u \in \mathfrak{U}_F$. Alors $\phi(u) \in \mathfrak{U}_F$ et (par transport de structures) $\phi({}_F \mathfrak{Y}_u) = {}_F \mathfrak{Y}_{\phi(u)}$. On a aussi $\phi(\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u)) = \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(\phi(u))$ et $\phi(\mathcal{O}_{\text{géo}}(u)) = \mathcal{O}_{\text{géo}}(\phi(u))$. D'après [LS, 2.10], l'automorphisme d'opposition ϕ opère trivialement sur les orbites géométriques unipotentes ; en particulier $\phi(\mathcal{O}_{\text{géo}}(u)) = \mathcal{O}_{\text{géo}}(u)$. Par conséquent la G -orbite $\mathcal{O}_{\text{géo}}(u)$ est contenue dans l'intersection $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(\phi(u)) \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u)$, ce qui n'est possible que si les strates géométriques unipotentes $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(\phi(u))$ et $\mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u)$ sont égales.

Puisque (d'après 2.6.9 et 2.6.13) $\mathfrak{Y}_{F,u} = \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(u)$ et $\mathfrak{Y}_{F,\phi(u)} = \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{Y}_{\text{géo}}(\phi(u))$, on a l'égalité $\mathfrak{Y}_{F,\phi(u)} = \mathfrak{Y}_{F,u}$, laquelle entraîne l'égalité ${}_F\mathfrak{Y}_{\phi(u)} = {}_F\mathfrak{Y}_u$. \square

REMARQUE 3.7.19. — (On suppose toujours que G est F -déployé.) Pour prouver que u et $\phi(u)$ appartiennent à la même F -strate de \mathfrak{U}_F , on a utilisé [LS, 2.10] mais on doit pouvoir s'en passer. En effet, on peut supposer u en position standard. On peut aussi supposer G (absolument) quasi-simple. Soit λ l'unique élément de $\check{X}(A_0) \cap \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et soit $k = m_u(\lambda)$. Alors $\phi \circ \lambda = -\lambda$ est l'unique élément de $\check{X}(A_0) \cap \Lambda_{F,\phi(u)}^{\text{opt}}$ et $m_{\phi(u)}(-\lambda) = m_u(\lambda) = k$. Le lemme 3.7.18 est donc équivalent à l'énoncé suivant : *il existe un $g \in G(F)$ tel que $g \bullet \lambda = -\lambda$* . Cela est immédiat si $-1 \in W$ ou si $P_\lambda = P_0$ (car $w_0 \circ \phi(P_0) = P_0$). Il reste à traiter les cas où G est de type \mathbf{A}_n avec $n \geq 2$, \mathbf{D}_{2n+1} et \mathbf{E}_6 , ce que nous n'avons pas eu le courage de faire !

Le lemme 3.7.18 a son intérêt propre. De plus, compte-tenu de la propriété de transitivité 3.7.10, il permet de prouver 3.7.16 (précisément, l'énoncé de la remarque 3.7.17) pour les éléments de \mathfrak{U}_F^M comme en [LS, 2.11], en supposant que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour tous les F -facteurs de Levi de G (condition nécessaire pour pouvoir leur appliquer 3.7.18). En conclusion, si l'on sait prouver 3.7.18 sans utiliser [LS, 2.10] (cf. la remarque 3.7.19), alors en supposant que l'hypothèse 2.6.9 est vérifiée pour tous les F -facteurs de Levi de G , on a une preuve de 3.7.16 pour les éléments de \mathfrak{U}_F^M (c'est-à-dire pour les F -strates de ${}_F\mathfrak{U}^M$ qui possèdent un point F -rationnel) n'utilisant que la théorie des F -strates.

3.8. Trois exemples en petit F -rang. — On décrit dans cette sous-section les F -strates unipotentes pour les groupes suivants : SL_2 , $\text{SU}_{2,1}$ et Sp_4 . Dans les trois cas, $p = 2$ est le *mauvais* nombre premier.

¶ Les F -strates de $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$ pour $G = \text{SL}_2$. — Pour $x \in \overline{F}$, notons $u(x)$ l'élément unipotent $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de SL_2 . Notons A_0 le tore diagonal de SL_2 et $\lambda \in \check{X}(A_0)$ le co-caractère défini par $t^\lambda = \text{diag}(t, t^{-1})$. Tout élément de \mathfrak{U}_F est conjugué dans $\text{SL}_2(F)$ à un $u(x)$ avec $x \in F$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\Lambda_{E,u(x)}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0) = \{\lambda\} \quad \text{et} \quad m_{u(x)}(\lambda) = 2.$$

Ainsi \mathfrak{U}_F est constitué de deux F -strates : $\mathfrak{Y}_{F,e_G} = \{e_G\}$ et $\mathfrak{Y}_{F,u(x)} = \mathfrak{U}_F \setminus \{e_G\}$ pour tout $x \in F^\times$. D'autre part, pour tous $x, y \in F^\times$, les éléments $u(x)$ et $u(y)$ sont conjugués dans $\text{SL}_2(F)$ si et seulement si $x^{-1}y \in (F^\times)^2$. La F -strate non triviale $\mathfrak{U}_F \setminus \{e_G\}$ est constituée des $\text{SL}_2(F)$ -orbites unipotentes non triviales de $\text{SL}_2(F)$, qui sont paramétrées par $F^\times / (F^\times)^2$. Si $p \neq 2$ ou F est parfait, l'ensemble $F^\times / (F^\times)^2$ est fini. Si $p = 2$ et F n'est pas parfait, l'ensemble $F^\times / (F^\times)^2$ est infini.

REMARQUE 3.8.1. — Soit $u = u(x)$ pour un $x \in \overline{F} \setminus \{0\}$. Le centralisateur G^u de u dans G est l'ensemble des $u(y)$ avec $y \in \overline{F}$. Si $p = 2$, le centralisateur $\mathfrak{g}^u = \ker(\text{Ad}_u - \text{Id})$ de u dans \mathfrak{g} est la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{g}_{\lambda,0}$ de \mathfrak{g} formée

des $\begin{pmatrix} t & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$ avec $t, y \in \overline{F}$ et l'inclusion $\text{Lie}(G^u) \subset \mathfrak{g}^u$ est stricte, i.e. le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}_u, g \mapsto gug^{-1}$ n'est pas séparable (cf. 2.1).

¶ *Les F -strates de $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}_F^G$ pour $G = \text{SU}_{2,1}$.* — On considère maintenant le groupe spécial unitaire $G = \text{SU}_{2,1}$ (défini et quasi-déployé sur F) relativement à une extension quadratique séparable E/F . Concrètement, G est le groupe spécial unitaire de la forme hermitienne $(x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto x_{-1}^\sigma x_1 + x_0^\sigma x_0 + x_1^\sigma x_{-1}$ sur E^3 , où σ est le générateur de $\text{Gal}(E/F)$. Soit $H(E/F)$ l'ensemble des $(u, v) \in E \times E$ tels que $v + v^\sigma = u^\sigma u$ et soit $U_0(F)$ est le sous-groupe de $\text{SL}_3(E)$ formé des matrices triangulaires supérieures de la forme

$$\eta(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -u^\sigma & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u, v) \in H(E/F).$$

La loi de composition sur $U_0(F)$, qui munit $H(E/F)$ d'une structure de groupe, est donnée par

$$\eta(u, v)\eta(u', v') = \eta(u + u', v + v' + u^\sigma u').$$

En particulier $\eta(u, v)^{-1} = \eta(-u, v^\sigma)$ et

$$\eta(u, v)\eta(u', v')\eta(u, v)^{-1} = \eta(u', v' + u^\sigma u' - u'^\sigma u).$$

Il peut être commode d'utiliser une autre description du groupe $H(E/F)$. Soit E^0 le sous- F -espace vectoriel de E formé des éléments de trace nulle et soit $e \in E$ un élément tel que $e + e^\sigma = 1$. L'application $\phi_e : (u, v) \mapsto (u, v - eu^\sigma u)$ est un isomorphisme de $H(E/F)$ sur $E \times E^0$ muni de la loi de groupe

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', y + y' - exx'^\sigma - e^\sigma x^\sigma x').$$

Pour $(u, v^0) \in E \times E^0$, en notant $\eta_e(u, v^0)$ l'élément $\eta(u, v^0 + eu^\sigma u)$ de $U(F)$, on a

$$\eta_e(u, v^0) = \eta_e(u, 0)\eta_e(0, v^0).$$

REMARQUE 3.8.2. — Écrivons $E = F[z]$ avec $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ et $\alpha, \beta \in F$. Si $p \neq 2$, on peut remplacer z par $z - \frac{1}{2}$ ce qui a pour effet d'annuler le terme linéaire de l'équation $z^2 - \alpha z + \beta = 0$; autrement dit on peut supposer $\alpha = 0$. Dans ce cas on a $E^0 = zF$ et $E^1 = \frac{1}{2} + zF$; où l'on a noté E^1 l'ensemble des éléments de E de trace 1. En revanche si $p = 2$, ce qui entraîne $\alpha \neq 0$ car E/F est séparable, alors $E^0 = F$ et $E^1 = \alpha^{-1}zF$.

Le sous-groupe de $\text{SL}_3(E)$ formé des matrices diagonales de la forme

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1}t^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & (t^\sigma)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } t \in E^\times$$

est le groupe des points F -rationnels d'un F -tore maximal M_0 de G . Le groupe $P_0 = M_0 \times U_0$ est un sous-groupe de Borel de G défini sur F . Pour $t \in E^\times$ et

$(u, v) \in H(E/F)$, on a

$$\delta(t) \bullet \eta(u, v) = \eta(t^{-1}(t^\sigma)^2 u, t t^\sigma v) = \eta(\psi(t)u, N_{E/F}(t)v)$$

avec

$$\psi(t) = (t^{-1}t^\sigma)t^\sigma = (t^{-1}t^\sigma)^2 t \quad \text{et} \quad N_{E/F}(t) = N_{E/F}(\psi(t)).$$

Observons que le morphisme de groupes $\psi : E^\times \rightarrow E^\times$ est l'identité sur F^\times . De manière équivalente, on a

$$\delta(t) \bullet \eta_e(u, v^0) = \eta_e(\psi(t)u, N_{E/F}(t)v^0).$$

Soit $\lambda \in \check{X}_F(M_0)$ le co-caractère défini par $t^\lambda = \text{diag}(t, 1, t^{-1})$. Son image $\text{Im}(\lambda)$ est le tore F -déployé maximal $A_0 = A_{M_0}$ de M_0 et l'on a $M_\lambda = M_0$. Pour $t \in F^\times$ et $(u, v) \in H(E/F)$, on a $t^\lambda \bullet \eta(u, v) = \eta(tu, t^2v)$. Par conséquent

$$G_{\lambda,1}(F) = U_0(F) \quad \text{et} \quad G_{\lambda,2}(F) = \{\eta(0, v) \mid v \in E, v + v^\sigma = 0\}.$$

On note $\bar{\eta}(u, v)$ l'image de $\eta(u, v)$ dans $G_\lambda(1; F) = G_{\lambda,1}(F)/G_{\lambda,2}(F)$. Soit $\xi \in \check{X}(M_0)$ le co-caractère de M_0 défini par $t^\xi \bullet \text{diag}(a, b, c) = \text{diag}(ta, t^{-2}b, tc)$. Il est défini sur E et son image $\text{Im}(\xi)$ est le sous-tore $M_\lambda^\perp = (M_0)^\lambda$ de M_0 orthogonal à λ : on a $\langle \xi \rangle = \check{X}(M_\lambda^\perp)$. Pour $(u, v) \in H(E/F)$, si $u \neq 0$ alors $\langle \xi \rangle \cap \Lambda_{E, \bar{\eta}(u, v)} = \{0\}$ (i.e. pour $\xi' \in \langle \xi \rangle \setminus \{0\}$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\xi'} \bullet \bar{\eta}(u, v)$ n'existe pas) ; et si $v \neq 0$, alors $t^{\xi'} \bullet \eta(0, v) = \eta(0, v)$ pour tout $\xi' \in \langle \xi \rangle$. Par conséquent si $u \neq 0$, $\bar{\eta}(u, v)$ est (E, M_λ^\perp) -semi-stable (dans $G_\lambda(1)$) ; et si $v \neq 0$, $\eta(0, v)$ est (E, M_λ^\perp) -semi-stable (dans $G_\lambda(2)$). On peut donc dans les deux cas appliquer 3.4.3 : on a

$$\Lambda_{F, \eta(u, v)}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0) = \{\lambda\} \quad \text{avec} \quad m_{\eta(u, v)}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0 \\ 2 & \text{si } u = 0 \text{ et } v \neq 0 \end{cases}.$$

En d'autres termes, $\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{F, \eta(u, v)}$ si $u \neq 0$ et $\frac{1}{2}\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{F, \eta(0, v)}$ si $v \neq 0$. Les deux F -strates unipotentes non triviales de \mathfrak{U}_F sont donc :

$$\mathfrak{Y}_1 = \{g\eta(u, v)g^{-1} \mid u \neq 0, g \in G(F)\},$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \{g\eta(0, v)g^{-1} \mid v \neq 0, g \in G(F)\}.$$

Observons que \mathfrak{Y}_1 est la F -strate de \mathfrak{U}_F induite de l'unique F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_0} = \{1\}$, à savoir la F -strate triviale ; c'est-à-dire que $\mathfrak{Y}_1 = I_{F, P_0}^G(1)$ et $\lambda = \mu_{P_0}$ où μ_{P_0} est le co-caractère (virtuel) de A_0 défini en 3.6 . D'autre part \mathfrak{Y}_2 est une F -strate non induite.

¶ *Les F -strates de $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$ pour $G = \text{Sp}_4$.* — Soit V un F -espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base (e_1, \dots, e_4) . Soit G le groupe symplectique (défini sur F) qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée non dégénérée (\cdot, \cdot) sur $F^{(4)}$ définie par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $P_0 = A_0 \times U_0$ le F -sous-groupe de Borel de G défini comme suit : U_0 est formé des matrices triangulaires supérieures

de la forme

$$\eta(u, v, w, x) = \begin{pmatrix} 1 & u & w + uv & x + uw \\ 0 & 1 & v & w \\ 0 & 0 & 1 & -u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u, v, w, x) \in \overline{F}^{(4)}$$

et A_0 est formé des matrices diagonales de la forme

$$\text{diag}(z, t, t^{-1}, z^{-1}) \quad \text{avec } (z, t) \in \overline{F}^\times \times \overline{F}^\times.$$

On a

$$\delta(z, t) \bullet \eta(u, v, w, x) = \eta(zt^{-1}u, t^2v, ztw, z^2x).$$

Soient $\alpha, \beta \in X(A_0)$ les caractères définis par

$$\delta(z, t)^\alpha = zt^{-1} \quad \text{et} \quad \delta(z, t)^\beta = t^2.$$

Alors $\Delta_0 = \{\alpha, \beta\}$ est la base de l'ensemble $\mathcal{R}^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$ des racines de A_0 dans U_0 . Pour $(u, v, w, x) \in F^{(4)}$, on pose $e_\alpha(u) = \mu(u, 0, 0, 0)$, $e_\beta(v) = \mu(0, v, 0, 0)$, $e_{\alpha+\beta}(w) = \mu(0, 0, w, 0)$ et $e_{2\alpha+\beta}(x) = \mu(0, 0, 0, x)$. On a

$$\eta(u, v, w, x) = e_\alpha(u)e_\beta(v)e_{\alpha+\beta}(w)e_{2\alpha+\beta}(x).$$

Puisque pour $\gamma \in \mathcal{R}^+$ et $X \in \overline{F}$, on a

$$\delta(z, t) \bullet e_\gamma(X) = e_X(\delta(z, t)^\gamma X),$$

η définit un F -isomorphisme A_0 -équivariant $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$.

Soit $\lambda, \mu \in \check{X}(A_0)$ les co-caractères défini par $t^\lambda = \delta(t, 1)$ et $t^\mu = \delta(1, t)$. On a donc

$$\delta(z, t) = z^\lambda t^{\mu-\lambda} = (zt^{-1})^\lambda t^\mu.$$

Observons que la base $\{\mu_\alpha, \mu_\beta\}$ de $\check{X}(A_0)_\mathbb{Q}$ duale de Δ_0 est donnée par

$$\mu_\alpha = \lambda \quad \text{et} \quad \mu_\beta = \frac{1}{2}\mu.$$

Les groupes P_λ et P_μ sont les deux F -sous-groupes paraboliques standard maximaux (propres) de G . Le premier est donné par $P_\lambda = M_\lambda \times U_\lambda$ où $M_\lambda \simeq \mathbb{G}_m \times \text{SL}_2$ est le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0_2 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \overline{F}^\times$ et $A \in \text{SL}_2$, et $U_\lambda = \eta(\overline{F}, 0, \overline{F}, \overline{F})$. Le second (dit de *Siegel*) est donné par $P_\mu = M_\mu \times U_\mu$ où M_μ où $M_\mu \simeq \text{GL}_2$ est le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$ avec $A \in \text{GL}_2$ et $\tilde{A} = J({}^t A^{-1})J$, et $U_\mu = \eta(0, \overline{F}, \overline{F}, \overline{F})$.

Posons

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_1 &= \{g\eta(u, v, w, x)g^{-1} \mid uv \neq 0, g \in G(F)\}, & \mu_1 &= \lambda + \frac{1}{2}\mu, \\ \mathfrak{Y}_2 &= \{g\eta(u, 0, w, x)g^{-1} \mid uw \neq 0, g \in G(F)\}, & \mu_2 &= \lambda, \\ \mathfrak{Y}_3 &= \{g\eta(0, v, w, x)g^{-1} \mid w \neq 0 \text{ ou } vx \neq 0, g \in G(F)\}, & \mu_3 &= \frac{1}{2}\mu, \\ \mathfrak{Y}_4 &= \{g\eta(0, 0, 0, x)g^{-1} \mid x \neq 0, g \in G(F)\}, & \mu_4 &= \frac{1}{2}\lambda.\end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, 4$, \mathfrak{Y}_i est une F -strate (non triviale) de \mathfrak{U}_F et μ_i est l'unique élément de $\tilde{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{F, u_i}$ pour n'importe quel élément u_i dans l'unique F -lame standard \mathcal{Y}_i contenue dans \mathfrak{Y}_i . La vérification est laissée au lecteur (on peut dans les quatre cas passer à l'algèbre de Lie et utiliser le critère de Kirwan-Ness rationnel). Observons que pour $u \in F^\times$ et $x \in F$, l'élément $\eta(u, 0, 0, x)$ appartient à \mathfrak{Y}_3 (en notant r_β la réflexion associée à la racine β , on a $r_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$ et $r_\beta(2\alpha + \beta) = 2\alpha + \beta$) ; et pour $v \neq 0$, l'élément $\eta(0, v, 0, 0)$ appartient à \mathfrak{Y}_4 (on a $r_\alpha(\beta) = 2\alpha + \beta$). Les co-caractères virtuels (en position standard) $\mu_1, \dots, \mu_4 \in \tilde{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$ étant deux-à-deux distincts, les F -strates $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_4$ sont deux-à-deux disjointes : on a

$$\mathfrak{U}_F = \{1\} \amalg \mathfrak{Y}_1 \amalg \mathfrak{Y}_2 \amalg \mathfrak{Y}_3 \amalg \mathfrak{Y}_4.$$

Les F -strates $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ et \mathfrak{Y}_3 sont toutes les trois induites à partir de la F -strate triviale $\{1\}$: $\mathfrak{Y}_1 = I_{F, P_0}^G(1)$, $\mathfrak{Y}_2 = I_{F, P_\lambda}^G(1)$ et $\mathfrak{Y}_3 = I_{F, P_\mu}^G(1)$. La F -strate \mathfrak{Y}_4 est non induite.

PARTIE II : DÉVELOPPEMENT FIN DE LA CONTRIBUTION UNIPOTENTE À LA FORMULE DES TRACES

4. La distribution $\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T$

Dans cette section, on reprend sans les réintroduire les notations de **[LL]** dans le cas non tordu ($\tilde{G} = G$ et $\omega = 1$). En particulier, F est un corps global de caractéristique $p > 1$.

4.1. Troncature(s). — Rappelons que l'on a noté $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$ l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $G(F)$:

$$\mathfrak{U}_F = \{gug^{-1} \mid g \in G(F), u \in U_0(F)\}.$$

Pour une fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ et un paramètre $T \in \mathfrak{a}_0$, on rappelle la définition du *noyau unipotent modifié* $k_{\text{unip}}^T(x) = k_{\text{unip}}^T(f; x)$:

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F) \setminus G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{P, \text{unip}}(\xi x, \xi x)$$

avec

$$K_{P,\text{unip}}(x, y) = \sum_{\delta \in \mathfrak{U}_F^{M_P}} \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\delta uy) \, du.$$

On écrira aussi $K_{P,\text{unip}}(x) = K_{P,\text{unip}}(x, x)$. D'après [LW, 7.3.1], la somme sur ξ porte sur un ensemble fini. Observons que la fonction $K_{\text{unip}} = K_{G,\text{unip}}$ sur $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$ est donnée par

$$K_{\text{unip}}(x, y) = \sum_{\delta \in \mathfrak{U}_F} f(x^{-1}\delta y).$$

Pour $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$, on rappelle la définition de l'opérateur de troncature $\mathbf{\Lambda}^{T,Q}$ appliqué à une fonction $\varphi \in L_{\text{loc}}^1(Q(F)\backslash G(\mathbb{A}))$:

$$\mathbf{\Lambda}^{T,Q}\varphi(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}^Q} (-1)^{a_P - a_Q} \sum_{\xi \in P(F)\backslash Q(F)} \widehat{\tau}_P^Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\varphi_P(\xi x)$$

avec

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(xu) \, du ;$$

où du est la mesure de Tamagawa sur $U_P(\mathbb{A})$. On définit le *noyau unipotent tronqué*

$$\widetilde{k}_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F)\backslash G(F)} \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \mathbf{\Lambda}_d^{T,Q} K_{P,\text{unip}}(\xi x)$$

où l'indice « d » du symbole $\mathbf{\Lambda}_d^{T,Q}$ signifie que l'on tronque par rapport à la diagonale (et non par rapport à la première variable comme on l'a fait du côté spectral). D'après [LW, 2.11.5, 1.7.1, 3.7.1], la somme sur ξ porte sur un ensemble fini.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ et $\phi \in L_{\text{loc}}^1(P(F)\backslash G(\mathbb{A}))$, on a l'identité [LW, 8.2.1]

$$(1) \quad \sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F)\backslash P(F)} \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \mathbf{\Lambda}^{T,Q} \phi(\xi x) = \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T) \phi_P(x).$$

Appliquons l'égalité (1) à la fonction $x \mapsto \phi(x) = K_{P,\text{unip}}(x, x)$. En observant que $\phi_P = \phi$, on obtient l'égalité de

$$k_{P,\text{unip}}^T(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T) \phi(x)$$

et de

$$\widetilde{k}_{P,\text{unip}}^T(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F)\backslash P(F)} \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \mathbf{\Lambda}^{T,Q} \phi(\xi x).$$

Puisque

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} k_{P,\text{unip}}^T(\xi x)$$

et

$$\widetilde{k}_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} \widetilde{k}_{P,\text{unip}}^T(\xi x),$$

on a l'identité

$$(2) \quad k_{\text{unip}}^T(x) = \widetilde{k}_{\text{unip}}^T(x).$$

4.2. Convergence et réécriture de l'intégrale tronquée. — Soit \mathbf{K}' un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$ et soit $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$. Observons que pour toute fonction ϕ sur $Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par \mathbf{K}' , la fonction ϕ_Q sur $M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})$ est invariante à droite par $\mathbf{K}' \cap M_Q(\mathbb{A})$. On sait d'après [LW, 4.2.2] que si $T \in \mathfrak{a}_0$ est assez régulier, précisément si $\mathbf{d}_0(T) \geq c$ pour une constante $c > 0$ ne dépendant que de $\mathbf{K}' \cap M_Q(\mathbb{A})$, alors pour toute fonction ϕ sur $Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par \mathbf{K}' , on a l'égalité

$$\Lambda^{T,Q} \phi(x) = F_{P_0}^Q(x, T) \phi(x) ;$$

où $F_{P_0}^Q(\cdot, T)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble $Q(F) \mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_G, T)$ défini en [LL, 3.4]. L'ensemble $\mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_G, T)$ dépend d'un sous-ensemble compact C_Q de $G(\mathbb{A})$ qui n'apparaît pas dans la notation ; en pratique, on prend C_Q assez gros et $-T_G$ et T suffisamment régulier — précisément, tels que $\mathbf{d}_0(-T_G) > c'$ et $\mathbf{d}_0(T) > c$ pour des constantes $c' > 0$ et $c > 0$ ne dépendant que de G — de telle manière que la proposition [LW, 3.6.3] soit vérifiée. La fonction $x \mapsto F_{P_0}^Q(x, T)$ est supposée invariante à gauche par l'image \mathfrak{B}_Q d'une section du morphisme $\mathbf{H}_Q : A_Q(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{B}_Q$ et invariante à droite par \mathbf{K} . Quitte à grossir C_Q , ce qui est loisible puisque l'ensemble $A_Q(F) \mathfrak{B}_Q \backslash A_Q(\mathbb{A}) = A_Q(F) \backslash A_Q(\mathbb{A})^1$ est compact, on peut même supposer qu'elle est invariante à gauche par $A_Q(\mathbb{A})$.

Soit

$$C_c(G(\mathbb{A}) // \mathbf{K}') \subset C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$$

le sous-espace vectoriel formé des fonctions invariantes à droite et à gauche par $\mathbf{K}'^{(34)}$. D'après la discussion précédente, il existe une constante $c_{\mathbf{K}'} > 0$ telle que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) > c_{\mathbf{K}'}$ et toute fonction $f \in C_c(G(\mathbb{A}) // \mathbf{K}')$, l'expression $\tilde{k}_{\text{unip}}^T(x)$ soit égale à

$$\sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F) \backslash G(F)} F_{P_0}^Q(\xi x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P, \text{unip}}(\xi x).$$

Pour prouver la convergence absolue de l'intégrale

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\overline{X}_G} k_{\text{unip}}^T(x) dx = \int_{\overline{X}_G} \tilde{k}_{\text{unip}}^T(x) dx,$$

il suffit de prouver, pour chaque paire $Q \subset R$ de sous-groupes paraboliques standard, celle de l'intégrale

$$(1) \quad \int_{Y_Q} F_{P_0}^Q(x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) \left| \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P, \text{unip}}(x) \right| dx$$

où l'on a posé

$$Y_Q = A_G(\mathbb{A}) Q(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

⁽³⁴⁾Pour $\mathbf{K}'' \subset \mathbf{K}'$, on a l'inclusion $C_c(G(\mathbb{A}) // \mathbf{K}') \subset C_c(G(\mathbb{A}) // \mathbf{K}'')$. Par conséquent, si l'on a fixé un sous-groupe ouvert compact maximal \mathbf{K} de G (e.g. tel que $G(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A}) \mathbf{K}$), quitte à remplacer \mathbf{K}' par un groupe plus petit, on peut toujours supposer que c'est un sous-groupe distingué de \mathbf{K} .

Cette convergence est prouvée dans [LL, 9.1.1]⁽³⁵⁾. De plus la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$ définit un élément de PolExp. Précisément, pour T et X dans $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez réguliers, on a

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^{T+X}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_Q} \eta_{Q,F}^{G,T}(Z; X) \mathfrak{J}_{\text{unip}}^{M_Q, X}(Z; f_Q)$$

avec

$$\eta_{Q,F}^{G,T}(Z; X) = \sum_{H \in \mathcal{B}_Q^G(Z)} \Gamma_Q^G(H - X, T)$$

et

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^{M_Q, X}(Z; f_Q) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}(Z)} k_{\text{unip}}^{M_Q, X}(f_Q; m) dm$$

où

$$f_Q(m) = \int_{U_Q(\mathbb{A}) \times \mathbf{K}} f(k^{-1} muk) du dk.$$

Rappelons que $\mathcal{B}_Q^G(Z) \subset \mathfrak{c}_Q^G = \mathcal{B}_G \backslash \mathcal{A}_Q$ est la fibre au-dessus de Z pour la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_Q^G \rightarrow \mathfrak{c}_Q^G \rightarrow \mathfrak{c}_Q = \mathcal{B}_G \backslash \mathcal{A}_Q \rightarrow 0$$

et que $\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}(Z)$ est l'image dans $\overline{\mathbf{X}}_{M_Q} = A_Q(\mathbb{A})M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})$ de l'ensemble des $m \in M_Q(\mathbb{A})$ tels que $\mathbf{H}_Q(m) + \mathcal{B}_Q = Z$.

REMARQUE 4.2.1. — La preuve de [LL, 9.1.1] utilise la propriété cruciale suivante : pour tout $Q \in \mathcal{P}$, on a la décomposition [LL, 3.3.2 (ii)]

$$\mathfrak{U}_F^G \cap Q(F) = (\mathfrak{U}_F^G \cap M_Q(F))U_Q(F) = \mathfrak{U}_F^{M_Q} U_Q(F).$$

Observons que cette décomposition est aussi une conséquence de 3.6.5.

Revenons à l'expression pour $\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$. C'est la somme sur les paires de sous-groupes paraboliques standard $Q \subset R$ de l'intégrale sur \mathbf{Y}_Q obtenue en otant les valeurs absolues dans l'expression (1). Le terme principal correspondant à $Q = R = G$ est donné par l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\text{unip}}(x, x) dx = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\text{unip}}(x, x) dx.$$

La proposition suivante est la version corps de fonctions du théorème 3.1 de [A2].

PROPOSITION 4.2.2. — *Il existe une constante $c > 0$ (qui dépend de f) telle que pour $\mathbf{d}_0(T) \geq c$, on ait*

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\text{unip}}(x, x) dx.$$

REMARQUE 4.2.3. —

⁽³⁵⁾Cette preuve est une adaptation de celle de [LW, 9.1.1], laquelle reprend dans le cas tordu celle du théorème 7.1 de [A1].

- (i) Dans le cas des corps de nombres, Arthur (loc. cit.) donne une borne pour l'expression

$$\left| \mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) - \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\text{unip}}(x, x) dx \right|.$$

Ici la formule est exacte : si T est assez régulier, seul le terme correspondant à $Q = R = G$ dans l'expression $\tilde{k}_{\text{unip}}^T(x)$ peut donner une contribution non triviale à l'intégrale $\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$.

- (ii) La constante $c > 0$ dépend du support de f mais aussi d'un sous-groupe ouvert compact \mathbf{K}' de $G(\mathbb{A})$ tel que f soit \mathbf{K}' -biinvariante. Si l'on a fixé \mathbf{K}' et un sous-ensemble ouvert compact Ω de $G(\mathbb{A})$ tel que $\mathbf{K}'\Omega\mathbf{K}' = \Omega$, alors en notant

$$C(\Omega//\mathbf{K}') \subset C_c(G(\mathbb{A})//\mathbf{K}')$$

le sous-espace vectoriel de dimension finie (sur \mathbb{C}) formé des fonctions à support dans Ω , on peut choisir la constante $c > 0$ telle que pour $\mathbf{d}_0(T) \geq c$, l'égalité de la proposition 4.2.2 soit vraie pour toute fonction $f \in C(\Omega//\mathbf{K}')$.

Démonstration. — Pour $Q = R \subsetneq G$, on a $\sigma_Q^R = 0$. On veut prouver que les termes (1) associés aux paires de sous-groupes paraboliques standard $Q \subsetneq R \subset G$ sont tous nuls. Il suffit pour cela de reprendre en la précisant la preuve de [LL, 9.1.1]⁽³⁶⁾. Pour une telle paire (Q, R) , si T est assez régulier, précisément si $\mathbf{d}_0(T) \geq c_f$ pour une constante $c_f > 0$ ne dépendant que du support de f ⁽³⁷⁾, l'intégrale (1) se réécrit

$$(2) \quad \int_{\mathbf{Y}_Q} F_{P_0}^Q(x, T) \Xi_Q^R(x) dx$$

avec

$$\Xi_Q^R(x) = \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_Q}} \left| \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee(Q, R)} g(x, \Lambda, \eta) \right|$$

et

$$g(x, \Lambda, \eta) = \int_{\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X \rangle) f(x^{-1} \eta j(X) x) dX ;$$

où $j = j_Q : \mathfrak{u}_Q \rightarrow U_Q$ (cf. 3.4.1) est un F -isomorphisme de variétés tel que

$$j \circ \text{Ad}_a = \text{Int}_a \circ j \quad \text{pour tout } a \in A_Q$$

et $\mathfrak{n}^\vee(Q, R)$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$ défini comme suit. Fixons un caractère non trivial ψ de $F \backslash \mathbb{A}$ et notons \mathfrak{n}^\vee l'orthogonal de $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_Q(F)$ pour ce caractère :

$$\mathfrak{n}^\vee = \{ \Lambda \in \mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A}) \mid \psi(\langle \Lambda, X \rangle) = 1, \forall X \in \mathfrak{u}_Q(F) \}.$$

⁽³⁶⁾Le résultat est en fait déjà contenu dans loc. cit. : la fonction $g(x, \Lambda, \eta)$ est à support compact en Λ comme transformée de Fourier d'une fonction lisse et à support compact sur $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$. Comme x varie dans un compact et que Ad_a dilate Λ , il en résulte que si T est suffisamment régulier, $\text{Ad}_a(\Lambda)$ sort du support de $g(x, \cdot, \eta)$ pour tout (x, η) . Cette démonstration est le prototype de celles qui vont suivre dans la section 5, c'est pourquoi nous la reprenons en détail ici.

⁽³⁷⁾Dans l'intégrale (1), on a une somme alternée sur P d'expressions $K_{P, \text{unip}}(x)$ faisant intervenir une somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_P}$. La condition sur le support de f permet d'appliquer [LW, 3.6.7] et de remplacer cette somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ par une somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F) = \mathfrak{U}_F^{M_Q} U_Q^P(F)$ avec $U_Q^P = M_P \cap U_Q$.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ tel que $Q \subset P \subset R$, notons $\mathfrak{n}^\vee(P)$ le sous-ensemble de \mathfrak{n}^\vee formé des $\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee$ tels que $\Lambda|_{\mathfrak{u}_P(\mathbb{A})} = 0$. Alors⁽³⁸⁾

$$\mathfrak{n}^\vee(Q, R) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{n}^\vee(R) \setminus \bigcup_{Q \subset P \subsetneq R} \mathfrak{n}^\vee(P).$$

Posons

$$\mathbf{Z}_Q = A_G(\mathbb{A})A_Q(F)\backslash A_Q(\mathbb{A}) \subset \mathbf{Y}_Q$$

et

$$\Theta_Q^R(u, x) = \int_{\mathbf{Z}_Q} \Xi_Q^R(uax)\delta_Q(a)^{-1} da.$$

En utilisant la décomposition d'Iwasawa on obtient que l'intégrale (2) est égale à

$$(3) \quad \int_{\mathbf{K}} \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}} \int_{U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})} F_{P_0}^Q(m, T)\Theta_Q^R(u, mk)\delta_Q(m)^{-1} du dm dk.$$

D'après [LW, 1.8.3] et [LL, 3.4], l'intégrale en m porte sur un ensemble compact de $\overline{\mathbf{X}}_{M_Q} = A_Q(\mathbb{A})M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})$. On peut donc la remplacer par une intégrale sur un sous-ensemble ouvert compact Γ_{M_Q} d'un ensemble de Siegel (dans $M_Q(\mathbb{A})$) pour le quotient $\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}$. On peut aussi remplacer l'intégrale en u par une intégrale sur un ouvert compact \mathfrak{S}_{U_Q} de $U_Q(\mathbb{A})$ qui soit un *domaine de Siegel* pour le quotient $U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})$, c'est-à-dire tel que l'application naturelle $\mathfrak{S}_{U_Q} \rightarrow U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})$ soit bijective. Posons $U_Q^R = M_R \cap U_Q$. On a $U_Q = U_R \rtimes U_Q^R$. On peut supposer⁽³⁹⁾ que $\mathfrak{S}_{U_Q} = \mathfrak{S}_{U_R} \mathfrak{S}_{U_Q^R}$ avec $\mathfrak{S}_R \subset U_R(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{S}_{U_Q^R} \subset U_Q^R(\mathbb{A})$. On remplace l'intégrale en $u \in \mathfrak{S}_{U_Q}$ par une intégrale en $u' \in \mathfrak{S}_{U_R}$ suivie d'une intégrale en $u'' \in \mathfrak{S}_{U_Q^R}$. Puisque $\Lambda|_{\mathfrak{u}_R(\mathbb{A})} = 0$, l'intégrale en u' est absorbée par l'intégrale en X dans la définition de $g(u'u''amk, \Lambda, \eta)$. D'autre part on a

$$(4) \quad \delta_Q(a)^{-1}g(u''amk, \Lambda, \eta) = g(a^{-1}u''amk, \text{Ad}_{a^{-1}}^*(\Lambda), \eta)$$

avec $\text{Ad}_{a^{-1}}^*(\Lambda) = \Lambda \circ \text{Ad}_a$. On considère les éléments $x = mk \in \Gamma_{M_Q}\mathbf{K}$ et $a \in \mathbf{Z}_Q$ qui vérifient la condition

$$(5) \quad \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(ax) - T) \neq 0.$$

⁽³⁸⁾Pour $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ tel que $Q \subset P \subset R$, la formule de Poisson donne l'égalité

$$\int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{X \in \mathfrak{u}_Q(F)} f(x^{-1}\eta j(X)ux) du = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee(P)} g(x, \Lambda, \eta).$$

On fait ensuite la somme alternée sur les P de l'expression ci-dessus. On a $\mathfrak{n}^\vee(P) \subset \mathfrak{n}^\vee(R)$ et comme $\mathfrak{n}^\vee(P) \cap \mathfrak{n}^\vee(P') = \mathfrak{n}^\vee(P \cap P')$, seuls les Λ qui sont dans $\mathfrak{n}^\vee(Q, R)$ peuvent donner une contribution non triviale à cette somme alternée (d'après [LW, 1.2.3]).

⁽³⁹⁾Puisque U_Q^R normalise U_R , on a

$$U_Q(\mathbb{A}) = U_R(\mathbb{A})U_Q^R(F)\mathfrak{S}_{U_Q^R} = U_Q^R(F)U_R(\mathbb{A})\mathfrak{S}_{U_Q^R} = U_Q^R(F)U_R(F)\mathfrak{S}_{U_R}\mathfrak{S}_{U_Q^R}$$

avec

$$U_Q^R(F)U_R(F) = U_R(F)U_Q^R(F) = U_Q(F).$$

On prouve de la même manière que l'application naturelle $\mathfrak{S}_{U_R}\mathfrak{S}_{U_Q^R} \rightarrow U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})$ est bijective.

D'après [LW, 2.11.6], il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \Gamma_{M_Q} \mathbf{K}$ et tout $a \in \mathbf{Z}_Q$ vérifiant (5), en posant $H = \mathbf{H}_Q(a)^R \in \mathfrak{a}_Q^R$, on ait

$$\alpha(H) > \alpha(T) - C \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_Q^R.$$

On en déduit que pour de tels éléments x et a , les éléments $a^{-1}u''a$ pour $u'' \in \mathfrak{S}_{U_Q^R}$ restent dans un compact fixé de $U_Q^R(\mathbb{A})$. Par conséquent $y = a^{-1}u''amk$ varie dans un compact fixé de $G(\mathbb{A})$, disons $\Gamma_G^{(40)}$. Cela a pour conséquence que la somme sur η dans la définition de $\Xi_Q^R(ay)$ porte sur un sous-ensemble fini de $\mathfrak{U}_F^{M_Q}$ qui peut être choisi indépendamment de $y \in \Gamma_G$, disons \mathfrak{E} . Puisque F est un corps de fonctions, pour tout $(y, \eta) \in \Gamma_G \times \mathfrak{E}$, la fonction $\Lambda \mapsto g(y, \Lambda, \eta)$ sur $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$ est à support compact comme transformée de Fourier d'une fonction lisse et à support compact sur $\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})$. D'après la fin de la preuve ce [LW, 9.1.1], si $\mathfrak{d}_0(T)$ est assez grand, pour $\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee(Q, R)$ l'élément $\text{Ad}_{a^{-1}}^*(\Lambda)$ sort du support de $g(y, \cdot, \eta)$ pour tout $(y, \eta) \in \Gamma_G \times \mathfrak{E}^{(41)}$. Le terme (1) associé à la paire (Q, R) avec $P_0 \subset Q \subsetneq R \subset G$ est donc nul, ce qui achève la preuve de la proposition. \square

5. Décomposition suivant les F -strates unipotentes

Les hypothèses sont celles de la section 4, à l'exception des sous-sections 5.1 et 5.2 où F est un corps de nombres. Les principaux résultats de cette section sont regroupés en 5.3 et leurs démonstrations sont données dans les sous-sections suivantes.

5.1. La stratégie d'Arthur. — On suppose dans cette sous-section que F est un corps de nombres. On sait que la variété unipotente \mathfrak{U} est réunion d'un nombre fini de G -orbites $\mathcal{O}^{(42)}$. Pour une G -orbite $\mathcal{O} \subset \mathfrak{U}$, supposée définie sur $F^{(43)}$, notons $\overline{\mathcal{O}}$ la fermeture de Zariski de \mathcal{O} dans G (i.e. dans \mathfrak{U}). La stratégie d'Arthur [A2] pour estimer l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathfrak{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\mathcal{O}}(x, x) dx \quad \text{avec} \quad K_{\mathcal{O}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathcal{O}(F)} f(x^{-1}\eta y)$$

⁽⁴⁰⁾Observons que Γ_G ne dépend pas de la fonction f ; il dépend bien sûr de G, Q et R mais aussi de \mathbf{K}, Γ_{M_Q} et $\mathfrak{S}_{U_Q^R}$.

⁽⁴¹⁾C'est ici qu'intervient le groupe \mathbf{K}' dans la remarque 4.2.3 (ii) : fixé \mathbf{K}' , il existe un sous-groupe ouvert compact $\Gamma_{\mathfrak{u}_Q}$ de $\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})$ telle que pour toute fonction $f \in C_c(G(\mathbb{A})//\mathbf{K}')$ et tout $(y, \eta) \in \Gamma_G \times \mathfrak{E}$, la fonction $X \mapsto f(y^{-1}\eta j(X)y)$ sur $\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})$ soit invariante par $\Gamma_{\mathfrak{u}_Q}$, ce qui a pour conséquence que le support de sa transformée de Fourier $\Lambda \mapsto g(y, \Lambda, \eta)$ est contenu dans le sous-ensemble ouvert compact $\{\Lambda \in \mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A}) \mid \psi(\langle \Lambda, X \rangle) = 1, \forall X \in \Gamma_{\mathfrak{u}_Q}\}$ de $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$.

⁽⁴²⁾D'après Lusztig [L1], cela reste vrai sur un corps de fonctions mais nous n'utiliserons pas ce résultat ici.

⁽⁴³⁾Précisément, Arthur considère la fermeture de Zariski $\overline{\mathfrak{U}(F)}$ de $\mathfrak{U}(F)$ dans G , qui est une variété en général plus petite que \mathfrak{U} (e.g. si G est F -anisotrope). De plus, il regroupe les orbites unipotentes géométriques en $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ -orbites et traite toutes ces $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ -orbites. Parmi ces dernières, on a les orbites unipotentes géométriques définies sur F , c'est-à-dire celles qui sont stables sous l'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$. Les orbites géométriques \mathcal{O} qui nous intéressent sont celles qui possèdent un point F -rationnel, c'est-à-dire telles que $\mathcal{O} \cap G(F) \neq \emptyset$; elles sont toutes définies sur F .

consiste à remplacer la fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ par une famille de fonctions dont le support est de plus en plus proche du sous-ensemble $\overline{\mathcal{O}}(\mathbb{A})$ de $G(\mathbb{A})$, puis par passage à la limite d'en déduire un polynôme en T , disons $J_{\overline{\mathcal{O}}}^T(f)$, qui approxime l'expression

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\overline{\mathcal{O}}}(x, x) dx \quad \text{avec} \quad K_{\overline{\mathcal{O}}}(x, y) = \sum_{\{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}}\}} K_{\mathcal{O}'}(x, y).$$

Par récurrence sur le nombre de G -orbites contenues dans $\overline{\mathcal{O}}$, il en déduit un polynôme en T , disons $J_{\mathcal{O}}^T(f)$, qui approxime l'expression

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\mathcal{O}}(x, x) dx$$

et (par construction) vérifie la décomposition

$$J_{\overline{\mathcal{O}}}^T(f) = \sum_{\{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}}\}} J_{\mathcal{O}'}^T(f).$$

5.2. La variante de Hoffmann. — Continuons avec les hypothèses et les notations de 5.1. La variante de Hoffmann consiste à définir, pour chaque $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$, un noyau

$$K_{P, \mathcal{O}}(x, y) = \sum_{\{\mathcal{O}' \mid I_P^{G, \text{LS}}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}\}} \sum_{\eta' \in \mathcal{O}'(F)} \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1} \eta' u y) du$$

où \mathcal{O}' parcourt les orbites géométriques de \mathfrak{U}^{M_P} telles que \mathcal{O} soit l'induite parabolique $I_P^{G, \text{LS}}(\mathcal{O}')$ de \mathcal{O}' au sens de de Lusztig-Spaltenstein **[LS]** (voir 3.7). Observons que ce noyau modifié n'est autre que l'analogue de $K_{P, \text{unip}}(x, y)$ où la somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ a été remplacée par une somme sur les points F -rationnels des orbites géométriques \mathcal{O}' de \mathfrak{U}^{M_P} telles que $I_P^{G, \text{LS}}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}$. On pose ensuite, pour $T \in \mathfrak{a}_0$,

$$k_{\mathcal{O}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F) \backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{P, \mathcal{O}}(\xi x, \xi x).$$

On a donc l'égalité

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{\mathcal{O}} k_{\mathcal{O}}^T(x)$$

où \mathcal{O} parcourt les orbites géométriques de \mathfrak{U}^G qui possèdent un point F -rationnel. Pour T assez régulier, on en déduit au moins formellement l'égalité

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \sum_{\mathcal{O}} \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathcal{O}}^T(x) dx.$$

Hoffmann **[Ho]** a conjecturé que cette expression est absolument convergente :

$$\sum_{\mathcal{O}} \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} |k_{\mathcal{O}}^T(x)| dx < +\infty.$$

Cette conjecture a été démontrée par Finis et Lapid **[FL]** pour des fonctions test bien plus générales que les fonctions localement constantes à support compact (voir aussi 1.1). Précisément, si $T \in \mathfrak{a}_0$ est assez régulier, pour chaque G -orbite $\mathcal{O} \subset \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^G$ qui possède un point F -rationnel, on a (loc. cit.) :

- l'intégrale $\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathcal{O}}^T(x) dx$ est absolument convergente ;
- l'application $T \mapsto \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathcal{O}}^T(x) dx$ est un polynôme en T qui approxime l'intégrale $\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\mathcal{O}}(x, x) dx$, autrement dit le polynôme $J_{\mathcal{O}}^T(f)$ associé par Arthur à l'orbite \mathcal{O} est donné par l'intégrale

$$J_{\mathcal{O}}^T(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathcal{O}}^T(x) dx.$$

C'est l'analogie de ces résultats pour les corps de fonctions que nous allons établir ici, en remplaçant les G -orbites $\mathcal{O} \subset \mathfrak{U}$ qui possèdent un point F -rationnel par les F -strates de ${}_F\mathfrak{U}$ qui possèdent un point F -rationnel, i.e. par F -strates de \mathfrak{U}_F .

5.3. Énoncé des résultats. — À partir de maintenant, les hypothèses sont celles de la section 4 ; en particulier F est un corps global de caractéristique $p > 1$.

On commence par reprendre en les adaptant les définitions de 5.2. On note $[\mathfrak{U}_F]$ l'ensemble des F -strates de $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$. Pour $\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]$ et $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$, on définit un noyau

$$K_{P, \mathfrak{Y}}(x, y) = \sum_{\substack{\mathfrak{Y}' \in [\mathfrak{U}_F^{M_P}] \\ I_{F, P}^G(\mathfrak{Y}') = \mathfrak{Y}}} \sum_{\eta' \in \mathfrak{Y}'} \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1} \eta' u y) du.$$

En notant $\xi_{P, \mathfrak{Y}}$ la fonction sur $\mathfrak{U}_F^G \cap P(F) = \mathfrak{U}_F^{M_P} U_P(F)$ définie par

$$\xi_{P, \mathfrak{Y}}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } I_{F, P}^G(\eta) = \mathfrak{Y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on a donc

$$K_{P, \mathfrak{Y}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_P}} \xi_{P, \mathfrak{Y}}(\eta) \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1} \eta u y) du.$$

Observons qu'on n'a pas besoin de 3.7.16 (indépendance de $I_{F, P}^G$ par rapport à P) pour définir $K_{P, \mathfrak{Y}}(x, y)$ et que si la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F n'est l'induite parabolique d'aucune F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_P}$, alors $K_{P, \mathfrak{Y}} = 0$. Pour $x = y$, on écrira aussi $K_{P, \mathfrak{Y}}(x) = K_{P, \mathfrak{Y}}(x, x)$. Puisque

$$\sum_{\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]} \xi_{P, \mathfrak{Y}}(\eta) = 1 \quad \text{pour tout } \eta \in M_P(F),$$

on a l'égalité

$$K_{P, \text{unip}}(x, y) = \sum_{\mathfrak{Y} \in [\mathfrak{U}_F]} K_{P, \mathfrak{Y}}(x, y).$$

Pour $P = G$, $K_{\mathfrak{Y}} = K_{G, \mathfrak{Y}}$ est donné par

$$K_{\mathfrak{Y}}(x, y) = \sum_{\eta \in \mathfrak{Y}} f(x^{-1} \eta y).$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$k_{\mathfrak{Y}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\xi \in P(F) \setminus G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{P, \mathfrak{Y}}(\xi x).$$

On a l'égalité

$$k_{\text{unip}}^T(x) = \sum_{\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]} k_{\mathfrak{y}}^T(x).$$

THÉORÈME 5.3.1. — *Si $T \in \mathfrak{a}_0$ est assez régulier, c'est-à-dire si $\mathbf{d}_0(T) \geq c_f$ pour une constante $c_f > 0$ dépendant de f , on a*

$$\sum_{\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]} \int_{\overline{X}_G} |k_{\mathfrak{y}}^T(x)| dx < +\infty.$$

Puisque l'ensemble $[\mathfrak{U}_F]$ est fini, le théorème 5.3.1 est une conséquence de la

PROPOSITION 5.3.2. — *Soit $\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $c > 0$ et $\epsilon' > 0$ telles que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) \geq c_0$ et $\mathbf{d}_0(T) \geq \epsilon \|T\|$, on ait*

$$\int_{\overline{X}_G} |F_{P_0}^G(x, T) K_{\mathfrak{y}}(x, x) - k_{\mathfrak{y}}^T(x)| dx \leq c q^{-\epsilon' \|T\|}.$$

REMARQUE 5.3.3. — Les constantes $c_0 > 0$ et $c > 0$ dépendent de f mais on peut préciser cette dépendance comme dans la remarque 4.2.3 (ii). Fixons un sous-groupe ouvert compact \mathbf{K}' de $G(\mathbb{A})$ et un sous-ensemble ouvert compact Ω de $G(\mathbb{A})$ tel que $\mathbf{K}'\Omega\mathbf{K}' = \Omega$. Alors en remplaçant dans l'énoncé « il existe une constante $c > 0$ » par « il existe une constante $c' > 0$ » et en posant $c = c' \|f\|$ avec $\|f\| = \sup_{x \in G(\mathbb{A})} |f(x)|$, l'inégalité de la proposition 5.3.2 est vraie pour toute fonction $f \in C(\Omega // \mathbf{K}')$.

On a aussi :

PROPOSITION 5.3.4. — *Soit $\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]$. Il existe une fonction*

$$T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$$

dans PolExp telle que pour $T \in \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ assez régulier (précisément, tel que $\mathbf{d}_0(T) \geq c_f$ pour une constante $c_f > 0$ dépendant de f), on ait

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f) = \int_{\overline{X}_G} k_{\mathfrak{y}}^T(x) dx.$$

REMARQUE 5.3.5. — Puisque la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$ est dans PolExp, l'intégrale $\int_{\overline{X}_G} k_{\mathfrak{y}}^T(x) dx$ (qui est absolument convergente si T est assez régulier, d'après 5.3.1) la caractérise de manière unique. D'après 5.3.2, la distribution $f \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$ sur $G(\mathbb{A})$ annule toute fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ qui s'annule sur l'ensemble⁽⁴⁴⁾

$$G(\mathbb{A}) \bullet \mathfrak{y} = \{gug^{-1} \mid g \in G(\mathbb{A}), u \in \mathfrak{y}\} \subset \mathfrak{y}_{\mathbb{A}}.$$

COROLLAIRE 5.3.6. — *On a l'égalité dans PolExp*

$$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f) = \sum_{\mathfrak{y} \in [\mathfrak{U}_F]} \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f).$$

⁽⁴⁴⁾On renvoie à C.1 pour la définition de $\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}$.

D'après 5.3.2, la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^T(f)$ de 5.3.4 est asymptotique à l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx.$$

Observons que si la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F n'est l'induite parabolique d'aucune F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ avec $P \neq G$, alors la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^T(f)$ ne dépend pas de T et on peut noter $J_{\mathfrak{Y}}(f)$ sa valeur constante ; on a donc

$$J_{\mathfrak{Y}}(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \left(\sum_{\eta \in \mathfrak{Y}} f(x^{-1}\eta x) \right) dx$$

et l'intégrale est absolument convergente.

REMARQUE 5.3.7. — Considérons la F -strate unipotente triviale $\mathfrak{Y} = \{1\}$. Elle n'est l'induite parabolique d'aucune F -strate de $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ avec $P \neq G$ et la constante $J_{\{1\}}(f)$ est donnée par

$$J_{\{1\}}(f) = \text{vol}(\overline{\mathbf{X}}_G) f(1).$$

Rappelons que $F_{P_0}^G(\cdot, T)$ est la fonction caractéristique de $G(F) \mathfrak{S}_{P_0}^G(T_G, T)$ et que l'on a choisi $\mathfrak{S}_{P_0}^G(T_G, T)$ de telle manière que $F_{P_0}^G(\cdot, T)$ soit invariante par $A_G(\mathbb{A})$. Notons $\overline{\mathfrak{S}}_{P_0}^G(T_G, T)$ l'image de $\mathfrak{S}_{P_0}^G(T_G, T)$ dans $\overline{\mathbf{X}}_G$. Alors

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\{1\}}(x, x) dx = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) f(1) dx = \text{vol}(\overline{\mathfrak{S}}_{P_0}^G(T_G, T)) f(1).$$

La démonstration de la proposition 5.3.2 occupe les sous-sections 5.5 à 5.8 ; une esquisse des différentes étapes de cette démonstration est donnée en 5.4. La proposition 5.3.4 est démontrée en 5.9.

5.4. Les étapes de la démonstration de 5.3.2. — La preuve de 5.3.2 est longue et laborieuse. Les premières réductions sont les mêmes que celles du début de la preuve de 4.2.2, raffinées comme dans celle de [A2, theorem 3.1] : il suffit en effet de remplacer l'ensemble \mathfrak{U}_F de tous les éléments unipotents de $G(F)$ par la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F . La différence avec la preuve de 4.2.2 est qu'ici, on ne passe pas via la formule de Poisson à l'annulateur \mathfrak{n}^\vee de $\mathfrak{u}_Q(F)$ dans $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$: les somme rationnelles sont des intégrales de fonctions à support compact mais qui en général ne sont pas lisses (voir la remarque 5.4.1). L'ingrédient essentiel sera ici encore la formule de Poisson mais on l'utilisera plus loin (précisément, dans le lemme 5.6.2), après une série de manipulations et d'estimées assez peu intuitives, qui reprennent en les adaptant les arguments de [CL] et [C].

On décrit dans cette sous-section 5.4 les principales étapes de preuve de 5.3.2. On procède par réductions successives, comme dans la preuve de 4.2.2.

La F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F étant fixée, l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} |k_{\mathfrak{Y}}^T(x)| dx$$

est bornée par une somme, indexée par les paires $Q \subset R$ de sous-groupes paraboliques standard, d'expressions obtenues en remplaçant dans 4.2(1) le terme $K_{P,\text{unip}}(x)$ par le terme $K_{P,\mathfrak{y}}(x)$. Pour $Q = R = G$, l'expression est égale à l'intégrale (absolument convergente)

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) |K_{\mathfrak{y}}(x, x)| dx ;$$

et pour $Q = R \neq G$, l'expression est nulle. On est donc ramené à majorer, pour les paires $Q \subsetneq R$, l'intégrale

$$(1) \quad \int_{\mathbf{Y}_Q} F_{P_0}^Q(x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) |K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)| dx$$

avec

$$K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P,\mathfrak{y}}(x).$$

REMARQUE 5.4.1. — Comme dans la preuve de 4.2.2, l'expression $K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)$ est égale à

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{MQ}} \left(\sum_{\nu \in U_Q(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta\nu) \int_{\mathfrak{S}_{U_P}} f(x^{-1}\eta\nu ux) du \right).$$

À la F -strate \mathfrak{y} est associée en C.1 une \mathbb{A} -strate $\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}$ de $\mathfrak{U}_{\mathbb{A}}$. Soit $\xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}$ la fonction sur $\mathfrak{U}_{\mathbb{A}}^{MP} U_P(\mathbb{A})$ définie par

$$\xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}(\gamma) = \prod_{v \in |\mathcal{V}|} \xi_{P,\mathfrak{y}_{F_v}}(\gamma_v) \quad \text{pour } \gamma = \prod_v \gamma_v.$$

La fonction $\xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}$ ainsi définie prolonge $\xi_{P,\mathfrak{y}}$. Elle est invariante par translations à droite et à gauche par $U_P(\mathbb{A})$, et aussi par conjugaison dans $P(\mathbb{A})$. La fonction

$$X \mapsto \xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}(\eta j(X)) \int_{\mathfrak{S}_{U_P}} f(x^{-1}\eta j(X) ux) du$$

sur $\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})$ est à support compact mais elle n'est en général pas lisse (rappelons que $j : \mathfrak{u}_Q \rightarrow U_Q$ est un F -isomorphisme de variétés compatible à l'action de A_Q). On peut bien sûr définir sa transformée de Fourier, pour $\Lambda \in \mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$:

$$g_{P,\mathfrak{y}}(x, \Lambda, \eta) = \int_{\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X \rangle) \xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}(\eta j(X)) \left(\int_{\mathfrak{S}_{U_P}} f(x^{-1}\eta j(X) ux) du \right) dX.$$

Pour $\Lambda \in \mathfrak{n}^{\vee}$, l'intégrale en $u \in \mathfrak{S}_{U_P}$ est absorbée par l'intégrale en X : on a

$$g_{P,\mathfrak{y}}(x, \Lambda, \eta) = \int_{\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X \rangle) \xi_{P,\mathfrak{y}_{\mathbb{A}}}(\eta j(X)) f(x^{-1}\eta j(X) x) dX$$

avec

$$g_{P,\mathfrak{y}}(x, \Lambda, \eta) = 0 \quad \text{si } \Lambda|_{\mathfrak{u}_P(\mathbb{A})} \neq 0.$$

La fonction $\Lambda \mapsto g_{P,\mathfrak{y}}(x, \Lambda, \eta)$ sur $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$ est lisse mais contrairement à la fonction g de la preuve de 4.2.2, elle n'est en général pas à support compact. On ne peut

donc pas lui appliquer la formule de Poisson. De plus la présence de la fonction ξ_{P, \mathfrak{y}_A} perturbe la somme alternée sur les P .

Pour obtenir les estimées nécessaires à la suite de la démonstration, on commence par raffiner l'intégrale à majorer (1) : grâce à la partition [LW, 3.6.3] appliquée au sous-groupe parabolique Q , on se ramène à majorer, pour $Q_1 \in \mathcal{P}^Q(P_0)$ et $T_1 \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier, l'intégrale

$$(2) \quad \int_{Y_{Q_1}} F_{P_0}^{Q_1}(x, T_1) \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T_1) F_{P_0}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(x)| dx.$$

Rappelons que

$$Y_{Q_1} = A_G(\mathbb{A})Q_1(F) \backslash G(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad Z_{Q_1} = A_G(\mathbb{A})A_{Q_1}(F) \backslash A_{Q_1}(\mathbb{A}).$$

En utilisant la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = U_{Q_1}(\mathbb{A})M_{Q_1}(\mathbb{A})\mathbf{K}$ et en remplaçant l'intégrale sur $A_G(\mathbb{A})M_{Q_1}(F) \backslash M_{Q_1}(\mathbb{A})$ par une intégrale sur $Z_{Q_1} \times \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ où $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ est un ensemble de Siegel pour le quotient $\overline{X}_{M_{Q_1}}$, on obtient que l'intégrale (2) est essentiellement majorée⁽⁴⁵⁾ par une intégrale du type

$$(3) \quad \int_{Z_{Q_1}(T, T_1)} \delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)| da \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_G,$$

où $Z_Q(T, T_1)$ est un sous-ensemble (défini explicitement) de

$$Z_{Q_1}^{R,+} = \{a \in Z_{Q_1} \mid \langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle > 0, \forall \alpha \in \Delta_{Q_1}^R\}$$

et Γ_G est un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$ indépendant de a . Ainsi pour estimer l'intégrale (3), il faut commencer par majorer l'expression $\delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)|$.

On prouve — c'est la majoration fondamentale de la démonstration de 5.3.2 — que pour chaque racine $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_Q^R$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in Z_{Q_1}^{R,+}$ et tout $x \in \Gamma_G$, on ait

$$(4) \quad \delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)| \leq cq^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

Cela entraîne que l'intégrale (3) est essentiellement majorée par

$$(5) \quad \int_{Z_{Q_1}(T, T_1)} \prod_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_Q^R} q^{-r\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} da \quad \text{avec} \quad r^{-1} = |\Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_Q^R|.$$

On en déduit comme dans [CL] et [C] qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $c_1 > 0$ et $\epsilon'_1 > 0$ telles que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) > c_0$ et $\mathbf{d}_0(T) > \epsilon \|T\|$, l'intégrale (5) soit majorée par $c_1 q^{-\epsilon'_1 \|T\|}$. Compte-tenu des réductions successives effectuées précédemment, cela prouve 5.3.2.

Les différentes étapes de la démonstration de 5.3.2 décrite ci-dessus sont organisées comme suit :

- en 5.5, on prouve des résultats élémentaires basés sur la formule de Poisson ;
- en 5.6, le triple $Q_1 \subset Q \subsetneq R$ et un sous-ensemble compact Γ_G de $G(\mathbb{A})$ étant fixés, on prouve la majoration (4) ;

⁽⁴⁵⁾C'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que (2) $\leq c$ (3).

- en 5.7, on définit l'ensemble $Z_{Q_1}(T, T_1)$ et on majore l'intégrale (3) ;
- en 5.8, on achève la démonstration de 5.3.2.

5.5. Quelques lemmes utiles. — Les résultats contenus dans cette sous-section seront utilisés dans la preuve de 5.6.2.

Commençons par un résultat élémentaire :

LEMME 5.5.1. — *Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie n . Posons $V_{\mathbb{A}} = V \otimes_F \mathbb{A}$ et soit $\phi \in C_c^\infty(V_{\mathbb{A}})$ avec $\phi \geq 0$.*

(i) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$ avec $|a|_{\mathbb{A}} > 1$, on ait*

$$\sum_{v \in V(F)} \phi(a \cdot v) \leq c \quad \text{et} \quad \sum_{v \in V(F)} |a|_{\mathbb{A}}^{-n} \phi(a^{-1} \cdot v) \leq c.$$

(ii) *Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$ avec $|a|_{\mathbb{A}} > 1$, on ait*

$$\sum_{v \in V(F) \setminus \{0\}} \phi(a \cdot v) \leq c |a|_{\mathbb{A}}^{-k}.$$

Démonstration. — Fixons une base e_1, \dots, e_n de V sur F et pour $v \in V_{\mathbb{A}}$, écrivons $v = \sum_{i=1}^n e_i \otimes v_i$ avec $v_i \in \mathbb{A}$. On note $\widehat{\phi} \in C_c^\infty(V_{\mathbb{A}})$ la transformée de Fourier de ϕ définie par

$$\widehat{\phi}(v') = \int_{V_{\mathbb{A}}} \psi(\sum_{i=1}^n v_i v'_i) \phi(v) \, dv$$

où ψ est un caractère additif non trivial de \mathbb{A} trivial sur F et dv est la mesure de Haar sur $V_{\mathbb{A}}$ telle que $\text{vol}(V \setminus V_{\mathbb{A}}) = 1$.

La première assertion du point (i) est claire et la seconde se déduit de la première par la formule de Poisson : pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$, on a

$$\sum_{v \in V} |a|_{\mathbb{A}}^{-n} \phi(a^{-1} \cdot v) = \sum_{v \in V} \widehat{\phi}(a \cdot v).$$

Quant au point (ii), il suffit d'appliquer la première assertion du point (i) à la fonction ϕ_k définie par $\phi_k(v) = \|v\|^k \phi(v)$ avec $\|v\| = \sum_{i=1}^n |v_i|_{\mathbb{A}}$. \square

Le lemme suivant est la version « corps de fonctions » de [A2, 3.2] (pour $P = P_0$), qui est lui-même une version édulcorée de [LW, 12.2.1]⁽⁴⁶⁾.

LEMME 5.5.2. — *Soient $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ et $X \in \mathfrak{a}_P$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in A_P(\mathbb{A})$ avec $\tau_P(\mathbf{H}_P(a) - X) = 1$, on ait*

$$\delta_P(a)^{-1} \sum_{\gamma \in G(F)} |f(a^{-1} \gamma a)| \leq c.$$

⁽⁴⁶⁾Ce résultat est cité un peu rapidement pour les corps de fonctions en [LL, 12.2.1], raison pour laquelle nous détaillons la preuve de 5.5.2. Observons que l'ingrédient principal de cette preuve n'est autre que la seconde inégalité de 5.5.1 (i).

REMARQUE 5.5.3. — Observons que seule la restriction f^1 de f à $G(\mathbb{A})^1$ joue un rôle pertinent dans ce résultat. La dépendance à l'égard de f^1 est la même que pour 5.3.2 (cf. 5.3.3) : fixés un sous-groupe ouvert compact \mathbf{K}' de $G(\mathbb{A})$ et un sous-ensemble ouvert compact Ω de $G(\mathbb{A})^1$ tel que $\mathbf{K}'\Omega\mathbf{K}' = \Omega$, il existe une constante $c' > 0$ telle que, en posant $c = c'\|f^1\|$, l'inégalité 5.5.2 est vraie pour toute fonction f telle que $f^1 \in C(\Omega//\mathbf{K}')$.

Démonstration. — Pour $Y \in \mathfrak{a}_0^P$ tel que $\langle \alpha, Y \rangle < 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^P$, on a

$$\tau_{P_0}(\mathbf{H}_0(a) - (X + Y)) = \tau_P(\mathbf{H}_P(a) - X) \quad \text{pour tout } a \in A_P(\mathbb{A}).$$

Puisque d'autre part $\delta_{P_0}(a) = \delta_P(a)$ pour tout $a \in A_P(\mathbb{A})$, il suffit de démontrer le lemme pour $P = P_0$.

On suppose donc $P = P_0$ et on procède comme dans la preuve de [LW, 12.2.1]. Notons Ω le support de la restriction de f à $G(\mathbb{A})^1$. Soient $a \in A_0(\mathbb{A})$ et $\gamma \in G(F)$ tels que

$$\tau_{P_0}(\mathbf{H}_0(a) - X) = 1 \quad \text{et} \quad a^{-1}\gamma a \in \Omega.$$

D'après la partition [LW, 3.6.3], si $T_1 \in \mathfrak{a}_0$ est assez régulier (ne dépendant que de G), il existe un unique $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ tel que

$$F_{P_0}^Q(a, T_1)\tau_Q(\mathbf{H}_0(a) - T_1) = 1.$$

Soit $\mathfrak{B}_Q^G \subset A_0(\mathbb{A})$ l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \rightarrow A_Q(\mathbb{A})/A_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{B}_Q^G.$$

la condition $F_{P_0}^Q(a, T) = 1$ implique que la projection H^Q de $H = \mathbf{H}_0(a)$ sur \mathfrak{a}_0^Q reste dans un compact de \mathfrak{a}_0^Q . On en déduit qu'il existe un compact ω de $A_0(\mathbb{A})$ tel que a appartienne à $\mathfrak{B}_Q^G\omega A_G(\mathbb{A})$. Écrivons $a = ba'$ avec $b \in \mathfrak{B}_Q^G$ et $a' \in \omega A_G(\mathbb{A})$. La condition $a^{-1}\gamma a \in \Omega$ équivaut à $b^{-1}\gamma b \in \Omega' = \bigcup_{a' \in \omega} a'\Omega a'^{-1}$. D'autre part la condition $b^{-1}\gamma b \in \Omega'$ équivaut à $\gamma b \in b\Omega'$. On a donc $\tau_Q(\mathbf{H}_0(\gamma b) - T_2) = 1$ pour un $T_2 \in T_1 + \mathbf{H}_0(\Omega')$. Pour T_1 assez régulier, le lemme [LW, 3.6.1] assure que γ appartient à $Q(F)$. On écrit $\gamma = \delta\eta$ avec $\delta \in M_Q(F)$ et $\eta \in U_Q(F)$. Pour $b \in \mathfrak{B}_Q^G$, on a $b^{-1}\gamma b = \delta b^{-1}\eta b$ et la condition $b^{-1}\gamma b \in \Omega'$ assure que δ reste dans un compact de $M_Q(F)$. On est donc ramené à évaluer le nombre de $\eta \in U_Q(F)$ tels que $b^{-1}\eta b$ appartienne à un sous-ensemble ouvert compact, disons C , de $U_Q(\mathbb{A})$. Fixons un F -isomorphisme de variétés $j : \mathfrak{u}_Q \rightarrow U_Q$ compatible à l'action de A_Q . Notons $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A}))$ la fonction caractéristique de $j^{-1}(C)$. On veut évaluer l'expression $\sum_{Y \in \mathfrak{u}_Q(F)} \phi(b^{-1}Yb)$. Considérons la transformée de Fourier $\widehat{\phi} \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A}))$ de ϕ , définie par

$$\widehat{\phi}(\Lambda) = \int_{\mathfrak{u}_Q(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, Y \rangle) \phi(Y) dY \quad \text{pour } \Lambda \in \mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A}).$$

En notant \mathfrak{n}^\vee l'annulateur de $\mathfrak{u}_Q(F)$ dans $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$, la formule de Poisson donne

$$\sum_{Y \in \mathfrak{u}_Q(F)} \phi(\text{Ad}_{b^{-1}}(Y)) = \delta_Q(b) \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee} \widehat{\phi}(\text{Ad}_{b^{-1}}^*(\Lambda)) \quad \text{avec} \quad \text{Ad}_{b^{-1}}^*(\Lambda) = \Lambda \circ \text{Ad}_b.$$

Rappelons que $b = aa'^{-1}$ avec $a' \in \omega A_G(\mathbb{A})$ et $\tau_{P_0}(\mathbf{H}_0(a) - X) = 1$. Ces conditions impliquent que :

- en dehors d'un nombre fini de b (dépendant de X), l'automorphisme $\text{Ad}_{b^{-1}}^*$ de $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$ dilate $\mathfrak{u}_Q^*(\mathbb{A})$, par conséquent la somme sur $\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee$ est bornée par une constante indépendante de b ;
- $\delta_Q(b)$ est essentiellement majoré par $\delta_{P_0}(a)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante c_1 (dépendant de ω) telle que $\delta_P(b) \leq c_1 \delta_{P_0}(a)$.

Cela achève la démonstration du lemme. \square

5.6. Majoration de sommes rationnelles. — Dans cette sous-section, on fixe une F -strate \mathfrak{M} de \mathfrak{U}_F . On fixe aussi deux éléments $Q \subset R$ de \mathcal{P}_{st} tels que $Q \neq R$ et un élément $Q_1 \in \mathcal{F}^Q(P_0)$. On a donc

$$P_0 \subset Q_1 \subset Q \subsetneq R \subset G.$$

On pose $\mathbf{Z}_{Q_1} = A_G(\mathbb{A})A_{Q_1}(F) \backslash A_{Q_1}(\mathbb{A})$ et

$$\mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+} = \{a \in \mathbf{Z}_{Q_1}, |\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle| > 0 \text{ pour toute racine } \alpha \in \Delta_{Q_1}^R\}.$$

Pour $P \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ avec $Q \subset P \subset R$, on pose

$$A_{P,\mathfrak{M}}(g) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \xi_{P,\mathfrak{M}}(\gamma) \int_{U_P(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma u g) du.$$

Soit

$$(1) \quad K_{Q,\mathfrak{M}}^R(g) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} \epsilon_P A_{P,\mathfrak{M}}(g) \text{ avec } \epsilon_P = (-1)^{a_P - a_G}.$$

L'objectif est ici d'établir, pour chaque racine $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q$, une majoration uniforme de l'expression $\delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q,\mathfrak{M}}^R(ax)|$, valable pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$ et tout x dans un sous-ensemble compact Γ_G de $G(\mathbb{A})$ fixé (cf. 5.6.4 pour un résultat précis). On adapte pour cela le travail de Chaudouard [C, 3.7-3.12].

Soit $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q$ et soit $S \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ le F -sous-groupe parabolique propre maximal de G contenant Q_1 défini par la condition

$$\Delta_{Q_1}^S = \Delta_{Q_1} \setminus \{\alpha\}.$$

Puisque α n'appartient pas à l'ensemble des racines de A_{Q_1} dans M_Q , on a aussi l'inclusion $Q \subset S$. L'application

$$(2) \quad P \mapsto P \cap M_S$$

induit une application surjective de $\mathcal{F}^R(Q)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$ des F -sous-groupes paraboliques de M_S contenus entre $Q \cap M_S$ et $R \cap M_S$. Soit \tilde{P} un F -sous-groupe parabolique de M_S . Il a exactement deux antécédents par l'application (2) : l'un, noté P , est contenu dans S tandis que l'autre, noté P' , ne l'est pas. De plus on a

$$P = S \cap P'.$$

Pour un tel \tilde{P} correspondant au couple (P, P') , on pose

$$A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g) = \epsilon_P A_{P, \mathfrak{y}}(g) + \epsilon_{P'} A_{P', \mathfrak{y}}(g).$$

D'après (1), on a

$$(3) \quad K_{Q, \mathfrak{y}}^R(g) = \sum_{\tilde{P}} A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g)$$

où \tilde{P} parcourt les éléments de $\mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$.

Fixons un élément $\tilde{P} \in \mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$. On se propose dans un premier temps de récrire l'expression $A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g)$. Rappelons que $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$ est un F -isomorphisme de variétés compatible à l'action de A_0 . Il induit par restriction un F -isomorphisme de variétés

$$j = j_P^{P'} : \mathfrak{u}_P^{P'} = \text{Lie}(U_P^{P'}) \rightarrow U_P^{P'}$$

lui aussi compatible à l'action de A_0 ; avec (rappel) $U_P^{P'} = U_P \cap M_{P'}$. L'expression $A_{P', \mathfrak{y}}(g)$ est égale à

$$(4) \quad \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \sum_{X \in \mathfrak{u}_P^{P'}(F)} \xi_{P', \mathfrak{y}}(\gamma j(X)) \int_{U_{P'}(\mathbb{A})} f(g^{-1} \gamma j(X) u' g) du'.$$

Notons $\xi_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}$ la fonction sur $P(F)$ définie par

$$\xi_{\tilde{P}, \mathfrak{y}} = \epsilon_P \xi_{P, \mathfrak{y}} + \epsilon_{P'} \xi_{P', \mathfrak{y}}|_{P(F)}$$

et $A_{P', \mathfrak{y}}^1(g)$, resp $B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g)$ l'expression obtenue en remplaçant la fonction $\xi_{P', \mathfrak{y}}$ par $\xi_{P, \mathfrak{y}}$, resp. $\xi_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}$, dans l'expression (4). Puisque $\epsilon_P + \epsilon_{P'} = 0$ et $\epsilon_{P'} \epsilon_{P'} = 1$, on a

$$(5) \quad A_{P', \mathfrak{y}}(g) = A_{P', \mathfrak{y}}^1(g) + \epsilon_{P'} B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g).$$

On note \mathfrak{n}^\vee l'annulateur de $\mathfrak{u}_P^{P'}(F)$ dans $\mathfrak{u}_P^{P', *}(F)$. La formule de Poisson relative à la somme sur $\mathfrak{u}_P^{P'}(F)$ donne

$$\sum_{X \in \mathfrak{u}_P^{P'}(F)} \int_{U_{P'}(\mathbb{A})} f(g^{-1} \gamma j(X) u' g) du' = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee} \int_{U_P(\mathbb{A})} \psi(\Lambda, u) f(g^{-1} \gamma u g) du$$

où l'on a posé

$$\Psi(\Lambda, u) = \Psi(\langle \Lambda, X_P^{P'} \rangle) \quad \text{si } u = j(X).$$

Puisque la fonction $\xi_{P, \mathfrak{y}}$ sur $\mathfrak{U}_F^G \cap P(F) = \mathfrak{U}_F^{M_P} U_P(F)$ est invariante à droite par $U_P(F)$, on obtient

$$(6) \quad A_{P', \mathfrak{y}}^1(g) = A_{P, \mathfrak{y}}(g) + B_{P, \mathfrak{y}}(g)$$

où l'on a posé

$$B_{P, \mathfrak{y}}(g) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \xi_{P, \mathfrak{y}}(\gamma) \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee \setminus \{0\}} \int_{U_P(\mathbb{A})} \psi(\Lambda, u) f(g^{-1} \gamma u g) du.$$

Les décompositions (5) et (6) donnent

$$(7) \quad A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g) = \epsilon_{P'} B_{P, \mathfrak{y}}(g) + B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g) = -\epsilon_P B_{P, \mathfrak{y}}(g) + B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g).$$

Traitons maintenant l'expression $B_{\tilde{P}, \mathfrak{H}}(g)$. Pour $\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P}$, posons

$$I_{F, P}^{P'}(\gamma) = I_{F, P \cap M_{P'}}^{M_{P'}}(\gamma).$$

LEMME 5.6.1. — Soient $\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P}$ et $\nu \in U_{P'}^{P'}(F)$. Alors

$$\gamma\nu \in I_{F, P}^{P'}(\gamma) \Rightarrow \xi_{\tilde{P}, \mathfrak{H}}(\gamma\nu) = 0.$$

Démonstration. — Si $\gamma\nu \in I_{F, P}^{P'}(\gamma)$, alors $I_{F, P'}^G(\gamma\nu) = I_{F, P}^G(\gamma)$ d'après 3.7.10 et donc $\xi_{P, \mathfrak{H}}(\gamma) = \xi_{P', \mathfrak{H}}(\gamma\nu)$. D'où le lemme puisque $\epsilon_P + \epsilon_{P'} = 0$ \square

Le lemme 5.6.1 implique que l'expression $B_{\tilde{P}, \mathfrak{H}}(a)$ est égale à

$$(8) \quad \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \sum_{\substack{X \in \mathfrak{u}_{P'}^{P'}(F) \\ \gamma j(X) \notin I_{F, P}^{P'}(\gamma)}} \xi_{\tilde{P}, \mathfrak{H}}(\gamma j(X)) \int_{U_{P'}(\mathbb{A})} f(a^{-1} \gamma j(X) u' a) du'.$$

LEMME 5.6.2. — Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$.

(i) Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une constante $c = c_k > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R, +}$, on ait

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |B_{P, \mathfrak{H}}(a)| \leq c q^{-k \langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

(ii) Il existe une constante $\tilde{c} > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R, +}$, on ait

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |B_{\tilde{P}, \mathfrak{H}}(a)| \leq \tilde{c} q^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

Démonstration. — Prouvons (i). Posons

$$f_{P'}(g) = \int_{U_{P'}(\mathbb{A})} f(gu') du'.$$

L'expression $B_{P, \mathfrak{H}}(a)$ est égale à

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \xi_{P, \mathfrak{H}}(\gamma) \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^{\vee} \setminus \{0\}} \int_{\mathfrak{u}_{P'}^{P'}(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X \rangle) \delta_{P'}(a) f_{P'}(a^{-1} \gamma j(X) a) dX$$

soit encore à

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \xi_{P, \mathfrak{H}}(\gamma) \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^{\vee} \setminus \{0\}} \int_{\mathfrak{u}_{P'}^{P'}(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, \text{Ad}_a(X) \rangle) \delta_P(a) f_{P'}(a^{-1} \gamma a j(X)) dX.$$

Pour $\Lambda \in \mathfrak{u}_P^{P', *}(A)$ et $m \in M_P(A)$, posons

$$g(\Lambda, m) = \int_{\mathfrak{u}_{P'}^{P'}(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X \rangle) f_{P'}(mj(X)) dX$$

La fonction $\Lambda \mapsto g(\cdot, m)$, comme transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact, est elle aussi lisse à support compact. On en déduit qu'il existe des fonctions positives $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_P^{P', *}(A))$ et $h \in C_c^\infty(M_P(A))$ telles que

$$|g(\Lambda, m)| \leq \phi(\Lambda) h(m) \quad \text{pour tout } (\Lambda, m) \in \mathfrak{u}_P^{P', *}(A) \times M_P(A).$$

L'expression $\delta_{Q_1}(a)^{-1}|B_{P,\mathfrak{g}}(a)|$ est donc majorée par le produit des expressions

$$(9) \quad \delta_{Q_1}(a)^{-1}\delta_P(a) \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P}} h(a^{-1}\gamma a)$$

et

$$(10) \quad \sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}^\vee \setminus \{0\}} \phi(\text{Ad}_{a^{-1}}^*(\Lambda)).$$

Pour $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}$, on a

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1}\delta_P(a) = \delta_{P_0}(a)^{-1}\delta_P(a) = \delta_{P_0 \cap M_P}(a)^{-1},$$

et si de plus a appartient à $\mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, alors $\langle \beta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle > 0$ pour toute racine $\beta \in \Delta_{Q_1}^P$; en d'autres termes $\tau_{Q_1}^P(\mathbf{H}_{Q_1}(a)) > 0$. On en déduit (5.5.2) que l'expression (9) est majorée par une constante $c > 0$ indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$.

Quant à l'expression (10), notons $\Phi = \mathcal{R}_{Q_1}^{U_P^{P'}} (\subset \mathcal{R}_{Q_1}^+)$ l'ensemble des racines de A_{Q_1} dans $U_P^{P'} = U_P \cap M_P$. Pour $\theta \in \Phi$, notons \mathfrak{u}_θ le sous-espace de $\mathfrak{u}_P^{P'} = \text{Lie}(U_P^{P'})$ associé à θ et \mathfrak{n}_θ^\vee l'annulateur de $\mathfrak{u}_\theta(F)$ dans $\mathfrak{u}_\theta^*(\mathbb{A})$. Pour $\Lambda \in \mathfrak{u}_P^{P',*}(\mathbb{A})$, écrivons $\Lambda = \sum_{\theta \in \Phi} \Lambda_\theta$ avec $\Lambda_\theta = \Lambda|_{\mathfrak{u}_\theta(\mathbb{A})} \in \mathfrak{u}_\theta^*(\mathbb{A})$. On a donc

$$\text{Ad}_{a^{-1}}^*(\Lambda) = \sum_{\theta \in \Phi} \theta(a)\Lambda_\theta \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{Z}_{Q_1}.$$

De plus il existe des fonctions $\phi_\theta \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_\theta^*(\mathbb{A}))$ telles que

$$\phi(\Lambda) \leq \prod_{\theta \in \Phi} \phi_\theta(\Lambda_\theta) \quad \text{pour tout } \Lambda \in \mathfrak{u}_P^{P',*}(\mathbb{A}).$$

On en déduit que l'expression (10) est majorée par le produit sur les $\theta \in \Phi$ des expressions

$$(11) \quad \left(\sum_{\Lambda \in \mathfrak{n}_\theta^\vee \setminus \{0\}} \phi_\theta(\theta(a)\Lambda_\theta) \right) \cdot \left(\prod_{\mu \in \Phi \setminus \{\theta\}} \sum_{\Lambda_\mu \in \mathfrak{n}_\mu^\vee} \phi_\mu(\mu(a)\Lambda_\mu) \right).$$

Puisque pour $\mu \in \Phi$ et $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, on a $|\mu(a)|_{\mathbb{A}} = q^{\langle \theta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} > 1$, d'après 5.5.1 (ii), le terme de droite dans l'expression (11) est majoré par une constante indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$; et d'après 5.5.1 (ii), pour tout entier $k \geq 1$, le terme de gauche dans l'expression (11) est majoré par $cq^{-k\langle \theta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}$ pour une constante $c > 0$ elle aussi indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$. Comme θ s'écrit $\theta = \sum_{\beta \in \Delta_{Q_1}^{P'}} n_\beta \beta$ avec $n_\beta \geq 0$ et $n_\alpha > 0$, on a

$$q^{-k\langle \theta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} \leq q^{-k\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}.$$

D'où le point (i) puisque

$$q^{-|\Phi|k\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} \leq q^{-k\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

Prouvons (ii). L'expression $B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(a)$ est égale à

$$(12) \quad \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap Q(F)} \sum_{\substack{X \in \mathfrak{u}_{P'}^{P'}(F) \\ \gamma j(X) \notin I_{F,P'}^{P'}(\gamma)}} \xi_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(\gamma j(X)) \delta_{P'}(a) f_{P'}(a^{-1} \gamma j(X) a).$$

Il existe des fonctions positives $h \in C_c^\infty(M_P(\mathbb{A}))$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{P'}^{P'}(\mathbb{A}))$ telles que

$$|f_{P'}(mj(X))| \leq h(m) \phi(X) \quad \text{pour tout } (m, X) \in M_P(\mathbb{A}) \times \mathfrak{u}_{P'}^{P'}(\mathbb{A}).$$

L'expression $\delta_{Q_1}(a)^{-1} |B_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(a)|$ est donc majorée par l'expression

$$(13) \quad \delta_{Q_1}(a)^{-1} \delta_P(a) \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_P}} h(a^{-1} \gamma a) \Phi(a, \gamma)$$

avec

$$(14) \quad \Phi(a, \gamma) = \delta_P(a)^{-1} \delta_{P'}(a) \sum_{\substack{X \in \mathfrak{u}_{P'}^{P'}(F) \\ \gamma j(X) \notin I_{F,P'}^{P'}(\gamma)}} \phi(\text{Ad}_{a^{-1}}(X)).$$

On a vu plus haut que l'expression (9) — obtenue en prenant $\Phi \equiv 1$ dans l'expression (13) — est majorée par une constante indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$. Il suffit donc pour prouver (ii) de montrer que l'expression (14) est majorée par $cq^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}$ pour une constante $c > 0$ indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$. Quant à l'expression (14), la condition $\gamma \nu \notin I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$ est difficile à manipuler. En effet rappelons que la F -strate $I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$ de $\mathfrak{U}_F^{M'}$ est définie par la condition : l'intersection $\mathcal{Y}_{F,\gamma}^M U_{P'}^{P'}(F) \cap I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$ est dense dans $I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$. En particulier si u appartient à l'intersection $\mathcal{Y}_{F,\gamma}^M U_{P'}^{P'}(F) \cap I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$, alors $u = \gamma_1 \nu$ avec $\gamma_1 \in \mathcal{Y}_{F,P'}^M(\gamma)$ et $\nu \in U_{P'}^{P'}(F)$, donc ν appartient à $\gamma_1^{-1} I_{F,P'}^{P'}(\gamma_1)$; mais cela n'implique *a priori* pas que u appartienne à $\gamma^{-1} I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$. On va donc remplacer la condition $\gamma j(X) \notin I_{F,P'}^{P'}(\gamma)$ dans (14) par la condition $\gamma j(X) \notin I_P^{P', \mathbf{LS}}(\gamma)(F)$ où $I_P^{P', \mathbf{LS}}(\gamma) = I_{P \cap M'}^{M', \mathbf{LS}}(\gamma)$ est l'induite parabolique de Lusztig-Spaltenstein de la M -orbite unipotente \mathcal{O}_γ^M à M' . D'après 3.7.14, $I_P^{P', \mathbf{LS}}(\gamma)$ est l'unique orbite géométrique unipotente de M' qui intersecte ${}_{F}i^{P \cap M'}(\gamma) = {}_{F}\mathcal{Y}_\gamma^M U_{P'}^{P'}$ de manière dense ; ou, ce qui revient au même, qui intersecte $\mathcal{Y}_{F,\gamma}^M U_{P'}^{P'}(F)$ de manière dense. En particulier on a l'inclusion (en utilisant 2.6.13)

$$M'(F) \cap I_P^{P', \mathbf{LS}}(\gamma) \subset I_{F,P'}^{P'}(\gamma).$$

L'expression (14) est donc majorée par l'expression

$$(15) \quad \delta_P(a)^{-1} \delta_{P'}(a) \sum_{\substack{X \in \mathfrak{u}_{P'}^{P'}(F) \\ \gamma j(X) \notin I_P^{P', \mathbf{LS}}(\gamma)}} \phi(\text{Ad}_{a^{-1}}(X)),$$

qui se traite comme l'expression (6.7.7) dans [CL]. Grâce à la proposition [CL, 5.3.1], on obtient que l'expression (15) est majorée par $cq^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}$ pour une constante $c > 0$ indépendante de $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$. Cela achève la preuve du point (ii). \square

Compte-tenu de (7), le lemme suivant est une simple conséquence de 5.6.2 :

LEMME 5.6.3. — Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, on ait

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(a)| \leq cq^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

On en déduit la majoration cherchée :

PROPOSITION 5.6.4. — Soit Γ_G un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$ et tout $x \in \Gamma_G$, on ait

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)| \leq c \prod_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q} q^{-r \langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}$$

avec $r^{-1} = |\Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q| = |\Delta_{Q_1}^R|$.

Démonstration. — La fonction f est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert \mathbf{K}' de $G(\mathbb{A})$; en particulier son support $\Omega(f)$ vérifie $\mathbf{K}'\Omega(f)\mathbf{K}' = \Omega(f)$. Pour $x \in G(\mathbb{A})$, posons ${}^x f = f \circ \text{Int}_{x^{-1}}$. Puisque l'ensemble $\Gamma_G \mathbf{K}' / \mathbf{K}'$ est fini, l'ensemble $\{{}^x f \mid x \in \Gamma_G\}$ est lui aussi fini. Il suffit donc de prouver l'inégalité de l'énoncé pour $x = 1$. Puisque (d'après (3))

$$|K_{Q, \mathfrak{y}}^R(g)| \leq \sum_{\tilde{P}} |A_{\tilde{P}, \mathfrak{y}}(g)|$$

où \tilde{P} parcourt les éléments de $\mathcal{F}^{R \cap M_S}(Q \cap M_S)$, le lemme 5.6.4 assure que pour chaque racine $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q$, il existe une constante $c_\alpha > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, on ait la majoration

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(a)| \leq c_\alpha q^{-\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

Posons $c = \max\{c_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q\}$. Pour $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$ et $\beta \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q$ tels que $\langle \beta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle = \max\{\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle \mid \alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q\}$, on a

$$\delta_{Q_1}(a)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(a)| \leq cq^{-\langle \beta, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

Puisque pour $H \in \mathfrak{a}_{Q_1}$,

$$\max_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q} \langle \alpha, H \rangle \geq \sum_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q} r \langle \alpha, H \rangle \quad \text{avec} \quad r^{-1} = |\Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q| = |\Delta_{Q_1}^R|,$$

la proposition est démontrée. \square

5.7. Estimée d'une intégrale. — Continuons avec les hypothèses de 5.6, à savoir qu'on a fixé la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F et le triple $Q_1 \subset Q \subsetneq R$ d'éléments de \mathcal{P}_{st} .

Commençons par quelques définitions standard. Pour la définition des bases $\check{\Delta}_{Q_1}^R$ de $\mathfrak{a}_{Q_1}^R$ et $\Delta_{Q_1}^R$ de $\mathfrak{a}_{Q_1}^{R,*}$, on renvoie à [LL, 1.4]. On note $\hat{\Delta}_{Q_1}^R = \{\varpi_\alpha^R \mid \alpha \in \Delta_{Q_1}^R\}$ la base de $\mathfrak{a}_{Q_1}^{R,*}$ duale de $\check{\Delta}_{Q_1}^R$ définie par $\langle \varpi_\alpha^R, \check{\beta} \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ et $\hat{\Delta}_{Q_1}^{R,\vee} = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_{Q_1}^R\}$ la base de $\mathfrak{a}_{Q_1}^R$ duale de $\Delta_{Q_1}^R$ définie par $\langle \varpi_\alpha^\vee, \beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$. Observons que pour $R_1 \in \mathcal{F}^G(R)$, on a les inclusions

$$\hat{\Delta}_Q^R \subset \hat{\Delta}_{Q_1}^R \quad \text{et} \quad \hat{\Delta}_Q^{R,\vee} \subset \hat{\Delta}_{Q_1}^{R_1,\vee}.$$

Observons aussi que pour $\alpha \in \Delta_Q^R \subset \Delta_{Q_1}^{R_1}$, ϖ_α^R est la projection de $\varpi_\alpha^{R_1}$ sur $\mathfrak{a}_Q^{R,*}$ (ce qui rend les notations cohérentes). Pour $R = G$, on supprimera comme il est d'usage l'exposant R dans les notations.

Fixons un ensemble de Siegel $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ pour le quotient

$$\overline{\mathfrak{X}}_{M_{Q_1}} = A_{Q_1}(\mathbb{A})M_{Q_1}(F) \backslash M_{Q_1}(\mathbb{A}).$$

Rappelons (cf. [LL, 3.4]) que $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ est de la forme

$$\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^* = \mathfrak{C}_{M_{Q_1}} \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^1$$

où $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ est un sous-ensemble fini de $M_{Q_1}(\mathbb{A})$ tel que

$$M_{Q_1}(\mathbb{A}) = A_{Q_1}(\mathbb{A})M_{Q_1}(\mathbb{A})^1 \mathfrak{C}_{M_{Q_1}} = A_{Q_1}(\mathbb{A}) \mathfrak{C}_{M_{Q_1}} M_{Q_1}(\mathbb{A})^1$$

et $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^1$ est un ensemble de Siegel pour le quotient $M_{Q_1}(F) \backslash M_{Q_1}(\mathbb{A})^1$.

LEMME 5.7.1. — *On peut choisir $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ de telle manière que $\langle \alpha, X \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}$ et tout $X \in \mathbf{H}_{Q_1}(\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*) = \mathbf{H}_{Q_1}(\mathfrak{C}_{M_{Q_1}})$.*

Démonstration. — L'application $\mathbf{H}_{Q_1} : M_{Q_1}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_{Q_1}$ se factorise en une application surjective $\overline{\mathfrak{X}}_{M_{Q_1}} \rightarrow \mathfrak{c}_{Q_1} = \mathcal{B}_{Q_1} \backslash \mathcal{A}_{Q_1}$. On peut prendre pour $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ un ensemble de relèvements des éléments de \mathfrak{c}_{Q_1} dans $M_{Q_1}(\mathbb{A})$. Quitte à remplacer $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ par un translaté $a\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ pour un élément $a \in A_{Q_1}(\mathbb{A})$ tel que $\inf\{\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle \mid \alpha \in \Delta_{Q_1}\} \gg 1$, la condition du lemme est vérifiée. \square

Une suppose désormais que l'ensemble $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ est choisi comme en 5.7.1. Posons

$$C = \max\{\langle \alpha, X \rangle \mid X \in \mathbf{H}_{Q_1}(\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}), \alpha \in \Delta_{Q_1}\},$$

$$D = \max\{\langle \varpi, X \rangle \mid X \in \mathbf{H}_{Q_1}(\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}), \varpi \in \hat{\Delta}_{Q_1}\}.$$

On a donc $C > 0$; et aussi $D > 0$ (d'après [LW, 1.2.8]). Rappelons qu'on a posé

$$U_{Q_1}^R = U_{Q_1} \cap M_R.$$

Le lemme suivant est une simple adaptation de [C, 3.6.2].

LEMME 5.7.2. — *Soient $u \in U_{Q_1}^R(\mathbb{A})$, $a \in A_{Q_1}(\mathbb{A})$ et $m \in \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ tels que*

$$\tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(am) - T_1) F_{P_0}^Q(uam, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) = 1.$$

Posons $H = \mathbf{H}_0(a) \in \mathcal{B}_{Q_1}$. On a :

$$(i) \quad \langle \alpha, H \rangle \geq \langle \alpha, T \rangle - C \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q.$$

- (ii) $\langle \alpha, H \rangle \geq \langle \alpha, T_1 \rangle - C$ et $\langle \varpi_\alpha^Q, H \rangle < \langle \varpi_\alpha^Q, T \rangle$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q$.
 (iii) Si T et T_1 sont assez réguliers, précisément si $\mathbf{d}_0(T) > C$ et $\mathbf{d}_0(T_1) > C$, alors $0 < \langle \alpha, H \rangle$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R$ et

$$0 < \langle \alpha, H \rangle < \frac{\langle \varpi_\alpha^Q, T \rangle}{\langle \varpi_\alpha^Q, \varpi_\alpha^\vee \rangle} \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_{Q_1}^Q.$$

- (iv) $\langle \alpha, H_R \rangle \leq \langle \alpha, T \rangle - \langle \alpha, H^R \rangle$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q \setminus \Delta_Q^R$ et $\langle \alpha, H \rangle > \langle \alpha, T \rangle - D$ pour tout $\alpha \in \Delta_R$.

Démonstration. — Posons $X = \mathbf{H}_{Q_1}(m)$.

Prouvons (i). La condition $F_{P_0}^Q(uam, T)$ implique que $\langle \varpi, \mathbf{H}_0(uam) - T \rangle \leq 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_0^Q$. On obtient que $\langle \varpi, H + X - T \rangle \leq 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{Q_1}^Q \subset \hat{\Delta}_0^Q$. La condition $\sigma_{Q_1}^R(H + X - T) = 1$ entraîne alors comme dans la preuve de [C, 3.6.2 (1)] que $\langle \alpha, H + X - T \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^R \setminus \Delta_{Q_1}^Q$. Puisque $-\langle \alpha, X \rangle \geq -C$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}$, cela prouve (i).

Prouvons (ii). La première inégalité est claire, par définition de $\tau_{Q_1}^Q$ et puisque $-\langle \alpha, X \rangle \geq -C$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q$. La seconde inégalité résulte des deux inégalités $\langle \varpi_\alpha^Q, H + X - T \rangle \leq 0$ (établie au point (i)) et $-\langle \varpi_\alpha^Q, X \rangle < 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q$ (d'après [LW, 1.2.8], puisque $\langle \alpha, X \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q$).

Prouvons (iii). Pour $\alpha \in \Delta_{Q_1}$, on a (d'après [LW, 1.2.9])

$$\langle \alpha, T \rangle \geq \mathbf{d}_0(T) > 0 \quad \text{et} \quad \langle \alpha, T_1 \rangle \geq \mathbf{d}_0(T_1) > 0.$$

Si $\mathbf{d}_0(T) > C$ et $\mathbf{d}_0(T_1) > C$, ce que l'on suppose, alors (d'après (i) et (ii))

$$\langle \alpha, H \rangle > 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_{Q_1}^R.$$

Écrivons $H^G = \sum_{\beta \in \Delta_{Q_1}} \langle \beta, H \rangle \varpi_\beta^\vee$. Pour $\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q$, on a

$$\langle \varpi_\alpha^Q, H \rangle = \langle \varpi_\alpha, H^G \rangle = \sum_{\beta \in \Delta_{Q_1}^Q} \langle \beta, H \rangle \langle \varpi_\alpha, \varpi_\beta^\vee \rangle.$$

Comme $\langle \varpi, \varpi_\beta^\vee \rangle \geq 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{Q_1}^Q$ et tout $\beta \in \Delta_{Q_1}^Q$ (d'après [LW, 1.2.8]), on a

$$\langle \varpi_\alpha, \varpi_\beta^\vee \rangle = \langle \varpi_\alpha^Q, \varpi_\beta^\vee \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \beta \in \Delta_{Q_1}^Q.$$

Comme pour $\beta = \alpha$, on a $\langle \varpi_\alpha^Q, \varpi_\alpha^\vee \rangle > 0$, on en déduit que

$$\langle \alpha, H \rangle \leq \frac{\langle \varpi_\alpha^Q, H \rangle}{\langle \varpi_\alpha^Q, \varpi_\alpha^\vee \rangle} \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_{Q_1}^Q.$$

D'où le point (iii) d'après la seconde inégalité du point (ii).

Prouvons (iv). Écrivons $H = H^R + H_R$ avec $H^R \in \mathfrak{a}_{Q_1}^R$ et $H_R \in \mathfrak{a}_R$. Pour $\alpha \in \Delta_Q \setminus \Delta_Q^R$, on a

$$\langle \alpha, H_R \rangle = \langle \alpha, H + X - T \rangle + \langle \alpha, T \rangle - \langle \alpha, X \rangle - \langle \alpha, H^R \rangle$$

avec $\langle \alpha, H + X - T \rangle$ car $\sigma_{Q_1}^R(H + X - T) = 1$ et $-\langle \alpha, X \rangle < 0$ car si α' est l'unique élément de Δ_{Q_1} tel que $\alpha'_Q = \alpha$, on a $\langle \alpha, X \rangle \geq \langle \alpha', X \rangle > 0$ (d'après [LW, 1.2.9]).

D'où la première inégalité du point (iv). Pour $\varpi \in \hat{\Delta}_R$, on a $\langle \varpi, H + X - T \rangle > 0$ car $\sigma_Q^R(H + X - T) = 1$, par conséquent

$$\langle \varpi, H \rangle > -\langle \varpi, X \rangle + \langle \varpi, T \rangle$$

avec $-\langle \varpi, X \rangle \geq -D$ (rappelons que $\hat{\Delta}_R \subset \hat{\Delta}_{Q_1}$). \square

L'ensemble de Siegel $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^* = \mathfrak{C}_{M_{Q_1}} \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^1$ pour le quotient $\overline{\mathbf{X}}_{M_{Q_1}}$ étant fixé, les constantes $C > 0$ et $D > 0$ le sont aussi. On suppose désormais que

$$(1) \quad \mathbf{d}_0(T) > C \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_0(T_1) > C.$$

Soit $\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)$ le sous-ensemble de \mathbf{Z}_{Q_1} formé des a tel que l'élément $H = \mathbf{H}_{Q_1}(a)$ de \mathfrak{a}_{Q_1} vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) de 5.7.2. D'après (1) et 5.7.2 (iii), on a l'inclusion

$$(2) \quad \mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1) \subset \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}.$$

Notons $\mathcal{B}_{Q_1}^G(T, T_1)$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}_{Q_1}^G = \mathcal{B}_G \setminus \mathcal{B}_{Q_1}$ défini par

$$\mathcal{B}_{Q_1}^G(T, T_1) = \{\mathbf{H}_{Q_1}(a) \mid a \in \mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)\}.$$

LEMME 5.7.3. — *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $c_1 > 0$ et $\epsilon'_1 > 0$ telles que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) > C$ et $\mathbf{d}_0(T) > \epsilon \|T\|$, on ait*

$$\sum_{H \in \mathcal{B}_{Q_1}^G(T, T_1)} \prod_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q} q^{-r\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} \leq c_1 q^{-\epsilon'_1 \|T\|}.$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre celle de [C, 3.6.3] (voir aussi [CL, 6.8, page 152]). \square

On en déduit la

PROPOSITION 5.7.4. — *Soit Γ_G un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $c > 0$ et $\epsilon' > 0$ telles que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) > C$ et $\mathbf{d}_0(T) > \epsilon \|T\|$, on ait*

$$\int_{\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)} \delta_{Q_1}(a)^{-1} \sup_{x \in \Gamma_G} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)| da \leq cq^{-\epsilon' \|T\|}.$$

Démonstration. — D'après 5.6.4, l'intégrale de l'énoncé est essentiellement majorée par

$$(3) \quad \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q} q^{-r\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle} \right) da.$$

Posons $\mathbf{Z}_{Q_1}^1 = \ker(\mathbf{H}_{Q_1} : \mathbf{Z}_{Q_1} \rightarrow \mathcal{B}_{Q_1}^G)$. Puisque $\mathbf{Z}_{Q_1}^1 \mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1) = \mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)$ et que $\mathbf{Z}_{Q_1}^1$ est compact, à un volume fini près, l'intégrale (3) est égale à

$$\sum_{H \in \mathcal{B}_{Q_1}^G(T, T_1)} \prod_{\alpha \in \Delta_{Q_1}^Q} q^{-r\langle \alpha, \mathbf{H}_{Q_1}(a) \rangle}.$$

On conclut grâce à 5.7.3. \square

5.8. Démonstration de la proposition 5.3.2. — La F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F est fixée. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, notons $\tilde{k}_{\mathfrak{Y}}^T(x)$ l'expression obtenue en remplaçant \mathfrak{U}_F par \mathfrak{Y} dans la définition de $\tilde{k}_{\text{unip}}^T(x)$:

$$\tilde{k}_{\mathfrak{Y}}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\text{st}}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F) \backslash G(F)} \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \Lambda_d^{T, Q} K_{P, \mathfrak{Y}}(\xi x).$$

Comme en 4.1, on a l'égalité

$$k_{\mathfrak{Y}}^T(x) = \tilde{k}_{\mathfrak{Y}}^T(x).$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier (ne dépendant que du support de f), on obtient comme en 4.2 que l'expression $\tilde{k}_{\mathfrak{Y}}^T(x)$ est égale à

$$\sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset R}} \sum_{\xi \in Q(F) \backslash G(F)} F_{P_0}^Q(\xi x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P, \mathfrak{Y}}(\xi x).$$

L'intégrale

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} |k_{\mathfrak{Y}}^T(x)| dx$$

est alors bornée par

$$\sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset R}} \int_{\mathbf{Y}_Q} F_{P_0}^Q(x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) \left| \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P, \mathfrak{Y}}(x) \right| dx.$$

Pour $Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ tels que $Q \subset R$, rappelons que l'on a posé

$$K_{Q, \mathfrak{Y}}^R(x) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} K_{P, \mathfrak{Y}}(x).$$

La fonction $x \mapsto K_{Q, \mathfrak{Y}}^R(x)$ sur $G(\mathbb{A})$ se factorise par $\mathbf{Y}_Q = A_G(\mathbb{A})Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$. Il s'agit en particulier de prouver, pour chaque paire $Q \subset R$ de sous-groupes paraboliques standard, la convergence de l'intégrale

$$(1) \quad \int_{\mathbf{Y}_Q} F_{P_0}^Q(x, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) |K_{Q, \mathfrak{Y}}^R(x)| dx.$$

Pour $Q = R = G$, la contribution est l'intégrale sur $\mathbf{Y}_G = \overline{\mathbf{X}}_G$ obtenue en otant les valeurs absolues dans l'expression (1), c'est-à-dire

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} \Lambda_d^T K_{\mathfrak{Y}}(x, x) dx.$$

Puisque la fonction $F_{P_0}^G(\cdot, T)$ est à support compact sur $\overline{\mathbf{X}}_G$, on a

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) |K_{\mathfrak{Y}}(x, x)| dx \leq \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} F_{P_0}^G(x, T) \left(\sum_{\eta \in \mathfrak{Y}} |f(x^{-1}\eta x)| \right) dx < +\infty.$$

Pour $Q = R \subsetneq G$, la contribution est nulle car $\sigma_Q^R = 0$. Reste à évaluer la contribution pour $Q \subsetneq R \subset G$.

On fixe jusqu'à la fin de 5.8 (c'est-à-dire la fin de la démonstration de 5.3.2) une paire $Q \subsetneq R$ d'éléments de \mathcal{P}_{st} . On a

$$K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_P}} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta) \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\eta u x) du.$$

Comme au début de la preuve de [LL, 9.1.1], on peut invoquer [LW, 3.6.7] et, pour T assez régulier (ne dépendant que du support de f), remplacer la somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_P}$ dans l'expression ci-dessus par une somme sur $\mathfrak{U}_F^{M_Q}$ ($= \mathfrak{U}_F^{M_P} \cap M_Q(F)$) suivie d'une somme sur $U_Q^P(F) = M_P(F) \cap U_Q(F)$:

$$(2) \quad K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_Q}} \Phi_{P,\eta,\mathfrak{y}}(x)$$

avec

$$\Phi_{P,\eta,\mathfrak{y}}(x) = \sum_{\nu \in U_Q^P(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta\nu) \int_{U_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\eta\nu u x) du.$$

Rappelons que la fonction $\xi_{P,\mathfrak{y}}$ sur $\mathfrak{U}_F^{M_P} U_P(F)$ est invariante par translations à droite (et à gauche) par $U_P(F)$. On obtient

$$\Phi_{P,\eta,\mathfrak{y}}(x) = \int_{U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})} \left(\sum_{\nu \in U_Q(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta\nu) f(x^{-1}\eta\nu u x) \right) du.$$

On peut alors remplacer l'intégrale en $u \in U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})$ par une intégrale sur un domaine de Siegel \mathfrak{S}_{U_P} pour le quotient $U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})$:

$$(3) \quad \Phi_{P,\eta,\mathfrak{y}}(x) = \sum_{\nu \in U_Q(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta\nu) \int_{\mathfrak{S}_{U_P}} f(x^{-1}\eta\nu u x) du.$$

Pour $\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_Q}$, on pose

$$\Phi_{Q,\eta,\mathfrak{y}}^R(x) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} \Phi_{P,\eta,\mathfrak{y}}(x).$$

Puisque pour $P \in \mathcal{F}^R(Q)$, la fonction $\xi_{P,\mathfrak{y}}$ sur $P(F)$ est invariante par translations à droite par $U_R(F)$, l'expression $\Phi_{Q,\eta,\mathfrak{y}}^R(x)$ est égale à

$$(4) \quad \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\nu \in U_Q^R(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta\nu) \int_{\mathfrak{S}_{U_P^R} \times U_R(\mathbb{A})} f(x^{-1}\eta\nu\nu u' x) d\nu du'$$

où $\mathfrak{S}_{U_P^R}$ est un sous-ensemble ouvert compact de $U_P^R(\mathbb{A})$ qui soit un domaine de Siegel pour le quotient $U_P^R(F) \backslash U_P^R(\mathbb{A})$. Comme (par définition)

$$K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x) = \sum_{\eta \in \mathfrak{U}_F^{M_Q}(F)} \Phi_{Q,\eta,\mathfrak{y}}^R(x)$$

et que $\mathfrak{U}_F^{M_Q} U_Q^R(F) = \mathfrak{U}_F^{M_R} \cap Q(F)$, l'expression $K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)$ est égale à

$$(5) \quad \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset P \subset R}} (-1)^{a_P - a_Q} \sum_{\gamma \in \mathfrak{U}_F^{M_R} \cap Q(F)} \xi_{P,\mathfrak{y}}(\gamma) \int_{\mathfrak{S}_{U_P^R} \times U_R(\mathbb{A})} f(x^{-1} \gamma v u' x) dv du'.$$

D'après la proposition 3.6.3 de [LW] (appliquée au parabolique $P = Q$), il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ avec $d_0(T) \geq c_1$, on ait

$$\sum_{\substack{Q_1 \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ P_0 \subset Q_1 \subset Q}} \sum_{\xi \in Q_1(F) \setminus Q(F)} F_{P_0}^{Q_1}(\xi x, T) \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) = 1.$$

Fixons un élément $T_1 \in \mathfrak{a}_0$ avec $d_0(T_1) \geq c_1$. L'intégrale (1) est égale à

$$(6) \quad \sum_{Q_1 \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \int_{\mathbf{Y}_{Q_1}} \chi_{Q,Q_1}^R(x, T, T_1) |K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)| dx$$

avec

$$\chi_{Q,Q_1}^R(x, T, T_1) \stackrel{\text{déf}}{=} F_{P_0}^{Q_1}(x, T_1) \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T_1) F_{P_0}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T).$$

Il s'agit donc, pour chaque $Q_1 \in \mathcal{F}^Q(P_0)$, d'estimer l'intégrale

$$(7) \quad \int_{\mathbf{Y}_{Q_1}} \chi_{Q,Q_1}^R(x, T, T_1) |K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)| dx$$

Fixons $Q_1 \in \mathcal{F}^Q(P_0)$ et récrivons l'intégrale (7) en utilisant de la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = U_{Q_1}(\mathbb{A}) M_{Q_1}(\mathbb{A}) \mathbf{K}$. On obtient que l'intégrale (7) est égale à

$$\int_{\mathbf{K}} \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_{Q_1}}} \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}} \int_{U_{Q_1}(F) \setminus U_{Q_1}(\mathbb{A})} \delta_{Q_1}(am)^{-1} F_{P_0}^{Q_1}(m, T_1) \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(am) - T_1) \\ \times F_{P_0}^Q(uam, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) K_{Q,\mathfrak{y}}^R(uamk) du da dm dk.$$

L'expression ci-dessus a un sens car les fonctions $x \mapsto F_{P_0}^Q(x, T)$ et $x \mapsto K_{Q,\mathfrak{y}}^R(x)$ sont invariantes à gauche par $Q(F) (\supset U_{Q_1}(F))$. On remplace l'intégrale en u par une intégrale sur un domaine de Siegel $\mathfrak{S}_{U_{Q_1}}$ pour le quotient $U_{Q_1}(F) \setminus U_{Q_1}(\mathbb{A})$. Comme dans la preuve de 4.2.2, on prend $\mathfrak{S}_{U_{Q_1}}$ de la forme $\mathfrak{S}_{U_R} \mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}$. On remplace l'intégrale en $u \in \mathfrak{S}_{U_{Q_1}}$ par une intégrale en $u' \in \mathfrak{S}_{U_R}$ suivie d'une intégrale en $u'' \in \mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}$. Pour $x = u' u'' amk$, $P \in \mathcal{F}^R(Q)$ et $\gamma \in \mathfrak{U}^{M_R}(F)$, on a

$$\int_{\mathfrak{S}_{U_P^R} \times U_R(\mathbb{A})} f(x^{-1} \gamma v u'_1 x) dv du'_1 \\ = \int_{\mathfrak{S}_{U_P^R} \times U_R(\mathbb{A})} f(k^{-1} m^{-1} a^{-1} u''^{-1} \gamma v \text{Int}_{(\gamma v)^{-1}}(u'^{-1}) u'_1 u' u'' amk) du_1 du_2 \\ = \int_{\mathfrak{S}_{U_P^R} \times U_R(\mathbb{A})} f(k^{-1} m^{-1} a^{-1} u''^{-1} \gamma v u'_1 u'' amk) dv du'_1.$$

En d'autres termes, l'intégrale en $u' \in \mathfrak{S}_{U_R}$ est absorbée (pour chaque $P \in \mathcal{F}^R(Q)$) par l'intégrale en $u' \in U_R(\mathbb{A})$ dans (5). Comme d'autre part la fonction $x \mapsto F_{P_0}^Q(x, T)$

est invariante à gauche par $U_Q(\mathbb{A}) (\supset U_R(\mathbb{A}))$, on obtient que l'intégrale (7) est égale à

$$\int_{\mathbf{K}} \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_{Q_1}}} \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}} \int_{\mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}} \delta_{Q_1}(am)^{-1} F_{P_0}^{Q_1}(m, T_1) \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(am) - T_1) \\ \times F_{P_0}^Q(uam, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(uamk)| du da dm dk.$$

L'expression ci-dessus est majorée par celle obtenue en remplaçant l'intégrale en m par une intégrale sur un ensemble de Siegel $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ pour le quotient $\overline{\mathbf{X}}_{M_{Q_1}}$; et d'après [LW, 1.8.3] et [LL, 3.4], la condition $F_{P_0}^{Q_1}(m, T_1) \neq 0$ implique que cette intégrale en $m \in \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ porte sur un sous-ensemble ouvert compact $\Gamma_{M_{Q_1}}$ de $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$. L'intégrale (7) est donc majorée par l'expression

$$\int_{\mathbf{K}} \int_{\Gamma_{M_{Q_1}}} \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}} \int_{\mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}} \delta_{Q_1}(am)^{-1} \tau_{Q_1}^Q(\mathbf{H}_0(am) - T_1) \\ \times F_{P_0}^Q(uam, T) \sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(uamk)| du da dm dk$$

Le terme crucial dans l'expression ci-dessus est l'intégrale en a , les trois autres intégrales portant sur des ensembles compacts. On suppose que $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$ est choisi comme en 5.7 : $\mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^* = \mathfrak{C}_{M_{Q_1}} \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^1$ avec $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$ comme en 5.7.1. Compte-tenu de 5.7.2 et de la définition de $\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)$, à des volumes finis près qui ne dépendent ni de f , T ou T_1 , il suffit pour majorer l'intégrale (7) de majorer l'intégrale

$$(8) \quad \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)} \delta_{Q_1}(am)^{-1} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(uamx)| da$$

pour $u \in \mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}$, $m \in \Gamma_{M_{Q_1}}$ et $k \in \mathbf{K}$. Pour $m \in M_{Q_1}(\mathbb{A})$, on a

$$\delta_{Q_1}(m)^{-1} = e^{-(2\rho_{Q_1}, \mathbf{H}_{Q_1}(m))}$$

où ρ_{Q_1} désigne la demi-somme des racines de A_{Q_1} dans U_{Q_1} . En particulier pour $m \in \mathfrak{S}_{M_{Q_1}}^*$, et donc *a fortiori* pour $m \in \Gamma_{M_{Q_1}}$, le terme $\delta_{Q_1}(m)^{-1}$ est majoré par une constante ne dépendant que de $\mathfrak{C}_{M_{Q_1}}$. D'autre part pour $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, et donc *a fortiori* pour $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)$, l'automorphisme $\text{Int}_{a^{-1}}$ de $G(\mathbb{A})$ contracte $U_{Q_1}^R(\mathbb{A})$. On peut donc fixer un sous-ensemble ouvert compact $\Gamma_{U_{Q_1}^R}$ de $U_{Q_1}^R(\mathbb{A})$ tel que $a^{-1}ua \subset \Gamma_{U_{Q_1}^R}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$ et tout $u \in \mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}$. Posons

$$\Gamma_G = \Gamma_{U_{Q_1}^R} \Gamma_{M_{Q_1}} \mathbf{K}.$$

Pour $u \in \mathfrak{S}_{U_{Q_1}^R}$, $a \in \mathbf{Z}_{Q_1}^{R,+}$, $m \in \Gamma_{M_{Q_1}}$ et $k \in \mathbf{K}$, on a

$$x = a^{-1}uamk \in \Gamma_G.$$

L'intégrale (8) est essentiellement majorée par

$$(9) \quad \int_{\mathbf{Z}_{Q_1}(T, T_1)} \delta_{Q_1}(a)^{-1} \sup_{x \in \Gamma_G} |K_{Q, \mathfrak{y}}^R(ax)| da.$$

L'intégrale (7) est elle aussi essentiellement majorée par l'intégrale (9). On peut donc lui appliquer 5.7.4 : il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $c > 0$ et $\epsilon' > 0$ telles que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathbf{d}_0(T) \geq c_0$ et $\mathbf{d}_0(T) \geq \epsilon \|T\|$, on ait

$$(10) \quad \int_{\mathbf{Y}_{Q_1}} \chi_{Q, Q_1}^R(x, T, T_1) |K_{Q, \mathfrak{Y}}^R(x)| dx \leq cq^{-\epsilon' \|T\|}.$$

Puisque l'intégrale (1) est égale à la somme sur $Q_1 \in \mathcal{F}^Q(P_0)$ des intégrales (7), cela achève la démonstration de 5.3.2.

5.9. Démonstration de 5.3.4. — Il suffit de reprendre celle du théorème 11.1.1 de [LL]. Avant cela, rappelons quelques notations de [LL]. Pour $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$, le \mathbb{Z} -module de type fini $\mathcal{C}_Q^G = \mathcal{B}_G \setminus \mathcal{A}_Q$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_Q^G = \mathcal{B}_G \setminus \mathcal{B}_Q \rightarrow \mathcal{C}_Q^G \rightarrow \mathfrak{c}_Q = \mathcal{B}_Q \setminus \mathcal{A}_Q \rightarrow 0.$$

Pour $Z \in \mathfrak{c}_Q$, on note $\mathcal{B}_Q^G(Z) \subset \mathcal{C}_Q^G$ la fibre au-dessus de Z (c'est un espace principal homogène sous le groupe \mathcal{B}_Q^G) et pour $T, X \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$(1) \quad \eta_{Q, F}^{G, T}(Z; X) = \sum_{H \in \mathcal{B}_Q^G(Z)} \Gamma_Q(H - X, T).$$

Si \mathfrak{Y} est une F -strate de \mathfrak{U}_F , puisque M_Q est un F -sous-groupe fermé *critique* de G , d'après 3.2.1 (iii) l'intersection

$$\mathfrak{Y} \cap M_Q(F)$$

est une réunion finie, éventuellement vide, de F -strates de $\mathfrak{U}_F^{M_Q}$. On note

$$(2) \quad k_{\mathfrak{Y}}^{M_Q, T}(f_Q; \cdot)$$

la fonction sur $M_Q(\mathbb{A})$ obtenue en remplaçant G, f et \mathfrak{Y} par M_Q, f_Q et $\mathfrak{Y} \cap M_Q(F)$ dans la définition de $k_{\mathfrak{Y}}^T = k_{\mathfrak{Y}}^{G, T}(f; \cdot)$; avec la convention que (2) est la fonction identiquement nulle si l'intersection $\mathfrak{Y} \cap M_Q(F)$ est vide. D'après 5.3.1, pour $T \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier, l'intégrale

$$(3) \quad \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}} k_{\mathfrak{Y}}^{M_Q, T}(f_Q; m) dm$$

est absolument convergente.

La F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F étant fixée, on peut commencer la démonstration de 5.3.4. Comme dans celle de [LW, 11.1.1], pour $T, X \in \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ assez réguliers, on obtient

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathfrak{Y}}^{T+X}(x) dx = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}} \int_{\mathbf{Y}_Q} \Gamma_Q^G(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{Q, \mathfrak{Y}}^X(x) dx$$

avec

$$k_{Q, \mathfrak{Y}}^X(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \sum_{\xi \in P(F) \setminus Q(F)} (-1)^{a_P - a_G} \hat{\tau}_P^Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - X) K_{P, \mathfrak{Y}}(\xi x, \xi x).$$

Soit \mathfrak{B}_Q l'image d'une section du morphisme $A_Q(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{B}_Q$. Comme dans la preuve de loc. cit., on suppose que $\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_Q^G$. Posons

$$\mathbf{Y}'_Q = \mathfrak{B}_G Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}''_Q = \mathfrak{B}_Q Q(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Puisque $\text{vol}(A_G(F) \backslash A_G(\mathbb{A})^1) = 1$, on peut remplacer l'intégrale sur \mathbf{Y}_Q par une intégrale sur \mathbf{Y}'_Q . Pour $Z \in \mathfrak{c}_Q = \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{A}_Q$, notons $\mathbf{Y}''_Q(Z)$ l'image dans \mathbf{Y}''_Q de l'ensemble des $g \in G(\mathbb{A})$ tels que $\mathbf{H}_Q(g) = Z'$ où Z' est un relèvement de Z dans \mathcal{A}_Q . On définit de la même manière le sous-ensemble $\overline{\mathbf{X}}'_{M_Q}(Z)$ de

$$\overline{\mathbf{X}}_{M_Q} = \mathfrak{B}_Q M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A}).$$

On obtient

$$\int_{\mathbf{Y}_Q} \Gamma_Q^G(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{Q, \mathfrak{y}}^X(x) dx = \sum_{Z \in \mathfrak{c}_Q} \eta_{Q, F}^{G, T}(Z; X) \int_{\mathbf{Y}''_Q(Z)} k_{Q, \mathfrak{y}}^X(x) dx$$

avec

$$\int_{\mathbf{Y}''_Q(Z)} k_{Q, \mathfrak{y}}^X(x) dx = \int_{\overline{\mathbf{X}}'_{M_Q}(Z)} k_{\mathfrak{y}}^{M_Q, X}(f_Q; m) dm.$$

Comme plus haut, on peut remplacer l'intégrale sur $\overline{\mathbf{X}}'_{M_Q}(Z)$ par une intégrale sur $\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}(Z) \subset \overline{\mathbf{X}}'_{M_Q}(Z)$. En posant

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{G, T}(f) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_G} k_{\mathfrak{y}}^{G, T}(x) dx,$$

on a donc

$$(4) \quad \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{G, T+X}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_Q} \eta_{Q, F}^{G, T}(Z; X) \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{M_Q, X}(Z; f_Q)$$

avec

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{M_Q, X}(Z; h) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}(Z)} k_{\mathfrak{y}}^{M_Q, X}(h; m) dm.$$

Puisque d'après [LL, 2.1.3], pour $X \in \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$, la fonction $T \mapsto \eta_{Q, F}^{G, T}(Z; X)$ sur $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ est dans PolExp , la proposition 5.3.4 est démontrée.

5.10. Action de la conjugaison. — Pour $y \in G(\mathbb{A})$, on note f^y la fonction $f \circ \text{Int}_y$. Soient $y \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_0$. Pour $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ et $Z \in \mathfrak{c}_Q = \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{A}_Q$, notons $f_{Q, y}^T(Z; \cdot)$ la fonction dans $C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A}))$ définie par

$$f_{Q, y}^T(Z; m) = \int_{\mathbf{K}} \int_{U_Q(\mathbb{A})} f(k^{-1} muk) \eta_{Q, F}^{G, -\mathbf{H}_0(ky)}(Z; T) du dk$$

où, pour $X \in \mathfrak{a}_0$, l'expression $\eta_{Q, \mathfrak{y}}^{G, X}(Z; T)$ a été définie en 5.9(1). Si \mathfrak{y} est une F -strate de \mathfrak{U}_F , pour $h \in C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A}))$ et $T \in \mathfrak{a}_0$, on note $\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{M_Q, T}(h)$ l'expression définie par

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^{M_Q, T}(h) = \int_{\overline{\mathbf{X}}_{M_Q}} k_{\mathfrak{y}}^{M_Q, T}(h; m) dm$$

où la fonction $k_{\mathfrak{Y}}^{M_Q, T}(h; \cdot) = k_{\mathfrak{Y} \cap M_Q(F)}^{M_Q, T}(h; \cdot)$ sur $M_Q(\mathbb{A})$ est définie comme en 5.9 (3). Puisque $\mathfrak{Y} \cap M_Q(F)$ est une réunion finie (éventuellement vide) de F -strates de $\mathfrak{U}^{M_Q}(F)$, d'après 5.3.4, la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^{M_Q, T}(h)$ sur $\mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ est dans PolExp .

PROPOSITION 5.10.1. — Soit \mathfrak{Y} une F -strate de \mathfrak{U}_F et soit $y \in G(\mathbb{A})$. Pour $T \in \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ assez régulier, on a

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^{G, T}(f^y) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_Q} \mathfrak{J}_{\mathfrak{Y}}^{M_Q, T}(f_{Q, y}^T(Z)).$$

Démonstration. — Elle est identique à celle de [LL, 11.2.1]. \square

PARTIE III : ANNEXES

A. Sur la séparabilité non algébrique

Dans cette annexe, F est un corps commutatif.

A.1. Algèbres séparables sur un corps. — Le corps $F^{\text{sép}}$ est par définition une clôture algébrique séparable de F . On a une notion plus générale de séparabilité, valable pour les extensions non algébriques de F (cf. [EGA-IV, 4.6]) :

DÉFINITION A.1.1. — Une F -algèbre (commutative) A est dite *séparable* si pour toute extension F'/F , l'anneau $A \otimes_F F'$ est réduit (c'est-à-dire sans élément nilpotent autre que 0). En d'autres termes, A est séparable si et seulement si le F -schéma affine $\text{Spec}(A)$ est géométriquement réduit⁽⁴⁷⁾.

On rappelle quelques faits connus :

- Une extension algébrique de F est séparable (au sens usuel) si et seulement si c'est une F -algèbre séparable. On peut donc sans ambiguïté parler d'extension séparable (algébrique ou non) du corps F .
- Les extensions purement transcendentes de F sont des F -algèbres séparables.
- Si A et B sont des F -algèbres séparables, alors $A \otimes_F B$ l'est aussi.
- Si F est de caractéristique nulle, une F -algèbre est séparable si et seulement si elle est réduite.

Pour F de caractéristique quelconque, on a la caractérisation suivante :

PROPOSITION A.1.2. — Une F -algèbre A est séparable si et seulement elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) l'anneau $A \otimes_F F^{\text{rad}}$ est réduit ;
- (ii) pour toute extension radicielle finie F'/F , l'anneau $A \otimes_F F'$ est réduit ;

⁽⁴⁷⁾ Observons que si de plus A est intègre, le fait que la F -algèbre A soit séparable ne signifie pas que le F -schéma $\text{Spec}(A)$ soit géométriquement intègre ; il l'est s'il est à la fois géométriquement réduit et géométriquement irréductible.

(iii) l'anneau A est réduit et pour tout idéal premier minimal \mathfrak{p} de A , le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est une extension séparable de F .

Pour les extensions de corps, on a aussi :

PROPOSITION A.1.3. — Soit une extension Ω/F tel que le corps Ω soit parfait. Une sous-extension F'/F de Ω/F est séparable si et seulement elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) F' et F^{rad} sont linéairement disjointes sur F ;
- (ii) F' est linéairement disjointe de toute sous-extension radicielle de Ω/F .

COROLLAIRE A.1.4. — Soit F'/F une extension séparable (algébrique ou non). La F' -algèbre $F' \otimes_F F^{\text{rad}}$ est un corps. Si de plus F'/F est une sous-extension de \overline{F}/F , alors $F' \otimes_F F^{\text{rad}}$ est la clôture radicielle de F' dans \overline{F} .

REMARQUE A.1.5. — Soit F un corps global. Il est bien connu que pour toute place v de F , le complété F_v de F en v est une F -algèbre séparable. Si F est un corps de nombres, c'est immédiat (A.1.3). En général, il suffit de voir que pour toute sous-extension finie F'/F de \overline{F}/F , l'anneau $F'_v = F_v \otimes_F F'$ est isomorphe à un produit de corps $\prod_{w|v} F'_w$; c'est même un corps si $F' \subset F^{\text{rad}}$ car dans ce cas il y a une unique place w de F' au-dessus de v . D'où le résultat d'après le critère A.1.2 (ii). On en déduit aussi que la F -algèbre $F_v \otimes_F F^{\text{rad}}$ est un corps (A.1.4). Observons que le degré de transcendance de F_v/F est infini, et même non dénombrable (sinon F_v lui-même serait dénombrable).

A.2. Descente séparable non algébrique. — On s'intéresse ici à la descente des variétés relativement à une extension séparable non algébrique F'/F . Soit

$$\text{Aut}_F(F')$$

le groupe des automorphismes du corps F' qui fixent F . On note $F'^{\text{Aut}_F(F')}$ le sous-corps de F' formé des éléments fixés par $\text{Aut}_F(F')$. On a bien sûr toujours l'inclusion

$$F \subset F'^{\text{Aut}_F(F')}.$$

Si $F' = F'^{\text{sép}}$ et $F'^{\text{Aut}_F(F')} = F$, le « critère galoisien » 2.1.1 est encore vrai ici⁽⁴⁸⁾ :

PROPOSITION A.2.1. — Soit F'/F une extension séparable. On suppose que $F' = F'^{\text{sép}}$ et $F'^{\text{Aut}_F(F')} = F$. Soit V une F -variété et soit X une sous-variété fermée de V . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est définie sur F ;
- (ii) X est définie sur F' et $X(F')$ est $\text{Aut}_F(F')$ -stable ;
- (iii) il existe un sous-ensemble $\text{Aut}_F(F')$ -stable de $X(F') = X \cap V(F')$ qui soit Zariski-dense dans $X(\overline{F}')$.

Démonstration. — Elle est identique à celle de 2.1.1 (cf. [B, ch. AG, 14.1-14.4]), compte-tenu de la densité de $V(F')$ dans $V(\overline{F}')$. \square

⁽⁴⁸⁾Observons que dans la terminologie d'Artin, une extension de corps F'/F est *galoisienne* si le sous-corps des points fixes $F'^{\text{Aut}_F(F')} \subset F'$ est égal à F .

Sous les hypothèses de A.2.1, on obtient comme dans le cas galoisien un foncteur pleinement fidèle

$$(1) \quad V \mapsto (V_{F'}, \text{Aut}_F(F')\text{-ensemble } V(F')).$$

REMARQUE A.2.2. —

- (i) Soit \mathfrak{B} une base de transcendance de F'/F . L'extension $F'/F(\mathfrak{B})$ est algébrique séparable et même galoisienne puisque $F' = F'^{\text{sép}}$; de plus $F'^{\text{Gal}(F'/F(\mathfrak{B}))} = F(\mathfrak{B})$ et

$$F'^{\text{Aut}_F(F')} = F \quad \text{si et seulement si} \quad F(\mathfrak{B})^{\text{Aut}_F(F(\mathfrak{B}))} = F.$$

Cette condition est toujours réalisée si F'/F est de degré de transcendance infini, c'est-à-dire si la base \mathfrak{B} est infinie. Dans le cas contraire, elle peut ne pas l'être (voir (ii)).

- (ii) Prenons pour F' une clôture séparable algébrique $F(t)^{\text{sép}}$ de l'extension purement transcendante $F(t)$ de F . On a $F'^{\text{Aut}_F(F')} = F(t)^\Omega$ avec $\Omega = \text{Aut}_F(F(t))$. Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, F)$, notons σ_g le F -automorphisme de $F(t)$ défini par l'homographie $\sigma_g(t) = (at + b)(ct + d)^{-1}$. L'application $g \mapsto \sigma_g$ se quotiente est un isomorphisme de $\text{PGL}_2(F)$ sur Ω . On a $F(t)^\Omega = F$ si et seulement si le corps F est infini. Si $F = \mathbb{F}_q$ et $\alpha \in F(t)^\Omega \setminus F$, l'automorphisme $x \mapsto \alpha x$ de la droite affine est Ω -équivant mais il n'est certainement pas défini sur F !
- (iii) Supposons $F = F'^{\text{sép}}$. On prouve facilement qu'un F -schéma intègre de type fini a au plus un F -modèle. Soit $F'' = F(\mathfrak{B})$ pour une base de transcendance \mathfrak{B} de F'/F . Pour décrire l'image du foncteur A.2 (1), il suffit de décrire celle du foncteur 2.1 (1) pour $F = F''$ (c'est-à-dire le foncteur qui à une F'' -variété W associe la F' ($= F''^{\text{sép}}$)-variété $W_{F'}$) et celle du foncteur

$$V \mapsto V_{F''}.$$

En reprenant les arguments de [Der], on prouve que si \mathfrak{B} est infini, pour qu'un F -schéma intègre de type V'' admette un F -modèle, il faut et il suffit que pour tout $\sigma \in \text{Aut}_F(F'')$, le F'' -schéma conjugué ${}^\sigma V$ soit isomorphe à V .

B. Sur la c - F -topologie

Dans cette annexe, les hypothèses sont celles de 2.3 : F est un corps commutatif d'exposant caractéristique $p \geq 1$, G est un groupe réductif connexe défini sur F et V est une G -variété affine elle aussi définie sur F .

Pour une sous-variété fermée \mathcal{Q} de V de G définie sur F , on a défini en 2.3 le sous-ensemble ${}_F\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q}) \subset V$ des éléments qui sont (F, G, \mathcal{Q}) -instables (2.3.1). Pour $v \in {}_F\mathcal{N}^G(V, \mathcal{Q})$, on a une théorie de l'optimalité pour les co-caractères $\lambda \in \check{X}_F(G)$ tels que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v$ existe et appartienne à \mathcal{Q} (2.3.6). Cela s'applique en particulier au cas où \mathcal{Q} est une G -orbite fermée dans V (e.g. $\mathcal{Q} = \{e_V\}$ si (V, e_V) est une G -variété pointée définie sur F avec $e_V \in V(F)$). Pour $v \in V$ tel que l'unique G -orbite fermée \mathcal{F}_v dans $\bar{\mathcal{O}}_v$ ne soit pas définie sur F , on n'a *a priori* pas de théorie de l'optimalité. La c - F -topologie introduite dans [BHMR] permet cependant de prouver

des résultats (cf. B.1). On applique en B.2 ces résultats au cas où V est un G espace tordu \tilde{G} tel que $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$, muni de l'action de G par conjugaison ; c'est-à-dire dans le cadre de la formule des traces tordue.

B.1. La topologie donnée par les co-caractères rationnels. — Dans cette sous-section, on reprend les notions et les résultats de [BHMR].

DÉFINITION B.1.1. — Soit X un sous-ensemble de V (on ne demande pas que X soit contenu dans $V(F)$, ni que $G(F) \cdot X = X$).

- (i) On dit que X est *c-F-G-fermé* ou simplement *c-F-fermé* (dans V) si pour tout $v \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda_{F,v}$, la limite $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ est dans X .
- (ii) On appelle *c-F-G-fermeture* ou simplement *c-F-fermeture* de X (dans V) le plus petit sous-ensemble X' de V tel que $X \subset X'$ et X' soit *c-F-fermé* ; on le note $\overline{X}^{(c-F)} = \overline{X}^{(c-F-G)}$.

Les sous-ensembles *c-F-fermés* forment les parties fermées d'une topologie sur V :

- une intersection quelconque de sous-ensembles *c-F-fermés* est *c-F-fermée* ;
- une réunion quelconque de sous-ensembles *c-F-fermés* est *c-F-fermée* ;
- l'ensemble vide et l'ensemble V tout entier sont *c-F-fermés*.

Observons que si G opère trivialement sur V , alors la *c-F-topologie* sur V est la topologie discrète. Un sous-ensemble G -invariant (Zariski-)fermé de V est *c-F-fermé*.

REMARQUE B.1.2. — Soit $v \in V$.

- (i) La $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,v} = \{g \cdot v \mid g \in G(F)\}$ est *c-F-fermée* si et seulement si pour tout $\lambda \in \check{X}_F(G)$ tel que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v$ existe, cette limite est dans $\mathcal{O}_{F,v}$.
- (ii) Si $F = \overline{F}$, d'après le critère de Hilbert-Mumford, la G -orbite $\mathcal{O}_v = \{g \cdot v \mid g \in G\}$ est fermée (dans V) si et seulement si elle est *c-F-fermée*.
- (iii) Si F est parfait et $v \in V(F)$, on a aussi (d'après 2.3.4) : la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,v}$ est *c-F-fermée* si et seulement si la G -orbite \mathcal{O}_v est fermée. Cela n'est plus vrai en général si F n'est pas parfait : la $\mathrm{GL}_p(F)$ -orbite de l'élément γ de l'exemple 2.2.11 est *c-F-fermée* mais sa GL_p -orbite n'est pas fermée ; ou, ce qui revient au même, sa $\mathrm{GL}_p(F^{\mathrm{rad}})$ -orbite n'est pas *c-F^{rad}-fermée*.

On peut munir $V(F)$ de la topologie induite par n'importe quelle topologie sur V ; en particulier la topologie de Zariski ou la *c-F-topologie*. Commençons par deux lemmes très simple :

LEMME B.1.3. — Soient H un sous-groupe fermé de G défini sur F et Ω un sous-ensemble $H(F)$ -invariant et (Zariski-)fermé de $V(F)$. La fermeture $\overline{\Omega}$ de Ω dans V est une sous-variété fermée de V , définie sur F et telle que $\overline{\Omega}(F) = \Omega$. Si de plus $H(F)$ est dense dans H (e.g. si H est réductif connexe et F est infin [B, ch. V, 18.3]), alors $H \cdot \overline{\Omega} = \overline{\Omega}$.

Démonstration. — La variété $\overline{\Omega}$ est fermée (par définition) et définie sur F d'après le critère galoisien 2.1.1 (iii) ; et puisque Ω est fermé dans $V(F)$ et contenu dans $V(F) \cap \overline{\Omega} = \overline{\Omega}(F)$, on a l'égalité $\Omega = \overline{\Omega}(F)$. Notons X la fermeture de $H \cdot \overline{\Omega}$ dans V . C'est une sous-variété fermée de V , définie sur F^{rad} (à nouveau d'après le critère

galoisien) et H -invariante. Le morphisme produit $\alpha : H \times \overline{\Omega} \rightarrow X$ est dominant et défini sur F . Si $H(F)$ est dense dans H , alors $\alpha(H(F) \times \Omega)$ est dense dans $\overline{\text{Im}(\alpha)} = X$. Or $\alpha(H(F) \times \Omega) = \Omega$, par conséquent $\overline{\Omega} = X$, ce qui prouve que $H \cdot \overline{\Omega} = \overline{\Omega}$. \square

LEMME B.1.4. — *Supposons le corps F infini. Si $X \subset V(F)$ est un sous-ensemble $G(F)$ -invariant et (Zariski-)fermé dans $V(F)$, alors il est c - F -fermé dans V .*

Démonstration. — Soit \overline{X} la fermeture de Zariski de X dans V . D'après B.1.3, c'est une sous-variété fermée de V , définie sur F et G -invariante, telle $\overline{X}(F) = X$. Si $v \in X$ et $\lambda \in \Lambda_{F,v}$, l'image du F -morphisme $\phi_{\lambda,v} : \mathbb{G}_m \rightarrow V$ est contenue dans \overline{X} , par conséquent il se prolonge (de manière unique) en un F -morphisme $\phi_{\lambda,v}^+ : \mathbb{G}_a \rightarrow \overline{X}$. Donc $\phi_{\lambda,v}^+(0) \in \overline{X}(F) = X$. \square

Pour $v \in V$, la c - F -fermeture $\overline{X}^{(c-F)}$ de la $G(F)$ -orbite $X = \mathcal{O}_{F,v}$ est réunion de $G(F)$ -orbites dont les points s'obtiennent tous à partir de $\mathcal{O}_{F,v}$ par limites successibles à l'aide de co-caractères F -rationnels de G [BHMR, lemma 3.3 (i)]. En particulier si $v \in V(F)$, la c - F -fermeture $\overline{X}^{(c-F)}$ de $X = \mathcal{O}_{F,v}$ est contenue dans $V(F)$. On a donné en 2.3.6 une version rationnelle du critère de Hilbert-Mumford. Le résultat suivant [BHMR, theo. 4.3] est une autre version rationnelle du même critère.

THÉORÈME B.1.5. — *Soit $v \in V$. Soit $\overline{X}^{(c-F)}$ la c - F -fermeture de $X = \mathcal{O}_{F,v}$.*

- (i) *Il existe une unique $G(F)$ -orbite c - F -fermée dans V qui soit contenue dans $\overline{X}^{(c-F)}$; on la note $\mathcal{F}_{F,v}$.*
- (ii) *Si $v' \in \overline{X}^{(c-F)}$, alors $\mathcal{F}_{F,v'} = \mathcal{F}_{F,v}$.*
- (iii) *Il existe un $\lambda \in \Lambda_{F,v}$ tel que la limite $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ soit dans $\mathcal{F}_{F,v}$.*

D'après [BHMR, cor. 4.5], on a le

COROLLAIRE B.1.6. — *Pour $v' \in \overline{X}^{(c-F)}$, il existe un $\lambda' \in \Lambda_{F,v}$ tel que la limite $\phi_{F,v'}^+(0)$ soit dans la c - F -fermeture $\overline{X}'^{(c-F)}$ de la $G(F)$ -orbite $X' = \mathcal{O}_{F,v'}$.*

REMARQUE B.1.7. — *Soit $v \in V(F)$.*

- (i) La $G(F)$ -orbite c - F -fermée $\mathcal{F}_{F,v}$ est contenue dans $V(F)$. Supposons de plus qu'elle rencontre la G -orbite fermée \mathcal{F}_v , c'est-à-dire que $\mathcal{F}_{F,v} \cap \mathcal{F}_v \neq \emptyset$. Alors on a l'inclusion $\mathcal{F}_{F,v} \subset \mathcal{F}_v(F)$ et d'après B.1.5 (iii), v est (F, G, \mathcal{F}_v) -instable. D'après 2.3.6, l'ensemble $\Lambda_{F,\mathcal{F}_v,v}^{\text{opt}}$ est non vide et pour tout $\lambda \in \Lambda_{F,v}^{\text{opt}}$, la limite $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ est dans $\mathcal{F}_{F,v}$.
- (ii) Le théorème 2.3.6 est une généralisation partielle du théorème de Kempf (2.2.5). Pour avoir une généralisation complète, il faudrait savoir traiter le cas où la $G(F)$ -orbite c - F -fermée $\mathcal{F}_{F,v}$ ne rencontre pas la G -orbite fermée \mathcal{F}_v . Dans ce cas, le problème suivant reste ouvert : existe-t-il un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,v}$ tel que $\phi_{v,\lambda}^+(0)$ appartienne à $\mathcal{F}_{F,v}$ et $\phi_{v,\lambda}(t)$ tende vers $\mathcal{F}_{F,v}$ (quand t tend vers 0) « plus vite » que pour tout autre co-caractère $\lambda' \in \Lambda_{F,v}$?
- (iii) Supposons que F soit un corps commutatif *topologique* (séparé, non discret) et munissons $V(F)$ et $G(F)$ de la topologie définie par F (notée Top_F , cf. 2.8). Si la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,v}$ est Top_F -fermée dans $G(F)$, alors elle est c - F -fermée

dans V . La réciproque est-elle vraie en général? Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n$ opère sur $V = G$ par conjugaison, la réponse est oui. En effet dans ce cas, les $G(F)$ -orbites (de $G(F)$) qui sont Top_F -fermées dans $G(F)$ sont celles dont le polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles sur F deux-à-deux distincts (ce sont les classes de conjugaison *semi-simples* au sens de Bourbaki, les classes de conjugaison *absolument semi-simples* étant celles dont le polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles *séparables* deux-à-deux distincts). D'après [BHMR, prop. 10.1], les $G(F)$ -orbites qui sont Top_F -fermées dans $G(F)$ sont exactement celles qui sont c - F -fermées dans G (voir aussi B.2).

B.2. Application aux $G(F)$ -orbites dans $\tilde{G}(F)$. — On considère ici le cas où V est un G -espace tordu \tilde{G} défini sur F avec $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$, muni de l'action de G par conjugaison :

$$g \cdot \gamma = \mathrm{Int}_g(\gamma) \quad \text{pour tout } (g, \gamma) \in G \times \tilde{G}.$$

Rappelons que pour $\gamma \in \tilde{G}$, on a noté Λ_γ , resp. $\Lambda_{F, \gamma}$, l'ensemble des $\lambda \in \check{X}(G)$, resp. $\lambda \in \check{X}_F(G)$ tels que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \mathrm{Int}_{t^\lambda}(\gamma)$ existe ; on note alors γ_λ cette limite⁽⁴⁹⁾.

Pour $\lambda \in \check{X}(G)$, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\lambda &= \{\gamma \in \tilde{G} \mid \lambda \in \Lambda_\gamma\}, \\ \tilde{M}_\lambda &= \{\gamma \in \tilde{G} \mid \mathrm{Int}_\gamma \circ \lambda = \lambda\}. \end{aligned}$$

Rappelons la définition de *sous-espace parabolique* de \tilde{G} [LW, 2.7]. Pour un sous-groupe parabolique P de G , on note \tilde{P} le normalisateur de P dans \tilde{G} . Si \tilde{P} est non vide, on dit que c'est un *sous-espace parabolique* de \tilde{G} et on appelle *composante de Levi* de \tilde{P} le normalisateur \tilde{M} dans \tilde{P} d'une composante de Levi M de P . On a alors la décomposition de Levi

$$\tilde{P} = \tilde{M} \ltimes U_P.$$

Si P est défini sur F , alors \tilde{P} l'est aussi et puisque par hypothèse $\tilde{G}(F)$ est non vide, la condition $\tilde{P} \neq \emptyset$ entraîne $\tilde{P}(F) \neq \emptyset$.

LEMME B.2.1. — Soit $\lambda \in \check{X}(G)$. On suppose que l'ensemble \tilde{P}_λ n'est pas vide.

- (i) \tilde{P}_λ est un sous-espace parabolique de \tilde{G} ; c'est le normalisateur de P_λ dans \tilde{G} .
- (ii) \tilde{M}_λ est une composante de Levi de \tilde{P}_λ ; c'est le normalisateur de M_λ dans \tilde{P}_λ .
- (iii) Le co-caractère λ est à valeurs dans le centre $Z_{\tilde{M}_\lambda} = Z_{M_\lambda}^\theta$ de \tilde{M}_λ , c'est-à-dire le fixateur dans Z_{M_λ} de l'automorphisme $\theta = \theta_{\tilde{M}_\lambda}$ de Z_{M_λ} défini par \tilde{M}_λ .
- (iv) Pour $\gamma \in \tilde{P}_\lambda$, en écrivant $\gamma = \delta u$ avec $\delta \in \tilde{M}_\lambda$ et $u \in U_\lambda$, on a $\gamma_\lambda = \delta$.

Démonstration. — Soit un élément $\gamma \in \tilde{P}_\lambda$. Pour $g \in G$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathrm{Int}_{t^\lambda}(g\gamma) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \mathrm{Int}_{t^\lambda}(g) \right) \gamma_\lambda,$$

⁽⁴⁹⁾Précédemment notée $\phi_{\gamma, \lambda}^+(0)$.

par conséquent $g\gamma \in \tilde{P}_\lambda$ si et seulement si $g \in P_\lambda$. De la même manière on a $\gamma g \in \tilde{P}_\lambda$ si et seulement si $g \in P_\lambda$. Puisque $\gamma g = \text{Int}_\gamma(g)\gamma$, on en déduit que \tilde{P}_λ est le normalisateur de P_λ dans \tilde{G} . Cela prouve (i).

Notons \tilde{M} le normalisateur de M_λ dans \tilde{P} (c'est une composante de Levi de \tilde{P}_λ). Puisque l'ensemble \tilde{P}_λ est Zariski-fermé, la limite $\gamma_\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(\gamma)$ est dans \tilde{P}_λ . Cette limite se calcule comme suit : écrivons $\gamma = \delta u$ avec $\delta \in \tilde{M}$ et $u \in U_P$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(u) = 1$, on a

$$\gamma_\lambda = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \text{Int}_{t^\lambda}(\delta) \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{\lambda'} \right) \delta \quad \text{avec} \quad \lambda' = (1 - \theta) \circ \lambda$$

où $\theta = \theta_{\tilde{M}}$ est l'automorphisme de Z_{M_λ} défini par \tilde{M} . Or la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\lambda'}$ existe si et seulement si $\lambda' = 1$. On a donc $\theta \circ \lambda = \lambda$. Par conséquent $\tilde{M} = M_\lambda \delta = \delta M_\lambda$ est contenu dans le stabilisateur \tilde{M}_λ de λ dans \tilde{G} . En particulier l'ensemble \tilde{M}_λ est non vide et comme par définition c'est un M_λ -espace tordu, l'inclusion $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\lambda$ entraîne l'égalité $\tilde{M} = \tilde{M}_\lambda$. Cela prouve (ii), (iii) et (iv). \square

Si M est un groupe réductif connexe défini sur F , on a noté A_M le sous-tore F -déployé maximal de Z_M . Si \tilde{M} est un M -espace tordu défini sur F tel que $\tilde{M}(F) \neq \emptyset$, on note $A_{\tilde{M}}$ le sous-tore θ -invariant maximal de A_M , c'est-à-dire la composante neutre du sous-groupe des points fixes $A_M^\theta \subset A_M$; où $\theta = \theta_{\tilde{M}}$ est le F -automorphisme de Z_M défini par \tilde{M} . Pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$, d'après B.2.1 (iii) on a

$$\tilde{P}_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in \check{X}(A_{\tilde{M}_\lambda}).$$

LEMME B.2.2. — *Soit \tilde{P} est un sous-espace parabolique de \tilde{G} et soit \tilde{M} une composante de Levi de \tilde{P} , tous deux définis sur F . Il existe un co-caractère $\lambda \in \check{X}(A_{\tilde{M}})$ tel que $\tilde{P}_\lambda = \tilde{P}$ et $\tilde{M}_\lambda = \tilde{M}$.*

Démonstration. — On fixe une paire parabolique définie sur F minimale (P_0, A_0) de G qui soit θ_0 -invariante, où $\theta_0 = \text{Int}_{\delta_0}$ avec $\delta_0 \in \tilde{G}(F)$. Quitte à remplacer \tilde{P} et \tilde{M} par $\text{Int}_g(\tilde{P})$ et $\text{Int}_g(\tilde{M})$ pour un $g \in G(F)$, on peut supposer que $\tilde{P} = P\delta_0$ avec $P \supset P_0$ et $\tilde{M} = M\delta_0$ avec $A_M \subset A_0$. Notons $A'_0 \subset A_0$ la composante neutre de $A_0 \cap G_{\text{der}}$ et A''_0 le tore F -déployé de groupe des caractères $X(A'_0) = \mathbb{Z}[\Delta_0]$. L'inclusion $X(A''_0) \subset X(A'_0)$ correspond à un morphisme surjectif de tores $\phi : A'_0 \rightarrow A''_0$. L'action de θ_0 sur Δ_0 induit une action sur A''_0 qui rend ce morphisme θ_0 -équivariant. Choisissons un co-caractère $\mu \in \check{X}(A''_0)$ tel que

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mu \rangle = 0 & \text{si } \alpha \in \Delta_0^M \\ \langle \alpha, \mu \rangle = \langle \theta_0(\alpha), \mu \rangle > 0 & \text{si } \alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^M \end{cases} .$$

Le groupe $X(A''_0)$ est d'indice fini dans $X(A'_0)$. Il induit donc dualement un morphisme injectif $\check{X}(A'_0) \rightarrow \check{X}(A''_0)$ qui fait de $\check{X}(A'_0)$ un sous-groupe d'indice fini de $\check{X}(A''_0)$. En conséquence il existe un entier $m > 0$ tel que le co-caractère $\lambda = m\mu$ appartienne à $\check{X}(A'_0)$. Par construction on a $P_\lambda = P$, $M_\lambda = M$ et $\theta_0 \circ \lambda = \lambda$. Cela démontre le lemme. \square

Pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, on pose

$$\Lambda'_{F,\gamma} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \Lambda_\gamma \cap (\check{X}_F(G) \setminus \check{X}(A_G)) \subset \Lambda_{F,\gamma} \setminus \{0\}.$$

LEMME B.2.3. — *Un élément $\gamma \in \tilde{G}(F)$ est primitif (au sens où il n'appartient à aucun sous-espace parabolique propre de $\tilde{G}(F)$) si et seulement si $\Lambda'_{F,\gamma} = \emptyset$.*

Démonstration. — Si $\lambda \in \Lambda'_{F,\gamma}$, puisque γ appartient à $\tilde{P}_\lambda(F)$, γ n'est pas primitif. Réciproquement, si γ n'est pas primitif alors il existe un sous-espace parabolique propre \tilde{P} de \tilde{G} défini sur F tel que $\gamma \in \tilde{P}(F)$. Choisissons une composante de Levi \tilde{M} de \tilde{P} définie sur F . D'après B.2.2, il existe un co-caractère $\lambda \in \check{X}(A_{\tilde{M}})$ tel que $\tilde{P}_\lambda = \tilde{P}$ et $\tilde{M}_\lambda = \tilde{M}$. En écrivant $\gamma = \delta u$ avec $\delta \in \tilde{M}(F)$ et $u \in U_P(F)$, on a $\gamma_\lambda = \delta$. Par conséquent λ appartient à $\Lambda_{F,\gamma}$ et même à $\Lambda'_{F,\gamma}$ puisque $P_\lambda = P$ est propre. \square

Pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, on note $\mathcal{O}_{F,\gamma}$ la $G(F)$ -orbite de γ :

$$\mathcal{O}_{F,\gamma} = \{\text{Int}_g(\gamma) \mid g \in G(F)\}.$$

D'après B.1.5, la c - F -fermeture de $\mathcal{O}_{F,\gamma}$ contient une unique $G(F)$ -orbite c - F -fermée, notée $\mathcal{F}_{F,\gamma}$, et il existe un co-caractère $\lambda \in \Lambda_{F,\gamma}$ tel que la limite γ_λ soit dans $\mathcal{F}_{F,\gamma}$. Si de plus $\mathcal{F}_{F,\gamma}$ rencontre l'unique orbite Zariski-fermée \mathcal{F}_γ contenue dans la fermeture de Zariski de la G -orbite $\mathcal{O}_\gamma = \{\text{Int}_g(\gamma) \mid g \in G\}$, alors d'après B.1.7 (i), on peut choisir λ dans $\Lambda_{F,\mathcal{F}_\gamma,\gamma}^{\text{opt}}$.

Soit $\mathfrak{o} = [\tilde{M}, \delta]$ une classe de $G(F)$ -conjugaison de paires primitives dans $\tilde{G}(F)$. À cette classe \mathfrak{o} est associé un sous-ensemble $G(F)$ -invariant $\mathcal{O}_\mathfrak{o}$ de $\tilde{G}(F)$:

$$\mathcal{O}_\mathfrak{o} = \bigcup_{\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M})} \bigcup_{u \in U_Q(F)} \mathcal{O}_{F,\delta u}.$$

Rappelons que $\tilde{G}(F)$ est l'union disjointe des $\mathcal{O}_\mathfrak{o}$ pour \mathfrak{o} parcourant l'ensemble \mathfrak{D} des classes de $G(F)$ -conjugaison de paires primitives dans \tilde{G} . Pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, notons $\mathfrak{o}(\gamma)$ l'unique élément de \mathfrak{D} tel que $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}(\gamma)}$. Il est défini comme suit [LL, 3.3.1] :

- on choisit un $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{O}_{F,\gamma} \cap \tilde{P}(F) \neq \emptyset$ et \tilde{P} soit minimal pour cette propriété ;
- on choisit une composante de Levi \tilde{M} de \tilde{P} définie sur F et un élément $g \in \tilde{G}(F)$ tel que $g\gamma g^{-1} \in \tilde{P}(F)$;
- on écrit $g\gamma g^{-1} = \delta u$ avec $\delta \in \tilde{M}(F)$ et $u \in U_P(F)$;

alors $\mathfrak{o}(\gamma) = [\tilde{M}, \delta]$.

REMARQUE B.2.4. — D'après la preuve de [LL, 3.3.1], on a la caractérisation équivalente suivante de $\mathfrak{o}(\gamma)$:

- on choisit un $\tilde{P}_1 \in \tilde{\mathcal{P}}$ tel que $\gamma \in \tilde{P}_1(F)$ et \tilde{P}_1 soit minimal pour cette propriété ;
- on choisit une composante de Levi \tilde{M}_1 de \tilde{P}_1 définie sur F ;
- on écrit $\gamma = \delta_1 u_1$ avec $\delta_1 \in \tilde{M}_1(F)$ et $u_1 \in U_{P_1}(F)$;

alors $\mathfrak{o}(\gamma) = [\tilde{M}_1, \delta_1]$.

LEMME B.2.5. — Soit $\mathfrak{o} = [\widetilde{M}, \delta] \in \mathfrak{D}$.

- (i) $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} = \{\gamma \in \widetilde{G}(F) \mid \text{il existe un } \lambda \in \Lambda_{F,\gamma} \text{ tel que } \gamma_{\lambda} \in \mathcal{O}_{F,\delta}\}$.
- (ii) L'ensemble $\mathcal{O}_{F,\delta}$ est l'unique $G(F)$ -orbite c - F -fermée contenue dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$.
- (iii) L'ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ est c - F -fermé.

Démonstration. — Prouvons (i). Notons $\mathcal{O}'_{\mathfrak{o}}$ l'ensemble des $\gamma \in \widetilde{G}(F)$ tels qu'il existe un $\lambda \in \Lambda_{F,\gamma}$ avec $\gamma_{\lambda} \in \mathcal{O}_{F,\delta}$.

Prouvons l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \subset \mathcal{O}'_{\mathfrak{o}}$. Soient $\widetilde{Q} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})$ et $\gamma = \text{Int}_g(\delta u)$ avec $u \in U_Q(F)$ et $g \in G(F)$. D'après B.2.2, il existe un $\mu \in \widetilde{X}(A_{\widetilde{M}})$ tel que $P_{\mu} = Q$ et $M_{\mu} = M$. Alors $\mu \in \Lambda_{F,\delta u}$ et $(\delta u)_{\mu} = \delta$. On en déduit que le co-caractère $\lambda = \text{Int}_g \circ \mu$ appartient à $\Lambda_{F,\gamma}$ et vérifie $\gamma_{\lambda} = \text{Int}_g(\delta)$. Par conséquent γ appartient à $\mathcal{O}'_{\mathfrak{o}}$.

Prouvons l'inclusion $\mathcal{O}'_{\mathfrak{o}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$. Soient $\gamma \in \widetilde{G}(F)$, $\lambda \in \Lambda_{F,\gamma}$ et $g \in G(F)$ tels que $\gamma_{\lambda} = \text{Int}_g(\delta)$. Quitte à remplacer γ par $\text{Int}_{g^{-1}}(\gamma)$ et λ par $\text{Int}_{g^{-1}} \circ \lambda$, on peut supposer que $\gamma_{\lambda} = \delta$. On a donc $\gamma = \delta u$ avec $\delta \in \widetilde{M}_{\lambda}(F)$ et $u \in U_{\lambda}(F)$. Soit \widetilde{Q}_1 un sous-espace parabolique de \widetilde{M}_{λ} défini sur F tel que $\delta \in \widetilde{Q}_1(F)$ et \widetilde{Q}_1 soit minimal pour cette propriété. Alors $\widetilde{P}_1 = \widetilde{Q}_1 U_{\lambda}$ est un sous-espace parabolique de \widetilde{G} défini sur F tel que $\delta \in \widetilde{P}_1(F)$ et \widetilde{P}_1 est minimal pour cette propriété. Soit \widetilde{M}_1 une composante de Levi de \widetilde{Q}_1 définie sur F ; c'est aussi une composante de Levi de \widetilde{P}_1 . Écrivons $\delta = \delta_1 u_1$ avec $\delta \in \widetilde{M}_1(F)$ et $u_1 \in U_{Q_1}(F)$ ($\subset U_{P_1}(F)$). D'après B.2.4, on a

$$[\widetilde{M}_1, \delta_1] = [\widetilde{M}, \delta].$$

Or $\gamma = \delta_1 u_1 u$ avec $u_1 u \in U_{P_1}(F)$, par conséquent γ appartient à $\mathcal{O}_{[\widetilde{M}_1, \delta_1]} = \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$.

Prouvons (ii). Puisque d'après (i), les $G(F)$ -orbites contenues dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \setminus \mathcal{O}_{F,\delta}$ ne sont pas c - F -fermées, il suffit de prouver que pour $\lambda \in \Lambda_{F,\delta}$, on a $\delta_{\lambda} \in \mathcal{O}_{F,\delta}$. Fixons un tel λ . Comme l'élément δ appartient à $\widetilde{M}_{\lambda}(F)$, il s'écrit $\delta = \delta' u'$ avec $\delta' \in \widetilde{M}_{\lambda}(F)$ et $u' \in U_{\lambda}(F)$; de plus on a $\delta' = \delta_{\lambda}$. Soit \widetilde{Q}'_1 un sous-espace parabolique de \widetilde{M}_{λ} défini sur F tel que $\delta' \in \widetilde{Q}'_1(F)$ et \widetilde{Q}'_1 soit minimal pour cette propriété. Soit \widetilde{M}'_1 une composante de Levi de \widetilde{Q}'_1 définie sur F . Écrivons $\delta' = \delta'_1 u'_1$ avec $\delta'_1 \in \widetilde{M}'_1(F)$ et $u'_1 \in U_{Q'_1}(F)$. D'après la preuve du point (i), on a

$$[\widetilde{M}'_1, \delta'_1] = [\widetilde{M}, \delta].$$

En posant $X = \mathcal{O}_{F,\delta}$ et $X' = \mathcal{O}_{F,\delta'}$, on a donc

$$X' \subset \overline{X}^{(c-F)} \quad \text{et} \quad X \subset \overline{X'}^{(c-F)};$$

ce qui n'est possible que si $X = X'$.

Prouvons (iii). Soit $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$. D'après (i) et (ii), on a $\mathcal{F}_{F,\gamma} = \mathcal{O}_{F,\delta}$. Soit $\lambda \in \Lambda_{F,\gamma}$ et posons $\gamma' = \gamma_{\lambda}$. Il s'agit de vérifier que γ' appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$. Soit $\mathfrak{o}(\gamma') = [\widetilde{M}', \delta']$. D'après (i), il existe un $\lambda' \in \Lambda_{F,\gamma'}$ tel que $\gamma_{\lambda'} \in \mathcal{O}_{F,\delta'}$. En particulier, la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,\delta'}$ est 2-accessible à partir de la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,\gamma}$ au sens de [BHMR, 3.2], ce qui entraîne [BHMR, 3.3 (i)] que la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,\delta'}$ est contenue dans la c - F -fermeture de $\mathcal{O}_{F,\gamma}$. On a donc

$$\mathcal{O}_{F,\delta'} = \mathcal{F}_{F,\gamma'} = \mathcal{F}_{F,\gamma} = \mathcal{O}_{F,\delta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{o}(\gamma') = \mathfrak{o} = \mathfrak{o}(\gamma).$$

Cela achève la démonstration du lemme. \square

C. Des F -strates aux F_S -strates

Dans cette annexe, F est un corps global d'exposant caractéristique $p \geq 1$, c'est-à-dire un corps de nombres ($p = 1$) ou un corps de fonctions ($p > 1$). On reprend dans cette section les hypothèses de 2.4 et 2.5 : (V, e_V) est une G -variété affine pointée définie sur F et $e_V \in V(F)$. Dans un premier temps, on ne suppose pas que e_V soit régulier dans V (hypothèse 2.4.20) ; on le supposera à partir de C.2.

C.1. Les F_S -strates, \mathbb{A} -strates, etc. — On note $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F . Pour une place v de F , on note F_v le complété de F en v . D'après le lemme de Krasner, les opérations de complétion et de clôture séparable commutent : le complété $(F^{\text{sép}})_w$ de $F^{\text{sép}}$ en une place w au-dessus de v est une clôture séparable $(F_v)^{\text{sép}}$ de F_v . À isomorphisme près, cette clôture séparable ne dépend pas du choix de la place w . On peut donc noter $F_v^{\text{sép}}$ ce corps $(F_v)^{\text{sép}} = (F^{\text{sép}})_w$. Le complété F_v de F en v est une F -algèbre séparable (A.1.5), par conséquent $F_v^{\text{sép}}$ est encore une F -algèbre séparable.

D'après 2.5.17, on a

$$\mathcal{N}_F = V(F) \cap \mathcal{N}_{F_v} = V(F) \cap \mathcal{N}_{F_v^{\text{sép}}}.$$

Pour éviter les conflits de notations, dans cette sous-section on notera x (au lieu de v) les éléments de V . Tout élément $x \in V(\mathbb{A})$ s'écrit $x = \prod_v x_v$ avec $v \in V(F_v)$, où v parcourt les places de F . On pose

$$\mathcal{N}_{\mathbb{A}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\prod_v \mathcal{N}_{F_v} \right) \cap V(\mathbb{A}).$$

¶ *Les F_S -lames et les F_S -strates de \mathcal{N}_{F_S} .* — Soit S un ensemble fini non vide de places de F . On pose

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v \quad \text{et} \quad F_S^{\text{sép}} = \prod_{v \in S} F_v^{\text{sép}}$$

Tout élément $x \in \mathcal{N}_{\mathbb{A}}$ définit un élément $x_S = \prod_{v \in S} x_v$ de

$$\mathcal{N}_{F_S} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v \in S} \mathcal{N}_{F_v}.$$

On définit la F_S -lame \mathcal{Y}_{F_S, x_S} et le sous-ensemble \mathcal{X}_{F_S, x_S} de \mathcal{N}_{F_S} par

$$\mathcal{Y}_{F_S, x_S} = \prod_{v \in S} \mathcal{Y}_{F_v, x_v} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{F_S, x_S} = \prod_{v \in S} \mathcal{X}_{F_v, x_v}.$$

On pose aussi

$$F_S P_{x_S} = \prod_{v \in S} F_v P_{x_v} \quad \text{et} \quad P_{F_S, x_S} = \prod_{v \in S} P_{F_v, x_v}.$$

On définit de la même manière la F_S -strate \mathfrak{Y}_{F_S, x_S} et le sous-ensemble \mathfrak{X}_{F_S, x_S} de \mathcal{N}_{F_S} . On a donc

$$\mathfrak{Y}_{F_S, x_S} = G(F_S) \cdot \mathcal{Y}_{F_S, x_S} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{F_S, x_S} = G(F_S) \cdot \mathcal{X}_{F_S, x_S}.$$

On note Top_{F_S} la topologie (forte) sur $V(F_S)$ définie par F_S (cf. 2.8). Puisque F_S est un produit (fini) de corps commutatifs localement compact, d'après 2.8 on a le

LEMME C.1.1. — *Soit $x_S \in \mathcal{N}_{F_S}$.*

- (i) \mathcal{X}_{F_S, x_S} et \mathfrak{X}_{F_S, x_S} sont fermés dans $G(F_S)$ pour Top_{F_S} .
- (ii) La F_S -lame \mathcal{Y}_{F_S, x_S} est ouverte dans \mathcal{X}_{F_S, x_S} pour Top_{F_S} .
- (iii) La F_S -strate \mathfrak{Y}_{F_S, x_S} est ouverte dans \mathfrak{X}_{F_S, x_S} pour Top_{F_S} .

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles \mathfrak{X}_{F_S, x_S} avec $x_S \in \mathcal{N}_{F_S}$, on obtient aussi (d'après C.1.1 (i)) que \mathcal{N}_{F_S} est fermé dans $G(F_S)$ pour Top_{F_S} .

L'ensemble \mathcal{N}_F est plongé diagonalement dans \mathcal{N}_{F_S} . Pour $x \in \mathcal{N}_F$, on peut donc définir comme ci-dessus la F_S -lame $\mathcal{Y}_{F_S, x}$ et la F_S -strate $\mathfrak{Y}_{F_S, x}$. Pour alléger l'écriture, on reprend ici les notations de 2.5.23 : pour une F -lame \mathcal{Y} de \mathcal{N}_F , on note \mathcal{Y}_{F_S} la F_S -lame de \mathcal{N}_{F_S} définie par $\mathcal{Y}_{F_S} = \prod_{v \in S} \mathcal{Y}_{F_v}$; et pour une F -strate de \mathfrak{Y} , on note \mathfrak{Y}_{F_S} la F_S -strate de \mathcal{N}_{F_S} définie par $\mathfrak{Y}_{F_S} = \prod_{v \in S} \mathfrak{Y}_{F_v}$. Pour $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{Y})$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y})$, on définit de la même manière les sous-ensembles \mathcal{X}_{F_S} et \mathfrak{X}_{F_S} de \mathcal{N}_{F_S} . D'après 2.5.18 et 2.3.11, on a les égalités

$$\mathcal{Y} = G(F) \cap \mathcal{Y}_{F_S} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y} = G(F) \cap \mathfrak{Y}_{F_S} ;$$

et on a aussi

$$\mathcal{X} = G(F) \cap \mathcal{X}_{F_S} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X} = G(F) \cap \mathfrak{X}_{F_S}$$

¶ Les \mathbb{A} -lames $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}}$ et les \mathbb{A} -strates $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}}$ de $\mathcal{N}_{\mathbb{A}}$ ⁽⁵⁰⁾. — L'ensemble \mathcal{N}_F est plongé diagonalement dans $\mathcal{N}_{\mathbb{A}}$. À toute F -lame \mathcal{Y} de \mathcal{N}_F , on associe la \mathbb{A} -lame de $\mathcal{N}_{\mathbb{A}}$ définie par

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{A}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\prod_v \mathcal{Y}_{F_v} \right) \cap G(\mathbb{A})$$

où v parcourt les places de F . À toute F -strate \mathfrak{Y} de \mathcal{N}_F , on associe de la même manière une \mathbb{A} -strate $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}}$ de $\mathcal{N}_{\mathbb{A}}$. Pour $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{Y})$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y})$, on définit toujours de la même manière les sous-ensembles $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}$ et $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}$ de $G(\mathbb{A})$. Comme pour les F_S -lames et les F_S -strates, on a les égalités

$$\mathcal{Y} = V(F) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_{\mathbb{A}} ;$$

et on a aussi

$$\mathcal{X} = V(F) \cap \mathcal{X}_{\mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X} = V(F) \cap \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}.$$

Observons que si $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{Y}$, alors on a

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{A}} = G(\mathbb{A}) \cdot \mathcal{Y}_{\mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{\mathbb{A}} = G(\mathbb{A}) \cdot \mathcal{X}_{\mathbb{A}}.$$

La décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = \mathbf{K}P_0(\mathbb{A})$ assure qu'on a l'analogie de C.1.1 pour la topologie adélique sur $G(\mathbb{A})$:

⁽⁵⁰⁾On peut définir des \mathbb{A} -lames et \mathbb{A} -strates plus générales mais nous n'en aurons pas besoin ici.

LEMME C.1.2. — Soit \mathcal{Y} une F -lame de \mathcal{N}_F . Posons $\mathfrak{Y} = G(F) \cdot \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{Y})$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y})$.

- (i) Les ensembles $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}$ et $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}$ sont fermés dans $G(\mathbb{A})$ pour la topologie adélique.
- (ii) La \mathbb{A} -lame $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}}$ est ouverte dans $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}$ pour la topologie adélique.
- (iii) La \mathbb{A} -strate $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}}$ est ouverte dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}$ pour la topologie adélique.

Pour un ensemble fini S de places de F , on note $\mathbb{A}^S = \prod'_{v \notin S} F_S$ l'anneau des adèles de F en dehors de S . On définit $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}^S}$, $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}^S}$, $\mathcal{X}_{\mathbb{A}^S}$ et $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}^S}$ comme ci-dessus, en remplaçant \mathbb{A} par \mathbb{A}^S . On a les décompositions

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathbb{A}} &= \mathcal{Y}_{F_S} \times \mathcal{Y}_{\mathbb{A}^S} & \text{et} & & \mathfrak{Y}_{\mathbb{A}} &= \mathfrak{Y}_{F_S} \times \mathfrak{Y}_{\mathbb{A}^S}, \\ \mathcal{X}_{\mathbb{A}} &= \mathcal{X}_{F_S} \times \mathcal{X}_{\mathbb{A}^S} & \text{et} & & \mathfrak{X}_{\mathbb{A}} &= \mathfrak{X}_{F_S} \times \mathfrak{X}_{\mathbb{A}^S}. \end{aligned}$$

Le lemme C.1.2 reste vrai si l'on remplace \mathbb{A} par \mathbb{A}^S .

C.2. Approximation faible. — On suppose dans cette sous-section que l'hypothèse 2.4.20 est vérifiée : e_V est régulier dans V .

Fixons un ensemble fini S de places de F . On peut se demander si une F -strate \mathcal{Y} de \mathcal{N}_F plongée diagonalement dans $V(F_S)$ est dense dans \mathcal{Y}_{F_S} pour Top_{F_S} ; on peut aussi se poser la même question pour une F -strate \mathfrak{Y} de \mathcal{N}_F . C'est le principe de l'*approximation faible*.

LEMME C.2.1. — Soit \mathcal{Y} une F -lame de \mathcal{N}_F . Posons $\mathfrak{Y} = G(F) \cdot \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{Y})$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y}) (= G(F) \cdot \mathcal{X})$.

- (i) La F -lame \mathcal{Y} est dense dans \mathcal{Y}_{F_S} pour Top_{F_S} .
- (ii) L'ensemble $G(F_S) \cdot \mathfrak{Y} = G(F_S) \cdot \mathcal{Y}$ est dense dans \mathfrak{Y}_{F_S} pour Top_{F_S} .
- (iii) Si pour tout $y_S \in \mathfrak{Y}_{F_S}$, la $G(F_S)$ -orbite \mathcal{O}_{F_S, y_S} est ouverte dans \mathfrak{Y}_{F_S} pour Top_{F_S} , alors on a l'égalité $\mathfrak{Y}_{F_S} = G(F_S) \cdot \mathfrak{Y} (= G(F_S) \cdot \mathcal{Y})$.

Démonstration. — On peut supposer $\mathcal{Y} \neq \{e_V\}$ (sinon il n'y a rien à démontrer). Fixons un co-caractère virtuel $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F, x}$ avec $x \in \mathcal{Y}$. D'après 2.3.11, pour toute place $v \in S$, μ appartient à $\mathbf{\Lambda}_{F_v, x}$. On a donc

$$\mathcal{X}_{F_S} = V_{\mu, 1}(F_S) \quad \text{et} \quad P_{F_S, x} = P_{\mu}(F_S).$$

Prouvons (i). Puisque la variété $V_{\mu, 1}$ est un F -espace affine [H2, 3.3], elle satisfait au principe d'approximation faible : $\mathcal{X} = V_{\mu, 1}(F)$ est dense dans $\mathcal{X}_{F_S} = V_{\mu, 1}(F_S)$ pour Top_{F_S} . Comme la F_S -lame \mathcal{Y}_{F_S} est ouverte dans \mathcal{X}_{F_S} pour Top_{F_S} (d'après C.1.1 (ii)), on en déduit que $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F_S} \cap \mathcal{X}$ est dense dans \mathcal{Y}_{F_S} .

Puisque $G(F_S) \cdot \mathcal{Y}_{F_S} = \mathfrak{Y}_{F_S}$, le point (ii) est une conséquence de (i).

Prouvons (iii). On suppose que les $G(F_S)$ -orbites dans \mathfrak{Y}_{F_S} sont ouvertes dans \mathfrak{Y}_{F_S} pour la topologie définie par F_S . Soit $y_S = \prod_{v \in S} y_v$ un élément dans \mathfrak{Y}_{F_S} . Quitte à remplacer y_S par $g \cdot y_S$ pour un $g \in G(F_S)$, on peut supposer que y_S appartient à la F_S -lame \mathcal{Y}_{F_S} . Pour toute place $v \in S$, le co-caractère virtuel μ appartient à $\mathbf{\Lambda}_{F_v, y_v}$. D'après 2.5.13, l'application naturelle

$$G(F_S) \times^{P_{\mu}(F_S)} \mathcal{X}_{F_S} \rightarrow \mathfrak{X}_{F_S}$$

induit une application bijective $G(F_S) \times^{P_\mu(F_S)} \mathcal{Y}_{F_S} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{F_S}$. Cette bijection est un homéomorphisme pour Top_{F_S} . On en déduit que la $P_\mu(F_S)$ -orbite de y_S est ouverte dans \mathcal{Y}_{F_S} pour Top_{F_S} . Puisque \mathcal{X} est dense dans \mathcal{X}_{F_S} pour Top_{F_S} , cela entraîne que la $P_\mu(F_S)$ -orbite de y_S intersecte non trivialement $\mathcal{Y}_{F_S} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Y}$. \square

REMARQUE C.2.2. — Puisque la variété $V_{\mu,1}$ satisfait aussi au principe d'approximation forte, on a des résultats analogues pour le plongement diagonal

$$\iota^S : V(F) \rightarrow V(\mathbb{A}^S)$$

et la topologie adélique, à savoir : l'ensemble $\iota^S(\mathcal{Y})$ est dense dans $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}^S}$ pour la topologie adélique et l'ensemble $G(\mathbb{A}^S) \cdot \iota^S(\mathfrak{Y}) = G(\mathbb{A}^S) \cdot \iota^S(\mathcal{Y})$ est dense dans $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}^S}$ pour la topologie adélique. De manière équivalente, on a : l'ensemble $\mathcal{Y}_{F_S} \times \iota^S(\mathcal{Y}_F)$ est dense dans $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}}$ et l'ensemble

$$G(\mathbb{A}) \cdot (\mathcal{Y}_{F_S} \times \iota^S(\mathcal{Y})) = \mathfrak{Y}_{F_S} \times (G(\mathbb{A}^S) \bullet \iota^S(\mathcal{Y}))$$

est dense dans $\mathfrak{Y}_{\mathbb{A}} = G(\mathbb{A}) \cdot \mathcal{Y}_{\mathbb{A}}$.

C.3. Le cas de la variété unipotente. — On suppose dans cette sous-section que la variété V est le groupe G lui-même muni de l'action par conjugaison. Rappelons qu'on a noté $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_F^G$ l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $G(F)$.

LEMME C.3.1. — *Si F est un corps de nombres ou un corps global de caractéristique $p > 1$ avec p très bon pour G , l'hypothèse de C.2.1 (iii) est toujours vérifiée : pour tout $u_S \in \mathfrak{U}_{F_S}$, la $G(F_S)$ -orbite de u_S est ouverte dans \mathfrak{Y}_{F_S, u_S} pour Top_{F_S} .*

Démonstration. — On peut supposer $S = \{v\}$. Soit $p \geq 1$ l'exposant caractéristique de F_v . Supposons que p soit très bon pour G . Pour tout $u_v \in \mathfrak{U}_{F_v}$, d'après 3.5.7 (i), on a $\mathfrak{Y}_{F_v, u_v} = \mathcal{O}_{u_v}(F_v)$. Comme d'autre part le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}_{u_v}$, $g \mapsto g \bullet u_v$ est séparable (3.5.4), il induit une application ouverte $G(F_v) \rightarrow \mathcal{O}_{u_v}(F_v)$ pour Top_{F_v} . Par suite l'application $G(F_v) \rightarrow \mathfrak{Y}_{F_v}$, $g_v \mapsto g_v \bullet u_v$ est ouverte pour Top_{F_v} . \square

REMARQUE C.3.2. —

- (i) Si F vérifie les hypothèses de C.3.1 et $u \in \mathfrak{Y}$, alors d'après C.2.1 (iii), toute $G(F_S)$ -orbite dans $\mathcal{O}_u(F_S) = \mathfrak{Y}_{F_S}$ rencontre $\mathcal{O}_u(F) = \mathfrak{Y}$; pour les corps de nombres, c'est le lemme 7.1 de [A2].
- (ii) Si $p > 1$ est suffisamment grand, toutes les orbites unipotentes sont séparables et l'on s'attend à ce que l'hypothèse de C.2.1 (iii) soit vérifiée. En revanche si $p > 1$ est petit, elle ne l'est en général pas. Prenons le cas du groupe $G = \text{SL}_2$ sur le corp global $F = \mathbb{F}_2(t)$ et considérons le complété $F_v = \mathbb{F}_2((t))$. D'après 3.8, l'ensemble \mathfrak{U}_{F_v} contient une unique F_v -strate non triviale et les $G(F_v)$ -orbites dans cette F_v -strate sont paramétrées par le groupe $F_v^\times / (F_v^\times)^2$ qui est compact mais de cardinal infini. Si l'hypothèse de C.2.1 (iii) était vérifiée, on aurait que l'image de F^\times dans $F_v^\times / (F_v^\times)^2$ est surjective ; ce qui est faux car F^\times est dénombrable alors que $F_v^\times / (F_v^\times)^2$ ne l'est pas. En effet, considérons une

unité x de F_v^\times , c'est-à-dire un élément inversible dans $\mathbb{F}_2[[t]]$:

$$x = 1 + \epsilon_1 t + \cdots + \epsilon_n t^n + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i t^i \quad \text{avec} \quad \epsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Les carrés dans $\mathbb{F}_2[[t]]$ sont de la forme $y = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i t^{2i}$ avec $\eta_i \in \{0, 1\}$. Par conséquent x s'écrit $x = y_1 + ty_2$ où y_1 est un carré dans $\mathbb{F}_2[[t]]^\times$ et y_2 est un carré dans $\mathbb{F}_2[[t]]$. Ainsi modulo les carrés dans F_v^\times , x a un unique représentant de la forme $1 + tz$ avec $z (= y_1^{-1}y_2)$ dans $\mathbb{F}_2[[t]]^2 \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Références

- [A1] ARTHUR A., *A trace formula for reductive groups I. Terms associated with conjugacy classes in $G(\mathbb{Q})$* , Duke Math. J. **45**, No. 4 (1975), pp. 911-952.
- [A2] ARTHUR A., *A measure on the unipotent variety*, Canad. J. Math. **37** (1985), pp. 1237-1274.
- [BHMR] BATE M., HERPEL S., MARTIN B., RÖHRLE G., *Cocharacter closure and the Hilbert-Mumford theorem*, Math. Zeitschrift **287** (2017), pp. 39-72.
- [BMRT] BATE M., MARTIN B., RÖHRLE G., TANGE R., *Closed orbits and uniform S -instability in geometric invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **365**, no. 7 (2013), pp. 3643-3673.
- [B] BOREL A., *Linear algebraic groups, second enlarged ed.*, Grad. texts in Math., vol. **126**, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [BT] BOREL A., TITS J., *Groupes réductifs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. Tome **27** (1965), pp. 55-151.
- [C] CHAUDOUARD P.-H., *Sur certaines contributions dans la formules des traces d'Arthur*, Amer. J. Math., **140** (2018), pp. 699-752.
- [CL] CHAUDOUARD P.-H., LAUMON G., *Sur le comptage des fibrés de Hitchin nilpotents*, J. Inst. Math. Jussieu, **15** (2016), pp. 91-164.
- [CP] CLARKE M., PREMÉT A., *The Hesselink stratification of nullcones and base change*, Invent. Math. **191** (2013), pp. 631-669.
- [Dem] DEMAZURE M., *Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), pp. 369-413.
- [Der] DEROME G., *Descente algébriquement close*, J. Algebra **266** (2003), pp. 418-426.
- [EGA-IV] GROTHENDIECK A., *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (seconde et quatrième partie)*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. Tome **24** (seconde partie), 1965 et Tome **32** (quatrième partie), 1967.
- [FL] FINIS T., LAPID E., *On the continuity of the geometric side of the trace formula*, Acta Mathematica Vietnamica, vol. **41** (2016), no. 3, pp. 425-455.
- [GMB] GILLE P., MORET-BAILLY L., *Fibrés principaux et adèles*, à paraître dans Annali della Scuola Superiore de Pisa (arXiv :2103.10076v2).
- [Ha] HABOUSH W., *Reductive groups are geometrically reductive*, Ann. Math. **102** (1975), pp. 67-83.
- [H1] HESSELINK W.H., *Uniform instability in reductive groups*, J. reine Angew Math. **303-304** (1978), pp. 74-96.
- [H2] HESSELINK W.H., *Desingularization of varieties of nullforms*, Invent. Math. **55** (1979), pp. 141-163.

- [Ho] HOFFMANN W., *The trace formula and prehomogeneous vector spaces* in Families of automorphic forms and the trace formula, W. Müller, Sug Woo Shin, N. Templier (eds), Simons Symposia, Springer Cham, 2016, pp. 175-215.
- [HW] HOFFMANN W., WAKATSUKI S., *On the geometric side of the Arthur trace formula for the symplectic group of rank 2*, Memoir AMS, Vol. **255**, Nr. 1224 (2018).
- [J] JANTZEN J.S., *Nilpotent orbits in representation theory*, Lie Theory, Progr. Math. **228**, Birkhäuser, 2004, pp. 1-211.
- [K1] KEMPF G., *Instability in invariant theory*, Ann. Math. (2) **108** (1978), pp. 299-316.
- [K2] KEMPF G., *Instability in invariant theory*, arXiv :1807.02890 (8 juillet 2018).
- [LL] LABESSE J.-P., LEMAIRE B., *La formule des traces tordue pour les corps de fonctions*, prépublication (<https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.02517>).
- [L] LEMAIRE B., *Une mesure de Radon invariante sur les F -strates unipotentes*, prépublication (<https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.07247>).
- [LW] LABESSE J.-P., WALDSPURGER J.-L., *La formule des traces tordue, d'après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph Series **31**, Amer. Math. Soc., 2013.
- [L1] LUSZTIG G., *On the finiteness of the number of unipotent conjugacy classes*, Invent. Math. **34** (1976), pp. 201-213.
- [L2] LUSZTIG G., *Unipotent elements in small characteristic*, Transf. Groups **10** (2005), pp. 449-487.
- [LS] LUSZTIG G., SPALTENSTEIN N., *Induced unipotent classes*, J. London Math. Soc. (2), **19** (1979), pp 41-52.
- [MB] MORET-BAILLY L., *Un théorème de l'application ouvert*, Math. Scand. **111** (2012), pp. 161-168.
- [M] MORRIS L., *Rational conjugacy classes of unipotent elements and maximal tori, and some axioms of Shalika*, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), pp. 112-124.
- [R] ROUSSEAU G., *Immeubles sphériques et théorie des invariants*, C. R. Acad. Sc. Paris **286** (1978), pp. 247-250.
- [Se] SESHADRI C. S., *Geometric reductivity over arbitrary base*, Adv. Math. **26** (1977), pp.225-274.
- [Sp] SPRINGER T.A., *Linear algebraic groups, second ed.*, Progress Math., vol. **9**, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [SS] SPRINGER T.A., STEINBERG R., *Conjugacy classes* in Seminar in Algebraic groups and related fields, A. Borel (ed) Springer Lecture Notes in Math. **131** (1970), pp. 167-266.
- [Ti] TITS J., *Unipotent elements and parabolic subgroup of reductive groups, II*, Lect. Note Math. **1271**, Springer-Verlag, 1986, pp. 33-66.
- [Ts] TSUJII T., *A simple proof of Pommerening's theorem*, J. Algebra **320** (2008), pp. 2196-2208.

Index

$\mathfrak{d}_0(\lambda)$, 65	$G_{\mu,r}$, 28
\overline{F} , F^{sep} , F^{rad} , 13	${}_F I_G^G(Z)$, 82
\mathcal{F}_v , 17	${}_F I_{F,P}^G(Z)$, 83
\mathfrak{g} , 66	${}_F i^P(Z)$, 81
Γ_F , 13	${}_F i^P(Z)$, 81
$\Gamma_F(v)$, 23	ι_T , 30

$I_P^{G,LS}(w)$, 86	$FP_{\Omega,Z}, P_{F,\Omega,Z}$, 22
j_0 , 66	FP_Z , 24
$\mathfrak{J}_{\text{unip}}^T(f)$, 96	$\phi_{v,\lambda}$, 17
$\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}^T(f)$, 103	$\phi_{v,\lambda}^+$, 17
$K_{P,\mathfrak{y}}(x, y)$, 102	$F\pi'_v$, 38
$\tilde{k}_{\text{unip}}^T(x)$, 95	$F\pi_v$, 38
$\mathcal{K}_T(Z)$, 30	$\pi_{F,v}, \pi'_{F,v}$, 39
$k_{\text{unip}}^T(x)$, 94	$P_\lambda = M_\lambda \times U_\lambda$, 17
$k_{\mathfrak{y}}^T(x)$, 102	$P_{\Omega,v}$, 18
$\Lambda_{F,\text{st}}^*$, 39	$\tilde{P}_\lambda = \tilde{M}_\lambda \times U_\lambda$, 129
$\Lambda_{F,Z}$, 26	$q_F(Z)$, 26
$\Lambda_{F,\Omega,Z}^{\text{opt}}$, 21	$q_{\text{géo}}(v)$, 43
$\Lambda_{F,\text{st}}$, 37	$q^T(Z)$, 30
$\Lambda_{F,u-\text{st}}$, 37	$\mathcal{R}'_T(V)$, 29
$\Lambda_{F,v}^H$, 24	$\mathcal{R}'_T(Z)$, 29
$\Lambda_{F,Z}$, 20	$\rho_{\Omega,v}(\lambda)$, 18
$\Lambda_{F,Z}^{\text{opt}}$, 24	$\rho_{\Omega,Z}(\lambda)$, 21
$\tilde{\Lambda}_{F,Z}$, 26	T^λ , 47
$\tilde{\Lambda}_Z$, 26	Top_F , 54
Λ_v , 17	$F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_F$, 60
Λ_Z , 20	$FU_{\Omega,Z}, U_{F,\Omega,Z}$, 22
$\Lambda_{\Omega,v}^{\text{opt}}$, 18	$U_{\Omega,v}$, 19
$m'_Z(\mu)$, 29	$V'_{\mu,r}$, 28
$m_{F,\Omega,Z}$, 22	V_λ , 29
$m_{F,Z}$, 24	$v_\lambda(i)$, 49
M_λ^\perp , 48	$V_\mu(0)$, 27
$m_{\Omega,v}$, 19	$V_\mu(r)$, 28
$m_{\Omega,v}(\lambda)$, 17	$V_{\mu,r}$, 27
$m_{\Omega,Z}(\lambda)$, 21	\overline{X} , 15
μ_P , 76	$\overline{X}^{(c-F)}$, 16
$m_Z(\mu)$, 26	$\overline{X}^{(F)}$, 16
N , 24	$F\mathfrak{X}_Z$, 31
$N_{\mathbb{A}}$, 133	$\mathfrak{X}_{\text{géo}}(v)$, 43
FN, N_F , 24, 66	$\check{X}(A_M, P)$, 79
$FN^G(V, \Omega), N_F^G(V, \Omega)$, 21	$\check{X}_F(G)$, 20
FN^H, N_F^H , 24	$\check{X}(G)$, 16
N_{FS} , 133	$\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$, 26
$FN_{<s}$, 31	$\mathcal{X}_{F,v}, \mathfrak{X}_{F,v}$, 38
$FN_{\leq s}$, 32	$F\mathcal{X}_Z$, 31
$N_{F,<s}, N_{F,\leq s}$, 38	$\xi_{P,\mathfrak{y}}(\eta)$, 102
$N^G(V, \Omega)$, 19	$F\mathfrak{y}_v$, 34
$\ \cdot\ $, 18	$\mathfrak{y}_{\text{géo}}(v)$, 42
$\mathcal{O}_{\text{géo}}(Z, P)$, 87	$\mathfrak{y}_{\text{géo}}(Z, P)$, 82
\mathcal{O}_v , 17	$F\mathcal{y}_{U_P}$, 78
$P_0 = M_0 \times U_0$, 65	$F\mathcal{y}_v$, 33
	$\mathcal{y}_{F,v}, \mathfrak{y}_{F,v}$, 38
	$F\mathcal{y}_{ZU_P}$, 80