



HAL
open science

Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21

Fabrice Vandebrouck, Marie-Line Gardes

► **To cite this version:**

Fabrice Vandebrouck, Marie-Line Gardes. Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21. IREM de Paris, 2023, 978-2-86612-404-5. hal-04050994

HAL Id: hal-04050994

<https://hal.science/hal-04050994>

Submitted on 4 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOUVELLES PERSPECTIVES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES

XXI^e école d'été de didactique des mathématiques
SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021

Volume des séminaires et posters

Coordonné par

Fabrice Vandebrouck et Marie-Line Gardes

Avec la participation des membres du CSO

Lalina Coulange

Fabien Emprin

Sébastien Jolivet

Rahim Kouki

Cécile Ouvrier-Bufferet

Sara Presutti

Avenilde Romo

Laurent Vivier

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Paris Cité

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris Cité, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:

Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Cité
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:

nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

<https://irem.u-paris.fr/ressources-en-ligne-de-lirem-de-paris-documents-videos-liens>

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

**NOUVELLES PERSPECTIVES
EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES

*XXI^e école d'été de didactique des mathématiques
SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021*

Volume des séminaires et posters

*Coordonné par
Fabrice Vandebrouck et Marie-Line Gardes*

Avec la participation des membres du CSO

*Lalina Coulange
Fabien Emprin
Sébastien Jolivet
Rahim Kouki
Cécile Ouvrier-Bufferet
Sara Presutti
Avenilde Romo
Laurent Vivier*

INTRODUCTION

Fabrice Vandebrouck*, Marie-Line Gardes**

Depuis quarante ans, la communauté française de chercheurs en didactique de mathématiques organise tous les deux ans une école d'été. Cet ouvrage constitue les actes de la 21^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, organisée par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). L'école s'est tenue au camping Les Grenettes, à Sainte Marie de Ré, sur l'Ile de Ré, du 18 au 24 octobre 2021.

Le comité scientifique et d'organisation (CSO) était constitué de :

- Fabrice Vandebrouck, Université Paris Cité, Faculté des Sciences, UFR de Mathématiques et IREM de Paris, LDAR
- Lalina Coulange, Université de Bordeaux, INSPE d'Aquitaine, Lab E3D
- Fabien Emprin, Université de Reims Champagne Ardenne, CEREP, INSPE de l'académie de Reims, IREM de Reims
- Marie-Line Gardes, Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne
- Sébastien Jolivet, Université de Genève
- Rahim Kouki, IPEIM, Université Tunis El Manar
- Cécile Ouvrier-Bufferet, Université Paris-Est Créteil, INSPE de Créteil, LDAR
- Sara Presutti, Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne
- Avenilde Romo, Instituto Politécnico Nacional - CICATA, México
- Laurent Vivier, Université Paris Cité, Faculté des Sciences, UFR de Mathématiques et IREM de Paris, LDAR

L'école a regroupé, pendant 7 jours, 99 inscrits dont 83 de France, 5 de Suisse, 3 d'Espagne, 3 Tunisiens qui n'ont pas eu leur visa malgré toutes les démarches entreprises, 1 de Belgique, 1 du Canada, 1 de Hongrie, 1 d'Italie, 1 d'Uruguay.

Les trois thèmes de l'école étaient :

- La preuve

Cécile Ouvrier-Bufferet, responsable pour le CSO

Viviane Durand-Guerrier, Université de Montpellier, en responsable externe avec 2 cours et 3 TD

* Université Paris Cité, LDAR

** Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne

- La modélisation

Laurent Vivier, responsable pour le CSO

Marianna Bosch, Université Ramon Llull, en responsable externe
avec 2 cours et 2 TD

- Les technologies numériques

Fabien Emprin, responsable pour le CSO

Sophie Soury-Lavergne, Université Grenoble Alpes en responsable externe
avec 2 cours, 1 table ronde et 3 TD.

Les textes scientifiques de ces cours et TD font l'objet de publications séparées. Dans ce volume, nous avons rassemblé les textes des séminaires et posters. Nous avons reçu 19 séminaires et 9 posters durant l'école. Le dispositif séminaires et posters a été géré par Marie-Line Gardes, Rahim Kouki et Avenilde Romo.

Durant l'école un dispositif spécifique à destination des jeunes chercheurs a été mis en place, avec des demi-journées et plages spécifiques, sous la responsabilité de Lalina Coulangue et Sarah Présutti, avec Mickaël Da Ronch (Université Grenoble Alpes) et Yahyaoui Zine el Abidine (Université de Tunis) en co responsables externes.

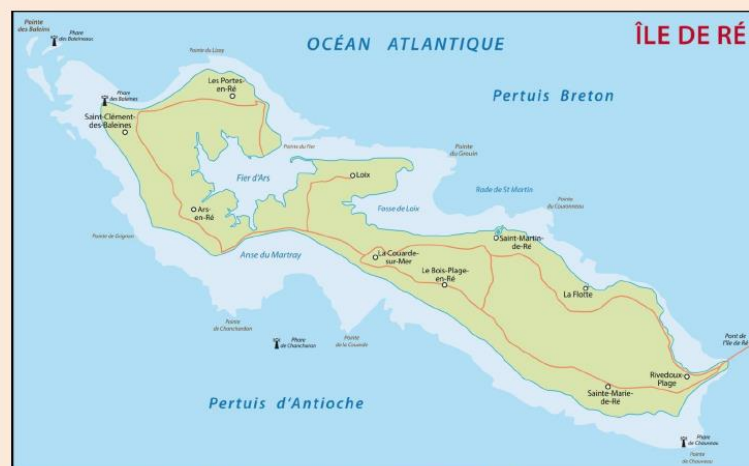
REMERCIEMENTS

L'ARDM et le comité d'organisation de l'école tiennent à remercier les institutions et organismes qui ont apporté des soutiens financiers, notamment la région Nouvelle Aquitaine, Texas Instrument, l'ED623 Savoirs Sciences Education, le LDAR, les projets de recherche Perseverons et MindMath.

21^{ème} Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques

Ile de Ré, Camping Les Grenettes de Sainte Marie de Ré

18 au 24 octobre 2021



La preuve, la modélisation, les technologies numériques - avec les cours de Maha Abboud, Nicolas Balacheff, Berta Barquero, Alain Kuzniak, Maria Alessandra Mariotti et Jana Trgalova. Interventions complémentaires de Ernesto Esposito, Philippe Richard et Vanda Luengo. Dispositif spécial pour les jeunes chercheurs avec Michèle Artigue et Nicolas Balacheff. Ateliers. Communications...

Inscriptions et informations complémentaires sur le site <https://eedm21.sciencesconf.org/>



SOMMAIRE DU VOLUME

SEMINAIRES

Un robot de sol pour apprendre des mathématiques Francine Athias	13
Instituer une « Communauté Discursive Géométrique Scolaire » en classe de 6 ^e : conditions et limites Caroline Bulf	25
Contribuer au développement professionnel des enseignants concernant les savoirs transparents par un travail sur le langage Aurélié Chesnais, Céline Constantin	37
Analyse de la pratique des enseignants stagiaires en lien avec des dispositifs de formation : croisements de deux cadres théoriques Christine Choquet, Sylvie Grau	47
Connaissances spatiales et habiletés visuo-spatiales – croisement de deux paradigmes pour mieux comprendre les enjeux d’enseignement et d’apprentissage en géométrie Sylva Coutat, Sandra Berney	59
Modèle pour repérer l’activité de sujets en résolution de problème Mickael Da Ronch, Michèle Gandit, Sylvain Gravier	69
Comparaison de longueurs en environnement papier-crayon et en environnement numérique : étude de la double adaptation d’une séance de formation initiale des enseignants du premier degré Charlotte Derouet, Catherine Thomas	79
La grandeur contenance au cycle 2 : modèles praxéologiques et institutionnalisation Carine Frappier-Jego	89
Analyse de la pratique des enseignants stagiaires dans le cadre de la problématisation : dynamique et obstacles Sylvie Grau	99
Travail documentaire collectif en formation initiale : usage du numérique et autonomie des élèves Ghislaine Gueudet, Sophie Joffredo-Le Brun, Marie-Pierre Lebaud	111
Parallélisme au CM1 : analyse d’une mise en œuvre en classe d’une séance issue du manuel <i>MHM</i> Claire Guille-Biel Winder, Edith Petitfour	121

Former les professeurs des écoles au regard didactique en mathématiques : étude d'une dynamique de problèmes Magali Hersant	133
Une enquête sur les pratiques enseignantes en mathématiques en cm2 et en 3ème (PRAESCO) : méthodologie et résultats Julie Horoks, Éric Roditi	143
Que révèle la production de dessins à main levée par les élèves sur leur rapport à la géométrie ? Catherine Houdement, Édith Petitfour	155
L'action incarnée dans l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication et la division à la lumière de l'analyse sémiotique de l'activité Paula Jouannet	165
Critères pour caractériser le travail mathématique effectivement produit Assia Nechache	175
La contextualisation pédagogique en mathématiques de professeurs des écoles de Polynésie Française et de Guyane Française : étude des représentations Eléda Robo	185
Pratiques linguistiques et langages intermédiaires dans la formation des futurs enseignants Cristina Roshani	199
La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique ? Sonia Yvain-Prébiski	209

POSTERS

Une recherche collaborative finalisée par une amélioration des apprentissages mathématiques des élèves en situation de résolution de problèmes Karine Bernad, Michèle Artaud, Cécile Redondo, Vincent Bonniol	221
La construction d'un escape-game comme un moyen pour développer les compétences des enseignants de primaire sur la modélisation mathématique Charlotte Bertin	227
L'algèbre abstraite est-elle difficile parce qu'elle est abstraite ? Renaud Chorlay, Nicolas Grenier-Boley	231
Une recherche-action collaborative : introduction de l'informatique au primaire Michèle Couderette, Antoine Meyer	235

Les pratiques des formateurs à l'utilisation des technologies numériques en mathématiques au cycle 3 de l'école primaire Corinne Gau	241
Troubles des apprentissages et difficultés sévères en <i>early algebra</i> Francesca Gregorio	247
Conception sur la preuve en mathématiques chez les étudiants en formation initiale Matias Pavez-Bravo	251
Comment amener les élèves à s'interroger sur la validité de leur démarche à l'école élémentaire ? Karine Vieque	255
Problématisation et démonstration : Étude des conditions favorisant l'appropriation du processus de démonstration algébrique en cycle 4. Cas des propriétés arithmétiques. Nadia Zebiche	259

SEMINAIRES

UN ROBOT DE SOL POUR APPRENDRE DES MATHÉMATIQUES

Francine Athias*

RESUME

La communication porte sur l'introduction de robots de sol dans une classe de maternelle. Nous cherchons à en documenter les difficultés et les effets. La recherche s'inscrit au début d'un processus d'ingénierie coopérative, et nous rendons compte ici d'une séquence introductive. La description des actions de la professeure et des élèves ayant des difficultés (plus ou moins) et leur analyse sont effectuées dans le cadre de la théorie de l'action conjointe en didactique. Ces analyses révèlent des moments-clés, dans l'apprentissage de connaissances mathématiques et informatique en lien avec un usage des robots. Les résultats de cette étude exploratoire seront exploités dans une nouvelle mise en œuvre, selon le processus itératif propre à ce type d'ingénierie.

Mots-clefs : Robotique pédagogique, action conjointe ; nombre en maternelle ; programmer.

ABSTRACT

The paper focuses on the introduction of robots in a kindergarten classroom (in France). We seek to document the difficulties and effects. The research is at the beginning of a cooperative engineering process. We report here some moments, at the first year. The description of the actions of the teacher and a student and their analysis are carried out within the framework of the theory of joint action in didactics. These analyses reveal key moments in the learning of mathematical and computational knowledge in connection with the use of robots. The results of this exploratory study will be exploited in a new implementation, according to the iterative process specific to this type of engineering.

Keywords: Educative robotics; joint action; kindergarten; teaching of numbers; coding.

INTRODUCTION

Depuis 2016, l'enseignement de l'informatique en tant que tel est inscrit dans les programmes de l'école primaire en France. On se rappelle qu'une éducation à la logique informatique avait été initiée à l'école primaire par Papert (1981). Il s'agissait alors de développer un langage de programmation, le Logo pour la Tortue Logo. L'ensemble était destiné à améliorer chez les enfants la manière de penser et de résoudre les problèmes, dans une perspective piagétienne. Puis de nouveaux robots ont été créés et testés dans les classes. L'utilisation de ces robots, objets tangibles, permettent de mettre en œuvre des activités concrètes en lien avec des connaissances autour du monde du numérique. On passe donc d'une programmation (le Logo) au service de compétences génériques, de type logique, à l'usage de robot pour le développement de ce qui est désigné sous le nom de « pensée informatique » (Wing, 2006). La pensée informatique est définie comme un ensemble de compétences nécessaires à tous (et pas seulement aux seuls informaticiens), pour comprendre le monde dans lequel nous vivons. Ces compétences sont susceptibles d'être travaillées dans toutes les activités induisant une coopération entre l'homme et la machine.

1. Le robot de sol et contexte

La robotique pédagogique offre un environnement avec lequel les élèves peuvent interagir, observer les résultats de leurs actions et créer (Sullivan, 2008). Dans la suite de la communication, nous nous intéressons à un des robots de sol, la beebot (cf fig. 1). C'est un objet programmable qui est contrôlé par une interface tangible, contenant différents boutons. Quatre boutons situés sur la beebot permettent de l'orienter. Un symbole est dessiné sur chacun d'eux sous la forme de flèches oranges (avancer d'un pas, reculer d'un pas, pivoter à

*Laboratoire ELLIADD, INSPE Franche-Comté

droite, pivoter à gauche). Trois autres boutons permettent de contrôler l'exécution du programme : le bouton vert « go » (qui permet l'exécution des instructions) et deux boutons bleus, pause et « X » (qui correspond à l'effacement de la mémoire). Cette interface permet aux élèves de définir toutes les commandes contrôlant le déplacement de la beebot. Ainsi, avec cette dernière, il est possible d'enregistrer une séquence de déplacements avant de l'exécuter.



Figure 1. – La beebot

Notre étude est exploratoire : une professeure et une chercheure choisissent d'introduire la beebot, dans une classe de maternelle (élèves de 4 et 5 ans). La professeure est expérimentée, mais elle n'a jamais utilisé les beebots dans sa classe. Cette première mise en œuvre est alors partagée avec des professeurs stagiaires débutants au cours d'un atelier d'entrée dans le métier. La professeure et la chercheure ont échangé sur la construction de la séquence en classe ainsi que sur la mise en œuvre. Elles ont élaboré ensemble le déroulement de l'atelier. Dans le cadre de cette communication, nous orientons notre regard sur ce qui s'est déroulé en classe avec les élèves. Le travail avec les professeurs stagiaires fait l'objet d'une autre communication.

2. Contexte institutionnel et connaissances mathématiques

Si la place de l'informatique comme objet d'enseignement est réaffirmée en France dans les programmes (MEN, 2020), elle n'apparaît pas directement dans les programmes de maternelle. L'informatique est seulement présente à partir du cycle 2 avec des perspectives modestes telles que savoir coder ou décoder pour prévoir ou représenter des déplacements (Eduscol¹). De même l'initiation à la programmation est envisagée pour apprendre à anticiper l'effet de telle ou telle séquence d'instruction avant de la faire exécuter par le robot. L'utilisation des robots est présentée dans la partie mathématique des curricula (MEN, 2020), en cycle 2 et 3. Nous ne cherchons pas à savoir si la pensée informatique est en lien épistémologique avec des connaissances et compétences mathématiques mais nous voulons toutefois prendre en compte ces dernières, en particulier en maternelle. Il est précisé que « l'expérience de l'espace porte sur l'acquisition de connaissances liées aux déplacements » (MEN, 2020, p. 23).

Des problèmes spatiaux, au sens de Berthelot et Salin (1992) sont ainsi mis en œuvre dans les usages de la Beebot. Les situations concernent l'espace sensible. La réussite ou l'échec sont déterminés par l'élève, qui peut comparer le résultat obtenu au résultat attendu : la beebot est-elle là où elle était attendue ? De plus ces situations sont l'occasion de production d'énoncés aux fins de communication : le langage et les représentations spatiales peuvent

¹ <https://eduscol.education.fr/document/15409/downloadU>

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

permettre de communiquer des informations entre pairs ou à la beebot. Kim et Lee (2016) ont d'ailleurs montré que l'usage des robots pouvait favoriser les apprentissages en géométrie.

Par ailleurs, il est également rappelé dans les programmes que la confrontation à de nombreuses situations permet de donner du sens au nombre (MEN, 2020). Un rôle possible de l'utilisation du nombre dans l'usage de la beebot est d'amener les élèves à créer une bijection entre le nombre de cases à parcourir et la quantité de pressions sur la flèche « avancer ». Le nombre est alors la mémoire de la quantité de pressions sur la touche « avancer » réalisées pour un essai donné. L'élève, qui peut comparer le résultat obtenu au résultat attendu, peut alors ajuster le nombre de pressions.

3. Un questionnaire

De nombreuses recherches tendent à montrer que le recours à des robots est favorable aux apprentissages, en particulier en mathématiques (Toh & al., 2016 ; Komis et Misirli, 2011 ; Barker & Ansorge, 2007 ; Highfield, 2010). Toutefois, dans des recherches qui se sont portées sur les usages de la robotique pédagogique (Komis & Misirli ; 2015), il est noté que l'introduction d'un langage intermédiaire entre le robot et l'élève est nécessaire pour lui permettre de s'engager dans des situations didactiques (*ibid.*). Par ailleurs, de nombreux élèves semblent bénéficier des activités autour des robots. En effet, les élèves s'entraident, font des essais pour résoudre les problèmes (Bugman & Karsenti, 2018). Ils se rendent capables d'une centration sur le résultat de l'action (le lieu à atteindre par le robot) à une centration sur la procédure, les déplacements à réaliser (Nogry, 2019). Dans le même temps il semblerait toutefois que certains élèves pourraient ne pas avancer du tout dans un tel contexte (Bugman & Karsenti, 2018). C'est précisément ce dernier résultat qui retient notre attention : nous voulons décrire et comprendre ce qui se passe dans la classe de maternelle (MS) en mathématiques lorsque des robots de sol de type beebot sont introduits, en caractérisant les actions des élèves ayant des difficultés et celles de la professeure.

Dans une première partie, je présenterai les éléments théoriques qui permettent de modéliser l'action. Dans une deuxième partie, j'exposerai le contexte de la classe de maternelle et je décrirai la séquence. Dans une troisième partie, je donnerai de premiers résultats concernant les actions de différents élèves, en particulier concernant une élève qui semble éprouver des difficultés. Enfin, dans une dernière partie, j'engagerai une discussion conclusive.

ÉLÉMENTS THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

Nous modélisons l'action en classe du professeur et des élèves en appui sur certains éléments de l'action conjointe en didactique (TACD, Sensevy, 2011 ; CDpE, 2019). Le contrat didactique a été introduit par Brousseau (1980, p. 127), comme « étant l'ensemble des comportements [spécifiques des connaissances enseignées] du maître qui sont attendus de l'élève et des comportements de l'élève qui sont attendus du maître ». Ainsi, le contrat didactique se construit : l'interprétation de l'élève constitue un moyen de réguler l'activité didactique par le professeur (Brousseau, 1986). Le contrat didactique apparaît comme un *déjà-là* (CDpE, 2019) en tant qu'*arrière-plan commun* (repris et adapté de Wittgenstein, 2006) c'est-à-dire un système de significations instituées. C'est sur cet arrière-plan du contrat que le professeur et les élèves travaillent. Ils vont aborder ce qui fait problème à partir de cet arrière-plan.

La structure du problème est modélisée par la notion de milieu didactique (Brousseau, 1998 ; Sensevy, 2011 ; CDpE, 2019), qui décrit la structure matérielle et symbolique du problème travaillé. Le travail du problème s'établit de façon dynamique et évolutive. Dans le problème, l'élève est confronté à un ensemble d'éléments épars, qui ne semblent pas reliés.

Par exemple, l'élève sait que telle flèche permet au robot d'avancer d'une case. Il sait où doit aller le robot. Il lui reste donc à établir des liens entre ces éléments de sorte que le robot se déplace là où l'élève souhaite. Ainsi la résolution du problème l'amène à transformer les éléments épars en un système structuré. C'est précisément l'établissement de ces relations qui permet de résoudre le problème et d'apprendre. Le gain au jeu, c'est à dire l'atteinte par le robot du but prévu, signe la réussite dans cette entreprise dans l'espace sensible. Le travail du problème consiste pour l'élève à mener une enquête. Il doit pour cela s'appuyer sur des affordances du milieu. Au départ, même si elles sont présentes, elles sont invisibles et peuvent devenir visibles à un moment, par exemple, lorsque le robot n'avance pas. Dans la description du travail d'enquête de l'élève, on s'aperçoit que ce dernier ne la mène pas seul. Il pourra bénéficier de l'expertise de ses pairs, par exemple, de ceux qui ont utilisé l'interrupteur (sous le beebot). Il pourra également compter sur la professeure. Cette double description, en termes de contrat, système de connaissances existant, et de milieu, problème posé et affordances disponibles permet de comprendre la manière dont le contrat didactique permet ou non de traiter avec le milieu. Les actions de la professeure seront modélisées dans une dialectique réticence-expression (*ibid.*). La réticence désigne le fait de cacher ce que l'on sait. La professeure doit faire en sorte que l'élèves assume la responsabilité de jouer et de gagner. Si la professeure divulgue les informations (expression), alors l'élève ne pourra pas produire de stratégie gagnante de son propre mouvement. Dans le même temps, si elle ne dit rien, à certains moments, le jeu s'interrompt. Ainsi, expression et réticence sont opposés et complémentaires. Par exemple, la professeure choisit de ne pas répondre à une élève qui prétend que son robot ne « marche » pas (réticence). Dans le même temps, elle attire l'attention de cet élève sur le fait que les autres robots avancent (expression).

À partir de ces éléments, nous pouvons reformuler notre question initiale de la façon suivante : dans le milieu organisé autour des déplacements des robots, en quoi l'action de la professeure conduit-elle ou non à mettre en évidence des affordances, visibles pour tous les élèves, leur permettant ainsi d'apprendre ?

C'est pour tenter de répondre à cette question que nous avons engagé une première expérimentation avec une professeure, qui a fait utiliser une beebot à ses quatorze élèves de maternelle (MS et GS). Rappelons que cette première mise en œuvre est prévue pour être partagée avec des professeurs stagiaires débutant au cours d'un atelier d'entrée dans le métier. Puis la professeure partage son expérience au sein d'un collectif de professeurs et de chercheurs (cette partie n'est pas développée dans le cadre de cette communication).

Les données consistent en différents films, réalisés par la professeure au sein de sa classe. Ces données font ensuite l'objet de représentations et de réductions à différentes échelles (synopsis, transcriptions, ...), permettant d'approfondir et de garantir le processus d'analyse (qui servira de base pour les échanges avec les professeurs stagiaires)

DESCRIPTION ET ANALYSE

1. La séquence

La séquence comporte quinze séances : certaines se déroulent en classe entière, d'autres en petits groupes avec 3 à 5 élèves et enfin d'autres en deux demi-classes de 7 élèves. La classe dispose de 6 robots. Des séances collectives sont organisées pour parler des robots en général : une chanson lors de la séance 1, une construction d'une représentation d'un robot avec un jeu de construction lors de la séance 8, une présentation des robots à une personne extérieure lors de la séance 13. D'autres sont faites pour établir un bilan de ce qui a été découvert : expliquer comment le robot « bouge » lors de la séance 3, faire le schéma de la

beebot et de ses fonctionnalités, séance 4. Enfin, d'autres permettent d'introduire de nouvelles notions : introduction des flèches de programmation lors de la séance 6, leurs usages sur une ligne lors des séances 7, 10 et 11, ou des déplacements des élèves à la manière des robots lors des séances 4, 6, 10 et 11. Ces séances collectives sont entrelacées avec des séances en petits groupes, au cours desquelles quelques élèves disposent d'une beebot et doivent résoudre des problèmes : faire avancer la beebot lors de la séance 2, faire avancer la beebot sur une piste rectiligne en lien avec le lancer d'un dé lors des séances 5 et 9, introduire les cartes représentant les déplacements lors des séances 12 et 14. La séquence se termine par une séance d'évaluation (séance 15) où les élèves doivent programmer le robot, avec ou sans carte. Nous présentons ci-dessous un synopsis de la séquence.

Séances	Temps (en minutes)	Modalités	Résumé
1	14	Collectif	La professeure et les élèves chantent une chanson.
2	15 (X4)	Petits groupes	Découverte des beebots : manipulation libre des élèves en présence de la professeure.
3	7	Collectif	Les élèves tentent d'expliquer comment fonctionne la beebot (elle peut se déplacer).
4	16	Collectif	La professeure structure les découvertes des élèves concernant les déplacements de la beebot grâce à une affiche.
5	10 (X2)	Demi-classe	Reprise des instructions à la beebot.
6	12	Collectif	Introduction des cartes.
7	7	Collectif	Usage des cartes sur une ligne.
8	17	Collectif	Discussion autour des robots en lien avec la construction en Lego.
9	14 (X4)	Petits groupes	Jeu sur deux bandes : faire déplacer la beebot en utilisant le dé.
10	7	Collectif	Usage des cartes (le corps et la beebot).
11	12	Collectif	Usage des cartes (le corps et la beebot).
12	10 (X4)	Petits groupes	Prévoir le déplacement du robot en utilisant les cartes, sur un circuit complexe, tout en étant à côté du circuit.
13	3	Collectif	Raconter à une personne extérieure ce qu'on a appris.
14	24 (X2)	Demi-classe	Prévoir le déplacement du robot en utilisant les cartes, sur un circuit complexe, tout en étant à distance du circuit.
15	5	Individuel	Évaluation sur le circuit complexe.

Tableau 1. – Organisation des séances

2. Quelques élèves de MS

Nous rappelons que nous voulons décrire et comprendre comment la professeure met en évidence des affordances, visibles pour tous les élèves, leur permettant ainsi d'apprendre dans le milieu organisé autour des déplacements des robots. Pour cela, nous allons nous intéresser plus particulièrement à une élève de Moyenne Section Nina. Elle a des difficultés à apprendre de l'enseignement qui lui est proposé. Nous verrons comment, au fur et à mesure de l'avancée dans la séquence, elle apprend à agir adéquatement. L'analyse fine des actions de cette élève (et de quelques autres à des moments précis) nous permettra de mettre en évidence ce que nous avons considéré comme des « points de vigilance », lors de l'usage des robots de sol en

maternelle à différents moments. En particulier, nous décrivons l'introduction du robot dans la séance 2 (épisode 1), les premiers usages du déplacement du robot lors de la séance 9 (épisode 2) et enfin la séance d'évaluation lors de la séance 15 (épisode 3), ces épisodes étant repérés dans le tableau 1. Dans le cadre de cet article, nous n'étudierons pas la place des cartes de programmation, introduites au cours de la séance 12.

Épisode 1

Description : il s'agit de la deuxième séance au cours de laquelle les beebots sont introduites. La professeure apporte le plateau de six beebots et permet à chaque élève d'en prendre une et de jouer avec. Elle s'en va quelques instants sans donner de consigne particulière « Je vous laisse découvrir », puis elle revient (figure 2). La beebot d'un premier élève Sofiane se met à se déplacer, à cligner les yeux et à faire du bruit. Nina se plaint : « La mienne ne marche pas ». La professeure s'étonne : « Ah ? Elle ne marche pas ». Elle se tourne auprès des autres élèves : « Vous croyez qu'elle ne marche pas ? ». Aussitôt Sofiane explique « Je sais moi », il s'empare de la beebot, la retourne et la met en marche grâce aux interrupteurs. Nina appuie alors sur des boutons sur le dos de la beebot (au hasard). Il ne se passe rien et elle s'énerve : « Elle ne marche même pas ». Un peu plus tard, en regardant les autres, Nina découvre le bouton « go ». Lorsqu'elle appuie sur ce bouton, la beebot bouge.



Figure 2. – La découverte de la beebot par les élèves

Analyse : l'enjeu de cet épisode est de faire déplacer la beebot en utilisant des flèches de direction puis le bouton « go ». La professeure le résume à la fin « Appuyer sur les flèches et après le bouton vert ». Les élèves s'engagent dans la découverte sans savoir ce dont il s'agit. La professeure est réticente sur ce qu'il y a à faire. Le problème que les élèves rencontrent rapidement est le suivant : comme certaines beebots se déplacent, toutes les beebots doivent pouvoir se déplacer. L'enquête dans le milieu (CDpE, 2019) est assez inaccessible au premier abord. Nina interprète rapidement l'absence de déplacement par une défaillance de la machine. Ces interprétations reposent sur des habitudes sociales (contrat, *ibid.*). Une première réponse au problème est apportée grâce à la découverte du bouton « go ». Nina est alors capable de faire se déplacer sa beebot. La professeure est réticente face à cette découverte. Elle sait que le seul bouton « go » ne suffit pas. Elle orientera l'attention des élèves sur les autres boutons de direction un peu plus tard.

La beebot est programmée de sorte qu'elle garde en mémoire toutes les instructions antérieures. Le bouton « go » permet de faire se déplacer le robot à partir de toutes ces instructions précédentes. Ainsi, lorsque Nina appuie sur « go », elle ne peut pas voir que le robot se déplace du fait de tout ce qu'elle a fait avant. De même, lorsque Nina appuie sur « go » et qu'il ne se passe rien, rien ne peut lui indiquer que la mémoire du robot est vide. Dans ces premiers moments, la consigne « je vous laisse découvrir » conduit les élèves à allumer la beebot et à « découvrir » de quoi il s'agit. A cours de la séance, la plupart des élèves cherchent à faire se déplacer le beebot. Pendant ce temps, Nina cherche à allumer sa

beebot « défaillante ». Elle ne fera que de rares tentatives de déplacement. D'autres expérimentations ont mis au jour la première difficulté relative à la conservation des instructions. Une élève Noémie (5ans) a fait avancer le robot à partir de la flèche « avancer », appuyée une seule fois. La professeure a indiqué qu'il fallait utiliser « go » pour le faire avancer. Puis Noémie a recommencé. Elle a alors été surprise que la beebot se déplace deux fois alors qu'elle n'avait appuyé qu'une seule fois. Elle a éteint le robot et l'a rallumé. Le robot a avancé d'un pas lorsqu'elle l'a programmé. Puis elle a appuyé sur la flèche « tourner à droite ». Le robot a d'abord avancé d'un pas puis a tourné. Là, Noémie a conclu que le robot faisait n'importe quoi et s'en est allée. Nogry (2019) précise que des élèves de CP ont découvert l'action d'éteindre le robot à chaque fois. Elle précise alors que si les élèves ont découvert cette stratégie, rien n'indique qu'ils en comprennent le sens. Ce mouvement de démarche de recherche, d'expérimentation et de validation d'hypothèses sur le fonctionnement du robot est loin à lui-seul d'être efficient (Noirpoudre & al., 2017).

Épisode 2

Description : cet épisode se déroule de la manière suivante : quatre élèves sont avec la professeure (dont Nina et Nelly). Il s'agit de programmer la beebot de sorte qu'elle avance sur une bande du nombre de cases indiqué par le dé (figure 3). Les élèves savent lire le nombre sur le dé et dire « deux », sans hésiter. La professeure insiste : « Tu dois avancer de deux cases, en une seule fois ». Dans le même temps, elle efface la mémoire (en appuyant sur la touche « X »). Nina programme la beebot, qui ne fait qu'un pas. Elle est alors capable de dire que la beebot a avancé d'un pas et répond à la professeure qu'il fallait avancer de deux cases : « deux » en montrant avec les doigts de la main. Après avoir effacé la mémoire de la beebot, la professeure demande alors à une autre élève Nelly de programmer, à son tour, la beebot : « Je voudrais que tu appuies sur la flèche « avancer », « un et encore un ». Elle prend alors la beebot, avec l'index elle appuie deux fois sur la flèche « avancer », et valide avec le pouce sur la touche « go ». Elle obtient ainsi le déplacement attendu.



Figure 3. – Se déplacer de deux cases vers l'avant, comme sur le dé

Analyse : Le problème auquel sont confrontés les élèves est de faire avancer la beebot d'un nombre de pas, donné par le dé. Pour enquêter dans ce milieu (CDpE, 2019), les élèves s'appuient sur des connaissances antérieures (contrat didactique, *ibid.*). Ils savent lire un nombre (compris entre 1 et 6) sur le dé. Ils savent également ce que signifie se déplacer sur une piste. En effet, ils ont l'habitude de jouer sur des pistes, par exemple dans le déplacement des « petits chevaux ». En appui sur ces habitudes, ils doivent donc communiquer ce déplacement de deux cases vers l'avant à la beebot. C'est précisément un des enjeux de la séance. Cette communication nécessite de programmer la beebot en s'appuyant sur trois éléments-clés : l'effacement de la mémoire, le déplacement et la demande d'exécution du programme. Autrement dit, cela demande un apprentissage du codage non négligeable. L'effacement de la mémoire est pris en charge systématiquement par la professeure. Il semble que la première élève Nina fait une confusion entre le nombre de touches pressées (deux) et le nombre de cases à avancer (deux). Ainsi, Nina sait qu'il faut avancer de deux cases, elle appuie sur deux touches (« avancer » puis « go »). La seconde élève, Nelly semble être

parvenue à distinguer ces deux aspects de la programmation. En effet, elle change de doigts : l'index pour le déplacement, le pouce pour la validation. Ce changement de doigts semble être le signe d'une compréhension : Bara & Tricot (2017) rendent compte de ces phénomènes pour lesquels « le cerveau existe dans un corps, qui lui-même est situé dans un environnement avec lequel il va interagir » (p. 224).

Les rétroactions du milieu sont claires pour les élèves. Ils savent où doit aller la beebot. Ils savent dire si le but est atteint ou non. Cela ne signifie pas pour autant que ces rétroactions permettent de programmer la beebot. Par exemple, ce n'est pas parce que la beebot ne se déplace que d'une case au lieu de deux que les élèves peuvent agir pour qu'il en soit autrement. Le nombre comme réponse au problème de déplacement doit être distingué du nombre d'actions à effectuer. La séquence d'actions (remettre à zéro- appuyer sur les flèches- valiser avec « go ») n'est pas explicitée dans la classe. Dans la recherche de Nogry (2019), cette séquence d'actions avait nécessité quatre séances en classe de CP. La situation de « communication » au robot mériterait donc sans doute d'être davantage explicitée. Suite à des échanges avec la professeure, en appui sur les films de classe, la professeure nous explique qu'elle n'a pas repéré toutes ces stratégies.

Épisode 3

Description : nous nous intéressons maintenant à de la dernière séance (la quinzième). La professeure et l'élève Nina sont toutes les deux, avec la beebot et un circuit avec des « coudes » : c'est un moment de bilan. La professeure demande alors de dire ce que la beebot doit faire « Dis-moi comment on fait pour que la beebot arrive sur le point rose » (figure 4). Nina montre avec ses doigts « deux ». Nina ne fait avancer la beebot que d'une seule case. La professeure l'interroge : « Tu as appuyé une fois sur avancer. Est-ce que c'était assez ? ». Sans attendre la réponse, la professeure remet la beebot sur la case départ. Elle explique alors : « Tu mets le nombre de fois qu'il faut pour aller sur le point rose ». Nina recommence : elle appuie sur la flèche « avancer » trois fois en regardant la professeure. La beebot ne s'arrête pas à la case prévue. La professeure interroge « Est-ce que c'est réussi ? ». Nina ne sait que dire que ce n'est pas réussi. La professeure remet la beebot à la case départ. Au bout du sixième essai, Nina programme la beebot : « avancer / avancer / Go » ce qui permet d'atteindre la case attendue. Elle met la main pour interdire au robot d'aller plus loin (figure 5). La professeure l'interroge : « Est-ce réussi ? ». Nina acquiesce.



Figure 4 – Nina montre « deux »

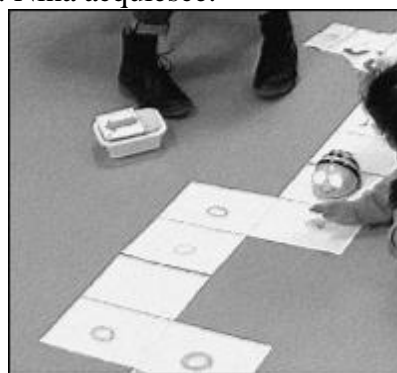


Figure 5 – Nina empêche la beebot d'aller plus loin

Analyse : Le problème auquel est confronté l'élève consiste à transmettre à la beebot des instructions pour atteindre une case choisie : le milieu didactique (CdpE, 2019) repose donc

sur cette situation de communication (Brousseau, 1998 ; Margolinas & Wozniak, 2012) un peu particulière. Le robot est intraitable : si on ne lui communique pas correctement ce qu'il doit faire, il ne peut pas le faire. Ce sont des interactions Homme-Machine (Wing, 2006). Pour enquêter sur ce problème, l'élève doit s'appuyer sur des éléments contractuels, du « déjà-là » (CDpE, 2019). Les actions de Nina permettent de confirmer qu'elle sait où la beebot doit aller et s'arrêter, par exemple, lorsqu'elle met la main pour interdire à la beebot d'aller plus loin. Nina est également capable de voir le nombre comme réponse à un problème (Margolinas & Wozniak, 2012) : elle le montre avec les doigts, sans le nommer. Elle est capable de dire si le robot atteint la case attendue ou non. Elle sait également utiliser la touche « avancer d'une case », correspondant à la direction que doit prendre le robot. Pourtant, seule, elle ne parvient pas à transmettre cette information à la beebot. Le lien entre la programmation sur la beebot et son effet sur son déplacement ne semble pas évident. Au cours de cette enquête, la professeure ajuste sa place en fonction des actions de Nina. Elle va orienter l'attention de l'élève sur ce que la beebot doit faire, à savoir aller à la case rose, ainsi que sur la manière d'y arriver, à savoir avancer de deux cases. Elle lui demande de dire d'abord comment s'y prendre pour que la beebot atteigne la case attendue. Elle est réticente, permettant ainsi à l'élève d'agir de son propre mouvement. Devant l'échec, elle devient plus expressive en pointant les effets de l'action de la programmation : « Tu as appuyé une fois sur avancer. Est-ce que c'était assez ? ». Pourtant, elle ne laisse pas de place pour la réponse. Puis elle modifie le questionnement : il s'agit plutôt d'analyser si le robot a atteint la case attendue. Nina sait dire si la beebot s'arrête au bon endroit. Pour conclure, pendant ces quatre minutes (4min32), il apparaît que Nina parvient à grand peine à communiquer des instructions simples à la beebot pour atteindre un but défini. Dans le même temps d'apprentissage (15 séances), d'autres élèves (par exemple Marc) parviennent à programmer le robot sans hésiter. La situation finale présentée ici confirme des résultats déjà présentés : il semblerait que des élèves semblent bénéficier de ces activités autour des robots tandis que d'autres ne pourraient ne pas avancer du tout dans un tel contexte (Bugman & Karsenti, 2018).

DISCUSSION-CONCLUSION

Les résultats de cette expérimentation mettent au jour des difficultés au sein de la classe, en particulier avec une élève, qui a des difficultés d'apprentissage.

1. Des difficultés de prise en main

La robotique pédagogique suscite de l'intérêt et de la curiosité chez les élèves (Nogry, 2019). Ces derniers semblent développer leur capacité de réflexion, des stratégies de résolution de problèmes et des compétences mathématiques (Mulligan & Highfield, 2008). Pourtant, dans le cadre de notre étude, la professeure se trouve confrontée à une élève Nina et elle ne parvient pas à soutenir la prise en main de la beebot : établir des liens entre les gestes de l'élève sur les boutons de la beebot et le déplacement de cette dernière. En effet, l'absence de réactions de la beebot est d'abord vue comme une défaillance de l'objet lui-même. Puis, le fait que la beebot « bouge » est en soi un résultat intéressant (et suffisant ?) pour elle. Dans le milieu organisé autour des déplacements des robots, l'action de la professeure ne permet pas (dans le cas présent) de rendre visibles les effets de la programmation sur la beebot.

2. Des difficultés de programmation

Il a été montré que la robotique pédagogique est efficace dès l'école maternelle pour développer la capacité à construire une séquence d'instruction (Komis & Misirli, 2015). Ces

résultats ont été produits dans des contextes particuliers au cours desquels des professeurs (partageant le projet) ont mis en œuvre une séquence élaborée par des chercheurs.

Dans notre étude, nous avons mis en évidence un problème : le passage d'une centration sur le résultat de l'action (case à atteindre) et une centration sur la procédure (déplacement à réaliser) n'est pas explicité. La plupart des élèves parviennent à inférer ce passage. D'autres mettent plus de temps ou n'y parviennent pas. L'échec de la programmation de Nina nous conduit à rester très vigilant sur les modalités d'usage de tels robots. Par ailleurs, si au départ, nous savons que des connaissances spatiales sont mises en œuvre dans un usage de tous les boutons de la beebot, nous constatons que dans les moments présentés, ce sont essentiellement des déplacements vers l'avant qui sont utilisés. Les figures 4 et 5 montrent que d'autres déplacements sont envisagés (pivoter à droite ou à gauche). Par contre, les élèves ayant des difficultés, telle que Nina, n'accéderont pas à un travail sur la direction. Nous avons certes focalisé notre attention sur une élève. En faisant cela, nous cherchons à mettre en évidence des moments-clés que la professeure doit rendre explicite pour favoriser l'apprentissage de tous.

3. Le nombre comme mémoire de quantité

Dans cette situation avec la beebot, le nombre comme moyen de créer une bijection entre le nombre de cases à parcourir et la quantité de pressions sur la flèche « avancer » est problématique (pour cette élève), dans la mesure où des manipulations supplémentaires sont nécessaires pour faire se déplacer la beebot le bouton X (pris en charge par la professeure) et surtout le bouton Go. Les connaissances mathématiques (anciennes) entrent en conflit avec les connaissances instrumentales (nouvelles), au sens de prise en main de la programmation de la beebot. La représentation des déplacements par des flèches (Nogry, 2019) ou les cartes des commandes de la beebot, en tant que langage visuel, pourraient être un intermédiaire entre l'analyse du problème (faire atteindre une case par la bluebot) et la programmation de la solution sur la bluebot.

4. Conclusion

Nous avons envisagé d'introduire un robot de sol de type beebot pour permettre aux élèves d'appréhender différentes notions mathématiques, telles que la structuration de l'espace (en avant, tourner à droite, tourner à gauche), le rôle du nombre (se déplacer de deux cases, se déplacer vers une case donnée), les situations de communication un peu particulière (communiquer à un robot une suite d'instructions). Nous avons analysé les actions de la professeure et des élèves dans un tel contexte. Nous avons mis en évidence une difficulté : anticiper le déplacement du robot et programmer effectivement le robot sont deux actions distinctes. Il semble donc nécessaire de rendre visibles ces connaissances informatiques concernant l'usage de la beebot. Nos analyses rejoignent une expérimentation précédente. À la suite d'une formation, des professeurs-stagiaires avaient mis en œuvre un scénario pédagogique, qui visait à développer la pensée informatique par l'utilisation de jouets programmables (Barrué, 2019). Une des difficultés repérées étaient de percevoir les stratégies des élèves par la professeure. En appui sur ces résultats et sur nos analyses, nous envisageons de développer une nouvelle recherche au sein d'un collectif plus large (cette professeure, de nouveaux professeurs et de chercheurs) dans le cadre d'une ingénierie coopérative (Sensevy, 2015 ; Joffredo-Lebrun et al., 2018 ; Athias et al., 2020), qui vise à la fois des savoirs mathématiques et des savoirs informatiques. Par exemple, le fait de programmer la beebot avant son exécution est en lien avec la pensée informatique, Le fait d'anticiper le déplacement de la beebot est plutôt du côté des connaissances spatiales. Quoiqu'il en soit, il s'agit d'amener tous les élèves à mener l'enquête (Dewey, 1993) pour que la beebot avance tel Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

qu'on le souhaite et donc d'organiser avec les professeurs des situations dans lesquelles ils peuvent prendre en charge l'orientation de cette enquête.

RÉFÉRENCES

- ATHIAS, F., MORELATTO, M & GRUSON, B. (2020). Pour mieux enseigner, il faut s'appuyer sur les résultats de la recherche. Dans Collectif Didactique pour Enseigner (dir.), p 155-171. *Enseigner, ça s'apprend*, Editions Retz.
- BARA, F., & TRICOT, A. (2017). Le rôle du corps dans les apprentissages symboliques : apports des théories de la cognition incarnée et de la charge cognitive. *Recherches sur la philosophie et le langage*. Vol. 33, 219-249.
- BARKER, B. S., & ANSORGE, J. (2007). Robotics as means to increase achievement scores in an informal learning environment. *Journal of research on technology in education*, 39(3), 229-243.
- BARRUE, C. (2017). Jouets programmables à l'école maternelle : pratiques pédagogiques de professeurs stagiaires. *Grand N*, 99, 69-86.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse université de Bordeaux I.
- BROUSSEAU, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, 41, p177-182.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- BUGMANN, J., & KARSENTI, T. (2018). Quand les robots entrent en classe. *Formation et profession*, 26(1), 142.
- COLLECTIF DIDACTIQUE POUR ENSEIGNER, CDpE (2019). *Didactique Pour Enseigner*. Rennes : PUR.
- DEWEY, J. (1993). *Logique : la théorie de l'enquête*. Traduction par G. Deledalle, Paris, Presses universitaires de France (1ère édition américaine : 1938).
- HIGHFIELD, K. (2010). Robotic toys as a catalyst for mathematical problem solving. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 22-27.
- JOFFREDO-LE BRUN, S. , MORELATTO, M., SENSEVY, G. & QUILIO, S. (2018). Cooperative Engineering in a Joint Action Paradigm. *European Educational Research Journal*, vol. 17(1), 187-208.
- KIM, S. & LEE, Y. (2016). Effects of robot for teaching geometry for fourth graders. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education (Formerly CAL-Laborate International)*, 24 (2), 52-70.
- KOMIS, V. & MISIRLI, A. (2011). Robotique pédagogique et concepts préliminaires de la programmation à l'école maternelle : une étude de cas basée sur le jouet programmable Bee-Bot. *Sciences et technologies de l'information et de la communication en milieu éducatif : analyse de pratiques et enjeux didactiques*. Actes du quatrième colloque international DIDAPRO 4-Dida&Stic, Université de Patras, 271-281.
- KOMIS, V. & MISIRLI, A. (2015). Apprendre à programmer à l'école maternelle à l'aide de jouets programmables. Dans G-L. Baron, E. Bruillard et B. Drot-Delange (dir.). *Informatique en éducation : perspectives curriculaires et didactiques*, 210-226. Clermont Ferrand : Presses universitaires Blaise Pascal.
- MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (Ed.) (2020). Programmes d'enseignement : école maternelle : modification ; cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycles des approfondissements (cycle 4): modification. Dans Bulletin Officiel n° 30 du 31 juillet 2020. Paris : MEN. Repéré à [\[https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39771\]](https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39771).
- MULLIGAN, J., & HIGHFIELD, K. (2008). Young children's engagement with technological tools: The impact on mathematics learning. In Proceedings of *International Congress in Mathematical Education 11* (p. 1-8). Monterrey, Mexico: International Congress of Mathematics Education.
- NOGRY, S. (2019). Robotique pédagogique à l'école primaire : quelle activité des élèves de classe préparatoire (6-7 ans) et quels apprentissages dans une séquence conçue par l'enseignant. *Review of Science, Mathematics & ICT Education*, vol 13(1), 93-110.
- NOIRPOUDRE, S., ROY, D., DESPREZ, T., SEGONDS, T., CASELLI, D. & OUDEYER, P-Y. (2017). Poppy Education : un dispositif robotique open source pour l'enseignement de l'informatique et de la robotique. *EIAH, Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*, Strasbourg, France.
- PAPERT, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit*. Flammarion.
- SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.
- SENSEVY, G. (2015). *Le collectif en didactique : quelques remarques*. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Kryszynska, S. Quilio, M. Rogalski, T. Angels Sierra, L. Trouche, C. Winslow et S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques, XVIII école d'été de didactique des mathématiques*, Brest, 223-253.
- SULLIVAN, F. R. (2008). Robotics and science literacy: Thinking skills, science process skills and systems understanding. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(3), 373-394.
- TOH, L.P.E; CAUSO, A., TZUO, P.W, CHEN, I.M & YEO, S.H. (2016). A Review on the Use of Robots in Education and Young Children. *Journal of Educational Technology & Society*, 19(2), 148-163.
- WING, J.C. (2006). Computational Thinking. *Communication of the ACM*, 49(3), 33-35.
- WITTGENSTEIN, L. (2006). *De la certitude*. Paris : Gallimard.

INSTITUER UNE « COMMUNAUTÉ DISCURSIVE GÉOMÉTRIQUE SCOLAIRE » EN CLASSE DE 6^E : CONDITIONS ET LIMITES

Caroline Bulf*

RESUME

Dans le prolongement des travaux de Jaubert et Rebière (2019), nous désignons par « Communauté Discursive Géométrique Scolaire », la communauté discursive advenant en classe de géométrie où il s'agit de construire, négocier et partager des façons de voir, d'agir (avec des instruments) et de parler assignées aux pratiques géométriques scolaires. En nous focalisant sur l'activité enseignante sous l'angle des discours, nous avons choisi de privilégier le modèle théorique de « l'agir enseignant » de Bucheton (2009, 2019) aussi appelé le Modèle du Multi-Agenda des préoccupations enchâssées que nous articulons avec des références et méthodologies spécifiques à la didactique de la géométrie (Mathé & al. 2020). À partir de l'analyse d'un nombre important de séances de géométrie d'un même enseignant dans une seule et même classe de 6^e durant une partie de la même année scolaire (2019-2020), nous tâchons d'apporter des éléments de réponse à la question de recherche suivante : en quoi certains gestes professionnels d'enseignant peuvent favoriser ou au contraire entraver l'institution d'une communauté discursive géométrique scolaire ?

Mots-clés : géométrie, gestes professionnels, agir-parler-penser, Communauté discursive disciplinaire scolaire, scénario.

ABSTRACT

Following the work of Jaubert and Rebière (2019), we refer to the "School Geometric Discursive Community" as the discursive community that arises in the geometry classroom where it is a matter of constructing, negotiating and sharing ways of seeing, acting (with instruments) and speaking assigned to school geometric practices. By focusing on teaching activity from the angle of discourse, we have chosen to privilege Bucheton's theoretical model of "teacher action" (2009, 2019) also called the Multi-Agenda Model of embedded concerns that we articulate with references and methodologies specific to the didactics of geometry (Mathé & al. 2020). Based on the analysis of a large number of geometry sessions of the same teacher in a single class of 6th grade during part of the same school year (2019-2020), we try to provide elements of an answer to the following research question: in what way can certain professional actions of the teacher favour or, on the contrary, hinder the institution of a school geometric discursive community?

Keywords: geometry, professional actions, act-speak-think, School Disciplinary Discursive Community, scenario.

CADRAGE THÉORIQUE SUR LES LIENS ENTRE GESTES D'ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE

Notre contribution fait référence aux perspectives ouvertes par Jean-Paul Bernié il y a déjà une vingtaine d'années :

« L'analyse et la description des pratiques enseignantes gagneraient, à notre sens, à intégrer à ses objectifs la question : quels gestes pour quelle communauté discursive ? » (Bernié, 2002, p. 86).

Nous cherchons à apporter des éléments de réponse à cette question dans le contexte de l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.

Dans le cadre de notre recherche, nous partageons le point de vue théorique développé dans les travaux de Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2010 ; 2019) dans lesquels on considère que les rapports entre activité enseignante et construction de significations chez les élèves peuvent être exprimés en termes de liens entre gestes professionnels et « Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire » (CDDS) dont « l'institution est corrélée au apprentissages » (Jaubert & Rebière, 2010, p. 1).

Dans une première partie, nous précisons nos arrières plans théoriques :

- en termes de « CDDS » au sens de Bernié, Jaubert et Rebière ;

* Université de Bordeaux, LaB-E3D, EA 7441, INSPE de l'académie de Bordeaux, IREM de Bordeaux.

- en termes de « gestes professionnels » en référence aux travaux de Bucheton (2009 ; 2019) et ses collaborateurs pour essayer de décrire et mieux comprendre l’agir enseignant.

Nous accordons ainsi au langage un rôle essentiel dans l’étude de ces relations et nous contextualisons cette approche à l’enseignement et l’apprentissage de la géométrie. En effet la signification n’est pas dans la référence ni le sens du mot mais dans son/ses emplois (Wittgenstein, 1953/1961 ; Bakhtine 1952-53/1984). L’objet de discours est un construit ; le langage émane des pratiques sociales et les transforme. Tout discours émane de et signale un contexte dans lequel il s’ancre. Toute reformulation, modification entraîne un déplacement de signification. L’objectif de nos recherches consiste à apporter des éléments de réponse à la question : en quoi certains gestes professionnels d’enseignement peuvent favoriser (ou non) l’institution d’une communauté discursive géométrique scolaire ?

1. Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire

Selon Jaubert et Rebière (2019), *langue* et *langage* ne sont pas confondus : la langue est vue comme un système de signes linguistiques et codes permettant la communication, et le langage est lui vu comme une activité humaine dialogique et située mettant en jeu la langue et ses codes écrits ou verbaux. En référence « aux mondes » de François (1990), qui reprend l’idée que le langage traduit, exprime, revendique des appartenances identitaires, sociales, Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2010, 2019) font le lien entre les « genres de discours » chez Bakhtine (1984) et la distinction entre « Concept Quotidien » et « Concept Scientifique » chez Vygotski (1934). Aussi sur le plan des savoirs, le langage est-il considéré comme un outil de transformation des premières connaissances. Il participe à la construction des concepts visés par l’école *via* de multiples reformulations vers des formes spécifiques, élaborées, plus scientifiques. C’est ce que ces auteurs appellent la « secondarisation des discours ». Par prolongement, nous considérons qu’instituer une Communauté Discursive Géométrique Scolaire (CDGS) revient à s’inscrire dans les finalités et valeurs partagées par un type de géométrie visé à un niveau donné. Apprendre en géométrie consiste à négocier une façon spécifique de voir les figures mais aussi des modalités spécifiques d’agir sur celles-ci – de façon instrumentée ou non – et d’en parler, par la confrontation à des problèmes dont la résolution donne du sens aux concepts géométriques en jeu (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014). La notion de CDGS est dès lors considérée comme un outil heuristique. Le processus de secondarisation, est vue métaphoriquement comme une fenêtre sur le processus de conceptualisation, opérant au sein d’un espace social discursif spécifique de chaque discipline.

2. Le modèle du « multi-agenda des préoccupations enchâssées »

Nous faisons référence au modèle théorique de « l’agir enseignant » de Bucheton (2009 ; 2019) aussi appelé le Modèle du Multi-Agenda (MMA¹) des préoccupations enchâssées que nous articulons avec des références et méthodologies de la didactique des mathématiques (en particulier l’analyse *a priori* ou encore des références spécifiques en fonction des savoirs concernés). Ancrée dans la théorie de l’activité et le champ de l’ergonomie, la distinction entre tâche et activité y est centrale. Dans la filiation théorique des travaux de Vergnaud (1991) et Pastré (2006) le cœur de l’analyse de l’activité enseignante se situe au niveau du couple (action ; situation) et son ajustement. Le MMA se centre sur le sujet enseignant : le sujet y est agissant, social et historiquement, culturellement situé, contrairement à d’autres cadres en didactique des mathématiques comme la Théorie des Situations Didactiques (TSD), où l’on se centre sur les situations et la fonction du sujet y est dite épistémique. Notre objectif

¹ Acronyme proposé par D. Bucheton dans son ouvrage de 2019.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

n'est pas d'opposer mais bien de tirer parti de l'articulation de ces cadres pour mieux comprendre l'agir enseignant.

Le terme de « geste », particulièrement usité dans le champ de l'ergonomie, renvoie à l'idée que « l'action du maître est toujours adressée et inscrite dans des codes » (Bucheton et Soulé, 2009, p. 32). Cette référence au corps renvoie aussi aux travaux de Jorro (2006) qui décrit « l'agir humain comme un remodelage incessant d'actes, de pratiques héritées, combinées, transformées » (Jorro, 2006, p. 3).

Dans le modèle du MMA on considère que l'activité enseignante est complexe et peut être modélisée, pour partie, selon 5 préoccupations enchâssées définies comme des « organisateurs pragmatiques dominants » en référence à la didactique professionnelle :

- le tissage (qui consiste à faire du lien entre ce que l'élève sait déjà) ;
- l'étaillage (au sens de Bruner : aider l'élève à dire et à faire sans faire à sa place) ;
- l'atmosphère (maintenir des espaces dialogiques) ;
- le pilotage (organisation et cohérence de la séance) ;
- et les objets de savoir.

Il nous semble important de préciser que ces préoccupations sont « systémiques » (figure 1), c'est-à-dire qu'elles interagissent les unes avec les autres. Par exemple rebondir sur le propos d'un élève peut relever à la fois de l'atmosphère (l'encourager si sa proposition est incomplète) que de l'étaillage (en l'aidant à avancer dans la formulation) voire du pilotage (pour avancer dans la séance). L'idée est de ne pas perdre de vue l'épaisseur de l'agir en essayant de le décrire.

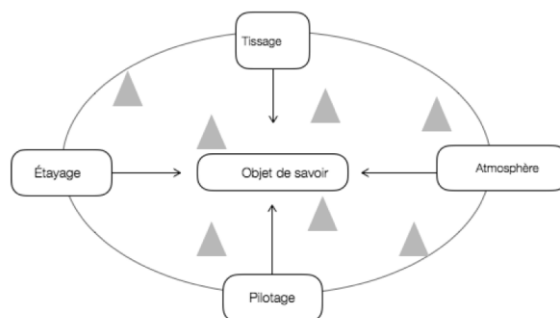


Figure 1. – Le modèle du « multi-agenda des préoccupations enchâssées » repris de Morel & al. (2015).

Les petits triangles situent les gestes professionnels : ils sont l'actualisation/l'ajustement permanent de ces préoccupations au regard de l'activité potentielle et effective des élèves.

« Les gestes professionnels sont des gestes langagiers et corporels. Ils sont toujours situés, propres à chaque individu. Ils sont l'actualisation et l'ajustement en contexte des préoccupations complexes de chaque enseignant. Ils nécessitent la compréhension rapide de l'avancée ou des difficultés des élèves. [...] » (Bucheton, 2019, p. 209).

Nous précisons que les gestes professionnels sont didactiques « dès lors qu'ils visent des savoirs, des modes de pensée et d'agir qui dans leur ensemble contribuent au développement cognitif, langagier, social et psycho-affectif de l'élève. » (Bucheton 2009, p. 39).

Dans notre recherche, nous précisons au centre de la matrice de l'agir enseignant que l'on cherche à faire apprendre des façons spécifiques de voir, d'agir et de parler des figures géométriques dans des situations qui ont du sens (figure 2).

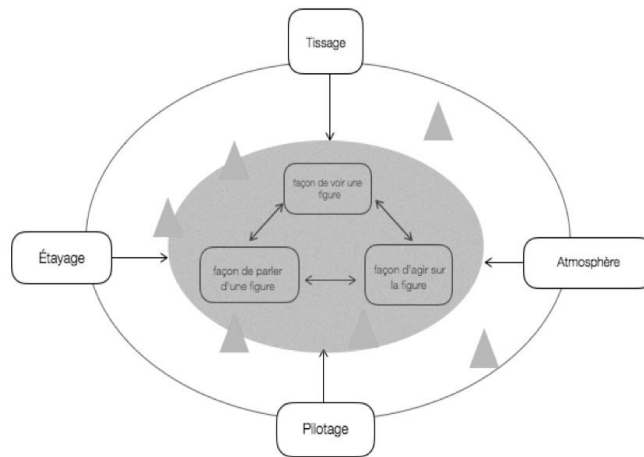


Figure 2. – Le modèle du « multi-agenda des préoccupations enchâssées » repris et adapté au contexte d'enseignement de la géométrie (Bulf, 2022).

Dans nos précédents travaux, nous parlons des façons de voir au sens de Duval (2005) des façons d'agir (actions instrumentées ou non), et des façons de parler (langage oral) pour décrire en classe de géométrie ce que Bernié (2002) désigne par modes d'agir-parler-penser en références aux « mondes » de François (1990). « Voir » n'est pas mis à la place de « penser » ; nous considérons que penser en géométrie relève d'une articulation complexe sans lien de subordination ni hiérarchique entre ces trois dimensions : voir, agir et parler (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014). Nous considérons ainsi que les préoccupations de l'enseignant en classe de géométrie, ses ajustements et actualisations (autrement dit ses gestes professionnels) peuvent être décrits à l'aune de ce qui caractérise selon nous l'activité géométrique. Dès lors nous nous demandons : qu'est-ce qu'un geste professionnel (didactique) en classe de géométrie ? Comment le reconnaître et le décrire ? Existe-t-il des formes d'étayage et de tissage spécifiques ? Si oui, sous quelles conditions ?

3. Ruptures et continuités dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie

De nombreux travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie donnent une attention particulière aux situations d'enseignement et les variables didactiques afférentes. Nous faisons référence aux travaux de Berthelot et Salin dans les années 80 et 90 ou encore ceux d'Houdement et Kuzniak au début des années 2000 jusqu'au récent ouvrage d'Anne-Cécile Mathé, Thomas Barrier et Marie-Jeanne Perrin en 2020 qui propose une synthèse des travaux menés pendant plus de 20 ans. Ces derniers offrent un ensemble de situations décrivant *a priori* les conditions idoines pour viser un continuum entre une « géométrie physique » et une « géométrie théorique », en construisant une « géométrie dite des tracés »².

Les membres d'une CDDS apprennent à construire et s'approprier les valeurs propres à cette communauté qui peuvent être en général en rupture avec les valeurs usuelles ou communes ou antérieures. C'est le cas d'élèves entrant en 6^e par exemple dont la rupture entre une géométrie physique dont les problèmes à résoudre portent sur des objets matériels, qui peuvent être graphiques, à l'aide d'instruments matériels et une géométrie théorique, dont les figures théoriques sont objets d'étude, la validation de leurs propriétés s'appuie sur le raisonnement hypothético-déductif. Il s'agit là d'une rupture qui peut être source de

² « l'idée générale est qu'il est possible de prendre appui sur la reproduction instrumentée de figures pour avancer vers la conceptualisation des objets de la géométrie théorique, dans un développement mutuel des techniques de construction avec les instruments et des concepts géométriques ». (Mathé & al., 2020, p. 56) Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

difficultés importantes, aussi bien dans le rapport au dessin et aux instruments ou les critères de validation d'une procédure (Mathé & Mithalal, 2019).

ENJEUX DE LA RECHERCHE : UNE ÉTUDE DE CAS EN CLASSE DE 6^E POUR DÉCRIRE DES GESTES PROFESSIONNELS

1. Hypothèses et questions de recherche

D'après ce qui précède, nous postulons qu'il existe un ensemble de situations fondamentales au sens de la TSD favorisant l'élaboration d'une géométrie des tracés assurant un continuum notamment au Cycle 3 entre géométrie physique et géométrie théorique. De nombreux travaux en didactique des mathématiques (Charles-Pézarid, Butlen & Masselot, 2012 ; Chesnais, 2018...) ont mis en évidence qu'une grande variabilité des pratiques due en partie à leur grande complexité. Le rôle de l'enseignant est crucial et potentiellement différenciateur du point de vue des apprentissages. Néanmoins parmi ces variabilités, en appui sur ces mêmes références et d'autres, comme Sensevy (2010, p. 3) qui défend l'idée « qu'un geste d'enseignement se caractérise par le fait que c'est le savoir qui lui donne sa forme » nous postulons qu'il existe des gestes professionnels (didactiques) spécifiques des situations d'enseignement et d'apprentissage d'une géométrie des tracés, c'est-à-dire visant des modes de voir, d'agir, de parler spécifiques d'une géométrie des tracés. Nous affinons dès lors nos questions de recherche : comment les repérer, les décrire ? Existents-ils des formes spécifiques de tissage et d'étayage ? Sous quelles conditions ces GP se construisent-ils et évoluent-ils ?

2. Méthodologie

Au sein du groupe « didactique Cycle 3 », de l'IREM de Bordeaux nous avons construit, depuis 2017, de façon collaborative une progression³ de géométrie pour la classe de 6^e. Nous nous appuyons sur les nombreux travaux en didactique de la géométrie depuis plus de 20 ans, déjà évoqués jusque-là. Dans le cadre d'une recherche-action INSPE-CARDIE, nous avons observé et filmé 13 séances de cette progression dans la même classe d'un des membres du groupe IREM, un enseignant chevronné (depuis plus de 20 ans), familier des travaux de recherche évoqués, et que nous avons renommé Jules pour la recherche. Nous avons également mené un entretien d'autoconfrontation et nous avons organisé une séance d'échanges entre pairs (avec d'autres enseignants que ceux de l'IREM) autour d'une des séances observées. Ces différentes étapes méthodologiques ont pour but de recueillir des traces de l'activité enseignante et élèves, des intentions, logiques profondes et d'arrière-plans au sens de Bucheton (2019) de l'enseignant afin de mieux comprendre les gestes observés.

Nous avons mené des analyses *a priori* des situations, au sens de la TSD, qui nous apporte des éléments de description du cœur du MMA et permet de décrire les effets de certaines valeurs de variables didactiques afférentes à une même classe de situation (celle qui nous intéresse ici ce sont les situations de restauration de notre progression) en termes d'activité potentielle des élèves selon des façons de voir, d'agir et de parler (des figures). L'on considère que les choix des valeurs des variables didactiques peuvent impacter l'activité enseignante et ses ajustements (Dorier, 2010). Des préoccupations du MMA peuvent être ainsi inférées, pour partie, comme celles relevant du pilotage (puisque l'organisation matérielle des situations de reproduction relève du choix de certaines variables). Notre corpus est constitué des captations vidéo ou audio de toutes ces étapes et de leurs transcriptions.

³ <https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM>

3. L'hypothèse d'un « scénario » au sens de Jaubert et Rebière (2019)

L'enjeu est d'essayer de montrer pourquoi nous envisageons l'hypothèse de la construction d'un scénario au sens de Jaubert et Rebière (2019), reprenant Bruner (1983). D'après certains éléments d'analyse explicités dans les parties suivantes, tout se passe comme si les élèves de la classe de Jules reconnaissent « le » scénario attaché aux situations d'enseignement d'une géométrie des tracés, favorisant ainsi l'institution d'une Communauté Discursive Géométrique Scolaire. Un scénario renvoie à l'idée de récurrence, de ritualisation d'actions langagières et matérielles spécifiques (autrement dit ici des façons de voir, d'agir et de parler des figures) qui, ce faisant, « rassurent » d'une certaine façon les élèves, les enrôlent plus facilement, permettant d'aller jusqu'à une forme d'inversion des rôles dans le scénario, visant petit à petit une autonomie des élèves.

« Stabilité, récurrence, répétition des scénarios routiniers et familiers facilitent la construction de signification, les interprétations, la compréhension des intentions de l'autre. Le scénario est, selon nous, médiateur entre deux niveaux de performance langagière dans le cadre de la zone proximale de développement. Pour Bruner (1983, p. 288), les interactions entre adultes et enfants reposent sur la construction de scénarios qui encadrent l'action conjointe. Ils rendent possible la transformation du sens de l'activité, des actions mises en œuvre et des usages langagiers qui les accompagnent, ce que nous appelons secondarisation. [...] Anticipable, d'abord guidé par l'adulte, puis par l'apprenant dans le cadre de la réversibilité des rôles, le scénario est progressivement intériorisé et participe au processus d'apprentissage. » (Jaubert & Rebière, 2019, p. 158).

Nous cherchons donc à décrire en quoi Jules privilégie une organisation stable, « ritualisée », des séances de géométrie mobilisant une configuration de gestes qui favorisent la mise en place de ce que Jaubert et Rebière (2019) traduisent par « scénario » en référence à Bruner (1983).

SYNTHÈSE D'ÉLÉMENTS D'ANALYSE DU CORPUS

1. Une configuration stabilisée et ritualisée de gestes

Le projet global de Jules (en termes des situations et de leurs enjeux) est cohérent et vise l'inscription des élèves dans une géométrie dite des tracés c'est-à-dire une géométrie qui se caractérise par l'usage géométrique (basé sur des propriétés) des instruments (en dehors des instruments de mesure) pour tracer des figures. Il met en œuvre la progression évoquée du groupe IREM. Jules s'appuie pour toutes ses séances, et de façon consciente (il l'explique lors de la séance entre pairs) sur les mêmes variables didactiques⁴ afférentes à une même classe de situation – les situations de reproduction de figure géométrique – dont les valeurs évoluent en fonction des objets de savoir et des objectifs visés. Ce choix assure selon nous une forme forte de tissage, et participe à cette dimension ritualisée des situations d'enseignement de géométrie. Dans le cas de la toute première situation⁵ (figure 3), les valeurs des variables didactiques contraignent *a priori* l'élève à chercher des relations entre les éléments de la figure-modèle en termes de prolongements et d'alignements, sans le recours à la mesure.

Lors de l'analyse de la mise en œuvre de cette situation, dans la classe de Jules, nous reconnaissons et décrivons une structure similaire pour chaque séance de géométrie (figure 4). Nous distinguons des variations entre les premières séances et les suivantes et nous explicitons sur quoi portent certaines de ces variations.

⁴ La nature des figures ; le choix de l'amorce et « la différence » avec la figure-modèle ; l'échelle ; les positions relatives entre la figure-modèle et la figure-amorce mais aussi par rapport aux bords de la feuille ; la taille de la figure-modèle et de l'amorce ; le support (feuille blanche, etc.) ; les contraintes sur les instruments.

⁵ Voir Bulf (2022) pour une analyse *a priori* détaillée.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Chaque séance de géométrie commence par une même phase d'observation. Cette phase ritualisée peut contribuer selon nous à rassurer les élèves puisqu'ils savent à quoi s'attendre : ils doivent toujours décrire ce qu'ils voient de façon individuelle. Toutes les propositions sont accueillies. Cette atmosphère ouverte favorise l'enrôlement des élèves.

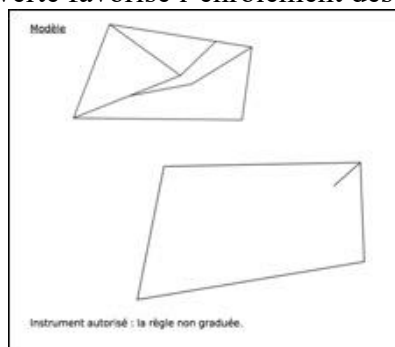


Figure 3. – Première situation de reproduction tirée de la brochure IREM 6^e.

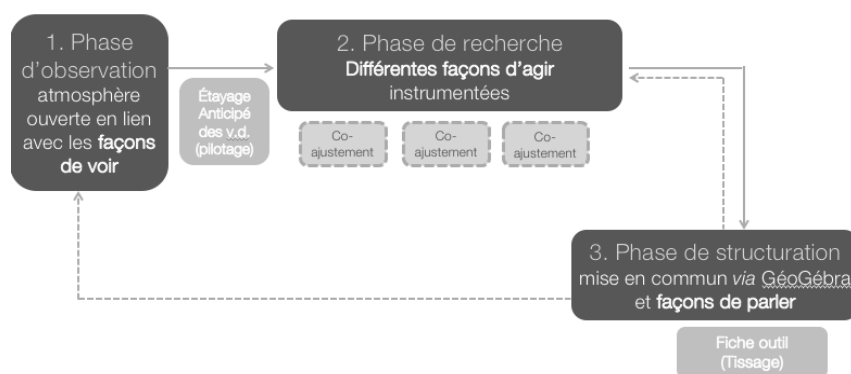


Figure 4. – Structure schématique de la configuration stabilisée des préoccupations de Jules.

Puis viennent les phases de recherche des élèves qui sont focalisées sur « les façons d'agir » avec des instruments. Ces phases s'alternent avec des phases de co-ajustement collectives initiées par Jules au regard de l'activité effective des élèves. Ces co-ajustements sont évolutifs, c'est-à-dire que certains ajustements sont spécifiques des séances inaugurales (comme ce que nous appelons un étayage anticipé de certaines variables qui précède la phase de recherche lors de la toute première séance de géométrie ou la forme forte d'étayage attachée à l'analyse de la figure modèle décrit par la suite). Nous retrouvons certaines formes de co-ajustement de façon récurrente au cours de chaque séance de géométrie.

Enfin, la phase finale de structuration des connaissances stabilise « les façons de parler » en lien étroit avec les « façons d'agir » et « les façons de voir » qui ont émergé dans les phases précédentes (flèches en pointillées dans la figure 4) ; cette phase est médiée par l'usage de GéoGebra. Les façons d'agir instrumentée et façons de parler sont stabilisées *via* la fiche-outil qui est mobilisée et complétée à chaque séance. La fiche-outil⁶ est un appui essentiel pour l'élève pour faire le lien d'une séance à l'autre : ce support rassemble les différentes façons d'agir (et de parler), négociées, validées et institutionnalisées.

Nous développons ci-après deux exemples de co-ajustements évolutifs.

⁶ Voir la brochure : <https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM>

2. Des conduites langagières récurrentes sur l'usage des instruments

Nous repérons des gestes d'ajustement réguliers et souvent adressés collectivement, à l'initiative de Jules, au regard de l'activité des élèves dont il a pris des informations de façon individuelle. Dès la première séance, Jules intervient assez vite, c'est-à-dire au bout de 5-8 mn de phase de recherche afin de récuser une façon d'agir largement répandue chez les élèves : un usage « hasardeux » de la règle pour tracer un trait ; les élèves ont à ce stade tous reproduit à l'œil la figure.

Jules : alors quand on pose la règle comme ça // regardez bien // donc ici y a pas de problème y a un appui sur ce sommet-là, mais après / ici là [Jules fait bouger la règle de façon aléatoire] /// est-ce que j'ai un autre appui pour poser la règle ? /// pas du tout / donc là on est train de tracer un trait au hasard /// donc ça c'est pas correct. **Qu'est-ce qu'il faut avoir pour tracer un trait ?**
[et Jules s'éloigne physiquement du TBI] pour me servir correctement de la règle, ne pas la poser au hasard, **qu'est-ce qu'il faut que j'ai ?**

En gras dans l'extrait, nous remarquons des tentatives de décontextualisation : sa question « qu'est-ce qu'il faut avoir pour tracer un trait » ne concerne pas que la figure exploitée ici et cherche à avoir une portée plus générale sur les façons d'agir dans la géométrie des tracés (en opposition à la façon d'agir observée des élèves relevant plutôt de la géométrie physique puisqu'ils font « à l'œil »). Néanmoins sa question reste ambivalente compte tenu des termes « tracer » qui renvoie à un « objet graphique » (souligné dans l'extrait) ainsi que celui de « trait », tandis que l'article indéfini « un » (pour un trait) cherche à donner une portée plus générale à l'existence de ce trait (renforcer par le discours injonctif « il faut »). Jules prend également de la distance physique avec le TBI. Il ne s'agit plus de ce trait-là dans cette figure-là comme le suggérait plus tôt l'usage des déictiques, ou un langage d'action (« comme ça », « ce sommet-là », « ici », « là », ...). On retrouve donc la convocation dans le langage de l'opposition explicite, et qui sera récurrente par la suite, entre « objet géométrique » et « objet graphique » au sens de Petitfour (2017). Jules emploie d'ailleurs le terme « objet géométrique » en opposition à celui « d'outil pour tracer » dès la phase d'observation de la figure-modèle en début de séance. Lors de son entretien, interrogé à ce sujet, Jules explique qu'il mobilise ce terme explicitement (sans référence à Petitfour) afin que les élèves construisent « des repères » pour les sensibiliser aux différentes « représentations possibles des objets idéaux ».

Lors de ces diverses remédiations langagières sur l'usage des instruments, on peut relever également des traces du processus de déconstruction dimensionnelle des objets convoqués dans le langage rendant compte d'évolution et de transformation des façons de voir et d'agir des objets convoqués. Par exemple, toujours à partir de ce même extrait, Jules parle d'abord d'« un trait » (1D) en référence à l'objet graphique. L'élève évoque alors l'existence de 2 points de « repère » (0D), toujours dans une géométrie physique. Jules garde dans sa reprise uniquement le terme de point. Subsiste pourtant un implicite fort derrière le mot « point » : on peut penser que certains élèves considèrent seulement les points d'un point de vue graphique (comme un petit point repère) d'autres l'auront compris comme s'agissant de 2 points théoriques qui ne sont pas déterminés à ce stade. Il devient nécessaire de revenir sur le mode d'agir initial pour comprendre que le procédé mobilisé n'est pas valide ici, dans cette façon de penser les objets géométriques (ici la géométrie des tracés). Ce qui nous paraît intéressant c'est que nous relevons de façon récurrente au cours de toutes les séances de géométrie ce même type de conduites langagières (Bulf, 2022 à paraître).

3. Des gestes pertinents ?

Attardons-nous maintenant sur une autre forme de co-ajustement entre l'activité de Jules et celle des élèves. Toujours lors de la toute première situation de reproduction de figure

géométrique de l'année (figure 3), compte tenu des difficultés résistantes des élèves à dépasser des procédures à l'œil, Jules cherche à orienter l'activité des élèves vers la figure-modèle.

Jules : donc si on veut comprendre comment elle est construite cette figure vous avez tout à fait le droit évidemment d'utiliser le modèle et regarder comment elle est faite // vous avez le droit de faire des tracés là-dessus pour comprendre comment elle est construite et non pas être obligé après de choisir des points au hasard //c'est ce qu'on appellera entre nous après l'analyse de la figure [...] maintenant tout le monde travaille sur le modèle [...] je veux que vous fassiez des traits pour essayer de comprendre comment elle est construite.

Jules rend publique une difficulté partagée afin d'engager une nouvelle négociation du contrat. Le discours est plus injonctif qu'auparavant (l'atmosphère se referme) : « si on veut... vous avez le droit... tout le monde travaille... je veux que... ». Ce faisant Jules impose une façon d'agir sur la figure-modèle sans pour autant faire à la place des élèves, il resserre le degré de liberté, dans l'intention de rendre visibles les tracés implicites de la figure modèle. Il amorce une décontextualisation et généralisation voire ritualisation de cette phase, en annonçant publiquement cette nouvelle norme : « on appellera entre nous après l'analyse de la figure ». Cet ajustement peut être considéré comme pertinent (voire efficace) du point de vue du projet d'enseignement car il conduit en effet une majorité des élèves à la procédure experte et à la réussite du problème lors de cette première séance. Pourtant, quelques élèves, après avoir tracé le plus possible de traits sur la figure-modèle comme attendu, n'arrivent pas (encore) à voir géométriquement ce que ces tracés donnent à voir de nouveau qui peut être mis au service de la reproduction attendue. Dans ce cas, l'élève ne transfère pas sur l'amorce les propriétés qui pilotent cette nouvelle façon d'agir. Il ne fait pas « sens » de ces nouvelles traces graphiques et ne consomme donc pas (encore) la rupture avec la géométrie physique. Cette forme d'étayage pourrait alors être apparentée à du sur-étayage ou un effet Topaze (Soury-Lavergne, 1998). Ce qui nous paraît intéressant de remarquer c'est qu'au cours des séances suivantes observées, il apparaît nettement que la majorité des élèves auront modifié leur façon d'agir en commençant par chercher à tracer des traits (voire tous les traits) sur la figure-modèle sans que cette analyse de la figure-modèle soit pilotée par l'enseignant (comme lors de cette première séance). Le pilotage est donc sous-marin, et aura été seulement visible à la séance inaugurale. Quiconque viendrait observer une séance de géométrie au cours de l'année dans la classe de Jules n'observerait pas d'étayage de ce type et pourrait donner à voir l'illusion que seule la situation suffit. Nous faisons donc l'hypothèse que cette forme forte d'étayage pourrait être un geste professionnel didactique de Jules, nécessaire lors de cette séance inaugurale car il ouvre la voie à des perspectives favorables en termes d'apprentissage et participe à l'installation de ce nouveau contrat, bien qu'il puisse s'apparenter à du pilotage serré (ou du sur-étayage donnant lieu à un effet Topaze temporairement). Il nous faudrait investiguer davantage sur l'activité effective des élèves au fil des séances. Nous y voyons là d'ailleurs un questionnement (ou des limites par rapport à notre actuel corpus) d'un point de vue méthodologique : la prise en compte de cette co-activité enseignant-élève(s) de façon synchronique et diachronique.

ÉLÉMENTS DE CONCLUSION ET DISCUSSION

Nous avons rapidement esquissé ici ce que l'on pourrait décrire comme étant une configuration spécifique des gestes d'enseignement dans la classe de Jules (figure 4) qui selon nous favorise une certaine « scénarisation » instituant la CDGS propre à une géométrie des tracés. Nous faisons l'hypothèse que ces dimensions routinières et anticipables des séances de géométrie contribuent à rendre l'élève de plus en plus autonome au fil des séances de géométrie de l'année. Nous retenons aussi de ce travail l'échelle de temps d'observation qui pose des questions ou des perspectives d'un point de vue méthodologique. En effet c'est en

observant sur des temps longs, depuis le « début », que l'on peut mieux comprendre ce qui se joue de façon visible ou non visible, public ou non public, collectivement ou individuellement, entre les enseignants et les élèves.

Nous faisons également l'hypothèse que ce sont les logiques profondes et d'arrière-plan de Jules qui pilotent son architecture, ici doublement cohérente d'un point de vue *ex situ* et *in situ* :

- *Ex situ* : projet global cohérent (même classe de situation, rôle des variables didactiques, ...), structuration ritualisée des séances ;
- *In situ* : des co-ajustements enseignant-élève(s) collectifs/individuels évolutifs aux effets différenciés dans le temps ; des conduites langagières spécifiques récurrentes (évolution et négociation de signification des objets dans et par le langage).

Et si le MMA, tout comme n'importe quel modèle théorique, « n'épuise [pas] le sens de l'agir », pour reprendre la formule de Ricoeur, alors l'on peut poursuivre le travail et s'engager dans l'éclaircissement des « points aveugles » du modèle (Saillot, 2020) ou se poser la question de savoir ce que ce cadre apporte de plus ou de différent par rapport à d'autres cadres théoriques plus usités en didactique des mathématiques. Quels résultats supplémentaires ou complémentaires aurions-nous obtenus si nous avions analysé l'activité de Jules en changeant de « lunettes » ? Il nous reste ainsi à poursuivre le dialogue entre cadres théoriques des didactiques des disciplines.

RÉFÉRENCES

- BAKHTINE, M. (1984). *Esthétique de la création verbale*. Paris : Gallimard.
- BERNIÉ, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de 'communauté discursive' : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie*, 141, 77-88.
- BERTHELOT, R., SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, thèse de doctorat, Université de Bordeaux.
- BRUNER, J.S. (1983/2017, 5e tirage). *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.
- BUCHETON, D. (2009). *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*, Toulouse : Octarès.
- BUCHETON, D. (2019). *Les gestes professionnels dans la classe, Ethique et pratiques pour les temps qui viennent*. Paris : ESF.
- BULF, C. (2022). Quels gestes professionnels d'enseignement au service d'une communauté discursive disciplinaire scolaire ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*.
- BULF, C., MATHE, A.-C., MITHALAL, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, 54, 151-174.
- CHARLES-PEZARD, M., BUTLEN, D., MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP, quelles pratiques ? quelle formation ?* Grenoble : la pensée sauvage.
- CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*, Note de synthèse, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Montpellier.
- DORIER, J.-L. (2010). L'analyse a priori : un outil pour la formation d'enseignants – exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire, *actes du XXXVIème colloque de la Copirelem*, Auch, ARPEME, 80-92.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- FRANÇOIS, F. (1990). *La communication inégale*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.
- HOUEMENT, C., KUZNIAN, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- JAUBERT, M., REBIERE, M. (2010). Gestes professionnels, communauté discursive disciplinaire scolaire et savoirs : le triangle infernal. *CidD Congrès international de didactique*.
- JAUBERT, M., REBIERE, M. (2019). Le scénario langagier didactique, un outil dans le processus de construction des savoirs ? Un exemple : l'enseignement et l'apprentissage de la lecture, *Raisons éducatives*, 23, 153-176.
- JORRO, A. (2006). L'agir professionnel de l'enseignant, conférence au séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la Formation, *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation*, 28 février 2006, CNAM, Paris.
- MATHE, A.-C., BARRIER, T., PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire – Enjeux, ruptures et continuités*. Louvain La Neuve : Academia L'Harmattan, Les sciences de l'éducation aujourd'hui.
- MATHÉ, A.-C., MITHALAL, J. (2019). *L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement*, dans S. Coppé et al. (éds.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*, Grenoble : La pensée sauvage, 47-86.
- PASTRE, P. (2006). *La didactique professionnelle*, Paris : PUF.
- PETITFOUR, É. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition pour un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.
- Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques*. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- SAILLOT, E. (2020). *(S') ajuster au cœur de l'activité d'enseignement-apprentissage. Construire une posture d'ajustement*, Paris : L'Harmattan.
- SENSEVY, G. (2010). Notes sur la notion de gestes d'enseignement. *Travail et formation en éducation* [en ligne], 5.
- SOURY-LAVERGNE, S. (1998). De l'étayage à l'effet Topaze, Regard sur la négociation dans la relation didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 23-1, 9-40.
- VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.
- VYGOTSKI, L.S. (1934/1997). *Pensée et Langage* (Trad. F. Sève). Paris : La dispute.
- WITTGENSTEIN L. (1953) *Philosophical investigations* (Anscombe, G.E.M., trans.) Oxford : Basil Blackwell.

CONTRIBUER AU DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS CONCERNANT LES SAVOIRS TRANSPARENTS PAR UN TRAVAIL SUR LE LANGAGE

Aurélie Chesnais*, Céline Constantin*

RÉSUMÉ

Nos recherches en didactique de la géométrie et de l'algèbre nous ont amenées à identifier des difficultés d'élèves qui pouvaient s'expliquer par la transparence de certains savoirs dans l'enseignement. La poursuite de ces recherches dans le cadre de travaux en cours autour d'un dispositif collaboratif entre enseignant.e.s et chercheur.e.s nous amène à soulever un certain nombre de questions à la croisée de trois pôles fortement imbriqués. Le premier est celui de la transparence des savoirs, le deuxième est celui du développement professionnel des enseignants au sein de dispositifs collaboratifs avec des chercheurs, enfin le troisième concerne le rôle du langage dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Ce texte vise à rendre compte des questions qui émergent à la lumière de premières analyses du processus de secondarisation des discours à partir d'un corpus constitué de vidéos de séances de classes, ainsi que de productions d'élèves dans des tests.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, secondarisation des genres de discours, algèbre, mesure, géométrie

ABSTRACT

Our research into the didactics of geometry and algebra in secondary schools has led us to identify student difficulties that could be explained by the transparency of certain knowledge in classrooms. The continuation of this research in the context of ongoing work on a collaborative arrangement between teachers and researchers leads us to raise a certain number of questions at the crossroads of three strongly intertwined poles. The first is that of the transparency of knowledge, the second is that of the professional development of teachers within collaborative arrangements with researchers, and the third concerns the role of language in the teaching-learning of mathematics. This text aims to give an account of the questions that emerge in the light of initial analyses of the secondarising process of discourse based on a corpus made up of videos of sessions implemented in classes of 6e and 3e, as well as tests proposed to the pupils of these classes.

Keywords: teaching practices, secondarising process of discourse, algebra, measure, geometry

INTRODUCTION

Ce texte vise à rendre compte d'une recherche en cours dont les questions se situent à l'interface de trois pôles fortement imbriqués. Le point de départ de notre recherche est l'identification de difficultés d'élèves dans les domaines de la géométrie et de l'algèbre élémentaire que nos travaux antérieurs nous ont amenées à relier à la « transparence » (Margolinas et Lappara, 2009 ; Chesnais, 2018) de certains objets de savoir. Il s'agit d'une part, de la *mesure* en géométrie (Chesnais et Munier, 2016), d'autre part, de la *substitution* en algèbre élémentaire (Constantin, 2021). Nous considérons ces difficultés et les enjeux d'enseignement et d'apprentissage associés au regard de deux autres axes de recherche : celui du rôle du langage dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques et celui du rôle d'un dispositif collaboratif entre chercheuses et enseignantes dans le développement professionnel des enseignant.e.s. L'enjeu de cette contribution est de soulever un certain nombre de questions qui émergent dans ces trois pôles à partir de quelques premiers résultats issus d'une expérimentation. Afin de problématiser les questions qui nous préoccupent, nous présentons dans une première partie, succinctement, un certain nombre d'éléments liés à la transparence des objets de savoirs considérés. Dans une deuxième partie, nous abordons les éléments de cadrage théorique et la méthodologie adoptée ainsi que le dispositif expérimental autour du travail collaboratif chercheuses-enseignantes. À partir d'analyses de discours

* LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France

mettant en relation prétests, post-tests et épisodes de classe, nous mettons ensuite en évidence quelques résultats concernant des traces d'évolution des pratiques langagières. La discussion permettra enfin de revenir sur les différentes questions soulevées par cette première étape de recherche, concernant les trois pôles.

DES DIFFICULTÉS D'ÉLÈVES ET DES OBJETS DE SAVOIR TRANSPARENTS

1. Substitution

Dans l'enseignement secondaire en France, les analyses de manuels et d'épisodes de classe montrent que les substitutions dans les écritures algébriques ne se réduisent pas au remplacement d'une lettre par un nombre. Ainsi pour développer une expression comme $3x(x+1)$ l'utilisation de l'écriture $k(a+b) = ka + kb$ amène à remplacer k par un monôme tandis que dans les leçons des manuels ou pour la construction de l'identité, k , a , et b sont considérés comme des écritures de nombres. Lorsque l'un des facteurs est une somme de trois termes, un monôme ou une différence par exemple, l'extension des techniques de calcul algébrique est souvent présentée comme allant de soi, alors même qu'elle s'accompagne d'étapes non négligeables. Nous avons identifié plusieurs phénomènes didactiques qui peuvent émerger dans les classes.

2 Exemple de référence Niveau 2.

$$A \times B + A \times C - A \times D = A(B + C - D)$$

Exemple 1 : $\left(7,3x - \frac{1}{3}\right)(1,3x + 2) + \left(7,3x - \frac{1}{3}\right)(-3x + 12)$

Figure 1. – Un écart entre écriture algébrique d'une propriété et exemple

Observons par exemple l'image ci-dessus tirée d'un épisode de classe filmé en 3^e dans une classe « ordinaire ». La forme de l'identité choisie montre une attention portée aux signes et au nombre de termes pour la factorisation de la part de l'enseignante. L'exemple proposé à la suite correspond toutefois à une somme de deux termes. Plus encore, si le remplacement de A est évoqué dans la classe (sans parler tout à fait de remplacement, il s'agit en réalité davantage de « reconnaître ce qui joue le rôle de A »), les autres substitutions, celles de B, de C et de D, restent complètement implicites. En l'absence de la notion de substitution, les discours ne peuvent pas véritablement prendre appui sur les écritures symboliques des propriétés. La substitution paraît donc être un objet de savoir transparent dans la classe.

Nous faisons l'hypothèse que ceci contribue à expliquer les difficultés observées dans d'autres recherches liées au faible rôle des propriétés algébriques pour soutenir et légitimer les manipulations d'écritures symboliques d'une part, et à la déstabilisation des techniques des élèves selon les formes d'expressions données d'autre part (par exemple dans Tonnelle 1979, ou Assude, Coppé et Pressiat, 2012). Nos travaux ont de plus montré que des difficultés liées à la modélisation peuvent aussi être corrélées à la transparence des savoirs autour de la substitution (Constantin, 2021). Prenons l'exemple d'un programme de calcul donné dans une classe de 5^e: « choisir un nombre, ajouter 3, multiplier le résultat obtenu par 2 ». Une élève produit deux égalités : $n + 3 = a$ puis $a \times 2 = b$. Elle doit montrer que le programme de calcul donné est équivalent à un autre. Cela nécessite de se ramener à une expression ne dépendant que d'une seule variable, ce qu'elle ne parvient pas à faire. Or, ceci n'est possible qu'à la condition de pouvoir interpréter la première égalité comme une égalité de substitution, le dénoté n'étant plus numérique mais littéral (Drouhard et Panizza, 2012). Plus généralement, l'étude épistémologique et didactique de la notion de substitution montre que les savoirs qui s'y rapportent sont bien plus complexes qu'il n'y paraît sans doute de prime abord.

2. *Mesure*

Le mot *mesure* renvoie dans les classes, au début du collège, à deux types d'objets différents. Par exemple, dans la phrase « [...] des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai » issue du manuel Triangle 5ème Hatier, 2001 cité par Houdement (2007), le terme *mesure* renvoie à l'utilisation d'un instrument et on parle en effet de mesurer (une longueur, un angle), lorsque l'on emploie la règle ou le rapporteur. Cependant, le terme *mesure* (en tant que substantif ou verbe) renvoie aussi (voire surtout), dans le discours mathématique de référence –et, de fait, dans les classes de collège – à une valeur que l'on ne peut obtenir par l'utilisation d'un instrument : la diagonale d'un carré de côté 1 a pour *mesure* $\sqrt{2}$. Sachant que beaucoup des énoncés de géométrie au collège portent sur des mesures (ou plutôt sur des grandeurs, mais elles sont de fait présentées et utilisées en se ramenant à des mesures)¹, on pourrait ainsi reformuler la phrase précédente par « des mesures sur un dessin ne suffisent pas à établir des mesures », embarquant les deux significations du mot.

Cela nous a amenées à proposer une distinction entre ce que nous avons appelé la « mesure empirique » et la « mesure théorique » (Chesnais et Munier, 2016). La *mesure empirique* désigne ainsi la valeur obtenue à l'aide d'un instrument (par mesurage)² ; elle est par nature décimale ou, au mieux, rationnelle, et est soumise à incertitude (liée à la précision des instruments). La *mesure théorique* est soit une donnée, soit établie à partir des données et de démonstrations (impliquant souvent des calculs) ; c'est un nombre réel, une valeur « exacte » et unique. La première est liée au dessin, la seconde à la figure, si l'on s'appuie sur la distinction entre dessin et figure (Laborde et Capponi, 1994). Dans les « mathématiques constituées » (Vergnaud, 1990, Chesnais, 2021), seule la mesure théorique est légitime et les questions de précision et de dispersion sont non pertinentes. Cependant, une problématique didactique émerge si l'on veut construire la mesure théorique sur la base de la mesure empirique, comme c'est le cas dans la logique des programmes de géométrie français. Le mathématicien suffisamment expert (notamment l'enseignant) manipule dans son propre discours la distinction et la relation entre les deux, via l'idée qu'une mesure empirique est une « valeur approchée » de la mesure théorique, celle-ci étant la « vraie valeur ». Pour les élèves du début du collège, dont la seule référence est le dessin et pour qui les figures, et donc la mesure théorique, *n'existent* pas encore, les mesures empiriques ne peuvent être que des « valeurs approchées qui ne sont approchées de rien »³ (Lebesgue, p. 18). Des analyses de manuels, de séances de classes et de travaux de didactique des mathématiques nous ont permis de montrer que la distinction et l'articulation entre ces deux aspects de la mesure ne sont pas prises en charge comme objets d'apprentissage, apparaissant ainsi comme un savoir transparent, alors même qu'elles sont cruciales pour la compréhension du changement de paradigme géométrique (ibid.).

Nous faisons l'hypothèse que la transparence des savoirs ainsi identifiés dans les domaines géométrique et algébrique les rend invisibles pour les élèves (Chesnais, 2018), ce qui se traduit dans les discours et pèse sur les apprentissages. La question qui se pose alors est celle

¹ Par exemple, il s'agit souvent de calculer la longueur d'un côté etc. quand on fait utiliser le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès.

² En réalité, comme le dit Perdijon, « il ne suffit donc pas d'un nombre pour exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance » (Perdijon, 2012). L'habitude en mathématiques est en revanche de donner uniquement le premier nombre, l'amplitude de l'intervalle restant implicite.

³ Pour reprendre la formule de Lebesgue évoquant l'approximation des réels par les décimaux lorsque les réels n'ont pas encore été construits.

de la possibilité et des modalités envisageables de prise en compte de ces savoirs dans les classes, notamment sur le plan langagier et du bénéfice possible pour les apprentissages.

3. Rôle du langage dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques et question de recherche

Nous situant dans la perspective des travaux de Vygotski (1934/1997) et Vergnaud (1990), nous considérons l'activité langagière comme étant au cœur du processus de conceptualisation, le langage étant à la fois objet et moyen d'apprentissage (Chesnais, 2018, 2021). L'activité langagière permet des -et témoigne de- réorganisations cognitives par des reformulations, des généralisations ou des instanciations, des mises en relation qui jouent un rôle dans le processus de conceptualisation vu comme construction de concepts scientifiques à partir de concepts quotidiens (Jaubert et Rebière, 2012, Rebière, 2013). Jaubert et Rebière (2012) qualifient de « processus de secondarisation des genres de discours » l'évolution des discours dans la classe depuis des discours de genre premier vers des discours de genre second accompagnant le processus de conceptualisation, celui-ci étant vu comme une évolution de concepts antérieurs (jouant alors le rôle de concepts quotidiens) vers des concepts « plus scientifiques ». Les discours de genre premier, associés aux concepts quotidiens sont très liés à l'action et à l'immédiateté des interactions ; les discours de genre second liés aux concepts scientifiques sont plus réflexifs, distanciés par rapport à l'action et plus proches des formes conventionnelles et culturelles propres à une discipline (Bakhtine, 1984). La secondarisation des discours est une forme d'« épaissement du langage » associé à la construction de significations partagées dans une communauté discursive (disciplinaire scolaire). A l'instar de Jaubert et Rebière (2012) ou Gobert (2014), nous ne considérons pas ce processus comme linéaire mais susceptible de se réaliser au moyen de boucles de secondarisation, « un énoncé premier vers un énoncé second qui devient premier puis second pour être premier d'un second devenant à son tour premier ... » (Gobert, 2014, p. 67).

Nous cherchons donc à déterminer comment et dans quelle mesure l'introduction dans les classes d'éléments issus de la recherche elucidant certains éléments de savoirs transparents *via* un travail collaboratif entre chercheuses et enseignantes, est susceptible d'enrichir le processus de secondarisation des discours.

MÉTHODOLOGIE, DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET CORPUS

Dans cette partie nous présentons brièvement un certain nombre de caractéristiques du travail collaboratif avant de préciser le corpus des données recueillies.

Nous travaillons avec un même groupe de trois ou quatre enseignantes selon les thèmes (trois enseignantes participent au travail sur les deux domaines). Le travail collaboratif s'organise autour de rencontres régulières entre chercheuses et enseignantes. Il s'agit de boucles itératives formées de séances de discussions autour de la préparation de séquences et de séances, de mise en œuvre dans les classes et de discussions en groupe *a posteriori*. Le projet se déployant sur plusieurs années, on compte 6 à 10 séances de travail collaboratif par an selon les années et les thèmes. Elles concernent des classes de 6e pour le thème de la mesure en géométrie et des classes de 3e pour le thème de la substitution dans l'algèbre élémentaire. Le corpus sur lequel nous allons nous appuyer dans ce texte est constitué de vidéos de séances de classes, et de prétests et post-tests individuels complétés par quelques entretiens auprès d'élèves. Un certain nombre de tests ont également été proposés à d'autres classes dont les enseignants ne font pas partie du projet. Sans les considérer à strictement parler comme des classes témoins, notamment en raison de limites méthodologiques liées aux périodes de l'année et aux enseignements reçus, les résultats de ces tests donnent des indications pour éclairer les résultats des tests proposés aux élèves des classes expérimentales. Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Dans les séances de classes, nous avons identifié des épisodes clés, c'est-à-dire des épisodes correspondant à des tâches clés ou identifiées a posteriori comme des occasions de discussion sur les objets qui nous intéressent. Nous analysons la secondarisation des discours au regard de déplacements de positionnements énonciatifs, d'articulation de différentes « voix » ou de dénivellations, qui constituent des indicateurs potentiels du processus de conceptualisation (Rebière, 2013, Gobert, 2014). Du point de vue technique, nous avons utilisé le logiciel de textométrie TXM pour les analyses de discours (Heiden et al., 2010).

PREMIERS RÉSULTATS

Certaines analyses étant en cours, les résultats quantitatifs ne sont pas disponibles pour l'ensemble des items évalués. Les premiers résultats des analyses des prétests confirment que l'invisibilité des savoirs pour les élèves pèse sur les apprentissages. La mise en regard d'épisodes de classe et des comparaisons entre prétests et post-tests à la fois de manière quantitative globale et de manière qualitative pour certaines productions de mêmes élèves nous amènent à valider l'hypothèse selon laquelle la prise en charge de certains éléments autour des savoirs identifiés peut constituer un levier pour le processus de conceptualisation.

1. Substitution

Nous avons réalisé des prétests et post-tests dans trois des classes expérimentales de 3^e (72 élèves). Ces tests ont été passés au mois de septembre et au mois de juin ; ils ont été complétés par des entretiens menés avec trois à six élèves par classe.

Les prétests confirment que le concept quotidien de substitution est largement lié au remplacement d'une lettre par un nombre. Par exemple, dans les classes expérimentales, 62,5% des 72 élèves estiment qu'il n'est pas possible de remplacer une lettre comme n par un monôme comme $2x$ ou par une somme comme $x + 5$ en expliquant par exemple que « ce ne peut pas être un calcul mais un chiffre ». A la question « peut-on utiliser $k(a + b) = ka + kb$ pour développer $3n(5n + 1)$ », seuls 32% répondent oui contre 43% pour $3(a + 7)$. Ceci tend à valider notre hypothèse concernant la nécessité de prendre en charge un certain nombre d'éléments liés à la substitution pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Par ailleurs, on note une évolution des discours dans les classes où une séquence autour de la substitution a été mise en œuvre que l'on n'observe pas dans les autres classes, même si les analyses des tests ne montrent pas de différences significatives dans les taux de réussite. Prenons l'exemple de deux tâches très proches⁴ proposées entre le mois de septembre et le mois de juin. Ces tâches sont inspirées des travaux de Küchemann (1981). Les énoncés sont les suivants : « Si $a + b = 5$ alors $a + b + 3 = \dots\dots$ » et « Si $n = x + 1$ et $n + x + 1 = 20$ alors $n = \dots\dots$ ». Il est de plus demandé aux élèves d'expliquer comment ils ont trouvé leur réponse. Les explications montrent que le terme de remplacement est très peu utilisé (4 élèves sur 72 l'utilisent lors des prétests) même si on peut considérer au regard de certaines réponses que des substitutions sont employées implicitement, tandis qu'ils sont 32 % à le mobiliser explicitement lors des post-tests. L'emploi de connecteurs logiques est bien plus présent en post-test (en comparaison des prétests et avec les classes témoins), de même qu'on peut noter la présence d'adverbes exprimant la nécessité. Ainsi pour la première tâche, Alice explique lors du prétest qu'elle trouve $n = 10$ « car $20 - n = x + 1$, en fait je sais pas trop comment expliquer ». Lors du post-test, elle explique sa réponse de la manière suivante : « J'ai trouvé en remplaçant le « n » de l'équation $n + x + 3$ par $x + 3$ car $n = x + 3$, ce qui a donné $x + 3 + x + 3$ et comme $x + 3 + x + 3 = 2 \times (x + 3)$ et que le résultat de l'équation est 20 alors

⁴ Seules les valeurs des nombres ont été modifiées, ce qui n'est pas sans poser question du point de vue méthodologique même si les tests sont « éloignés » dans le temps.

$x + 3$ est forcément égale à 10 car c'est la moitié donc $n = 10$ ». Si le terme d'équation semble se référer au membre de gauche seulement, le concept de substitution est mis en relation avec d'autres concepts (expression, égalité), l'égalité $n = x + 3$ étant interprétée comme une relation entre substituante et substituée. Parmi les éléments de discours, on peut noter que les arguments de la substitution sont identifiés, permettant un degré de conscientisation plus élevé de la pratique, ce qui est caractéristique des concepts plus scientifiques. En remontant aux épisodes de classe qui ont pu permettre de développer ce genre de discours, on peut identifier des tâches qui ont été aménagées pour ce faire (une tâche de travail de la substitution du point de vue technique et une tâche consistant à passer d'une expression d'une aire ou d'un périmètre à deux variables à une expression à une seule variable en appui sur une égalité). La relation avec l'égalité a néanmoins été particulièrement mise en avant. Par exemple, toujours dans cette classe, pour introduire la substitution, l'enseignante a demandé aux élèves d'effectuer des substitutions pour calculer $x^2 \times x^3$, en remplaçant x^2 par $x \times x$ et x^3 par $x \times x \times x$, les égalités afférentes étant au tableau. Elle introduit une nouvelle interprétation du signe « = » ainsi que le montre l'extrait suivant :

P : Une chose très très importante en mathématiques c'est le signe égal, qu'est-ce que ça veut dire pour vous égal, que j'ai écrit là, sur ces égalités-là, qu'est-ce que ça signifie, Dim ?

Dim : Ben ça veut dire que les deux autres [...] sont égal heu pareil, ça représente la même chose [...]

Kev : Ben j'allais dire que ça correspond à la même chose d'un côté c'est juste une autre écriture

P : C'est juste une autre écriture d'une même chose, ok c'est intéressant, quoi d'autre ? Alors moi je vais vous donner une info très importante c'est que puisque c'est une autre écriture de la même chose, à n'importe quel moment je peux remplacer une écriture par l'autre si j'en ai besoin [...]

Les tâches motivant l'usage de la substitution sont peu nombreuses voire au potentiel didactique limité avec des concurrences d'autres techniques moins coûteuses comme ici (ajouter les exposants). On peut également noter que c'est l'enseignante qui prend en charge les reformulations de manière très majoritaire tout au long de la séquence. Pourtant, lors des post-tests, apparaissent des objets de discours et une extension des significations et des domaines d'usages de certaines expressions. Par exemple, le mot « valeur » est réservé dans les prétests à la désignation d'un nombre. Dans les post-tests, et pour certains élèves, le nom peut aussi désigner des expressions comme $a + 5$ dans les tentatives de généralisations opérées par les élèves pour justifier (ce qui n'est pas sans poser question du point de vue des mathématiques) même si la recherche des occurrences liées à cet usage montre que ce n'est que lors d'une séance que c'est apparu⁵. On peut noter aussi une certaine diversité des moyens langagiers utilisés par les élèves pour parler des substituées ou substituantes. Certains élèves parlent de *nombre*, d'autres de *résultat* (pour désigner $a + 5$), ce qui renvoie aussi à des besoins langagiers qui accompagnent une attention portée à de nouveaux objets (les expressions et sous-expressions associées aux remplacements), qui ne sont pas objets de discours au départ⁶. Ce faisant, des expressions algébriques comme $x + 3$ deviennent pour certains élèves des objets de discours et semblent se constituer comme objets sur lesquels il est possible d'opérer, ou une forme de désignation de nombre au-delà de l'idée d'une opération en suspens. Ces premières analyses permettent d'identifier des traces du processus de secondarisation des discours même si les analyses restent à compléter. Elles montrent aussi une certaine diversité dans les classes pour désigner les sous-expressions, ce qui soulève des

⁵ Notons qu'il a pu y avoir des reprises à d'autres moments de l'année, non concernés par le recueil de données. Toutefois, le fait que cet usage ne soit pas généralisé à l'ensemble des élèves nous amène plutôt à parler d'une généralisation que permet d'opérer un discours sur les substitutions.

⁶ C'est également le cas dans le test réalisé après enseignement du « chapitre » autour du développement dans une autre classe de 3^e ne participant pas à l'expérimentation.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

questions sur lesquelles nous reviendrons après avoir présenté les résultats concernant la mesure.

2. *Mesure*

Des tests ont été menés dans 10 classes de sixième (229 élèves), pour moitié situées en éducation prioritaire (EP), complétés par des entretiens, avec trois à huit élèves par classe.

Nous présentons ici les résultats obtenus à partir de l'Item 3 (Q3) des prétests. L'Item indiquait aux élèves que l'on s'intéressait à la longueur du quart d'une bande de 9,3 cm⁷ et proposait deux réponses d'élèves imaginaires :

Pierre : j'ai plié ma bande en deux et encore en deux et j'ai mesuré un morceau avec ma règle. La longueur d'un quart de la bande est 2,3 cm.

Mehdi : J'ai fait 9,3 divisé par 4 avec ma calculatrice. Elle affiche 2,325. La longueur d'un quart de la bande est 2,325 cm.

La consigne était : « Quelle est selon toi la longueur cherchée ? Tu peux choisir la réponse de Pierre ou Mehdi ou donner une autre réponse. Justifie ta réponse. » La calculatrice était autorisée et les élèves disposaient d'une bande annoncée comme étant de longueur 9,3 cm. Un tiers des élèves choisit la valeur exacte (2,325 cm), avec une proportion qui varie de 8% à 58% selon les classes ; elle est de 22% en moyenne en EP et 37% en contexte ordinaire.

Les justifications proposées par les élèves lorsqu'ils choisissent cette réponse montrent qu'ils ont une conception proche de la conception experte (il y a une « vraie » valeur et la règle en donne une valeur approchée), même si le langage qu'ils emploient est encore peu « orthodoxe », par exemple Amyad : « La règle n'a pas de milli milli mètre alors que la calculatrice peut calculer vraiment ». En particulier, l'emploi de termes de la famille de « précis » ou « exact » est très rare.

En revanche, pour certains élèves (44% en moyenne, 12 à 72% selon les classes), la mesure renvoie à la mesure empirique, sans qu'ils soient capables d'envisager que la longueur puisse être un nombre avec plus d'une décimale, c'est-à-dire autre chose qu'un nombre entier de centimètres et de millimètres, ou encore qu'un nombre que l'on peut lire sur la règle ». Et même, pour certains élèves, il semble que le calcul donne une valeur approchée de la (vraie) mesure, qui est celle que l'on peut lire sur une règle (avec une position inverse de celle de l'expert !). Ainsi par exemple Eugénie : « J'ai fait $9,3 : 4 = 2,325$. Je l'ai arrondi au dixième car sur une règle graduée il n'y a que les centimètres et les millimètres. »

Pour un nombre important d'élèves, le fait que la mesure renvoie à ce que donne l'instrument⁸ nous incline à valider notre hypothèse : la prise en charge dans les classes de la distinction et l'articulation entre les deux acceptions du mot semble nécessaire pour envisager les enjeux didactiques liés à la mesure en géométrie au début du collège. L'absence d'identification de cette distinction pourrait en effet contribuer à expliquer l'absence d'efficacité des discours fondés sur le discours expert.

Suite à ces tests, une séquence (concernant les angles en sixième) a été co-élaborée dans le cadre du dispositif collaboratif sur la base de la séquence que les enseignantes avaient élaborée entre elles les années précédentes. Les résultats dans les posttests indiquent que 95% des élèves considèrent des valeurs théoriques dans au moins une des tâches même si les réponses fluctuent selon certains facteurs (grandeur longueur/angle, le fait de donner un dessin à main levée / aux instruments etc.) ; 36 % des élèves distinguent les deux types de mesures dans leurs discours dans au moins une tâche, en utilisant essentiellement des modalisateurs (mesure /valeur théorique, théoriquement, précis, valeur mesurée), contre 0%

⁷ Précisons que l'on s'était assuré en amont que les élèves savaient ce qu'était le quart d'une bande et que tous les quarts avaient la même longueur.

⁸ Même si l'interprétation que l'on peut en faire mêle des aspects liés au contrat didactique et à la conceptualisation, sans qu'il soit possible de les distinguer.

dans les classes témoins. 18 % des élèves mentionnent la controverse entre les deux réponses possibles contre 0 % dans les classes témoins. Ces réponses sont liées à des traces d'une évolution des discours des élèves : 19% des élèves des classes expérimentales emploient le nom commun *mesure* contre 0 % dans les classes témoins, et 99% des élèves des classes expérimentales emploient des conjonctions de coordination (mais, alors que, or) indiquant des formes de raisonnement, contre 34 % des élèves dans les classes témoins. On y décèle également des traces d'hétéroglossie. Par exemple, dans une des tâches où on demandait aux élèves de dessiner un angle de 89° puis s'il était droit, Baptiste répond « oui et non. En mesures théoriques, ce n'est pas un angle droit (89°), mais en valeurs mesurées, non, parce qu'un rapporteur est précis au degré près ». On observe pour certains élèves une évolution très nette, comme par exemple pour Ambre qui, dans le prétest à la Q3 répondait : « Je n'ai pas compris pourquoi [le résultat de 9,3:4] est 2,325 puisque c'est 2,3 », explicitant le fait qu'elle n'arrive pas à mettre en relation les deux valeurs, la valeur empirique constituant la valeur de référence, tandis que le rapport est établi et pris en charge langagièrement par des désignations différenciées des mesures et par des conjonctions de coordination dans le posttest : « non parce que la mesure de l'angle ABC est 89° et la mesure théorique d'un angle droit est de 90° . ».

La mise en relation de ces effets avec l'analyse des séances de classes nous amène à identifier des épisodes contribuant à la secondarisation des discours dans la classe. Voici par exemple un extrait de séance de classe, à l'occasion du travail sur l'usage du rapporteur pour mesurer des angles, dans le cas de trois angles adjacents formant un angle de 180° , alors que les réponses données sont 32, 87 et 63 :

Raphaël : Les deux angles, enfin les trois angles, ça devrait faire 180 degrés, mais là, ça ne le fait pas.

P : Alors on est d'accord que théoriquement, cet angle devrait mesurer 180 degrés puisqu'on a bien un angle plat qui est formé par deux demi-droites qui forment une seule droite, d'accord ? Alors maintenant, ça, c'est la théorie, c'est ce qu'on appelle la valeur théorique. Maintenant, on va regarder en pratique, on est allé mesurer avec le rapporteur et nous, qu'est-ce qu'on a trouvé ? [...]

P : Donc là, on est avec un outil de mesure. L'outil de mesure ne peut pas être exactement précis, c'est toujours à plus ou moins un degré, donc forcément, chaque fois, on a plus ou moins un degré d'écart, et à la fin, donc on ne pourra pas trouver forcément 180 degrés. Mais ça, on a ajouté les valeurs qu'on a mesurées, donc il faut bien distinguer les valeurs qu'on a mesurées avec le rapporteur qui sont toujours précises à plus ou moins un degré, et la valeur théorique parce que là, on dit « comme elles forment une droite, ces deux demi-droites, donc forcément c'est un angle plat et ça fait 180 degrés ». Mais ça ne veut pas dire que nos mesures elles étaient fausses. Ça veut dire qu'il faut séparer deux choses. Il y a les valeurs qu'on mesure avec le rapporteur qui seront toujours imprécises entre guillemets, qui seront valables à plus ou moins un degré près, et puis il y a la valeur théorique, donc là oui, c'est la théorie, ces deux demi-droites, elles forment une droite, donc ça doit faire pile 180 degrés.

Le discours est essentiellement porté par l'enseignante, qui introduit à cette occasion des moyens langagiers de prise en charge de la distinction et la mise en relation (qui seront retravaillés par la suite). On note notamment des processus de nominalisation des deux types de mesures, avec l'usage de « valeur théorique » d'une part et de « valeurs qu'on a mesurées » d'autre part ; on note aussi l'utilisation du conditionnel (« cet angle devrait mesurer 180° ») et d'un certain nombre de moyens syntaxiques pour pointer une distinction entre « deux choses » (« mais », « il faut bien distinguer », « il y a ..., et puis il y a... »).

L'étude de l'ensemble des discours dans les 3 classes de l'expérimentation a fait apparaître une secondarisation des discours de la classe (même si la part de discours produit par les élèves reste globalement faible) qui s'appuie essentiellement sur de tels processus de nominalisation (Chesnais, 2021).

DISCUSSION

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Si les premiers résultats tendent à valider l'hypothèse selon laquelle les objets de savoir identifiés par la recherche en didactique peuvent jouer un rôle quant aux apprentissages (tant du point de vue de certaines difficultés du fait de leur transparence que de leur potentialité au vu de la secondarisation des discours), la question de la manière dont ils peuvent être pris en charge par les enseignants dans les classes reste ouverte selon nous. Cette question est d'autant plus ouverte que les savoirs identifiés ne sont pas des savoirs disciplinaires usuels, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tout à fait d'équivalent dans les mathématiques constituées actuelles. Plus encore, nous ne considérons pas la substitution ou la distinction entre mesure empirique et mesure théorique comme des objets d'enseignement usuels, dont on donnerait une définition et des propriétés, mais plutôt comme des outils de l'activité. Quelle transposition viable de ces objets peut-on dès lors penser ? Nous faisons l'hypothèse d'une nécessaire prise en compte des pratiques et même d'une forme de collaboration entre enseignants et chercheurs pour ce faire. De fait, le dispositif collaboratif amène à interroger le rôle du chercheur. Le parti pris ici est celui de l'aménagement de tâches existantes dans les classes (à partir des fiches utilisées par les enseignantes dans leur classe) en identifiant des potentialités au regard des objets introduits dans une logique « opportuniste » (Rogalski et Robert, 2015) pour le chercheur. De nouvelles tâches peuvent aussi être envisagées en réponse à des enjeux identifiés via la collaboration. Comment dès lors les préoccupations des chercheuses peuvent-elles rencontrer celles des enseignantes ? Quels déplacements (du point de vue écologique et langagier) s'opèrent nécessairement dans les discussions au cours du travail collaboratif, mais aussi pour et dans la classe ? Une autre question est donc celle de la légitimité de ces savoirs : n'étant pas à strictement parler mathématiques, dans quelle mesure cela peut-il peser sur les choix possibles pour les enseignants ? Dans l'une des classes de 3e observées, une enseignante explicite que parler de substitution ou de remplacement n'a pas d'importance, tout en précisant certains éléments importants à identifier lorsqu'on les effectue (le signe de la multiplication ou les parenthèses, ou même la possibilité de le faire lorsqu'on dispose d'une égalité). En géométrie comme en algèbre, les moyens langagiers élaborés pour la prise en charge dans la classe ne correspondent pas exactement à ce que le chercheur aurait pu envisager, ce que nous considérons comme un processus normal voire nécessaire.

Dans une logique de « comprendre pour transformer, transformer pour comprendre », il s'agit aussi de considérer la « perturbation » du système des pratiques, liée à l'introduction d'un objet de savoir transparent, comme permettant l'étude d'éléments de logiques des pratiques et des dynamiques de développement professionnel engagé via le dispositif collaboratif. De fait, il nous semble nécessaire de chercher à mieux cerner comment les objets du chercheur sont mis au travail dans le dispositif collaboratif, peuvent outiller les pratiques des enseignantes au regard de préoccupations qui peuvent être différentes, ce qui en retour peut aussi ouvrir une forme d'investissement qui n'était pas prévue par la recherche. Du point de vue du chercheur, ces objets sont considérés comme utiles pour interpréter des erreurs ou des difficultés d'élèves, en lien avec des enjeux d'enseignement peu identifiés par la profession. De fait, cela amène nécessairement la question de l'identification ou de la réinterprétation dans le travail collaboratif : quels observables communs peuvent permettre une rencontre et la possibilité même de l'introduction de ces objets du chercheur ? Nous faisons l'hypothèse que ce sont aussi des outils d'interprétation utiles pour l'enseignant ; toutefois, l'expérimentation a montré que ce n'est qu'à partir d'un premier travail de problématisation conjointe que certaines erreurs deviennent perceptibles pour certains enseignants. L'une des particularités de ce dispositif est qu'il est pris dans une temporalité assez longue (de l'ordre d'au moins 3 ans), ce qui permet aussi d'interroger des évolutions sur un temps long. Enfin, il nous semble nécessaire de réinterroger la notion de savoirs

transparents et des conditions qui les rendent éligibles à devenir des objets pertinents pour ce type de travail collaboratif.

RÉFÉRENCES

- ASSUDE, T., COPPE, S. & PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. Dans Coulange L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L. & Robert, A., Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série (pp.35-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BAKHTINE, M. (1984). Esthétique de la création verbale, Paris, Gallimard.
- CHESNAIS, A. (2021). Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices. ZDM, 2021-2.
- CHESNAIS, A., & CONSTANTIN, C. (2020). Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics. Communication at the 7th ETC 'Language in the Mathematics Classrooms (Montpellier, February, 18th-21th).
- CHESNAIS, A., & MUNIER, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathe, A.-C. & Mounier, E., Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (pp. 212–237). Paris : IREM de Paris.
- CONSTANTIN, C. (2019). Substitutions et transformations de mouvement : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique. Dans Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques (pp. 49-64). Ouvrage collectif coordonné par Maryse Maurel.
- CONSTANTIN, C. (2021). La substitution : points de vue écologique et sémiolinguistique. Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg, 26, 183-194.
- DROUHARD J.-P., ET PANIZZA, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM, 209-235.
- GOBERT, S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation. Spirale – revue de recherches en éducation, 54, 65-84.
- HEIDEN, S., MAGUE, J.-P., PINCEMIN, B. (2010a). TXM : Une plateforme logicielle open-source pour la textométrie – conception et développement. In Sergio Bolasco, Isabella Chiari, Luca Giuliano (Ed.), Proc. of 10th International Conference on the Statistical Analysis of Textual Data - JADT 2010 (Vol. 2, p. 1021-1032). Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, Roma, Italy.
- HOUEMENT C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, Repères IREM, 67, 69-84.
- JAUBERT, M. & REBIÈRE, M. (AVEC BERNIÉ, J.-P.) (2012). Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : L'hypothèse énonciative. Forum lecture.ch, 2012(3). https://www.forumlecture.ch/sysModules/obxLeseforum/Artikel/476/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf
- KÜCHEMANN, D. (1981). Algebra. Dans Hart, K (Eds), Children's understanding of mathematics 11-16 ; 102-119.
- LABORDE, C., CAPPONI, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14/1-2, 165-209.
- LEBESGUE, H. (1975). La mesure des grandeurs. Albert Blanchard. 184 p. Vygotski
- MARGOLINAS, C., & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans Rocheix, J.-Y., & Crinon, J. (dir.). La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp. 19-32). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- REBIÈRE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner, et al. (éds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROGALSKI, J., & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Raisons Éducatives, 19, 95-114.
- TONNELLE, J. (1979). Le monde clos de la factorisation au premier cycle. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels [The theory of conceptual fields]. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3), 133-170.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

ANALYSE DE LA PRATIQUE DES ENSEIGNANTS STAGIAIRES EN LIEN AVEC DES DISPOSITIFS DE FORMATION : CROISEMENTS DE DEUX CADRES THEORIQUES

Christine Choquet*, Sylvie Grau*

RÉSUMÉ

Cet article rend compte d'une recherche menée sur des situations de formation initiale proposées en INSPE¹ à des professeurs de mathématiques stagiaires afin de repérer et comprendre comment ces éléments de formation se concrétisent dans leurs pratiques. Deux symposiums ont travaillé en parallèle avec des approches différentes et complémentaires. Le premier a effectué une étude dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert 2008). Celle-ci a mis à jour des relations entre les représentations du métier et de l'enseignement-apprentissage des mathématiques du formateur d'une part et du professeur stagiaire d'autre part (Choquet, à paraître). Le deuxième a analysé l'évolution de la pratique de professeurs stagiaires, en tentant de repérer des modifications significatives des principes qui organisent leur activité, dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (Fabre, 2006 ; Grau, 2020). La confrontation des analyses et des résultats de ces deux symposiums amène à repérer des conditions favorables à l'évolution des pratiques des professeurs stagiaires, et à penser des alternatives aux dispositifs de formation déjà existants.

Mots clefs : Formation initiale, Analyse de pratiques, Double approche, Problématisation.

ABSTRACT

This article reports on research carried out on initial training situations offered in INSPE to pre-service mathematics teachers in order to identify and understand how these training elements materialize in their practices. Two symposia worked in parallel with different and complementary approaches. The first carried out a study within the framework of the dual didactic and ergonomic approach (Robert 2008). This has updated the relationships between the representations of the profession and the teaching of mathematics of the trainer on the one hand and the pre-service teacher on the other (Choquet, forthcoming). The second analyzed the evolution of the practice of pre-service teachers, attempting to identify significant changes in the principles that organize their activity, in the context of learning by problematization (Fabre, 2006; Grau, 2020). The confrontation of analyzes and results of these two symposia leads to identifying favorable conditions for the evolution of the practices of teachers training, and to think of alternatives to the already existing training systems.

Key words: pre-service teachers, teachers training, didactic and ergonomic approach, problematization

Plusieurs recherches (Houdement & Kuzniak, 1996 ; Robert, 2008 ; Grugeon-Allys, 2009 ; Sayac, 2012) interrogent la formation des professeurs des écoles et des professeurs de mathématiques. Elles amènent à mieux appréhender les questions relatives à la formation initiale en recommandant d'établir

« [...] des scénarios de formation, qui articulent des éléments théoriques et des expériences en classe, et qui puissent être évalués par des recherches » et en insistant sur le fait que « [...] concevoir de tels scénarios implique à la fois un travail explicite de transposition de certaines recherches : tant sur les apprentissages des élèves que sur les pratiques et leur formation, un travail d'ingénierie longue, avec la mise au point des modalités de ces formations, une réflexion sur les formateurs et peut-être une certaine formation de ces derniers » (Robert, 2005, p. 213)

Lors de cette contribution, nous nous associons à ces recherches en mobilisant deux cadres théoriques afin de décrire pour les comprendre les effets de la formation sur les pratiques des professeurs débutants (Choquet, 2019). Notre étude s'intéresse plus particulièrement à des séances ordinaires élaborées et mises en œuvre par le professeur (et non adossées à des ingénieries didactiques élaborées avec un chercheur). Elle est ainsi en accord avec une représentation de la réalité de la classe de mathématiques

* INSPÉ, Nantes Université, CREN

¹ Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation

ANALYSE DE LA PRATIQUE DANS LE CADRE DE LA DOUBLE APPROCHE

Le travail, engagé dans un symposium de l'Inspé de l'Académie de Nantes, s'inscrit dans le prolongement de recherches existantes qui montrent que « *les difficultés mises en évidence dans les pratiques des débutants nous incitent, en tant que formateurs et chercheurs, à réfléchir davantage aux différents types de savoirs véhiculés en formation* » (Charles-Pézarid, Butlen & Masselot, 2012, p.15). Notre étude contribue à les enrichir en proposant deux axes de travail : d'une part, une analyse de potentiels effets de choix de contenus de formation (effectués par des formateurs) et d'autre part, un repérage de l'influence des pratiques de ces formateurs sur le processus de développement des pratiques des enseignants débutants participant à ces formations.

1. Cadrage théorique

Dans cette étude, le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique est mobilisé. Les travaux de Robert (2008) et Grugeon-Allys (2009) confirment que le formateur, au-delà de la mise en œuvre de modalités de formation et de la transmission aux participants à la formation de savoirs didactiques, participe au développement des pratiques professionnelles des futurs enseignants. Nous adoptons le choix de définir la pratique d'un enseignant mais également celle d'un formateur en considérant tout son travail avant, pendant et après les séances réalisées en classe/en formation (Sayac, 2012) et en englobant « *tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas [...]* » en classe (Robert, 2008, p. 59), observable dans l'activité même d'enseignement ou de formation mais également dans les activités qui en découlent chez les élèves ou les professeurs débutants participant à la formation. Le cadre de la double approche nous permet d'envisager l'étude de la pratique du professeur débutant et celle du formateur selon cinq composantes - cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle - (Robert & Rogalski, 2002, 2005 ; Choquet, 2016). Les éléments empruntés au cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) visent à analyser la pratique des enseignants tout en étudiant les activités des élèves. Il s'agit ainsi de repérer comment cette pratique peut permettre de favoriser des apprentissages en mathématiques (Robert 2008). Nous interrogeons des pratiques ordinaires pour lesquelles le chercheur n'intervient ni dans le choix des problèmes à proposer aux élèves, ni dans la mise en œuvre des séances et les analyses sont effectuées pour « *une classe donnée, à un niveau scolaire donné* » (*Ibid.*, p. 39).

L'étude de l'activité des élèves pendant la séance de mathématiques, en lien avec celle de la pratique enseignante, nécessite de tenir compte des activités potentielles des élèves que les choix de l'enseignant peuvent provoquer. Elle passe donc par une analyse *a priori* des choix en lien avec ce que vont éventuellement réaliser les élèves observés. Elle nécessite également une analyse détaillée de ce que réalisent effectivement ces élèves donc une analyse *a posteriori*. Cette analyse *a priori* des énoncés mathématiques choisis par l'enseignant observé est réalisée en lien avec une classe donnée, elle utilise les *adaptations de connaissances des élèves* en utilisant la grille (A1 à A7) proposée par Robert (2008). Nous déterminons également *a priori* les activités *a minima* et *a maxima* en tenant compte du niveau de la classe observée, de l'âge des élèves et des contraintes dans lesquelles la séance va être organisée.

2. Présentation d'une expérimentation

La formation suivie par le professeur de mathématiques débutant

Conformément aux exigences des maquettes de formation réparties sur deux années de formation, le professeur débutant a suivi trois unités d'enseignement et des éléments Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

constitutifs mettant en lien la didactique des mathématiques, la recherche et la mise en situation professionnelle. Le projet global dans les *UE Didactique* et *UE Recherche* est d'initier les étudiants à la didactique de la discipline, leur faire découvrir et étudier divers cadres théoriques et concepts didactiques. Plusieurs évaluations écrites sont organisées dont la rédaction puis la soutenance d'un mémoire de recherche. Dans l'*UE Mise en situation professionnelle*, des analyses de l'activité de l'enseignant et de l'élève sont réalisées en lien direct avec la classe et les pratiques de stage des étudiants/stagiaires dans les établissements scolaires.

Un corpus d'étude est alors construit, d'une part à partir des éléments ayant trait à la formation, et d'autre part en tenant compte d'observations réalisées dans les classes des professeurs débutants. Il s'agit des contenus des formations organisées par les formateurs, des documents de préparation des professeurs débutants et de leurs diverses productions écrites (issues des TD, ou en lien avec l'écriture de leur mémoire). S'ajoutent à ces données issues de la formation, les transcriptions des séances observées dans la/les classe(s) du professeur débutant, d'entretiens entre le chercheur qui observe la/les séances et le professeur débutant, ainsi que des documents synthèses d'observation, certaines rédigées par le chercheur, d'autres par le professeur débutant et diverses productions des élèves observés.

La méthode d'analyse

Afin d'analyser les séances observées dans les classes des professeurs débutants, des *indicateurs* (Charles-Pézarid *et al.*, 2012) permettent de rendre compte de la situation mathématique prévue : problèmes consistants ou non, procédures des élèves envisagées, déroulement de la séance prévu, aides et éléments d'institutionnalisation anticipés. Puis l'analyse de la mise en œuvre en classe s'effectue à partir d'un découpage en phases de la séance en repérant le temps réservé aux recherches des élèves, à l'explicitation de leurs productions, et à la synthèse. Ces éléments permettent d'alimenter les cinq composantes de la pratique du professeur débutant afin de la décrire et la comprendre. Cette pratique est ensuite étudiée au regard de la pratique du formateur elle-même étudiée en termes des cinq composantes de la double approche.

Résultats : trois catégories et un exemple

Notre objectif est de repérer une influence éventuelle de la pratique du formateur sur la pratique d'un professeur débutant. Nous incluons dans ce qui est appelé ici *pratique du formateur*, les situations didactiques choisies et étudiées en formation (que le professeur débutant peut choisir de reproduire ensuite dans sa classe) et la manière dont ces situations sont présentées et étudiées lors des temps de formation (exposé du formateur, mise en activité des débutants, homologie, etc.).

Nous avons pu, à partir de nos analyses, repérer trois catégories d'effets :

- ✓ Un effet direct : une application directe dans la classe des éléments de séances étudiées en formation (sans aller plus loin dans une analyse personnelle).
- ✓ Un effet perturbant : le professeur a en tête des éléments étudiés en formation, ces éléments viennent en désaccord avec sa pratique dans la classe.
- ✓ Un effet réflexif : le professeur débutant mobilise après coup des outils d'analyse de l'activité de ses propres élèves (étudiés en formation) afin d'envisager seul des alternatives dans sa pratique.

Lors de cette communication, nous avons présenté l'exemple d'un effet perturbant.

Du point de vue de la formation proposée, le formateur propose des contenus en prenant en compte des difficultés identifiées dans la pratique en classe de professeurs stagiaires observés les années précédentes, notamment pour ce qui concerne l'enseignement de la géométrie au

collège. Le formateur choisit de proposer à la lecture et l'étude un article d'Houdement et Rouquès (2016). Il envisage avec les professeurs débutants en formation de créer du lien entre des résultats de la recherche en didactique, une ressource existante sous forme d'un guide pour l'enseignant et les attentes de l'institution concernant l'enseignement au collège de la géométrie.

Du point de vue de la pratique du professeur débutant observé (en classe de 5^{ème}), nous retenons que ses connaissances didactiques sont solides et il a une volonté affichée d'utiliser ces connaissances dans sa pratique quotidienne. Lors de la séance observée, il a prévu la recherche/résolution de deux problèmes à partir d'un plan du collège qu'il a reproduit, avant la rédaction par les élèves d'une définition de la notion d'échelle. Cependant le déroulement prévu pour cette séance est bouleversé par les difficultés et le renoncement des élèves face à l'énoncé du premier problème. L'analyse *a posteriori* de la séance montre que les élèves ne pensent pas à mesurer sur le plan proposé dans l'énoncé, pendant que d'autres se l'interdisent. Ils restent persuadés qu'ils n'en ont pas le droit en rappelant le fait que, lors d'une séance préalable, le professeur leur interdisait des mesures sur une figure géométrique mais demandait des justifications en lien avec les propriétés géométriques. Lors de cette séance, le professeur décide de renoncer au deuxième problème ainsi qu'à la rédaction prévue d'une définition sur la notion d'échelle. La séance se termine par une correction collective du premier problème pendant lequel il ne reprend aucun des travaux de recherche des élèves.

Nous en déduisons ici que les composantes cognitive et médiative de la pratique du formateur influent fortement sur les composantes cognitive et médiative de la pratique de ce professeur débutant, ce qui dans un premier temps peut sembler satisfaisant du point de vue de son développement professionnel. Cependant, lors de la séance observée sur les échelles, la réaction du groupe-classe a incité ce professeur à renoncer au travail prévu : il a vu son choix fait pour l'approche de l'enseignement de la géométrie dans cette classe de 5^{ème} contredire la situation proposée ensuite sur les échelles et n'a pas compris comment faire face. Nous obtenons finalement que la composante sociale de la pratique de l'enseignant influe fortement sur la composante médiative qui se trouve alors quasiment en contradiction avec la composante cognitive de sa pratique. Autrement dit, les choix du formateur et l'étude, réalisée en formation, sur l'enseignement de la géométrie au collège déstabilisent ce professeur et l'empêche même de trouver, pendant la séance observée, des solutions pour la mener à bien (en s'appuyant par exemple sur les productions même modestes des élèves ou en leur indiquant le statut du plan qu'il a proposé, différent d'une figure géométrique).

ANALYSE DE LA PRATIQUE DANS LE CADRE DE LA PROBLEMATISATION

Dans le second symposium dirigé par Sylvain Doussot, didacticien de l'histoire, l'approche est interdisciplinaire et nous nous intéressons au développement d'un regard didactique des enseignants stagiaires au cours de la deuxième année de Master MEEF. En effet, le but de la formation initiale est d'une part que les étudiants maîtrisent les savoirs (disciplinaires, didactiques, etc.) mais aussi qu'ils soient en mesure de rationaliser leurs choix, que ce soit sur le temps de préparation, celui de la mise en oeuvre ou celui de l'analyse réflexive d'une situation d'enseignement (ressources, aménagements, matériel, pilotage, ajustements, etc.). Or le risque est que ne soit installée chez les étudiants une certaine dichotomie entre la didactique comme focalisation sur les contenus et les sciences de l'éducation comme focalisation sur les pratiques scolaires de manière générale (Sensevy, 2009). Notre recherche vise à comprendre comment évoluent les raisons que l'enseignant stagiaire donne à son activité en lien avec la formation qu'il reçoit à l'INSPE dans le cadre de la formation à et par la recherche. Elle s'intéresse à des stagiaires dans le premier ou le second degré et concerne l'enseignement de

différentes disciplines (mathématiques, français, histoire, éducation physique et sportive, Sciences et vie de la terre).

Pour cette étude, nous mobilisons le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP), dans lequel l'activité de l'enseignant est considérée comme sa réponse à un problème professionnel qu'il construit par la mise en tension de faits (ce qu'il considère comme vrai, du moins temporairement) et de conditions liées à ses connaissances, son expérience, ses représentations (Fabre, 2006 ; Grau, 2020, 2021).

Une première hypothèse, dans la suite des travaux de Charles Pézard *et al.* (2012), est que « *les pratiques des enseignants débutants sont des mises en acte cohérentes de leurs conceptions de l'école, de l'apprentissage et de l'élève* » (Hersant, 2020). Nous cherchons alors à reconstruire le problème construit par le stagiaire à partir des traces de son activité et de ce qu'il peut en dire. Ces traces peuvent être recueillies au moment des observations faites lors de visites dans la classe du stagiaire. Il peut s'agir de notes, de vidéos ou d'enregistrements audios, de photographies du tableau, de ce que produisent les élèves. En amont, nous récoltons aussi les préparations, les ressources utilisées, les échanges mails, les analyses préalables. Nous demandons aussi des écrits réflexifs suite aux visites, nous gardons trace des échanges mails ou téléphoniques. Nous nous intéressons en particulier à l'impact de la formation à et par la recherche sur les pratiques, donc nous analysons les traces des écrits attendus dans le cadre de la rédaction et soutenance du mémoire de fin d'année et l'enregistrement des séminaires de recherche qui regroupent de deux à huit stagiaires avec un même directeur de mémoire.

La seconde hypothèse que nous faisons, est que la question professionnelle mise au travail dans le mémoire est un fil rouge sur l'année de formation initiale. Les stagiaires construisent leur problématique à partir d'une question initiale révélatrice du fait qu'ils portent une attention particulière à certains objets, certaines facettes du métier et nous supposons qu'ils ont de bonnes raisons - parfois implicites - d'orienter ainsi leur attention. Nous cherchons alors à déterminer ces raisons, dans l'idée que les pratiques des stagiaires ne sont pas indépendantes de la manière dont ils construisent leur problématique de recherche, d'autant que le recueil de données se fait sur leur lieu de stage. Notre analyse porte sur les raisons, les nécessités, les modèles qui organisent consciemment ou non l'activité des stagiaires sur les trois temps que sont la préparation, la mise en œuvre et l'analyse réflexive des séances qui constituent les données de leur mémoire de recherche.

Pour mener cette analyse dans le CAP, nous utilisons le modèle du losange de problématisation développé par Fabre (Fabre & Orange, 1997). Le losange est caractérisé par quatre sommets que sont la question du problème, sa solution, les données et les conditions. Un premier axe est la diagonale qui relie la question à la solution, il s'agit de la résolution du problème. Le second est la diagonale qui met en tension les données et les conditions, qui sous-tend la construction du problème. Par données, nous considérons les faits construits, choisis, formulés et considérés comme vrais et donc non remis en question par le sujet, du moins temporairement. Par conditions nous désignons ce qui conditionne cette factualisation et amène l'expression de nécessités, il s'agit de connaissances, compétences, expériences, vécus et ressentis personnels, les représentations que le sujet peut avoir de l'objet de savoir, de l'enseignement, de l'apprentissage, etc. Dans cette mise en tension entre données et conditions, on voit que naissent de nouvelles factualisation, des ouvertures et des fermetures de possibles. Comme nous faisons l'hypothèse que cette régulation se fait suivant un principe de cohérence, nous supposons qu'elle est révélatrice d'un certain paradigme dans lequel l'enseignant pense sa pratique. Nous appelons ce paradigme registre explicatif (REX) et nous cherchons à en déterminer les contours. Pour cela, nous avons eu besoin de croiser deux cadres théoriques. En effet, les conditions peuvent relever des différentes composantes que nous reprenons au cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert, 2011;

Robert & Hache, 2013). La composante personnelle comprend la représentation de soi, du métier, de l'apprentissage, le sentiment de compétences, le gout, l'expérience etc. La composante institutionnelle comprend tout ce qui a trait aux programmes, horaires, ressources, manuels, au contexte institutionnel. La composante sociale comprend les contraintes liées au relationnel que ce soit avec les élèves, le groupe classe ou les collègues, la direction, l'inspection. La composante médiative concerne les choix de l'organisation, du déroulement, du pilotage et la composante cognitive concerne les choix des contenus, des énoncés. Nous avons donc cherché à repérer dans nos analyses certaines composantes susceptibles de caractériser le REX mobilisé par le stagiaire. Nous allons préciser notre méthodologie par l'analyse d'un cas.

1. Etude de cas : Paola en classe de seconde

Dans le cadre du symposium, Magali Hersant, Jean-Philippe Georget et moi-même, Sylvie Grau, avons surtout travaillé sur l'analyse de la pratique des enseignants stagiaires en maternelle². Nous allons donc utiliser la même méthodologie pour analyser une pratique au second degré, afin de comparer nos résultats avec ceux des travaux du symposium dirigé par Christine Choquet. L'étude de cas porte sur la pratique de Paola, étudiante en master MEEF mathématiques second degré et stagiaire en classe de seconde.

Nous allons tout d'abord documenter les composantes personnelle, institutionnelle et sociale à partir de données factuelles. Paola est lauréate du concours de l'agrégation, elle a toujours été en réussite scolaire. Elle a une bonne estime de soi, elle participe activement au sein de la formation, ses formatrices la qualifient d'engagée et d'investie. Elle a une connaissance du métier par le fait que des membres de sa famille sont enseignants. Elle dit connaître les « rouages » de l'institution. Du point de vue institutionnel justement, elle connaît les textes, elle sait répondre aux demandes de l'institution, elle répond aux sollicitations que ce soit de ses tuteurs en établissement, de la direction du lycée ou des formateurs de l'INSPE comme de l'administration de l'université. Du point de vue de la composante sociale, Paola est bien intégrée dans l'équipe enseignante de son établissement, elle a un bon contact avec les élèves, les retours de ses tuteurs comme ceux de ses formateurs sont très positifs. Elle est aussi bien intégrée dans le groupe d'étudiants à l'INSPE. Elle participe aux travaux de groupe et est souvent moteur, elle prend des initiatives, n'hésite pas à être rapporteur. Elle fait partie de ces étudiants qui ouvrent volontiers leur caméra lors des cours à distance et qui interviennent pour poser des questions ou réagir aux sollicitations des formateurs. Sur ces trois composantes, Paola est plutôt dans une position confortable et positive. Nous pouvons ainsi faire l'hypothèse que la mise en tension des données et conditions va pouvoir s'appuyer sur une posture enseignante déjà installée et des relations sociales plutôt faciles, et donc que la problématique va se jouer sur d'autres composantes moins stables.

Lors du premier semestre, la stagiaire est suivie sur son stage et accompagnée en recherche par une formatrice. Nous la rencontrons en janvier alors qu'elle vient de rendre pour l'évaluation du premier semestre un écrit intermédiaire de son mémoire de quatre pages. Cette production est assez pauvre, elle reste très descriptive, ne fait pas référence à un cadre théorique pour problématiser sa question qui est de montrer comment on peut formaliser le texte de savoir à partir des productions des élèves. Lors de ce premier entretien, elle reconnaît honnêtement que le mémoire est pour elle une obligation institutionnelle, elle sait qu'elle va devoir remplir la tâche mais elle a d'autres préoccupations actuellement. Elle dit qu'elle s'en occupera ultérieurement. Ecrire un mémoire ne lui fait pas peur, elle sait qu'elle saura

² Nos travaux ont été présentés au colloque « L'école primaire au 21^e siècle » à Cergy du 12 au 14 octobre 2021 <https://colloque-lp21.sciencesconf.org/resource/page/id/18> ainsi qu'à l'école d'été de l'ARDM 2021 dans le séminaire de S.Grau et celui de M.Hersant.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

produire ce qui est attendu au moment voulu. Elle ne considère donc pas le travail de recherche et la rédaction du mémoire comme un moyen de développement professionnel. Elle a cependant choisi d'expérimenter une tâche complexe. Elle a donc préparé et mis en œuvre une tâche complexe à partir de la question de la conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit. Dans le support distribué aux élèves, la stagiaire propose différents documents : un thermomètre à double graduation, une carte météo d'une chaîne d'information américaine, l'affiche de cinéma du film « *Fahrenheit 451* » de Truffaut, la couverture du livre de Ray Bradbury's et un tableau listant des températures remarquables données en degrés Celsius (zéro absolu, fusion de l'eau, auto-inflammation du papier, température à la surface du soleil etc.). Les élèves doivent croiser ces informations pour établir la relation entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius et dire ce qu'ils pensent de la proposition de Mr Icks : « 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole ». L'enseignante stagiaire a prévu de construire le cours sur les fonctions affines à partir des productions des élèves, son objectif est de formaliser la définition d'une fonction affine par son expression algébrique, expression qui a déjà été étudiée au collège. Cette activité est donc la première que les élèves rencontrent dans le domaine de l'étude des fonctions en seconde sans que ce domaine ne soit explicitement présenté aux élèves. Or la stagiaire s'est retrouvée en grande difficulté face à l'écart entre ce que les élèves ont produit et le texte de savoir qu'elle avait anticipé. Aucun des groupes n'a produit les éléments qui lui étaient nécessaires pour la trace écrite prévue sur les fonctions affines. Un groupe a même proposé « l'océan atlantique » comme réponse à la question « quelle relation existe entre les degrés Celsius et les degrés Fahrenheit ? », ce qui l'a beaucoup déstabilisée et l'a amenée à expliciter son attente par une décomposition de la tâche. Elle note dans son écrit intermédiaire :

« Bien que nécessaire, la phase d'institutionnalisation est souvent difficile à mettre en place. Les élèves sont plus passifs dans cette phase que lors du travail de recherche sur le problème ouvert, ils peuvent se sentir découragés par l'écart entre leur raisonnement et la trace écrite finale. » (Ecrit intermédiaire, janvier 2021)

On peut reconstruire les représentations de la stagiaire à cette période de l'année à partir des raisons qu'elle formule à l'écrit ou à l'oral de ses choix, de ses interprétations, de ses prises d'indices sur l'activité des élèves et à partir de ses analyses réflexives. Ainsi on peut repérer certains principes qui organisent son activité :

- L'élève doit être actif.
- Il faut proposer aux élèves des problèmes à résoudre.
- Il faut enseigner la procédure experte – ici la procédure algébrique est attendue.
- L'enseignant doit corriger les erreurs et bien expliquer.
- L'organisation chronologique est porteuse d'apprentissages – une séance dans laquelle est prévu un temps de recherche individuel, puis collectif, puis une mise en commun est une séance qui « va marcher ».

On voit donc qu'à ce stade de l'année, la composante médiative est celle qui oriente le plus sa pratique. Elle pense sa préparation à partir de la question de l'habillage de la situation, de la forme du support pour que ce soit une tâche complexe, de l'attractivité des documents. Son analyse *a priori* est par contre insuffisante pour anticiper l'activité des élèves et donc lui apporter des éléments pour s'ajuster en situation.

La deuxième rencontre se fait en mars, alors que l'étudiante a eu des apports en didactique, elle a lu des articles sur l'enseignement de la notion de fonction affine, elle a étudié le CAP. Elle écrit dans son mémoire :

« Mon analyse *a priori* a été totalement faussée par mon biais cognitif. [...] Pour la deuxième expérience, je vais faire une première ébauche de trace écrite mais en me laissant la possibilité de la modifier après l'analyse des travaux des élèves. » (Mémoire, mars 2021).

Elle choisit donc d'expérimenter cette fois un problème ouvert et dans un autre domaine des mathématiques, celui des probabilités. Ses choix sont différents, elle mène une analyse *a*

priori qui lui permet de jouer sur les variables didactiques, de penser un étayage. On peut repérer de nouveaux principes qui viennent modifier son activité :

- L'analyse *a priori* doit permettre d'anticiper la manière dont les élèves vont résoudre le problème – il s'agit de se mettre en empathie cognitive avec l'élève.
- L'apprentissage se fait par adaptation et assimilation.
- Le texte de savoir peut passer par des écrits intermédiaires.

On peut identifier ici que la composante cognitive pèse maintenant beaucoup plus sur ses choix et ses stratégies. Elle écrira dans le mémoire :

« La notion qui est mise en avant par le problème doit absolument être nécessaire à la résolution, il faut donc en amont décortiquer les concepts que l'on peut apporter aux élèves pour définir quels caractères sont nécessaires et quels caractères ne le sont pas. » (Mémoire, mai 2021).

Son expérimentation va cependant être perturbée par un événement imprévu. Le jour de la séance, un problème de température dans la salle l'amène à prendre l'initiative de faire cours à l'extérieur sur la pelouse. Les élèves vont s'asseoir par terre, se mettre dans des groupes différents de ceux habituels en classe. Elle s'aperçoit que ce qui se passe est encore éloigné du prévu, mais plutôt positivement : les élèves échangent différemment, ceux qui n'osaient pas participer se lancent plus volontiers. Elle même se positionne autrement, ne peut pas circuler selon son habitude, elle va donc voir des élèves sans réellement anticiper un quelconque contrôle, surprend des échanges qui lui montrent que son jugement sur l'activité de certains élèves était faussé. Elle réalise que le contexte modifie l'activité du professeur et des élèves. Elle conclue son analyse réflexive par :

« Cette séquence a été investie par tous les élèves de la classe, même les plus fragiles, que ce soit grâce aux activités, ou grâce à l'évolution du climat de classe qu'a permis le travail à l'extérieur. » (Mémoire, avril 2021).

Ici la composante sociale intervient fortement sur sa représentation de l'apprentissage. Elle comprend qu'un changement du contrat didactique peut jouer sur l'apprentissage en particulier des élèves identifiés comme les plus faibles. Deux nouveaux principes caractérisent sa représentation de l'enseignement des mathématiques en fin d'année :

- Tous les élèves peuvent progresser.
- L'analyse préalable doit permettre de choisir une situation didactiquement pertinente.

Lors de sa soutenance, elle terminera par la formalisation de ce qui peut être considéré comme sa nouvelle question professionnelle : peut-on trouver une situation adidactique pour enseigner toutes les notions mathématiques ? Son nouveau problème atteste d'un développement de son regard didactique mais aussi d'une évolution des composantes médiative et sociale.

2. Tentative de modélisation

Nous allons reprendre le modèle d'analyse de l'activité de l'enseignant présenté par Maha Abboud (Abboud & Rogalski, 2018). Dans ce modèle, on considère que l'activité de l'enseignant s'organise chronologiquement en une succession de boucles décisionnelles. Lorsque surgit un problème en situation – une évaluation diagnostique ou une information prise dans la classe indique que quelque chose ne va pas – l'enseignant doit prendre une décision pour intervenir. On a alors trois niveaux de décision. Au premier niveau, la situation appelle des routines déjà installées ou une action anticipée. Dans ce cas, l'enseignant peut intervenir, identifier, contrôler l'impact de son action. Au deuxième niveau, la situation est analysée, comprise et même si elle n'était pas anticipée, l'enseignant identifie des leviers pour agir par adaptation de procédés didactiques connus. Au troisième niveau, l'enseignant ne comprend pas la situation, il n'arrive pas à tirer des éléments d'analyse lui permettant d'agir, il peut alors improviser ou abandonner. Dans les deux premiers cas, la réponse peut être

adéquate ou non, mais dans tous les cas, on a une avancée du temps didactique parce que l'enseignant va reprendre son but initial ou se fixer un nouveau but, jusqu'à la rencontre éventuelle d'une nouvelle difficulté, on parle alors de boucles. L'enseignant renforce ainsi son registre explicatif du fait que l'efficacité de ses routines, de ses anticipations et de ses adaptations garantit son pouvoir d'agir. Rien ne vient remettre en question les principes organisateurs de son activité. Par contre, dans le cas où l'enseignant ne comprend pas la situation et si, en improvisant, il n'apporte pas de réponse adéquate au problème, deux nouveaux cas de figure apparaissent : soit l'enseignant attribue l'échec à des causes externes (niveau des élèves, mauvaises conditions, ressource inappropriée etc.) et il n'apprend rien de la situation, soit l'enseignant mène une analyse réflexive, et dans ce dernier cas, la mise en tension des nouveaux faits avec les conditions provoque une évolution de son registre explicatif. Cela suppose d'avoir d'une part le temps de mener cette analyse et d'autre part d'avoir un cadre théorique permettant cette analyse. On peut alors penser que la formation doit mettre les étudiants face à un dilemme, une incompréhension, un paradoxe l'amenant à construire un problème. Le rôle du formateur étant d'apporter de nouveaux éléments de savoir ou de provoquer de nouvelles factualisations afin de faire émerger de nouvelles nécessités. L'enjeu se situe dans la phase d'analyse réflexive où l'enseignant doit pouvoir apporter des éléments de réponses et avoir accès aux raisons, ce qu'on pourrait considérer comme un savoir didactique apodictique (voir Figure 1).

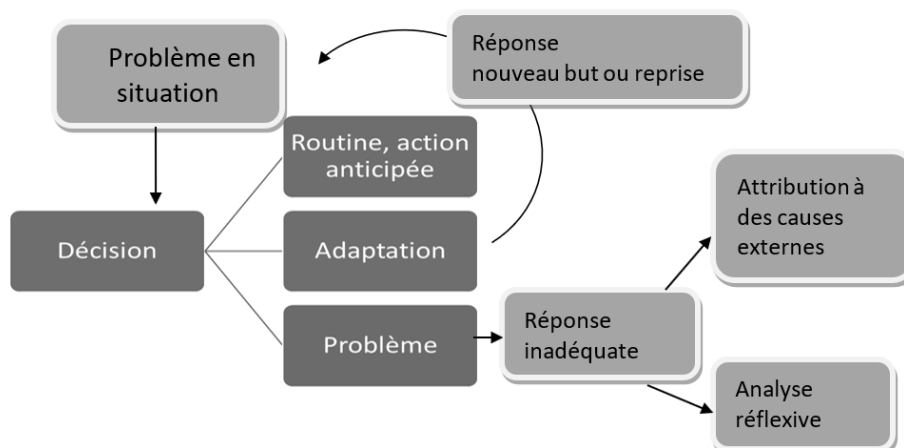


Figure 1. – Boucle évaluative

RESULTATS : CONFRONTATION DES DEUX APPROCHES

1. Des résultats communs

Pour les deux approches, il s'agit de cibler l'analyse de l'activité réelle de l'enseignant stagiaire dans la classe, de vérifier si les composantes médiatives et cognitives sont mises en défaut et quelle explication on peut donner à ces difficultés en lien avec la formation. Nous arrivons à quelques résultats communs. Le premier étant que la formation permet des apprentissages mais que ces apprentissages ne sont pas toujours opérationnels. Nous avons pu mesurer des écarts importants entre ce que l'étudiant peut dire et mobiliser en formation et ce qu'il réalise en classe. Certains étudiants peuvent très bien faire des analyses didactiques pertinentes en séminaire et être incapables de s'ajuster didactiquement en situation en s'appuyant sur les mêmes compétences. Il est souvent nécessaire d'utiliser un enregistrement pour permettre une mise à distance de l'activité pour rendre l'analyse *a posteriori* possible.

Nous avons aussi montré que certaines représentations sont résistantes – représentations issues de leur expérience d'élève, d'étudiant, familiale, ou professionnelle, parfois comme contractuel ou professeur particulier, de l'image fantasmée qu'ils se font du cours idéal – et amènent des ajustements automatiques en situation qui restent inefficaces. Cela nous conforte dans l'idée que certaines représentations peuvent être des obstacles au développement de compétences professionnelles. Nous avons déjà évoqué l'obstacle lié au fait de considérer que la structure du cours garantit à elle seule l'apprentissage. Un autre obstacle est lié à la conception d'un apprentissage par la seule mise en activité. Il semble que ce soit par l'analyse de son activité – en particulier lors des visites – que l'enseignant peut prendre conscience de ce qui organise cette activité. Enfin, les stagiaires n'évoluent pas tous selon le même processus, ces recherches ont permis de caractériser quelques-uns de ces processus, mettant en évidence dans tous les cas la nécessité de s'appuyer en formation sur des problèmes professionnels effectivement construits par les étudiants.

2. Les limites

Ces recherches montrent aussi certaines limites. Nous nous interrogeons sur la pertinence de penser en formation un travail isolant les composantes les unes des autres. L'activité de l'enseignant suppose des prises de décision dans un environnement imprévisible, ce qui demande beaucoup d'improvisation malgré la planification et l'anticipation. Travailler explicitement une composante en formation ne peut pas garantir une évolution des pratiques assurant une capacité à agir en situation. Il s'agit plutôt d'envisager un travail systémique montrant comment les composantes interviennent dans la prise d'indices et la prise de décision. Nous avons pu montrer par exemple qu'un travail systématique autour de l'analyse *a priori* ne suffit à outiller les étudiants. Lors de leurs analyses, la composante personnelle peut intervenir et les amener à ne pas considérer certaines procédures ou à ne pas envisager certains pans de l'activité des élèves. Par ailleurs, nous ne pouvons pas réellement affirmer un lien de causalité entre formation et développement professionnel du stagiaire. Il y a une différence entre expliquer et comprendre, nos recherches ne permettent pas de conceptualiser le développement professionnel en formation initiale. En particulier, nous ne savons toujours pas comment prendre en compte la part du contexte dans les analyses.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Quelles pistes ces recherches apportent-elles pour penser la formation initiale ? Une idée forte ressort de nos analyses, celle de ne pas séparer systématiquement analyse didactique et analyse de l'activité en formation. Cela suppose une réflexion sur l'organisation même dans les maquettes, de l'articulation des différents enseignements les uns par rapport aux autres. Même si les formateurs en ont conscience et même s'ils pensent les ponts entre les enseignements dans les différentes unités d'enseignement, l'explicitation de ces liens manque et leur construction est souvent laissée à la charge de l'étudiant. Nous avons aussi montré la nécessité d'un retour réflexif sur les expérimentations, permettant l'appropriation des apports de la formation afin de rendre les savoirs opérationnels. Une autre piste est celle d'amener formateurs et stagiaires à formaliser et expliciter leurs choix pour aller vers la constitution d'une communauté, partageant des cadres théoriques et des outils permettant d'analyser les situations professionnelles. L'objectif est d'amener cette communauté à reproblématiser les savoirs théoriques dans le contexte de la pratique de classe afin d'éviter la diffusion de doxas du fait de gestes reproduits par imitation et parfois de manière incomplète, sans mobilisation des connaissances nécessaires pour en comprendre la portée. L'exemple de la mise en place des activités rapides en début de cours est représentatif de ces gestes professionnels reproduits

sans que les contenus didactiques et la fonction de ces activités ne soient interrogés. Cela nous amène à chercher comment favoriser le travail d'équipe, la co-animation, le croisement des regards, pour permettre l'ouverture de possibles. On pourrait par exemple intégrer les tuteurs de terrain dans le travail réflexif. Cette synthèse des différents éléments de la formation pourrait ainsi être moins à charge de l'étudiant.

Il nous semble important en formation d'amener les étudiants devant des faits didactiques de différentes natures : des incidents, des obstacles, des paradoxes... il s'agirait de repérer une typologie de ces faits didactiques afin de comprendre comment la formation peut agir en lien avec ces différents faits didactiques. De même, l'analyse des effets de la formation et des choix des formateurs, sur la pratique des enseignants stagiaires peut amener à une typologie des situations de formation. L'objectif étant de chercher à mettre en regard ces deux typologies.

RÉFÉRENCES

- ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2018). Cadres théoriques pour analyser l'activité instrumentée de l'enseignant de mathématiques. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, 46-55.
- CHARLES PEZARD, M., BUTLEN, D. & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP*. Editions La pensée sauvage). <https://revue-rdm.com/ouvrage/professeurs-des-ecoles-debutants-en-zep/>
- CHOQUET, C. (2016). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en Didactique des mathématiques*. 36(1), 11-47. <https://revue-rdm.com/2016/profils-de-professeurs-des-ecoles/>
- CHOQUET, C. (2019). Complémentarité de deux cadres théoriques dans l'analyse de l'activité mathématique des élèves : la double approche didactique et ergonomique et l'apprentissage par problématisation. *Actes de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques EEDM 20*.
- CHOQUET, C. (à paraître). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg.
- CHOQUET, C. & ZEBICHE, N. (2019). Débuter dans l'enseignement des mathématiques : quel impact de la formation initiale ? In *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone*. Paris-Gennevilliers, 22-26 octobre 2018.
- FABRE, M. (2006). Analyse des pratiques et problématisation. Quelques remarques épistémologiques. *Recherche et formation*, 51, 133-145. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.511>
- FABRE, M. (2007). *La pirogue de Robinson*. In *Les situations de formation, entre savoirs, problèmes et activités* (p. 60-80). L'Harmattan.
- FABRE, M. & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- GRAU, S. (2020). Quelles conditions pour une formation initiale des enseignants du 1er degré en didactique des mathématiques par le travail sur le mémoire ? *Revue de Mathématiques pour l'école*, 333, 28-38.
- GRAU, S. (2021). Conditions d'une vigilance didactique chez les professeurs des écoles stagiaires. *Actes du 47e colloque COPIRELEM*.
- GRUGEON-ALLYS, B. (2009). Les pratiques des enseignants débutants de mathématiques du second degré : vers des ingénieries de formation. In *Actes du colloque Espace Mathématiques Francophone 2009*. 293-306.
- HERSANT, M. (2020). Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : Matérialité des situations et chronologie. *Revue Française de Pédagogie*, n° 208(3), 17- 30.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16 (3), 289-322.
- ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In VANDEBROUCK, F. (Dir.) *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès éditions. 59-65.
- ROBERT, A. (2011). *La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques*. Ecole d'été de l'ARDM, 57-64.
- ROBERT, A. & HACHE, C. (2013). Pourquoi, comment comprendre ce qui se joue en classe de mathématiques ? *Les cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 5, 25-86.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*. Vol. 2(4). 505-528.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the Mathematics teachers' activity. An example in a french 10th-grade class. *Educational studies in Mathematics*. 59. 269-298.
- SAYAC, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. Les savoirs de la formation. *Recherche et formation*, 71, 115-130. ENS Éditions.
- SENSEVY, G. (2009). Didactique et Sciences de l'Éducation : Une reconfiguration ? *Actes du colloque de Caen : 40 ans des sciences de l'éducation. L'âge de la maturité ? Questions vives*, 49-57.

CONNAISSANCES SPATIALES ET HABILITÉS VISUO-SPATIALES – CROISEMENT DE DEUX PARADIGMES POUR MIEUX COMPRENDRE LES ENJEUX D’ENSEIGNEMENT ET D’APPRENTISSAGE EN GÉOMÉTRIE

Sylva Coutat*, Sandra Berney*

RÉSUMÉ

Les connaissances spatiales sont fondamentales dans les apprentissages de la géométrie. Les travaux de Bertelot et Salin (1999) entre autres, ont démontré que connaissances spatiales et connaissances géométriques bien que distinctes sont aussi indissociables. Les connaissances spatiales sont classiquement définies par les interactions d’un sujet avec l’espace sensible (Berthelot & Salin, 1999). Les psychologues cognitivistes étudient les habiletés spatiales. Elles sont définies à l’aide de différentes composantes liées à l’orientation spatiale, la visualisation spatiale, la rotation mentale, la mémorisation spatiale mais aussi la navigation spatiale (Carroll, 1993). Les mesures de ces habiletés utilisent différents tests standardisés. Afin de mieux saisir les enjeux complexes liés aux connaissances spatiales, nous proposons de croiser les composantes des tests issus des études en psychologie avec les caractérisations des connaissances spatiales issues des études menées en didactique des mathématiques.

Mots-clefs : connaissances spatiales ; connaissances géométriques ; habiletés visuo-spatiales

ABSTRACT

Spatial knowledge is fundamental in geometry learning. Bertelot and Salin (1999) has shown that spatial knowledge and geometrical knowledge, although distinct, are also inseparable. Spatial knowledge is classically defined by the interactions of a subject with sensible space (Berthelot & Salin, 1999). In psychology research consider spatial abilities. They are defined using different components related to spatial orientation, spatial visualization, mental rotation, spatial memorization and spatial navigation (Carroll, 1993). These abilities are measured using various standardized tests. To better understand the complex issues related to spatial knowledge, we propose to cross-reference some items of tests from studies in psychology with the characterizations of spatial knowledge from studies in mathematics didactics.

Keywords: spatial knowledge, geometrical knowledge, visuo-spatial abilities

INTRODUCTION

Cette présente étude s’insère dans le projet de recherche SPAGEO¹ soutenu par le Fond National Suisse. Ce projet réunit des experts de différents domaines de recherches : la technologie éducative, la psychologie cognitive et la didactique des mathématiques. Parmi les questions de recherche, une s’intéresse à identifier les habiletés visuo-spatiales d’élèves de 7 à 10 ans. Pour cela, une série de tests a été proposée à des élèves de grade 2, 3 et 4 (ce qui correspond aux âges visés par l’étude). Ces différents tests ont pour objectif d’identifier et mesurer les différentes sous-habiletés visuo-spatiales des élèves. Au vu de certaines proximités avec des attentes en géométrie, nous nous sommes intéressées à une éventuelle proximité entre les connaissances spatiales et les habiletés spatiales. Nous revenons sur les connaissances spatiales avec les principaux travaux issus de la didactique des mathématiques. Nous définissons ensuite les habiletés visuo-spatiales du point de vue de la psychologie cognitive. Nous présentons la méthodologie d’analyse des tests utilisée, pour conclure autour des résultats qu’elle apporte dans la caractérisation des sous-habiletés visuo-spatiales.

* Université de Genève

¹ « Rethinking the links between spatial knowledge and geometry in primary education through virtual environments » 2019-2023 (SPAGEO-Subside no100019_188947/1).

CADRE THÉORIQUE

Les connaissances spatiales renvoient au champ de la didactique des mathématiques. Les habiletés visuo-spatiales renvoient au champ de la psychologie cognitive. Cette première partie vise à définir ces termes spécifiques à chaque champ.

1. Connaissances spatiales

Dans cette étude, le champ de la didactique des mathématiques s'intéresse aux connaissances géométriques et connaissances spatiales. Les connaissances spatiales ont été définies par Berthelot et Salin (1999) comme « les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible ».

Marchand (2020) a complété cette définition en utilisant deux composantes. La composante Orientation concerne les connaissances utilisées pour « situer et déplacer un sujet ou un objet dans un espace donné » (p.142). Cette connaissance met en relation différents objets à travers les perspectives, les points de repère, les référentiels (relations extrinsèques). La composante Organisation concerne plus spécifiquement le développement d'images mentales (Marchand, 2006) par l'articulation entre les objets à travers leur position, et relation (relations intrinsèques). Cela lui permet de compléter la définition de Berthelot et Salin avec la prise en compte du développement et de la coordination des images mentales.

2. Habiletés visuo-spatiales

En psychologie cognitive, les définitions des habiletés visuo-spatiales peuvent varier selon les auteurs. Nous retiendrons celle de Carroll (1993) qui est utilisée par nos collègues de psychologie cognitive pour qui les habiletés spatiales caractérisent les représentations et manipulations mentales des informations visuelles perçues, tout en intégrant les relations spatiales entre les éléments d'information.

Ces habiletés spatiales sont caractérisées par différents facteurs ou sous-habiletés. Il en existe une variété importante, il n'existe pas de consensus, cependant ceux que l'on retrouve le plus fréquemment dans la littérature sont la Visualisation Spatiale, la Rotation Mentale (aussi appelée parfois repérage spatial), l'Orientation Spatiale et la Navigation Spatiale.

Visualisation spatiale

Cette sous-habilité visuo-spatiale est définie comme la capacité à appréhender, encoder, manipuler mentalement des formes spatiales (Carroll, 1993). Elle peut aussi inclure la transformation de formes complexes du plan ou de l'espace ainsi que l'imagination de certains mouvements spatiaux.

Rotation mentale

Cette sous-habilité visuo-spatiale caractérise la capacité à imaginer un objet (2D ou 3D) tourner dans le plan ou l'espace (Carroll, 1993).

Orientation spatiale

Cette sous-habilité visuo-spatiale est la capacité à imaginer un objet (2D ou 3D) selon une autre perspective. C'est-à-dire que le sujet imagine son propre déplacement autour de l'objet fixe (Thurstone, 1950).

Ces deux dernières habiletés sont proches car il y a des objets du plan ou de l'espace ainsi que des rotations, cependant dans le cas de la Rotation Mentale, le sujet est fixe et c'est

l'objet qui tourne alors que dans le cas de l'Orientation Spatiale le sujet se déplace alors que l'objet reste fixe.

Navigation spatiale

Cette sous-habilité visuo-spatiale est la capacité à se localiser et se déplacer dans un espace réel ou virtuel en se basant sur la perception et la compréhension de l'organisation de l'espace (Pick et al., 1999).

Selon Tolman (1948) la Navigation Spatiale est soutenue par la construction d'une carte cognitive. Cette carte cognitive peut utiliser différents cadres de références, elle permet de définir la position et l'orientation des différents objets de l'environnement.

Cette dernière habileté est spécialement visée par les séquences didactiques conçues dans le cadre du projet SPAGEO. Afin de mesurer l'efficacité des séances d'enseignement sur cette habileté, plusieurs tests spécifiques ont été mis en place utilisant un environnement virtuel. Cette habileté pouvant faire l'objet d'une communication à elle seule, elle n'est pas développée davantage ici.

3. Questions de recherche

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques (Berthelot & Salin, 1992 ; Duroisin & Demeuse, 2016 ; Marchand, 2006) considèrent les connaissances géométriques et les connaissances spatiales interdépendantes. En parallèle, de nombreux travaux en psychologie (Buckley et al., 2019 ; Newcombe, 2016 ; Wai et al., 2009) pointent une corrélation entre des habiletés spatiales élevées et des performances élevées dans les disciplines scientifiques comme les mathématiques, sciences, ingénieries, technologies. Comme en didactique des mathématiques, des travaux en psychologie soulignent un investissement moindre dans les habiletés spatiales dans les contextes éducatifs relativement aux autres capacités cognitives.

L'utilisation d'un regard didactique sur les habiletés visuo-spatiales a pour but d'identifier d'éventuels liens entre les connaissances spatiales et les habiletés spatiales. Pour cela nous reprenons les principaux tests utilisés dans le cadre du projet de recherche SPAGEO pour l'identifications des habiletés visuo-spatiales des élèves de 7-10 ans (en mettant de côté la Navigation Spatiale). Les tests que nous avons retenus sont ceux qui permettent d'évaluer les sous-habilités que nous venons de présenter : la Visualisation Spatiale, la Rotation Mentale et l'Orientation Spatiale.

ANALYSE DES TESTS

1. Méthodologie d'analyse

Pour analyser les différents tests présentés, nous utilisons la structure génératrice d'activités de Marchand (2020). Cette structure s'articule autour de trois assises.

Une première assise considère les connaissances spatiales de l'école et utilise les deux composantes (orientation et organisation) présentées précédemment.

La deuxième assise s'appuie sur les niveaux d'abstractions sollicités dans les situations didactiques permettant le développement des connaissances spatiales. En s'appuyant sur les travaux de Battista (2007), Marchand propose trois niveaux d'abstraction pour illustrer entre autres « le processus d'abstraction d'objets d'abord relevant de l'espace sensible » (Marchand, 2020, p. 150). Le premier niveau est le niveau Archéologique, les élèves peuvent identifier certaines propriétés des objets par leur manipulation. Lorsque les manipulations ont été suffisamment nombreuses pour permettre de se représenter mentalement les propriétés des différents objets, le niveau d'abstraction atteint le niveau Photographique. Les propriétés

peuvent être mobilisées mentalement mais elles restent statiques et dépendantes d'une seule perspective. C'est au troisième niveau d'abstraction, niveau Scénographique, que les images mentales devient « cinétiques, transformatrices et même anticipatrices » (Marchand, 2020, p. 151).

La troisième et dernière assise considère les variables didactiques sur lesquelles les situations reposent. Les tests que nous utilisons ne sont pas pensés comme des situations d'apprentissage, certains éléments ne pourront être exploités dans les variables didactiques. Marchand considère quatre principales variables qui valorisent les connaissances spatiales.

La première variable concerne l'espace en jeu dans la situation et permet de distinguer un micro-espace, d'un macro-espace ou méso-espace (Berthelot & Salin, 1992).

La deuxième variable permet de définir la tâche selon différents groupements de tâches. En s'appuyant sur Davis et al. (2015), Marchand identifie six groupements de tâches propices au développement des connaissances spatiales. :

- « 1- Observer ou toucher / Identifier / Décrire ;
- 2- Repérer / Situer / Cartographier / Coordonner les perspectives ;
- 3- Déplacer / Assembler / Décomposer / Plier / Réorganiser ;
- 4- Transformer / Déformer / Sectionner / Mettre à l'échelle ;
- 5- Construire / Représenter ;
- 6- Anticiper / Rechercher ». (Marchand, 2020, p. 154)

Si Marchand ambitionne l'utilisation de ces groupements pour assurer (dans le cas d'une analyse a priori) ou identifier (dans le cas d'une analyse a posteriori) le maillage des différentes tâches proposées, nous l'utiliserons plutôt pour identifier à quel groupement de tâches pourrait être associé chaque test.

La troisième variable définie par Marchand a pour but de distinguer les objets en jeu dans la situation. Ces objets peuvent être des objets du plan (points, droites, figures planes) ou des solides ; dans des orientations prototypiques ou non.

N'étant pas dans un contexte d'apprentissage nous n'utiliserons pas la dernière variable qui s'intéresse au questionnement autour des connaissances spatiales que peut susciter la situation.

Nous allons présenter cinq tests conçus pour mesurer différentes habiletés visuo-spatiales. Pour chaque test, la consigne est complétée par un ou plusieurs exemples avec leur solution. Cela permet à l'expérimentateur de discuter de la réponse de l'élève et si besoin de la corriger. Ces exemples ont pour objectif de s'assurer que le sujet a compris la consigne. Seuls ces exemples sont corrigés, l'élève n'a aucun retour sur ses réponses évaluées par le test. Pour répondre aux différents tests il est impossible de dessiner sur les illustrations, ou de manipuler les feuilles (les tourner par exemple). Enfin, ces tests sont proposés dans un ordre aléatoire.

2. Visualisation spatiale

Deux tests sont utilisés pour mesurer cette sous-habilité, le Paper Folding et Purdue Spatial Visualization Test-Revised. Ces tests sont conçus pour mesurer la visualisation spatiale des sujets, c'est-à-dire leur capacité à appréhender, encoder, manipuler mentalement des formes 2D ou 3D.

Paper folding (Ekstrom et al., 1976)

Ce test, comme la grande majorité des tests visuo-spatiaux, est destiné à des adultes. Le sujet doit répondre à deux séries de 10 questions. Un enjeu temporel est ajouté, il est demandé au sujet de répondre à un maximum d'item dans la limite de 3 min pour chaque série. La Figure 1 présente la consigne et l'exemple qui l'accompagne.

Dans ce test tu dois imaginer le pliage et dépliage d'une feuille de papier. Les dessins de gauche montrent une feuille de papier carrée qui a été pliée puis trouée (trou désigné par un petit rond). Le trou traverse les différentes couches de papier. Un des 5 dessins de droite montre où les trous seront une fois la feuille complètement dépliée. Retrouve parmi les dessins de droite celui qui est correct.

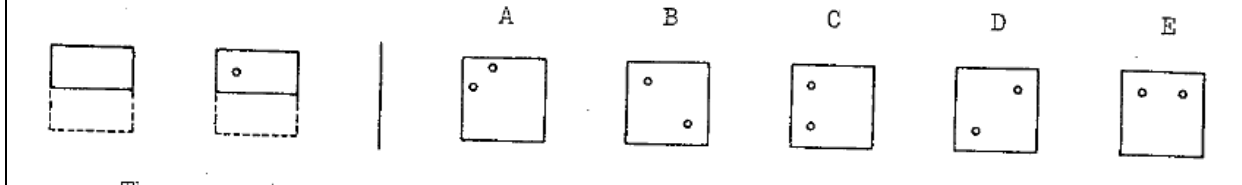


Figure 1. – Consigne pour le Paper folding (Erkstrom, 1976, p.176)

Dans cet exemple il n'y a qu'un seul pliage horizontal. Dans la suite de la série de questions les pliages peuvent avoir différentes orientations (certains pliages sont horizontaux, d'autres verticaux et d'autres obliques par exemple). Pour certains items il y a une succession de pliages. Les différentes étapes de pliages sont toujours représentées sur les images de gauche.

Purdue Spatial Visualization Test-Revised (Maeda & Yoon, 2013)

Ce test est conçu pour des sujets âgés de 13 ans et plus. Comme les élèves concernés par notre étude sont âgés de 7 à 10 ans, la consigne et les exemples sont enrichis de matériel tangible². Les solides représentés sur les images sont disponibles à l'élève qui peut ainsi les manipuler dans les premiers exemples illustrés. Dans le dernier exemple les solides sont toujours présents mais l'élève ne peut plus les toucher. Finalement les solides sont rangés une fois la consigne des exemples terminée. Pour les questions du test, l'élève travailler uniquement à partir des images. Le sujet doit répondre à une série de 30 questions. Un enjeu temporel est ajouté, il est demandé au sujet de répondre à un maximum d'item dans la limite de 20 min. La Figure 2 présente la consigne avec le premier exemple.

Regarde le solide en haut à gauche. Il a été tourné pour obtenir sa position de droite.

Regarde le solide du milieu. Si on devait le tourner de la même façon, dans quelle position serait-il? Trouve cette position parmi les 5 solutions proposées.

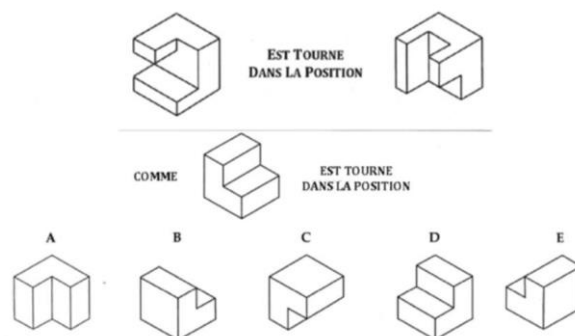


Figure 2. – Consigne pour le Purdue Spatial Visualization Test-Revised (Maeda & Yoon, 2013, p.75)

Dans l'exemple présenté dans la Figure 2 le modèle a subi une rotation de 90° autour d'un axe vertical. Dans les items suivants, les rotations peuvent être selon un axe vertical ou horizontal, pour certains plusieurs rotations sont combinées. Les formes représentées peuvent avoir des faces planes ou arrondies.

² Cette adaptation du test fait l'objet d'une communication au congrès de la Société Suisse en psychologie 2022 (Berney et al. (accepted)).

Analyse didactique

Ces deux tests permettent de mesurer l'habileté Visualisation Spatiale qui est définie comme la capacité à appréhender, encoder, manipuler mentalement des formes (2D ou 3D). Comme l'ordre des tests est aléatoire, ces deux tests ne sont pas forcément posés l'un après l'autre ou dans l'ordre où ils sont présentement présentés.

Dans le cas du deuxième test (PSVT-R), différentes représentations d'un même objet (le solide) doivent être mises en relation ce qui peut être associé à la composante Orientation des connaissances spatiales. Les transformations – les pliages ou rotations – sur l'objet (ici la feuille de papier ou solide) ne sont pas visibles, seuls les résultats de ces transformations apparaissent. La représentation mentale de ces transformations implique la mobilisation d'images mentales chez le sujet. Ces deux tests mobiliseraient ainsi la composante Organisation des connaissances spatiales.

Même si les objets sont représentés par une image, les transformations effectuées ne sont pas représentées. Pour trouver la solution, il s'agit de visualiser mentalement ces transformations, ce qui nécessite un niveau d'abstraction Scénographique.

Concernant les variables didactiques de ces deux tests, les objets présents dans les tâches sont des objets 2D avec la feuille de papier, 1D avec les traits de pliage et 0D pour le trou dans la feuille de papier. Le deuxième test quant à lui utilise des éléments 3D (solides) représentés en 2D. L'analyse des rotations peut s'appuyer sur des éléments 2D (les faces) ou 1D (les arêtes) ou 0D (les sommets), cependant nous n'avons aucune information sur les procédures des élèves. Enfin, seul le micro-espace de la feuille de papier est présent. On peut s'interroger sur les rotations sur les solides car les faces ne sont pas toutes visibles simultanément se qui pourrait s'apparenter à un méso-espace conceptualisé.

Nous concluons avec le groupement de tâches auquel ces tests peuvent être associés. La transformation présente est la rotation, ainsi le troisième groupement les tâches « Déplacer / Assembler / Décomposer / Plier / Réorganiser » est celui qui correspond le mieux.

3. Rotation mentale

Cette habileté caractérise la capacité à faire tourner mentalement un objet du plan ou de l'espace. Là encore deux tests ont été utilisés avec les élèves.

Mental Rotation Test (Peters et al., 1995)

Ce test est conçu pour des sujets adultes. Comme pour les tests précédents on ne s'attend pas à ce que les élèves répondent correctement à toutes les questions. La Figure 3 présente la consigne avec un exemple.

L'image de gauche est le modèle. Tu dois identifier parmi les 4 images de droites les 2 images qui sont les versions tournées du modèle.

Figure 3. – Consigne pour le Mental Rotation Test (Peters, et al. 1995, p.42)

Le sujet doit répondre à deux séries de 12 questions avec 4 min pour chaque série. Les angles et axes de rotations varient à chaque item.

Picture-Mental Rotation Test (Neuburger et al., 2011)

Ce test est conçu pour des élèves de maternelle, il a été utilisé pour des sujets de 5 à 20 ans. Il se décline en trois séries de questions. Ces trois séries sont présentées dans un ordre aléatoire. Le sujet doit répondre à deux séries de 16 questions en 2 min pour chaque série puis une série de 16 questions en 4 min.

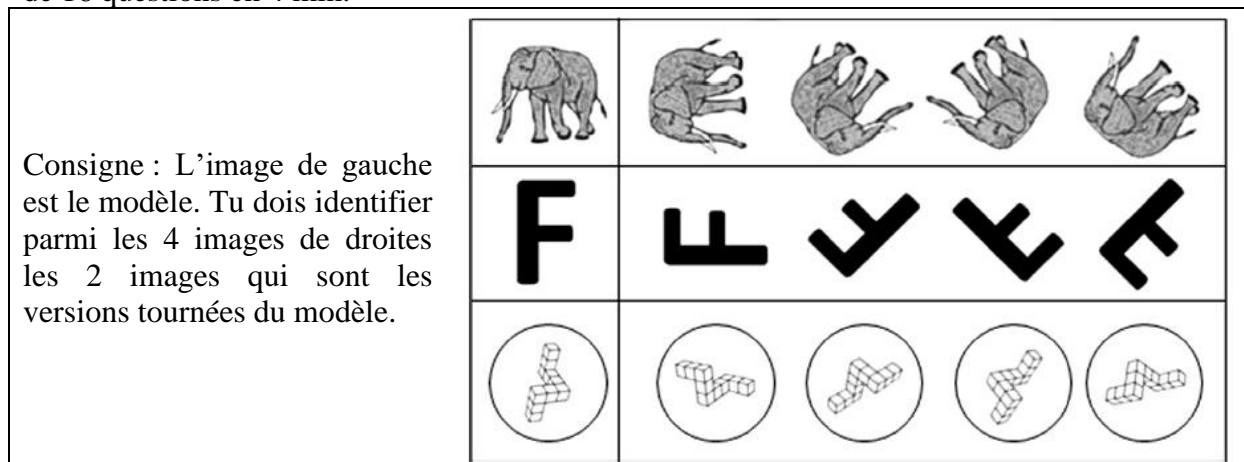


Figure 4. – Consigne pour le Picture-Mental Rotation Test (Neuburger et al., 2011, p.1240)

Chaque série de questions utilise une catégorie d'images (animaux, lettres, assemblages de cubes). L'image de gauche est soit tournée soit retournée pour obtenir les images de droites.

Pour la première catégorie d'images, la consigne précise qu'il faut retrouver l'animal qui regardera dans la même direction que le modèle (image de gauche) une fois tourné sur ses pieds.

La deuxième série de questions utilise des lettres. Tout comme pour les animaux, les lettres de droites sont tournées ou retournées. Le sujet doit retrouver les lettres qui une fois tournées sont identiques au modèle de gauche.

Enfin la dernière série de questions utilise des assemblages de cubes comme pour le test précédent. Cependant dans ce test ce sont les images des assemblages de cubes qui sont tournées ou retournées et non les assemblages. Cette spécificité n'est pas précisée aux élèves.

Analyse didactique

Ces deux tests permettent de mesurer l'habileté Rotation Mentale qui est la capacité à faire tourner mentalement un objet du plan ou de l'espace. Comme l'ordre des tests est aléatoire, ces trois tests ne sont pas forcément posés dans l'ordre où ils sont présentement présentés. Les rotations subies par les images ne sont pas visibles, seules les configurations finales le sont. L'articulation des images mentales implique la composante Organisation des connaissances spatiales. Cependant il est aussi primordial de se repérer lors des transformations selon un référentiel droite-gauche et distinguer le retournement de la rotation dans le plan, ainsi la composante Orientation est aussi présente dans cette tâche.

La mobilisation d'images mentales pour identifier les différentes transformations nécessite un niveau d'abstraction Scénographique.

L'espace de travail mobilisé dans ces tests est le micro-espace. Tout comme pour l'analyse précédente les différentes faces des assemblages de cubes ne sont pas visibles simultanément, cela peut impliquer des caractéristiques du méso-espace pour la représentation mentale de l'assemblage dans sa globalité.

Enfin, le groupement de tâche est toujours « Déplacer / Assembler / Décomposer / Plier / Réorganiser » avec la rotation comme transformation.

4. Orientation spatiale

Un seul test a été utilisé concernant l'habileté Orientation Spatiale. Pour rappel cette habileté caractérise la capacité à imaginer un objet (2D ou 3D) selon une autre perspective.

Perspective Taking – Spatial Orientation Test (Hegarty & Waller, 2004)

Ce test est conçu initialement pour des adultes. La consigne est aussi complétée d'exemples et de leur solution. La Figure 5 présente la consigne et le premier exemple. La flèche qui indique la solution apparaît une fois que le sujet adonné sa solution.

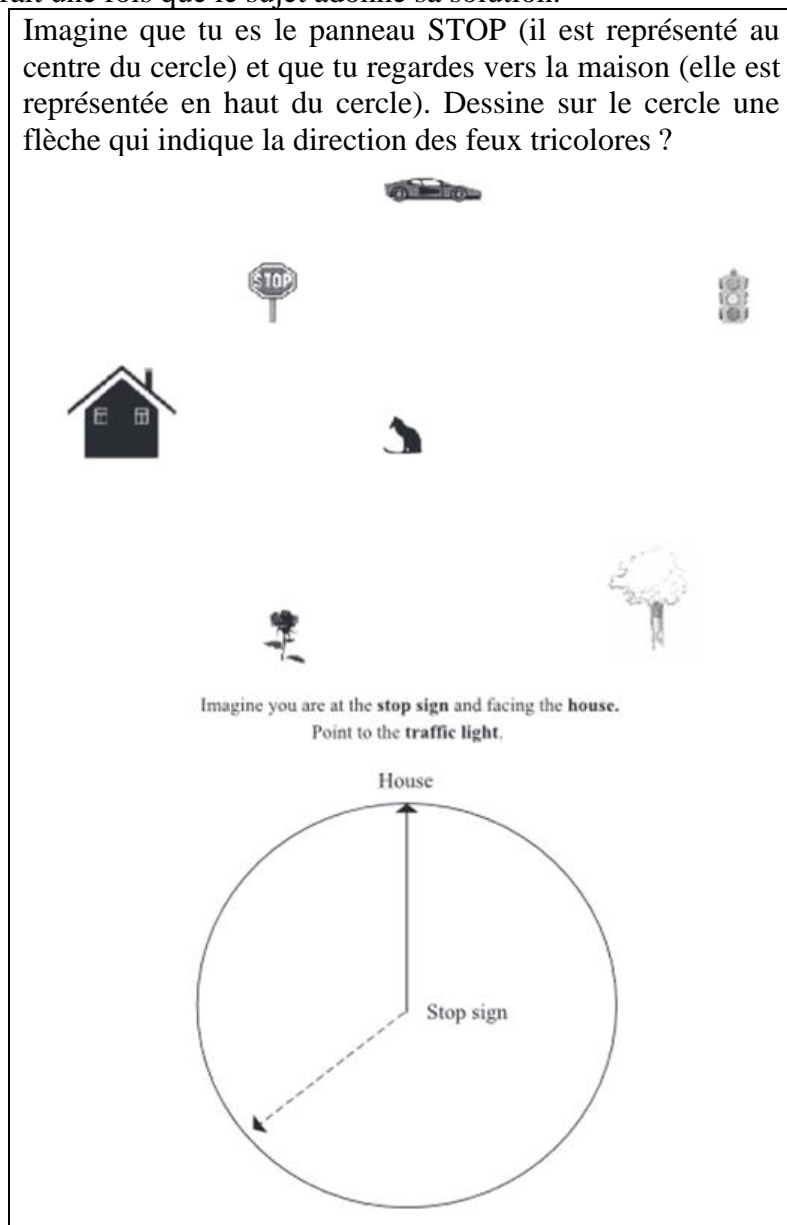


Figure 5. – Consigne pour le *Perspective Taking – Spatial Orientation Test* (Hegarty & Waller, 2004, p.178)

Le test contient cinq exemples, les 12 questions sont à résoudre en 5 minutes. Il est impossible de tourner la feuille. Plusieurs configurations spatiales sont interrogées. Ainsi dans ce test on attend que le sujet adapte son orientation et non pas que les objets tournent autour de lui.

Analyse didactique

Ce test permet de mesurer l'habileté Orientation Spatiale, la capacité à imaginer son propre déplacement autour d'un objet fixe. Les déplacements opérés par le sujet sont uniquement mentaux. En effet il est impossible de déplacer la feuille pour changer son orientation. La coordination des diverses représentations de l'espace implique la composante Orientation. L'articulation des images mentales produites implique la composante Organisation des connaissances spatiales.

La création et articulation des images mentales pour identifier les différents points de vue et orientations nécessite un niveau d'abstraction Scénographique.

L'espace de travail mobilisé dans ces tests est le micro-espace.

Cette tâche relève de l'orientation dans le plan et la coordination de différentes perspectives, ainsi elle rejoint le groupement de tâches 2) « Repérer / Situer / Cartographe / Coordonner les perspectives ».

DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans le cadre d'une étude des habiletés visuo-spatiales des enfants de 7 à 10 ans, une batterie de tests a été composée. Les tests choisis visent une mesure de différentes sous-habiletés : la Visualisation Spatiale, la Rotation Mentale, l'Orientation Spatiale et la Navigation Spatiale. Afin de mieux comprendre les éventuels liens entre les habiletés visuo-spatiales et les connaissances spatiales, des outils d'analyses didactiques ont été utilisés pour spécifier les différents tests. La Navigation Spatiale faisant l'objet de tests spécifiques, elle a été mise de côté pour cette présente analyse.

L'analyse didactique de ces tests utilise la structure génératrice des activités développée par Marchand (2020). Cette structure se compose de balises pour traiter les connaissances spatiales, de niveaux d'abstraction mobilisés dans le développement des connaissances spatiales et enfin d'un ensemble de variables didactiques incontournables pour des situations valorisant les connaissances spatiales.

Selon les tests étudiés, la Visualisation Spatiale, la Rotation Mentale et l'Orientation Spatiale peuvent être associées à la composante Orientation et la composante Organisation à travers la coordination mentale des différentes représentations d'objets du plan ou de l'espace. Cela implique la mobilisation d'images mentales et leur articulation à partir des relations intrinsèques et extrinsèques des objets en jeux.

La Visualisation Spatiale, la Rotation Mentale et l'Orientation Spatiale utilisent le niveau d'abstraction Scénographique. En effet durant les tests il est attendu du sujet qu'il soit capable de manipuler des images mentales cinétiques (Marchand, 2006), c'est-à-dire pour lesquelles les objets peuvent être transformés mentalement.

En ce qui concerne l'analyse des variables didactiques, les trois sous-habiletés sont associées au micro-espace de la feuille de papier. Dans le cas de manipulation mentale de solides on peut questionner la mobilisation d'un méso-espace conceptualisé dans le sens où les différentes faces du solide ne peuvent pas être visible simultanément. Les objets représentés sont des objets du plan (2D) ou de l'espace (3D) avec pour certains test la mobilisation de droites ou points dans les consignes. Enfin, la Visualisation Spatiale et la Rotation Mentale peuvent être associés à des tâches « Déplacer / Assembler / Décomposer / Plier / Réorganiser ». L'Orientation Spatiale peut être associé aux tâches « Repérer / Situer / Cartographe / Coordonner les perspectives ».

À l'issu de ces analyses il apparait que certains éléments caractérisant les connaissances spatiales semblent pouvoir être associés aux habiletés spatiales. Il apparait cependant que ces éléments communs (composantes, niveaux d'abstraction et variables didactiques) ne sont pas représentatifs de toutes les situations qui convoquent les connaissances spatiales.

Les composantes Orientation et Organisation apparaissent simultanément dans les tests étudiés. En ce qui concerne les situations didactiques visant les connaissances spatiales, ces deux composantes ne sont pas nécessairement convoquées conjointement. Il apparait même que la composante organisation impliquant les images mentales est souvent moins sollicitée que la composante orientation dans les programmes scolaires (Marchand, 2020).

Le niveau d'abstraction des différents tests est le niveau scénographique. Pour ce niveau les connaissances spatiales sont définies comme mentale et cinétique selon Marchand (2020). Elles reposent sur la mobilisation des images-concepts qui deviennent « cinétiques, transformatrices et même anticipatrices » (p. 151). Ce niveau d'abstraction est plus rarement mobilisé au profit des autres niveaux.

Une prochaine étape pourrait être d'analyser les tâches proposées dans les ressources institutionnelles visant le développement des connaissances spatiales afin d'identifier la place de ces images mentales et du niveau scénographique voire d'identifier en quoi les tâches institutionnelles participent, a priori, aux développements des habiletés spatiales des élèves.

RÉFÉRENCES

- BATTISTA, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (éd.), *second handbook of research on mathematics reaching and learning* (p. 843-908). National council of teachers of mathematics.
- BERNEY, S., BÉNARD-LINH QUANG, S., BÉTRANCOURT, M. & MAURER, R. (ACCEPTED). Adapting a spatial visualization adult test for school-aged children. SGP-SSP 2022.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Université de bordeaux.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.
- BUCKLEY, J., SEERY, N. & CANTY, D. (2019). Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving. *International journal of technology and design education*, 29, 341-362. <https://doi.org/10.1007/s10798-018-9446-3>
- CARROLL, J. B. (1993). *Human cognitive abilities. A survey of factor-analytic studies* (1st ed.). Cambridge, uk: cambridge university press.
- DAVIS, B., OKAMOTO, Y., & WHITELEY, W. (2015). Spatializing school mathematics. In b. Davis & the spatial reasoning study group (éds.), *Spatial reasoning in the early years: principles, assertions, and speculations* (p. 139-150). New york: routledge.
- DUROISIN, N. & DEMEUSE, M. (2016). Le développement de l'habileté des visualisations spatiales en mathématiques chez les élèves âgés de 8 à 14 ans. *Petit x*, 102, 5-25.
- EKSTROM, R., FRENCH, J., HARMAN, H. & DERMEN, D. (1976). Manual for kit of factor-referenced cognitive tests. Princeton, nj: educational testing service.
- HEGARTY, M., & WALLER, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, 32, 175-191.
- MAEDA, Y., & YOON, S. Y. (2013). A meta-analysis on gender differences in mental rotation ability measured by the purdue spatial visualization tests: visualization of rotations (psvt:r). *Educational psychology review*, 25(1), 69-94.
- MARCHAND, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en 3 dimensions ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 103-121.
- MARCHAND, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 40(2), 135-178.
- NEUBURGER, S., JANSEN, P., HEIL, M., & QUAISSER-POHL, C. (2011). Gender differences in pre-adolescents' mental-rotation performance: do they depend on grade and stimulus type? *Personality and individual differences*, 50, 1238-1242.
- NEWCOMBE, N. S. (2016). Thinking spatially in the science classroom. *Current opinion in behavioral sciences*, 10, 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.010>
- PETERS, M., LAENG, B., LATHAM, K., JACKSON, M., ZAIZOUNA, R., & RICHARDSON, C. (1995). A redrawn vanderberg and kuse mental rotations test: different versions and factors that affect performance. *Brain and cognition*, 28, 39-58.
- PICK, H. L., WAGNER, D., GARING, A. E., & RIESER, J. J. (1999). The recalibration of rotational locomotion. *Human perception and performance*, 25(5), 1179-1188.
- THURSTONE, L. L. (1950). *Some primary abilities in visual thinking*. Chicago il, usa: university of chicago press.
- TOLMAN, E. C. (1948). Cognitive maps in rats and men. *Psychological review*, 55(4), 189.
- WAI, J., LUBINSKI, D., & BENBOW, C. P. (2009). Spatial ability for stem domains: aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of educational psychology*, 101(4), 817-835. <https://doi.org/10.1037/a0016127>

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

MODELE POUR REPERER L'ACTIVITE DE SUJETS EN RESOLUTION DE PROBLEME

Mickael Da Ronch*, Michèle Gandit**, Sylvain Gravier**

RÉSUMÉ

Dans cet article nous proposons de présenter un modèle pour repérer les traces d'activité d'un individu (ou groupe d'individus) placé en résolution de problème dans des situations didactiques. Afin de recueillir un maximum de traces et d'avoir accès à l'intégralité des actions des individus nous utilisons une méthode de recueil basée sur des enregistrements audiovisuels. Notre modèle se présente en trois étapes. Une première au niveau du choix des observables : typologie et choix d'actions élémentaires, stratégies vues comme une concaténation ordonnée d'actions a_i réalisée sur des objets instanciés o_i caractérisant des mots et enfin l'encodage de ces actions en un format symbolique intelligible. Une deuxième au niveau du traitement du corpus de données en lien avec la retranscription et ses résumés. Cette seconde étape est dépourvue d'interprétation, elle est de fait complètement déterministe et permet lors de la lecture de rejouer chacune des actions réalisées par les sujets. Enfin, la troisième et dernière étape consiste à analyser cette retranscription, c'est-à-dire rechercher des séquences de mots $a_i o_i$ « analogues » aux stratégies identifiées dans l'analyse épistémologique du problème afin d'induire si les sujets sont entrés dans une démarche scientifique — mathématique dans notre contexte d'étude.

Mots-clefs : modèle de traitement et d'analyse ; typologie des actions, stratégie ; micro-activité, résumé.

ABSTRACT

In this article we propose to present a model for tracking the activity traces of an individual or group of individuals placed in autonomous problem solving. In order to collect as many traces as possible and to have access to all the actions of the individuals we use a collection method based on audiovisual recordings. Our model is presented in three stages. The first stage concerns the choice of observables: typology and choice of elementary actions, strategies seen as an ordered concatenation of actions a_i carried out on instantiated objects o_i characterizing words and finally the encoding of these actions in an intelligible symbolic format. A second one at the level of the processing of the corpus of data in connection with the retranscription and its summaries. This second stage is devoid of interpretation, it is in fact completely deterministic and allows the replay of each of the actions performed by the subjects. The third and final step consists in analyzing this transcript, i.e. looking for sequences of words $a_i o_i$ "analogous" to the strategies identified in the epistemological analysis of the problem in order to infer whether the subjects have entered into a scientific process and more exactly mathematics in our study context.

Keywords: processing and analysis model; typology of actions, strategy; micro-activity, summary.

INTRODUCTION

Une des parties de notre travail de recherche a consisté à élaborer une ingénierie didactique à partir d'un problème contemporain en mathématiques discrètes : *The Domino Problem* (Wang, 1961). L'objectif était de favoriser la pratique de l'activité mathématique en tant que démarche de recherche, dans des institutions spécifiques (Centres de Culture Scientifique), et ce à travers des modalités didactiques excluant complètement la présence de médiateur. A cette occasion, nous avons eu besoin de développer un modèle permettant de traiter et d'analyser les données audiovisuelles recueillies lors d'expérimentations afin de repérer des traces d'activité permettant d'inférer si le sujet (ou groupe de sujets) est entré dans une pratique de recherche.

Le modèle que nous avons développé vise donc à repérer ces traces par rapport à nos connaissances sur la résolution du problème donné. La méthode de recueil des données est basée sur des enregistrements audiovisuels d'activité d'individu (ou groupe d'individus) placé

* Haute École Pédagogique du Valais (Suisse) ; Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-Université Grenoble Alpes (France)

** Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-Université Grenoble Alpes (France)

en résolution de problèmes grâce à un dispositif de caméras posées sur des trépieds. On cherche à retranscrire le plus fidèlement possible les actions de sujets réalisées sur des objets¹ en vue de les analyser. Dans cet article, nous proposons de présenter ce modèle en l'illustrant par des exemples issus ou non de nos situations expérimentées (Da Ronch et al., 2020, 2021). Ce texte se situe à un niveau théorique et n'a donc pas pour vocation de décrire un récit d'expériences. Ainsi, nous faisons le choix de ne pas évoquer les conditions d'expérimentations de nos situations, mais nous prendrons tout de même appui sur des exemples simples et des données recueillies dans le cadre de nos recherches, afin de démontrer le caractère opérationnel de notre modèle.

Dans la suite du texte, nous présenterons donc ce modèle constitué de trois étapes principales : le choix des observables, la retranscription des données audiovisuelles d'expériences et enfin l'analyse de ces dernières. Nous terminerons par une discussion en pointant les forces mais aussi les limites de ce dernier et les perspectives possibles autour de l'Intelligence Artificielle.

DESCRIPTION DU MODÈLE

1. Choix des observables

Typologie et choix d'actions élémentaires

Il nous faut d'abord identifier des actions élémentaires a_i . Parmi ces actions nous conservons un sous-ensemble \mathcal{A} pour des raisons épistémologiques, c'est-à-dire des actions qui ont un lien étroit avec la résolution du problème ou bien pour des raisons didactiques. De plus, comme nous souhaitons traiter un corpus de données audiovisuelles nous imposons que l'ensemble \mathcal{A} de ces actions élémentaires soit fini.

En outre, chaque action élémentaire identifiée est réalisée dans un milieu, celui de la situation conçue à cet effet. Ces actions sont bien entendu de natures diverses et ont des fonctionnalités différentes dans la résolution d'un problème \mathcal{P} donné. Dans la littérature, on retrouve une caractérisation du milieu dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) agit selon trois espaces : le micro-espace, le méso-espace et enfin le macro-espace (voir p.ex., Berthelot & Salin, 1992; Brousseau, 1983; Galvez, 1985). Cette caractérisation permet d'engendrer une valeur de la « taille » de l'espace dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) entre en interaction (Berthelot et Salin, 1992, p. 98). Par exemple, le micro-espace est « l'espace d'interactions liées à la manipulation des petits objets » (*ibid.*, p. 99) et le méso-espace, selon Brousseau (1983) et repris par Berthelot et Salin (1992), est défini comme :

« L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet » (D'après Brousseau 1983 cité par Berthelot et Salin, 1992, p. 99).

Bien que cette classification permette de structurer le milieu selon la valeur de la variable concernant la « taille » de l'espace, elle est, pour nos besoins, trop générale. En outre, elle ne permet pas réellement de catégoriser finement nos actions élémentaires, d'autant plus que ces espaces sont en réalité encapsulés. Ainsi, il nous semble plus pertinent de catégoriser notre milieu selon différentes zones qui dépendent de leur fonctionnalité. Ceci nous donnera l'avantage de pouvoir typer nos actions $a_i \in \mathcal{A}$ en fonction de ces zones sur lesquelles le sujet (ou groupe de sujets) va agir. De manière générale, on caractérise donc le milieu en zones

¹ Ces objets peuvent être en théorie de différentes natures : objets tangibles, objets abstraits... ou éventuellement ne pas exister notamment lorsque l'action réalisée relève par exemple du dialogue.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

fonctionnelles : la *zone de travail* ; la *zone d'outillage* et la *zone d'information* tout en prenant en considération, dans la situation, la sphère sociale.

Ainsi, selon cette caractérisation donnée à notre milieu dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) va agir en vue de résoudre un problème \mathcal{P} , nous proposons une typologie des actions $a_i \in \mathcal{A}$ selon quatre types.

- Les \mathcal{T} -actions qui sont les actions de modification de la *zone de travail* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ est la zone principale où le sujet va agir en vue de donner des éléments de réponse au problème. Les actions sur cette zone sont donc liées aux actions de résolution du problème.
- Les \mathcal{O} -actions qui sont les actions d'interaction avec la *zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ fournit au(x) sujet(s) des objets nécessaires à l'élaboration des \mathcal{T} -actions.
- Les \mathcal{J} -actions qui sont les actions qui permettent d'accéder à la *zone d'information* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ permet de communiquer des informations sur le problème : règle du jeu, consigne, exemple, etc.
- Et enfin, les $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -actions qui sont les actions relevant des interactions sociales relatives aux échanges entre pairs voire à soi-même. Elles peuvent relever d'action dans le langage oral ou d'action monstrative qui consiste à communiquer dans un langage gestuel.

Exemple « feuille-fiche-trousse » — En classe lorsqu'un élève ou étudiant est confronté à la résolution d'un problème, on pourrait dire que sa $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ relève par exemple de la feuille sur laquelle il va écrire et/ou effacer et donc modifier $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. Pour effectuer ces modifications il va devoir interagir avec des objets qui sont à sa disposition, ce sont les objets disponibles dans sa trousse : crayon, stylo, gomme, règle... Par ces faits, il semble donc important de distinguer les \mathcal{T} -actions qui relèvent d'une modification de $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ des \mathcal{O} -actions qui consistent à interagir avec les objets de $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ nécessaires à la réalisation d'une \mathcal{T} -action. En prenant l'exemple de la *feuille-fiche-trousse*, on se rend bien compte que l'on doit dissocier le fait que le sujet prenne un stylo dans la trousse du fait qu'il écrive avec le stylo. L'action de prendre un stylo dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$, qui ici est la trousse, est en particulier une \mathcal{O} -action nécessaire et préalable mais non suffisante pour la \mathcal{T} -action qui consiste à écrire sur la feuille, donc à modifier $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. De plus, il pourrait également y avoir une $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ mise à disposition de l'élève ou de l'étudiant comme une fiche mentionnant le problème, les consignes, les rappels ou les points importants... Les actions réalisées dans cette zone, qui pourraient être par exemple la lecture de la consigne ou bien l'usage d'un rappel, relèvent donc, d'après notre typologie, des \mathcal{J} -actions.

Partition des \mathcal{O} -actions en des actions de sélection ou de dépôt d'objet

Notre typologie pourrait bien entendu être affinée. En particulier, les \mathcal{O} -actions peuvent être partitionnées en des actions de sélection d'objet \mathcal{O}_s -actions et des actions de dépôt d'objet \mathcal{O}_d -actions.

En effet, le fait de sélectionner un objet dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ peut révéler des éléments de stratégies de résolution du problème.

Exemple de construction d'une médiatrice — La procédure de construction de la médiatrice d'un segment peut être influencée par le matériel sélectionné dans la zone d'outillage. En effet, le fait de sélectionner le compas, la règle et le crayon dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ peut être révélateur d'une procédure de construction différente que si l'on sélectionne l'équerre *a contrario* du compas par exemple. Ces \mathcal{O}_s -actions influent alors sur le processus de construction et semblent être pertinentes à décrire puisqu'elles jouent le rôle d'indicateurs permettant d'induire certaines stratégies.

En outre, si $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ a suffisamment d'objets alors les actions qui consistent à déposer des objets dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ ne devraient pas être révélatrices d'une activité de résolution de problème. En

revanche, lorsque \mathcal{Z}_O est « pauvre » cela affirme une intentionnalité didactique et alors la description des \mathcal{O}_d -actions est nécessaire.

Exemple de construction de polyèdres réguliers — On cherche à construire la sous-classe de tous les polyèdres réguliers avec comme matériel disponible uniquement douze arêtes et huit sommets. Si l'on commence par construire un tétraèdre régulier (quatre sommets et six arêtes) il est alors impossible de construire d'autres polyèdres réguliers différents. Il faut alors « casser » tout ou une partie de la structure pour déposer des objets (sommets et arêtes) afin de pouvoir en construire de nouveaux comme le cube ou l'octaèdre régulier. Le fait de travailler avec un petit nombre d'arêtes et de sommets dans \mathcal{Z}_O affirme une intentionnalité didactique dans la structuration des actions et donc des stratégies mises en œuvre. En effet, cela implique de construire un à un chacun de ces polyèdres et en quelque sorte influencer la prise de conscience du sujet (ou groupe de sujets), par le comptage, du nombre de sommets et d'arêtes de chacune de ces structures régulières. Cela permet aussi de repérer que l'individu (ou groupe d'individus) prend conscience qu'il est nécessaire de déposer des objets pour pouvoir construire de nouvelles structures, puisqu'en effet on ne peut réaliser dans ces conditions de nouveaux polyèdres réguliers que par des \mathcal{O}_s -actions et \mathcal{O}_d -actions. Il est alors évident que si le nombre d'arêtes et de sommets était en quantité suffisamment importante pour construire tous les polyèdres réguliers alors les \mathcal{O}_d -actions n'auraient pas d'intérêt à être précisées.

Stratégies de résolution du problème

Le choix de notre ensemble fini \mathcal{A} d'actions élémentaires relevant de \mathcal{T} -actions, de \mathcal{O} -actions, \mathcal{J} -actions et des \mathcal{S}_O -actions est conditionné par rapport à nos connaissances sur la résolution du problème donné. Ainsi, à ce niveau il y a clairement une part d'interprétation, puisque des choix sont effectués en fonction de notre rapport personnel au problème et en particulier à ses éléments et ses conditions de résolution qui ont été relevés comme étant épistémologiquement ou didactiquement pertinents par rapport à ce que nous voulons observer.

En outre, l'analyse épistémologique du problème nous permet d'identifier les stratégies de résolution. Cette dernière étant théoriquement « parfaite » elle nous donne accès, de manière exhaustive, à toutes les stratégies. Pour nos besoins, nous caractérisons *une stratégie* comme une concaténation ordonnée d'actions élémentaires a_i réalisées sur des objets instanciés o_j . Une stratégie est donc un *mot* qui prend la forme d'une séquence ordonnée $a_i o_j$. Dans notre modèle, les stratégies sont donc définies *en extension* car l'analyse épistémologique nous les donne toutes. En pratique, nous les définissons *en compréhension*, c'est-à-dire regroupant des ensembles d'actions sur des objets génériques.



Figure 1. – Exemples d'une tuile de Wang de quatre couleurs et d'un pavage 2×3 valide à bords monochromes.

Exemple de stratégies en lien avec le problème de Wang — Il s'agit d'un problème de décision visant à démontrer l'existence ou non d'un pavage sur des régions rectangulaires de \mathbb{Z}^2 à bords monochromes avec un certain type de tuiles de Wang (figure 1). Ces tuiles possèdent toutes quatre secteurs triangulaires de couleur différente et les permutations de

couleurs sont autorisées. Ainsi, il y a 24 tuiles² dans notre collection. Pour accoler deux tuiles, il faut et il suffit qu'elles aient un bord commun de la même couleur (figure 1, à droite). Les détails concernant les analyses — historique, épistémologique et didactique — de cette situation se trouvent dans Da Ronch et al. (2020, 2021).

Dans cette situation il y a plusieurs manières de démontrer, par exemple, l'existence d'un pavage valide en générant des motifs périodiques (figure 2). Ces motifs ne sont pas uniques et sont en nombres. Par exemple, on peut dans le cas d'un rectangle 4×9 démontrer l'existence d'un pavage valide en générant des motifs 2×3 périodiques (figure 2, à gauche) ou alors 2×2 puis paver les trois dernières colonnes par deux motifs 2×3 (figure 2, à droite). Bien entendu, les motifs périodiques générés ne sont pas uniques et peuvent être de taille plus grande en fonction de la surface à paver. Il est alors fastidieux de décrire ces stratégies en instanciant chacune des actions sur des objets spécifiques qui ici sont des tuiles. Ainsi, à cette étape nous définissons, *en compréhension*, la stratégie d'existence par motifs périodiques. Les motifs périodiques sont ici génériques, ce n'est qu'à l'étape suivante, au niveau de l'analyse, que nous verrons si la stratégie décrite dans la retranscription est une instanciation de la stratégie définie *en compréhension*, c'est-à-dire, un cas particulier de stratégie définissant un mot spécifique de la forme $a_i o_j$. Par exemple, si on avait la retranscription de l'exemple de la figure 2 à droite, on chercherait à repérer, dans la retranscription, deux mots qui se répètent et qui génèrent la réitération des motifs 2×2 et 2×3 dans la construction du pavage. Ainsi, il faudrait repérer à plusieurs reprises les actions d'ajout concernant les tuiles spécifiques des motifs 2×2 et 2×3 .






Figure 2. – Exemples de deux stratégies différentes pour démontrer l'existence d'un pavage 4×9 valide.

Encodage des actions élémentaires en un format symbolique

Enfin, notre première étape se clôture par l'encodage de ces actions élémentaires. Afin de rendre intelligible notre retranscription, on réalise un encodage bijectif des actions a_i de \mathcal{A} en un format symbolique intelligible pris dans un ensemble fini de symboles \mathcal{L} . Ces symboles sont construits au plus près possible de la réalité.

Exemple d'encodage en lien avec la situation du problème de Wang — Nous donnons dans le tableau 1 quelques exemples non exhaustifs d'actions élémentaires choisies comme étant pertinentes pour notre situation avec leur symbole associé qui nous serviront lors de la retranscription des données audiovisuelles.

Action élémentaire de \mathcal{A}	Symbole associé de \mathcal{L}
Poser	+
Enlever	-
Chercher	
Pointer	
Dialoguer	
...	...

² $4! = 24$.

Tableau 1. – Encodage de quelques actions élémentaires en un format symbolique.

2. Retranscription des données audiovisuelles

Cette deuxième étape est dépourvue d'interprétation, elle est complètement déterministe puisque le traitement pourrait, dans l'idéal, être réalisé de manière automatique par une machine déterministe. On cherche ici à retranscrire le plus fidèlement possible le corpus de données audiovisuelles en fonction des actions a_i de \mathcal{A} préalablement choisies, réalisées sur des objets o_j de \mathcal{O} — éventuellement inexistant³ —, par des sujets s_k de \mathcal{S} . Les actions réalisées sur des objets sont effectuées par des sujets, ceci caractérise donc l'activité locale d'un individu qui est en train d'agir. Nous définissons alors le triplet $(a_i, o_j, s_k) \in \mathcal{A} \times \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ comme une *micro-activité* permettant de caractériser chacune des actions réalisées sur des objets par les sujets observés. En outre, chaque *micro-activité* est ordonnée par un marqueur *occurro-temporel* mentionnant l'occurrence discrétisée ($occ \in \mathbb{N}$) de cette dernière et l'instant $t \in [0, d]$ où elle est effectuée au cours de l'enregistrement audiovisuel d'une durée d .

$$\dots \xrightarrow[occ]{t} (a_i, o_j, s_k) \xrightarrow[occ+1]{t'} (a_p, o_m, s_k) \xrightarrow[occ+2]{t''} \dots$$

Entre chaque marqueur *occurro-temporel* peut se trouver une mais aussi plusieurs *micro-activités* commençant au même moment. C'est le cas notamment lorsque l'on est confronté à des facteurs contingents conduisant à un biais d'information — sujet devant l'objectif par exemple. C'est-à-dire qu'entre deux *micro-activités* clairement identifiables, il existe plusieurs *micro-activités* auxquelles nous ne sommes pas en mesure de donner un ordre, puisque nous ne savons pas, avec précision, quand elles ont été réalisées. De fait nous supposons qu'elles commencent toutes au même moment. D'ailleurs, il se peut aussi que plusieurs *micro-activités* soient situées entre deux marqueurs lorsque ces dernières sont réalisées dans un laps de temps quasi-immédiat.

$$\dots \xrightarrow[occ]{t} \overbrace{\{\text{Liste de micro-activités commençant au même moment}\}}^{\text{Phase}} \xrightarrow[occ+1]{t'} \dots$$

Il est important de mentionner ici l'hypothèse selon laquelle le temps d'exécution de ces *micro-activités* est identique, ce qui implique la fin de ces dernières dès lors qu'un nouveau marqueur apparaît explicitant de fait le début d'une « nouvelle » *micro-activité*. *A contrario*, si certaines d'entre elles ont des temps d'exécution différents, il est alors nécessaire d'avoir un marqueur de fin précisant l'occurrence et le positionnement de la *micro-activité* à laquelle ce marqueur fait référence, mais aussi son temps de fin. Nous avons donc tout intérêt au niveau des choix d'actions à conserver, dans la mesure du possible, des actions ayant des temps d'exécution « unitaires » car plus les actions choisies et donc les *micro-activités* observées ont des temps d'exécution différents plus l'écriture et la lecture de la retranscription seront complexes.

Exemple de micro-activités avec des temps d'exécution différents lors d'un entretien— Imaginons que l'on doive retranscrire finement le discours et les gestes d'un sujet lors d'un entretien en vue d'en analyser son comportement dans une situation problématique. Cet individu peut tout à fait, à un instant t , de l'entretien démarrer des actions simultanément en ayant toutes ou en partie des durées d'exécution différentes. Par exemple, le sujet s_1 observé à l'instant t prend la parole (a_1) pour répondre au problème tout en bougeant sa jambe (a_2) et en se touchant la menton (a_3). A l'instant $t' > t$ ce dernier continue toujours à s'exprimer par rapport au problème posé par son interlocuteur seulement il a arrêté d'effectuer un

³ L'objet peut ne pas exister notamment lorsque l'action réalisée est relative à un monologue ou un dialogue par exemple.

mouvement avec sa jambe et ne se touche plus le menton mais à démarrer, à cet instant t' , une nouvelle action qui consiste à croiser ses jambes (a_4)... Au niveau de l'occurrence du temps t' nous sommes contraints de préciser que les *micro-activités* du sujet s_1 relatives aux actions a_2 et a_3 sont terminées alors qu'une nouvelle commence en lien avec l'action a_4 tout en poursuivant l'action a_1 qui elle n'a pas cessé.

Exemple d'un fragment de retranscription de notre situation issue du problème de Wang — Dans cet exemple, deux sujets (bleu et rouge) agissent ensemble pour résoudre le problème de Wang dans le cas d'un rectangle avec les bords opposés, deux à deux, d'une même couleur à l'aide du matériel manipulable disponible (tuiles et réglette) à poser sur le plateau de jeu (grille). Sur la figure 3, on peut observer que le joueur bleu commence par placer la réglette afin de délimiter la taille de la surface du rectangle à paver, il construit ainsi un rectangle 4×9 . Ensuite dans la phase 1, il va chercher une tuile mais nous n'avons pas d'information sur sa structure ni sur sa localisation. Au même moment le joueur rouge pointe la première case de coordonnée $(1,1)$ ayant un environnement bleu à sa gauche et vert au sud. Dans la phase 2, le joueur bleu pose la tuile ayant la couleur rouge à gauche, verte au sud, bleue à droite et jaune au nord sur la case de coordonnée $(9,1)$. Nous laissons ensuite le lecteur ou la lectrice s'appropriier la sémantique des symboles dans la suite de la retranscription.

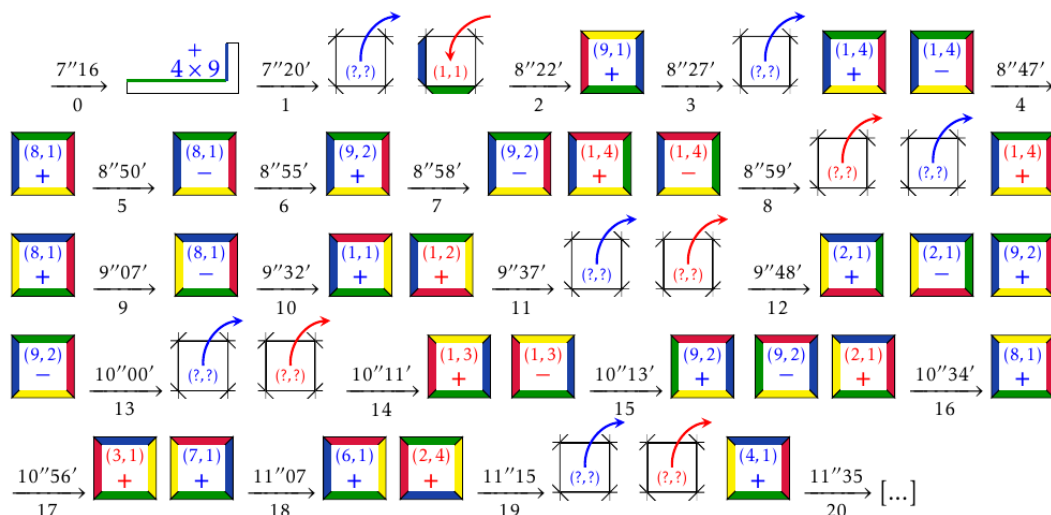


Figure 3. – Un fragment de retranscription issue de nos expérimentations.

Nous proposons ensuite d'enrichir notre retranscription par un résumé, c'est-à-dire une photographie « enrichie » à un instant donné de la zone de travail permettant d'avoir une vision statique de la situation à un moment donné. Ce résumé permet donc de retracer la réalité du sujet ou des sujets à un instant t . Il permet aussi de connaître exactement l'occurrence des \mathcal{T} -actions du sujet sachant le nombre d'occurrences des \mathcal{T} -actions des autres sujets. Ceci permet donc d'avoir le nombre de \mathcal{T} -actions réalisées entre deux \mathcal{T} -actions effectives mais aussi de connaître la distribution de ces actions, le sujet s_1 a-t-il effectué plus, moins ou autant de \mathcal{T} -actions que le sujet s_2 par exemple ? Dans ce résumé, nous ne prenons pas en compte l'occurrence des actions relevant d'autres types ($\mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_0, \mathcal{S}_0$) ni le temps⁴.

Exemple de résumé issu de la situation du problème de Wang — Le résumé ci-après nous donne le nombre de \mathcal{T} -actions (ajout/retrait) réalisées pour un joueur donné sachant le nombre de \mathcal{T} -actions (ajout/retrait) réalisées par l'autre joueur. Par exemple, dans la case en bas à gauche (figure 4), on observe que la tuile posée par le joueur bleu est sa dixième \mathcal{T} -actions sachant que le joueur rouge a réalisé seulement sa troisième \mathcal{T} -actions.

⁴ Se référer à la retranscription pour avoir accès à ces informations.

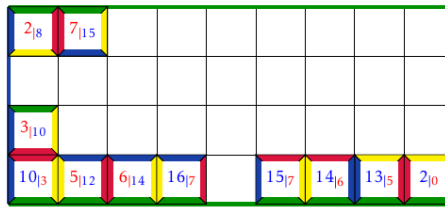


Figure 4. – Exemple d'un résumé qui permet d'avoir une vision statique de la situation en connaissant l'occurrence des \mathcal{T} -actions des deux joueurs.

Le *résumé* reproduit donc la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ dans laquelle les sujets se trouvent à un instant t ce qui s'avère être tout à fait complémentaire à la retranscription. Afin d'identifier rapidement les éléments de la retranscription qui vont apparaître dans *le résumé*, on peut faire le choix de proposer un symbole apparaissant au-dessus des lignes de retranscription afin d'identifier les actions qui vont apparaître dans le résumé de celles qui n'apparaîtront pas. Enfin, nous faisons le choix de proposer un *résumé* dès que la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ a été modifiée d'environ vingt-cinq pour cent car cela nous semble assez significatif pour apercevoir l'évolution des traces d'activité dans la résolution du problème.

En outre, nous pouvons également faire des choix paramétriques sur le *résumé*. Par exemple, au lieu de dénombrer l'occurrence de toutes les \mathcal{T} -actions sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$, nous pouvons faire le choix de cibler une \mathcal{T} -action particulière et d'observer sa distribution tout au long de la partie.

Exemple de résumés ciblant uniquement l'occurrence de l'ajout « + » et la distribution de cette \mathcal{T} -action — On donne ci-après trois résumés correspondant à différents temps de la résolution du problème dans le cas où les bords sont de couleurs différentes (figure 5). On observe tout au long de la partie un déséquilibre de plus en plus prégnant dans la distribution des actions d'ajout de tuiles. Le dernier résumé (celui du bas, figure 5) montre même que les tuiles présentes à cet instant t ont été déposées uniquement par le joueur rouge. Ceci peut se révéler être un bon indicateur pour différencier les stratégies élaborées par les différents joueurs et ne pas attribuer des stratégies et raisonnements à des individus qui n'auraient en réalité été que de simples spectateurs dans la résolution du problème.

Outre ces faits, on pourrait naturellement se demander pourquoi ne pas utiliser uniquement des *résumés* en guise de retranscription. En fait ces derniers, bien qu'ils décrivent la réalité des sujets à un moment donné, nous font perdre des informations importantes concernant les autres micro-activités réalisées sur d'autres zones, les « bruits » lors d'essais-erreurs et le temps t d'exécution de toutes de ces micro-activités. Pour ces raisons, il nous semble important que ces *résumés* viennent en complément de la retranscription.



Figure 5. – Autre exemple prenant en compte uniquement l’occurrence de l’ajout « + » et distribution de cette T-action.

3. Analyse des retranscriptions

La retranscription est représentée par un mot $a_i o_j$ qui permet en plus de savoir, pour une action retranscrite, celui ou celle qui l’a effectuée. L’intégralité de ce mot ne correspond pas nécessairement à une stratégie, c’est pourquoi il nous faut repérer, lors de cette dernière étape, des sous-mots $a_i o_j$ relatifs aux stratégies identifiées dans le choix des observables. On vérifie alors que ces sous-mots sont identiques ou « proches » de ces stratégies pour inférer qu’un sujet (ou groupe de sujets) a mis en œuvre telle ou telle stratégie, menée par un certain raisonnement, rendant alors plausible l’entrée dans une démarche scientifique — mathématique dans notre contexte d’étude. De plus, comme nous avons fait le choix de définir, pour des raisons pratiques, les stratégies non pas en extension mais en compréhension, il s’agit donc de repérer au niveau de la retranscription si un sous-mot effectif est une instantiation d’une des stratégies décrites en compréhension dans l’analyse épistémologique.

Exemple d’analyse du fragment de retranscription de la figure 3 — Dans cet extrait, on observe au niveau de l’intervalle $[0, 16[$ que les deux joueurs sont dans une phase de jeu essais-erreurs, puisque la quasi-totalité des micro-activités réalisées relève de l’ajout, puis du retrait, presque immédiat, des tuiles déposées. Par ailleurs, on remarque dans l’intervalle $[10, 20[$ que les sujets tentent de paver la première ligne du pavage en construisant des motifs différents et horizontalement périodiques de taille 1×2 . Néanmoins, ce court extrait de retranscription ne permet pas de montrer le caractère périodique des sous-mots relatifs à ces motifs puisqu’ils ne sont pas répétés dans cet extrait (figure 6).



Figure 6. – Exemple de deux sous-mots extraits de la retranscription (figure 3) générant deux motifs de taille 1×2 horizontalement périodiques sans répétition dans le fragment de retranscription.

Il serait donc nécessaire d'analyser la suite de cette retranscription pour s'en rendre compte et allouer ou non la stratégie de périodicité aux deux sujets ou à un des deux selon les micro-activités effectives... En conclusion, le fragment de retranscription présenté à la figure 3 est trop court pour pouvoir statuer sur la mise en œuvre d'une quelconque stratégie autre que le jeu essais-erreurs (périodicité par exemple) et donc sur l'activité mathématique des sujets.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Dans cet article nous avons présenté un modèle qui permet de repérer des traces de l'activité de sujets en résolution de problèmes en pointant précisément la phase de repérage et d'interprétation. Nous savons effectivement où se situe la part d'interprétation dans notre modèle. Cette dernière se situe précisément au niveau des choix des observables, le reste est complètement déterministe sauf parfois au niveau de l'analyse des retranscriptions puisque les stratégies repérées peuvent être plus ou moins « proches » de celles identifiées dans l'analyse épistémologique du problème. Cela dépend donc de la valeur que nous attribuons au vocable « proche ».

Ce modèle montre aussi sa pertinence lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes utilisant des objets tangibles, dont les actions sur ces derniers sont similaires à celles conduites sous la forme papier-crayon. Les mathématiques discrètes par exemple semblent un domaine propice puisqu'un bon nombre d'objets mathématiques, — graphes, tuiles, polyminos, jetons...—, liés à des problèmes de combinatoire, d'optimisation discrète, etc., peuvent facilement être représentés sous la forme d'artefacts tangibles.

En outre, il semble probable que de tels problèmes, représentés sous la forme d'artefacts numériques, facilitent cette retranscription mais ouvrent alors naturellement un questionnement sur une autre transposition, celle de la transposition informatique. D'ailleurs, il serait pertinent, selon les possibilités, d'envisager ce traitement sur une machine déterministe en se questionnant sur ce qu'il est envisageable de faire dans le domaine de l'Intelligence Artificielle. En effet, cela permettrait d'effectuer des fouilles de données importantes et ce pour une variété conséquente d'utilisateurs.

Par ailleurs, ce modèle permet aussi de réaliser des analyses quantitatives grâce à des fouilles de données recueillies sur une action spécifique, sur la distribution de certaines actions mais aussi sur le traitement des bruits.

Il possède aussi des limites notamment lorsque le temps d'exécution des actions est différent, ce qui complexifie la lecture et l'écriture de la retranscription. Ce modèle pose aussi question sur son opérationnalité dans le cas d'objets — mathématiques — abstraits complexes qui ne peuvent prendre un format tangible et qui rendent de fait l'encodage plus complexe.

RÉFÉRENCES

- BERTHELOT, R., & SALIN, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Theses, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065>
- BROUSSEAU, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple : La géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 45, 183-226.
- DA RONCH, M., GANDIT, M., & GRAVIER, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, 121, 77-105. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03030861>
- DA RONCH, M., GANDIT, M., & GRAVIER, S. (2021). Learning of the scientific approach at university: The case of research situations from problems of discrete mathematics. 14th International Congress on Mathematical Education. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03285073/>
- GALVEZ, G. (1985). *El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*. [Tesis]. Centro de Investigacion del IPN Mexico.
- WANG, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition—II. *Bell system technical journal*, 40(1), 1-41

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

COMPARAISON DE LONGUEURS EN ENVIRONNEMENT PAPIER-CRAYON ET EN ENVIRONNEMENT NUMERIQUE : ETUDE DE LA DOUBLE ADAPTATION D'UNE SEANCE DE FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE

Charlotte Derouet*, Catherine Thomas**

RÉSUMÉ

Notre étude se focalise sur une séance de formation sur le concept de longueur. Les tâches en jeu dans la séance sont toutes du type « Comparer la longueur de deux ou plusieurs objets » et s'appuient sur la manipulation d'objets. Initialement, ces objets étaient des bandes papier mais sont devenues des bandes dynamiques en environnement numérique pour répondre aux contraintes de l'enseignement à distance. Le changement d'environnement a nécessité des adaptations des tâches du côté des formatrices et du côté des étudiants. Nos objectifs sont de décrire les choix et les adaptations opérés par les formatrices sur ces tâches, en termes de valeurs des variables et de conséquences sur les techniques attendue puis d'étudier la capacité des étudiants à opérer l'adaptation inverse. Cette adaptation inverse nécessite d'identifier les tâches avec des bandes de papier telles qu'elles pourraient être vécues en classe, d'explicitier les techniques correspondantes et les justifier. Nous montrerons en quoi cette étude permet de mettre en lumière des difficultés des professeurs des écoles fonctionnaires stagiaires sur le thème de grandeurs et de leurs mesures.

Mots-clefs : longueur ; grandeur et mesure; artefact numérique ; T4TEL ; formation des enseignants du premier degré.

ABSTRACT

Our study focuses on a training session on the concept of length. The tasks in the session are all of the type "Compare the length of two or more objects" and rely on the manipulation of objects. Initially, these objects were paper strips but became dynamic strips in a digital environment to meet the constraints of distance learning. The change of environment required task adaptations on the part of the trainers and on the part of the students. Our objectives are to describe the choices and adaptations made by the trainers on these tasks, in terms of variable values and consequences on the expected techniques, and then to study the students' ability to make the reverse adaptation. This reverse adaptation requires identifying the tasks with paper strips as they might be experienced in class, making the corresponding techniques explicit and justifying them. We will show how this study sheds light on trainee teachers' difficulties with quantities and their measurement.

Keywords: length; quantity and measurement; digital artefact; T4TEL; primary teacher training

INTRODUCTION

L'enseignement à distance à l'université implique de nécessaires adaptations au niveau des enseignements. Au-delà des modalités qui diffèrent, les contenus même des enseignements peuvent être modifiés. La question notamment se pose lorsqu'il s'agit de faire manipuler les étudiants. Même si les objectifs de formation restent les mêmes, ces adaptations jouent sur les tâches prescrites aux étudiants.

Notre étude en cours se focalise sur une séance d'enseignement à distance de construction du concept de longueur, dispensée en décembre 2020¹, à 74 étudiants professeurs des écoles fonctionnaires stagiaires (PEFS) de l'INSPE de Strasbourg. Cette séance articule la réalisation et l'analyse de tâches du type « Comparer la longueur de deux ou plusieurs objets », avec des variations dans les choix des variables didactiques pour faire évoluer les techniques mises en œuvre par les étudiants (et les élèves potentiels). Souhaitant rester le plus proche possible du scénario initial en présentiel, de type formation par homologie avec manipulation de bandes de papier, l'enseignement en distanciel nous a conduites, en tant que formatrices, à modifier

* LISEC UR2310, Université de Strasbourg, UL, UHA

** INSPE de l'académie de Strasbourg, Université de Strasbourg

¹ Pendant la pandémie Covid-19, avec l'enseignement à distance imposé.

l'environnement des tâches de comparaison proposées. Ainsi, les bandes de papier (artefacts matériels) à comparer ont été remplacées par des bandes dynamiques construites avec le logiciel *GeoGebra* (artefacts numériques). Les étudiants, plutôt qu'à des manipulations papier-crayon, étaient ainsi confrontés à des manipulations numériques. Du fait de ces modifications, nous avons ajouté à l'analyse des tâches, demandée aux étudiants, une réflexion préalable sur l'adaptation de ces tâches numériques à des tâches papier-crayon (nous parlerons d'adaptation inverse) pour une réalisation de ces tâches en classe (cycle 2²). Les étudiants travaillaient de façon autonome en petits groupes ; les formatrices avaient seulement un rôle de régulatrices techniques. Les différentes tâches proposées aux étudiants sont détaillées dans (Derouet et al., 2022)³.

Ce travail de transformation de la séance nous a amené à penser le processus de conception et de mise en œuvre comme une « double adaptation » (figure 1). En effet, au départ, nous partions, en tant que formatrices, de notre séance en présentiel constituées de tâches « papier-crayon » et de manipulation de bandes de papier. Le distanciel nous a contraintes à adapter ces tâches dans l'environnement numérique, en particulier par de la manipulation de bandes dynamiques, construites avec le logiciel *GeoGebra*. Puis ces tâches numériques vécues (par les étudiants) ont dû être transformées à leur tour, et cette fois par les PEFS, par une adaptation inverse visant à réintégrer ces tâches dans un environnement papier-crayon, afin de pouvoir les adresser à des élèves de l'école élémentaire. Ce travail d'adaptation nous a paru indispensable car les tâches numériques vécues par les étudiants ne sont pas à destination des élèves.

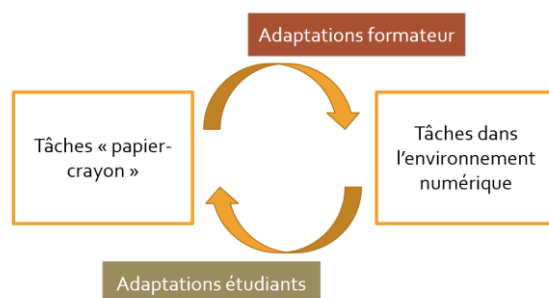


Figure 1. – Schéma de la double adaptation

ELEMENTS THEORIQUES ET OBJECTIFS DE RECHERCHE

Après avoir présenté les éléments théoriques utilisés dans notre étude, nous exposerons nos objectifs de recherche.

1. Cadre des grandeurs

En nous appuyant sur les travaux de plusieurs auteurs (Rouche, 1995 ; Perrin-Glorian, 2016 ; Chevallard et Bosch, 2002), nous entendons le concept de grandeur (mesurable) comme critère de comparaison objectif d'objets du monde sensible, que l'on peut définir mathématiquement comme classe d'équivalence d'une relation d'équivalence entre des objets du monde sensible, munie d'une somme.

Dans un problème concernant les grandeurs et leurs mesures, nous avons trois objets en jeu, se rapportant à trois cadres différents :

² Elèves de 6-8 ans.

³ Le parcours Moodle est accessible librement en cliquant sur « Connexion anonyme » à l'adresse :

<https://moodle.unistra.fr/course/view.php?id=2719>

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

un objet matériel qui renvoie à la réalité physique, par exemple un cube de bois, une grandeur physique ou géométrique renvoyant à la physique ou aux mathématiques, par exemple la masse de ce cube ou son volume ou la longueur de son arête et un nombre qui rendra compte de la mesure de la grandeur considérée une fois qu'on a choisi une unité. (Perrin-Glorian, 2016, p. 1)

La mesure est un nombre permettant de quantifier la grandeur considérée, après avoir choisi un objet particulier dont on attribue le rôle d'objet-étalon (nous parlerons d'étalon) et dont la grandeur associée est choisie comme grandeur-unité. Cette unité est alors sommée à elle-même un certain nombre de fois afin d'obtenir la grandeur à mesurer (ou une grandeur la plus proche possible). Ce « certain nombre de fois » est appelé « mesure » de la grandeur, associée à l'unité choisie.

Ainsi, par exemple, considérons une bande de papier A, de longueur l et une seconde bande de papier, de longueur choisie comme unité u , si $l = 6u$, nous dirons :

- Les bandes A et B sont des objets, la bande B est choisie comme étalon,
- l et u sont des longueurs,
- 6 est la mesure de la longueur de la bande A dans l'unité (de longueur) u .

Nous évitons le verbe « mesurer » qui peut être porteur d'ambiguïté, et préférons parler de mesurage pour désigner l'action de déterminer une mesure par une manipulation, que ce soit à l'aide d'un instrument de mesure (conventionnel ou non) ou par report de l'unité (via l'objet-étalon).

Quoi qu'il en soit, le mot « mesurer », selon nous, renvoie à la production d'un nombre. Les étudiants concernés dans cette étude ont reçu pour une majorité d'entre eux un cours de didactique des mathématiques en M1 (excepté les étudiants en DU) sur les grandeurs et mesures, s'appuyant sur ce point de vue.

2. Cadre théorique T4TEL

Pour cette étude, nous empruntons des éléments théoriques issus de la Théorie Anthropologique du Didactique et de ses développements liés aux usages d'environnements numériques dans le cadre du T4TEL (Chaachoua, 2019). Nous nous appuyons sur la notion de praxéologie (Chevallard, 1999), quadruplet composé d'un type de tâches, d'une technique (qui permet de l'accomplir), d'une technologie (qui justifie, produit ou explique cette technique) et d'une théorie (qui elle-même justifie, produit ou explique la technologie), auquel nous ajoutons les notions de variables, notamment de variables didactiques, et de générateur de types de tâches (Chaachoua, 2019).

Un générateur de types de tâches GT est un triplet composé d'un verbe d'action, d'un complément fixe, et d'un système de variables, c'est-à-dire une liste de variables et de valeurs qu'elles peuvent prendre (Chaachoua, 2019). Les deux premiers éléments du triplet [verbe d'action, complément fixe] est un type de tâche générique. Différentes instanciations des variables permettent d'engendrer des types de tâches plus spécifiques, des sous-types de tâches du type de tâche générique. Un des critères de choix des variables sont les techniques engendrées. Dans notre cas, le type de tâches générique étudié est « Comparer la longueur de deux ou plusieurs objets », que l'on spécifie en sous-types de tâches suivant les variables considérées et les valeurs associées. Nous avons identifié plusieurs variables et valeurs associées (tableau 1).

VARIABLES	VALEURS POSSIBLES
V1 : Disponibilité de la règle graduée (RG)	V1 = RG disponible ; V1 = RG non disponible
V2 : Quantité de bandes à comparer	V2 = 2 ; V2 ≥ 3
V3 : Possibilité de rapprochement des bandes à comparer	V3 = bandes à comparer rapprochables ; V3 = bandes à comparer non rapprochables
V4 : Longueurs relatives des bandes à	V4 = rapport proche de 1 ; V4 = rapport non proche de 1

comparer	
V5 : Visibilité des bandes à comparer	V5 = l'ensemble des bandes à comparer est visible simultanément ; V5 = seule une des bandes à comparer est visible ; V5 = les bandes sont toutes visibles mais une à une
V6 : Disponibilité d'une ou plusieurs bandes annexes supplémentaires	V6 = aucune bande annexe disponible ; V6 = 1 bande de longueur supérieure aux bandes à comparer disponible ; V6 = 1 bande de « petite longueur » disponible ; V6 = plusieurs bandes de « petite longueur » identique disponibles ; V6 = 1 bande de longueur supérieure + 1 bande de « petite longueur » ; V6 = possibilité
V7 : Déplacement des bandes annexes	V7 = bande annexe déplaçable ; V7 = bande(s) non déplaçable(s)
Autres variables :	Positionnement des bandes disponibles au départ ; Transparence des bandes ; Disponibilité d'autres matériels ; ...

Tableau 1. – Liste des variables et des valeurs

3. Objectifs de recherche

Nos objectifs de recherche sont les suivants :

- O1 : Décrire les choix et les adaptations opérées par les formatrices sur les tâches, en termes de valeurs des variables didactiques et de conséquences sur les techniques attendues.
- O2 : Étudier la capacité des étudiants à opérer l'adaptation inverse pour identifier les tâches avec des bandes de papier telles qu'elles pourraient être vécues en classe, pour expliciter les techniques correspondantes et pour les justifier.

Notre questionnement sur cette double adaptation se focalise sur une tâche particulière de la séance (figure 2), correspondant au type de tâche spécifique « Comparer les longueurs de deux objets non déplaçables de longueurs proches, avec mise à disposition d'un objet déplaçable de longueur supérieure aux deux autres ».

Parcours : Longueur

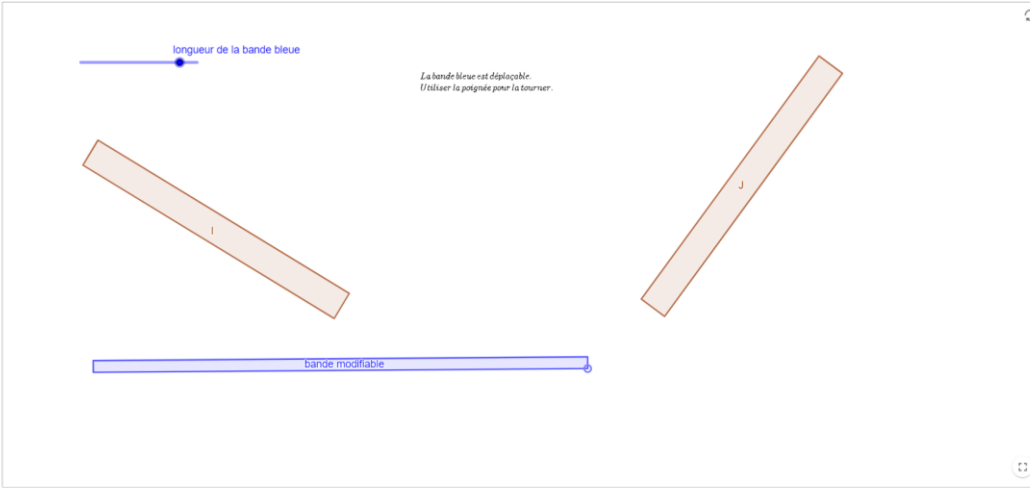
Séance 8

Prévisualisation Modifier Rapports Évaluer les compositions

Etape 3

Consigne

Comparer les longueurs des bandes I et J.



Compléter votre feuille réponse avant de passer à l'étape suivante.

Figure 2. – La tâche étudiée

ANALYSE DE LA PREMIERE ADAPTATION

Pour répondre à l'objectif O1, nous identifions les valeurs prises par les variables dans les deux environnements et nous les rattachons à des techniques.

Dans ce type de tâches spécifique, les valeurs prises par les variables et identiques en environnement papier-crayon et en environnement numérique sont les suivantes :

- V1 = Règle graduée non disponible (non renseigné, mais implicite) ;
- V2 = 2 ;
- V3 = bandes à comparer non rapprochables ;
- V4 = rapport des longueurs des bandes à comparer proche de 1 ;
- V6 = 1 bande annexe de longueur supérieure aux bandes à comparer disponible ;
- V7 = bande annexe déplaçable ;
- Autre variable : Positionnement des bandes disponibles au départ : Orientation quelconque.

Au niveau de la variable V5 « visibilité des bandes à comparer », dans l'environnement numérique, l'ensemble des bandes à comparer est visible simultanément (micro-espace), tandis que dans l'environnement papier-crayon que nous faisons auparavant, les bandes étaient toutes visibles mais une à une, à des endroits différents d'une pièce par exemple (mésospace). Cependant, nous pourrions envisager une version papier-crayon avec les bandes visibles simultanément, sans que cela joue fondamentalement sur la technique.

Enfin, au niveau du matériel à disposition, il y a aussi des différences qui jouent notamment sur la variable V6. En effet, dans l'environnement numérique, la valeur de la variable « matériel à disposition » est le curseur. La bande annexe déplaçable mise à disposition a une longueur de départ supérieure aux deux bandes à comparer, longueur qui peut être modulée à l'aide du curseur (de longueur nulle jusqu'à une longueur plus grande que celles des bandes à comparer). La technique à utiliser pour comparer les deux bandes est de superposer ou de juxtaposer la bande annexe modifiable à la bande I, de positionner le curseur afin que la bande annexe soit de la même longueur que la bande I (relation d'équivalence « a même longueur que »), ensuite de déplacer la bande modifiable afin de comparer sa longueur à celle de la bande J (relation d'ordre « est plus longue que ») et enfin de conclure sur la comparaison de la longueur des bandes I et J (par transitivité de la relation d'ordre).

Dans l'environnement papier-crayon, le matériel peut être varié : ciseaux, crayon... La technique la plus analogue à celle numérique est de plier la bande intermédiaire (ou de la couper, mais avec un caractère irréversible qui n'existe pas en numérique). La technique qui consiste à faire un marquage au crayon, quant à elle, ne transforme pas la bande intermédiaire en un nouvel objet de même longueur que la bande I mais permet de garder en mémoire une longueur : cette technique est valide mais diffère de celle en numérique et correspond à la technique attendue à la tâche suivante dans le parcours numérique.

Au vu de ces différences de matériel à disposition, on pourrait spécifier encore plus les valeurs de la variable « V6 : Disponibilité d'une ou plusieurs bandes annexes supplémentaires » avec les valeurs suivantes :

- V6 = 1 bande annexe de longueur modulable (pouvant être supérieure et inférieure aux bandes à comparer) disponible ;
- V6 = 1 bande annexe informable de longueur supérieure aux bandes à comparer disponible.

L'aspect modulable peut donc être rapproché du caractère modifiable à l'aide du curseur en numérique) ou encore du caractère pliable ou découpable en environnement papier-crayon et renvoie à la technique de création d'un objet intermédiaire de même longueur qu'une des bandes à comparer, à partir d'une bande annexe disponible (technique *a*).

L'aspect informable quant à lui renvoie à la technique de marquage (technique *b*).

Cette analyse permet de mettre en évidence que le passage de l'environnement papier-crayon à l'environnement numérique à amener à faire des choix sur les valeurs des variables qui ont des conséquences sur les techniques ; en effet, la technique de marquage (technique *b*) disponible en papier-crayon est rendue impossible dans l'environnement numérique tel qu'il a été conçu.

ANALYSE DE L'ADAPTATION INVERSE

Pour répondre à l'objectif O2, concernant l'adaptation inverse par les étudiants, après avoir précisé les données récoltées ainsi que les outils utilisés, nous présenterons quelques éléments de l'analyse et les premiers résultats.

1. Données récoltées

L'expérimentation s'est déroulée dans quatre groupes de PEFS affectés en cycles 2 et 3⁴, lors d'une séance de deux heures (créneaux différents pour les quatre groupes) en distanciel. Chaque groupe était constitué entre 14 et 27 étudiants, séparés en quatre équipes de 3 à 7 étudiants. Chaque équipe réalisait les manipulations de comparaison sur la plateforme *Moodle* (manipulations individuelles) et complétait collaborativement un fichier réponse. Les discussions dans l'équipe se faisaient à l'oral en visioconférence et par écrit *via* le fichier partagé.

Les fiches réponse des seize équipes ont été récoltées et analysées. De plus, les discussions de tous les groupes ont été enregistrées ainsi que la manipulation d'un des étudiants du groupe, et en cours de transcription. Les transcriptions ne seront pas analysées dans cette communication. Les trois formatrices impliquées dans cette formation étaient observatrices d'une équipe de chaque groupe.

2. Méthodologie

Pour cette étude préliminaire, seules les questions de la fiche réponse concernant les adaptations de l'étape 3 ont été analysées. Il était demandé aux étudiants de répondre aux questions suivantes :

- Q3.1 : Quel est le matériel et les contraintes nécessaires pour l'adaptation (avec de la manipulation de matériel) de la situation vécue à cette étape ?
- Q3.2 : Quelle(s) procédure(s) est(sont) attendue(s) par des élèves de cycle 2 ?
- Q3.3 : Que doivent retenir les élèves de cette étape ?

La première question nous permet d'identifier les variables et les valeurs identifiées par les étudiants.

La seconde nous permet de mettre en lumière les techniques associées proposées par les étudiants et de les classer.

La dernière nous permet d'identifier ce que les étudiants considèrent comme des éléments importants à retenir pour les élèves, s'ils se situent au niveau du type de tâches, des variables en jeu et de leurs valeurs, de la technique, et/ou de la justification de la technique (technologies)... Nous faisons l'hypothèse que ces éléments seront plutôt du côté de la technique que de la technologie.

⁴ Le cycle 2 correspond aux classes de CP, CE1 et CE2 (élèves de 6 à 8 ans) et le cycle 3 correspond aux classes de CM1, CM2 (école élémentaire) et sixième (collège) (élèves de 9 à 11 ans).

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

3. Analyse de la question Q3.1

L'analyse des réponses des seize équipes nous ont permis de repérer les variables et les valeurs associées identifiées ou non par les étudiants. Dans le tableau 2, se trouve un exemple de l'analyse pour deux équipes.

Équipe	Réponse à Q3.1 : <i>Quel est le matériel et les contraintes nécessaires pour l'adaptation (avec de la manipulation de matériel) de la situation vécue à cette étape ?</i>	Variables et valeurs des variables
9S4	« 2 bandes fixes, et un étalon déplaçable de longueur ajustable Contrainte : seul l'étalon est déplaçable + modifier la longueur de l'étalon »	V2 = 2 ; V6 = 1 bande annexe de longueur modulable aux bandes à comparer disponible ; V3 = bandes à comparer non rapprochables ; V7 = bande annexe déplaçable ; V1 = RG non disponible (implicite)
10S3	« - Deux bandes fixes de longueur proches, placées à différents endroits de la classe - Du papier calque afin de créer une reproduction de la bande qui servira de comparant, le gabarit »	V2 = 2 ; V4 = rapport des longueurs des bandes à comparer proche de 1 ; V5 = les bandes sont toutes visibles mais une à une Matériel disponible = papier calque

Tableau 2. – Analyse des réponses de deux équipes à la question Q3.1

Nous pouvons remarquer que pour l'équipe 9S4 (tableau 2), la bande annexe de longueur modulable est appelée « étalon », ceci sera repris plus loin. Le matériel proposé par l'équipe 10S3, à savoir le papier calque, renvoie à une technique non présentée jusqu'ici. Dans ce cas, la variable V6 prend la valeur « V6 = aucune bande annexe disponible », cependant le matériel à disposition permet de construire un objet de même longueur qu'une des deux bandes à comparer. C'est aussi le cas avec la mise à disposition de ficelle par exemple.

Suivant cette grille d'analyse, généralisée à toutes les équipes, nous avons pu compléter le tableau en annexe 1. Nous pouvons y repérer plusieurs éléments. Les variables didactiques et leurs valeurs sont globalement identifiées par les étudiants, parfois de manière implicite au vu de leurs réponses aux autres questions. Elles peuvent être adaptées à l'environnement papier-crayon, c'est notamment le cas pour la variable V6, avec les deux possibilités discutées dans l'analyse de la première adaptation. Cependant cela n'est que partiellement visible dans la réponse à cette question, car cela dépend ensuite de la technique envisagée (question suivante).

En revanche, la variable didactique « V4 : Longueurs relatives des bandes à comparer » n'est citée que par cinq équipes sur les seize. Une des cinq équipes justifie cette valeur en précisant : « Les longueurs des bandes fixes doivent être proches afin de ne pas recourir à la discrimination visuelle » (équipe 5S2). Cet extrait met en évidence la portée de la technique (Chaachoua, 2020) de comparaison visuelle, possible seulement si la différence des longueurs des bandes à comparer est suffisamment grande.

4. Analyse de la question Q3.2

La question Q3.2 nous permet d'identifier les techniques envisagées par les étudiants. On peut s'attendre aux deux types de techniques présentées précédemment :

- La technique *a*, analogue à l'environnement numérique : création d'un objet intermédiaire de même longueur qu'une des bandes à comparer, à partir d'une bande annexe disponible :
- La technique *b* de marquage : mise en mémoire d'une longueur sur une bande annexe plus longue que les bandes à comparer, à l'aide de marquage.

Cependant une troisième technique peut apparaître :

- La technique *c*, proche de la technique *a* mais nuancée avec la fabrication d'un objet intermédiaire (à partir d'un matériel à disposition tel que du papier calque, une ficelle...) de même longueur qu'une des bandes à comparer. Cet objet n'est pas une bande annexe supplémentaire mais bien un matériel détourné afin de permettre cette construction.

Ces trois techniques sont présentes dans les productions et elles peuvent être bien identifiées comme différentes par certains étudiants :

Equipe 6S2 :

Option 1 : Utiliser la bande mobile. La déplacer et la superposer à la première bande fixe. Y reporter la longueur de la bande fixe à l'aide d'un crayon. Dans un deuxième temps, placer la bande mobile sur l'autre bande fixe et comparer sa longueur avec le marquage présent sur la bande mobile.

Option 2 : Utiliser le pliage de la bande mobile à la place du marquage au crayon.

En revanche, il faut parfois mettre en lien la description des procédures avec la question précédente pour identifier le rattachement à la technique *a* ou la technique *c*.

Equipe 10S2 : Utilisation d'un gabarit d'une des deux bandes reportées sur l'autre pour comparer ces bandelettes non manipulables.

Equipe 10S3 : Création d'un gabarit afin de reporter la longueur d'une bande à l'autre et ainsi pouvoir les comparer

Pour l'équipe 10S3, présenté dans la partie précédente (Q3.1), le matériel à disposition étant du papier calque, il s'agit d'interpréter la technique comme la technique *c*, tandis que pour l'équipe 10S2, ayant à disposition une bande annexe, il s'agit de la procédure *a*.

Pour la plupart des équipes, les techniques formulées peuvent être porteuses d'ambiguïtés, notamment liées à une mauvaise utilisation du vocabulaire. Certaines formulations s'appuient sur les mots « mesurer » ou « mesure », utilisés selon notre point de vue à mauvais escient puisque les procédures décrites sont non numériques, comme ici :

Equipe 9S1 : L'élève prend **les mesures**⁵ d'une des bandes à l'aide de la ficelle, puis reporte cette longueur sur la deuxième bande.

Equipe 9S4 : **Mesurer** des longueurs en reportant une bande de papier en adaptant sa longueur.

Equipe 10S4 : - Mettre la bande témoin à côté de la **bande à mesurer**, la plier ou mettre un repère au crayon à papier afin de représenter **la mesure**.

Ensuite déplacer cette bande pour la comparer avec la deuxième bande qui est **à mesurer**. Faire l'analogie avec la bande témoin qui représente la **mesure** de la première bande.

D'autres formulations mettent en évidence une utilisation variée du mot « étalon » :

Equipe 5S3 : C'est maintenant au tour des élèves de créer leur **étalon**. A partir d'une bande de papier (ou ficelle), ils vont pouvoir créer un **étalon** de la même longueur que l'une des deux bandes, afin de comparer à la seconde bande.

Equipe 10S1 : La procédure attendue est la juxtaposition de l'**étalon** sur l'une des deux bandes I ou J. Les élèves coupent l'**étalon** afin qu'il ait la même longueur que la bande choisie. Ils reportent ensuite l'**étalon** sur la seconde bande afin de pouvoir procéder à la comparaison.

Equipe 5S1 : Les élèves marquent au crayon de papier la longueur de la première bande sur l'**étalon**, puis font la même manipulation avec l'autre bande, puis ils comparent les marques sur l'**étalon**.

Le mot « étalon » peut se rapporter à la bande annexe (qui peut changer de longueur), ou encore à la bande annexe après modification. Il est, dans les deux cas, utilisé dans un autre sens que celui défini dans notre cadre théorique puisque la longueur de cette bande n'est pas choisie comme unité de longueur pour faire intervenir une mesure.

Nous pouvons donc repérer à travers ces exemples, une difficulté des étudiants à expliciter rigoureusement une technique et une variété qui peut poser la question d'une éventuelle confusion au niveau du vocabulaire autour de la mesure (mesure, étalon, mesurer...).

⁵ Les mots en gras l'ont été mis par nos soins.

5. Analyse de la question Q3.3

A travers la question « Que doivent retenir les élèves de cette étape ? », il s'agit de repérer les éléments qui ressortent du discours écrit des étudiants. Nous remarquons qu'aucune équipe ne fait mention d'un discours technologique à retenir. Nous pouvons même remarquer que, pour la majorité d'entre eux, seule une idée générale de la technique est écrite, en outre sans être mise en lien avec le type de tâche spécifique et donc sans mention des variables ni des valeurs de celles-ci.

Même quand des éléments sont donnés sur le type de tâches spécifiques, il manque toujours la variable « V4 : Longueurs relatives des bandes à comparer » (sauf pour une équipe) déjà repérée pour la question Q3.1 :

Équipe 10S2 : Pour comparer deux longueurs entre elles quand on ne peut pas les manipuler, il faut utiliser un gabarit d'une des deux longueurs.

On voit ici apparaître la variable V3 et sa valeur « V3 = bandes à comparer non rapprochables » qui sont mises en lien avec la technique *c*. Ce lien avec la technique *c* est possible seulement parce que nous connaissons les réponses précédentes sinon il serait impossible de l'identifier. De plus le « il faut » laisse penser que c'est la seule technique valable pour cette tâche spécifique décrite avec seulement une variable (et valeur correspondante), or ce n'est pas le cas.

Les éléments récoltés montrent que les PEFS considèrent que les élèves doivent retenir une idée de la technique, sans que celle-ci soit décrite rigoureusement, ni mise en lien avec le type de tâches spécifique qu'elle permet de traiter c'est-à-dire sans préciser les variables et les valeurs correspondantes. Aucune justification de la technique n'est donnée, donc aucun élément de savoir mathématique à retenir.

De plus, les réponses des équipes à cette question ont à nouveau montré des utilisations très variées du terme « étalon », par exemple :

Équipe 9S2 : Comparaison indirecte : Quand on ne peut pas déplacer les bandes pour comparer, on doit utiliser une troisième bande intermédiaire pour créer un **étalon**.

De surcroît, il apparaît chez deux équipes le mot « unité », qui pourrait aussi être questionné dans les éléments de techniques présentés :

Équipe 5S3 : On peut utiliser une longueur fixe, choisie pour comparer toutes les longueurs entre elles, en passant par une **unité**.

Équipe 6S4 : On peut utiliser une **unité** pour comparer des longueurs.

CONCLUSION

Pour conclure, nous avons pu décrire les variables et leurs valeurs dans le cas du type de tâche spécifique « Comparer les longueurs de deux objets non déplaçables de longueurs proches, avec mise à disposition d'un objet déplaçable de longueur supérieure aux deux autres » et repérer les adaptations opérées par les formatrices sur les tâches, en termes de choix de variables didactiques et de conséquences sur les techniques attendues. Cette analyse a ensuite permis de s'intéresser à la capacité des étudiants à faire l'adaptation inverse et à repérer les variables en jeu. Les premiers résultats des analyses laissent entrevoir une capacité des PEFS à opérer l'adaptation inverse « en pratique ». Les PEFS ont « l'idée » mais ne sont pas en mesure d'explicitement rigoureusement les variables didactiques en jeu dans les différentes tâches et leurs valeurs, les techniques et les technologies associées. Ces manques nous semblent révéler des difficultés qui vont au-delà de l'adaptation demandée mais qui sont rendus visibles grâce à ce contexte. La non mise en évidence de certaines variables laisse penser que lors de la construction du matériel pour proposer les tâches à des élèves de cycle 2, ces variables ne seraient pas prises en compte et donc ne fournirait pas les conditions attendues pour la technique ciblée. La difficulté des étudiants à trouver les (bons) « mots pour le dire » pour

décrire la technique laisse penser à un manque au niveau technologique. La variété dans l'utilisation des certains termes (mesurer, étalon...) peut être un indicateur (à vérifier) de confusions chez les étudiants entre la grandeur et sa mesure, voire même l'objet, selon notre cadre théorique.

Bien au-delà de l'enseignement à distance, l'environnement numérique, qui pourrait être envisagé en présentiel, a permis dans cette expérimentation de mettre en évidence des difficultés chez les PEFS. Une analyse généralisée à l'ensemble des étapes de la séance permettra de mettre en évidence d'autres difficultés, qui pourront être complétées par l'analyse des transcriptions des discussions dans les équipes lors de la séance. Une perspective qui nous semble intéressante à creuser serait de focaliser notre étude sur les conceptions des étudiants autour de la mesure, notamment en lien avec les mots « mesure », « mesurer », « étalon », « unité » ; conceptions qui pourraient être éventuellement éclairées par d'autres points de vue théoriques sur les grandeurs et mesures que l'on peut trouver dans la littérature.

RÉFÉRENCES

- CHAACHOUA, H. (2019). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – 2018* (pp. 8–25). IREM de Paris – Université Paris Diderot.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19(2), 221–265.
- CHEVALLARD, Y. & BOSCH, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76.
- DEROUE, C., THOMAS, C., & BELIAEVA, T. (2022). Réflexion sur une séance de travail en groupe en distanciel sur la construction du concept de longueur. *Actes du 47^{ème} colloque de la COPIRELEM. Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, 15-17 juin 2021*.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2016, relu de 1999). Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir du cas des aires. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385025>
- ROUCHE, N. (1995). *Le sens de la mesure*. Didier Hatier.

ANNEXE

Équipe	5S1	5S2	5S3	5S4	6S1	6S2	6S3	6S4	9S1	9S2	9S3	9S4	10S1	10S2	10S3	10S4
V1 : Disponibilité de la règle graduée	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i
V2 : Quantité de bandes à comparer	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
V3 : Possibilité de rapprochement des bandes à comparer	X	X	i (feuille)		X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
V4 : Longueurs relatives des bandes à comparer	X	X				X				X					X	
V5 : Visibilité des bandes à comparer	i	i	i	i	X	i	X	X	i	i	i		Éloignés		X	X
V6 : Disponibilité d'une ou plusieurs bandes annexes supplémentaires + longueur	X	X	i	i	X	X	X	X	X	X	i	X	X	X	Calque	X
V7 : Déplacement des bandes annexes	i	X	i	i	X	X	i	X	i	X	X	X	X	X	X	X
Positionnement des bandes disponibles au départ	X			X												
Transparence des bandes																
Disponibilité d'autre matériel	Crayon	i	Ficelle, ciseaux	Crayon	Feuille			Ficelle	Feuille	Ciseaux					Calque	

Légende : i : implicite / gras : variation par rapport à la version numérique

LA GRANDEUR CONTENANCE AU CYCLE 2 : MODELES PRAXEOLOGIQUES ET INSTITUTIONNALISATION

Carine Frappier-Jégo*

RÉSUMÉ

Notre étude est consacrée à la question de recherche suivante : « comment former les professeurs des écoles stagiaires au processus d'institutionnalisation dans le domaine des grandeurs et mesures et plus précisément pour la grandeur contenance au cycle 2 ? ». Pour répondre à cette question nous avons, dans un premier temps, analysé le savoir en jeu. C'est cette partie de nos travaux que nous présentons dans cet article. Pour cela, nous créons un Modèle Praxéologique de Référence à partir des textes officiels et du savoir savant que nous confrontons aux Modèles Praxéologiques Apprêtés construits pour une sélection de neuf manuels. Nous cherchons également à caractériser les textes de savoirs proposés par ces mêmes manuels analysés.

Mots-clefs : Grandeurs et mesures, Contenance, Ecole primaire, Modèle Praxéologique de Référence, Institutionnalisation.

ABSTRACT

In this study, we focus on to the following research issue « How to train future teachers to the institutionalization process in the area of quantities and measurements, and more precisely of capacity at primary school? ». To answer that question, we have, first of all, analysed the type of knowledge at stake. That part of our research work is presented in that article. We have thus created a reference praxeological model, thanks to formal and institutional texts, and academic knowledge, that we confront with sized praxeological models, created for a variety of nine schoolbooks. We also aim at describing the syntheses texts found in those textbooks.

Keywords: Quantities and measurement, capacity, Primary school, Praxeological reference model, Institutionalization

INTRODUCTION

Les résultats présentés lors d'un séminaire de l'école d'été de didactique des mathématiques d'octobre 2021 et dans ce texte sont des travaux de thèse en cours.

Dans notre quotidien de formatrice de professeurs des écoles, nous avons eu l'occasion d'accompagner de jeunes entrants dans le métier. C'est à l'occasion de visites dans les classes que nous avons été interpellée par les institutionnalisations proposées par ces professeurs des écoles stagiaires. En effet, ce qui est proposé dans cette phase n'est pas toujours, voire rarement, en lien avec ce qui a été convoqué par les élèves dans les phases de recherche et de mise en commun. Ce constat va dans le sens des travaux de Charles-Pézarid et al. (2012) qui ont montré que les professeurs des écoles en ZEP laissent peu de place à l'institutionnalisation et que ce problème pouvait mettre en difficulté les élèves. Ainsi il nous a semblé nécessaire de contribuer à une évolution de ces pratiques, en formant les enseignants débutants au processus d'institutionnalisation. Ce sont les effets d'une ingénierie didactique de formation conçue à cet effet que nous analysons dans notre recherche. Nous avons choisi le domaine des grandeurs et mesures et le contexte du cycle 2 pour mettre en œuvre notre recherche, car là aussi, nous avons pu constater que ce domaine mathématique est un domaine délaissé par les professeurs expérimentés et qu'il est très souvent confié aux professeurs débutants (Frappier-Jégo, 2016).

Pour répondre à notre problématique : « comment former les professeurs des écoles stagiaires (PES) au processus d'institutionnalisation dans le domaine des grandeurs et mesures et plus précisément de la contenance au cycle 2 ? », nous avons mené une analyse de

* INSPE de Rennes, CREAD

savoir en jeu et une analyse des pratiques ordinaires des PES pour ensuite proposer une ingénierie didactique de formation dont nous mesurerons les effets.

L'objectif de cette communication est de présenter une partie de nos travaux en cours, ceux concernant l'analyse du savoir en jeu, en confrontant les attentes des programmes aux propositions faites par une sélection de neuf collections de manuels français de mathématiques de cycle 2.

Pour cela nous allons présenter les cadres théoriques mobilisés ainsi que la méthodologie utilisée puis nous exposerons les premiers résultats obtenus.

ÉLÉMENTS DE CADRAGE THEORIQUE RETENUS POUR ANALYSER LES SAVOIRS EN JEU ET PENSER LEUR INSTITUTIONNALISATION

1. La théorie anthropologique du didactique

Chevallard (1998) considère que toute activité humaine peut être définie par un modèle qu'il nomme praxéologie ou encore organisation mathématique quand il s'agit d'une activité mathématique. Cette praxéologie est définie par un quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$ avec un premier bloc $[T/\tau]$ constituant la pratique ou encore le savoir-faire et un second $[\theta/\Theta]$ le discours (logos) ou encore le savoir justifiant la technique. Ce modèle est complété par Chaachoua, dans son cadre théorique T4TEL,¹ par les sous-types de tâches. Soit T un type de tâches, un sous-type de tâches T' de T doit être un sous ensemble de T et T doit être un type de tâches. La relation hiérarchisée qui unit des types de tâches et des sous-types de tâches est engendrée par un générateur de tâches. Un générateur de tâches est défini par un verbe d'action, un complément fixe, et un système de variables qui va générer différentes relations.

Dans notre travail, nous allons chercher à définir un Modèle Praxéologique de Référence (MPR) que nous confronterons à chacun des Modèles Praxéologiques Apprêtés construits à partir de chacun des manuels pour caractériser le savoir en jeu dans notre recherche. Jolivet (2018) précise que « une Organisation Mathématiques (OM) de Référence (ou MPR) est décrite à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de Référence (ou MPR) est celle que considère le chercheur pour son analyse, celle qui lui permettra de répondre à ses questions de recherche. » (Jolivet, 2018, p.104). En ce qui nous concerne, nous souhaitons confronter les propositions faites par les manuels et que nous modélisons par des Modèles Praxéologiques Apprêtés, à ce qui est attendu dans les textes officiels.

Pour concevoir un MPR, il faut, selon Bosch et Gascon (2005), commencer par identifier les praxéologies à enseigner à partir des programmes et des manuels. Nous avons fait le choix de n'utiliser que les textes officiels. Nous nous situons dans la lignée des travaux de Ravel (2003) qui parle de savoir apprêté quand il s'agit des propositions des manuels. Elle dissocie savoir à enseigner et savoir apprêté.

Pour construire le MPR, il s'agit également d'effectuer une enquête épistémologique. Les types de tâches et techniques issus des programmes sont justifiés par des technologies elles-mêmes justifiées par le savoir savant (le courant de pensée du réalisme scientifique (Perdijon, 1998) et la conservation des grandeurs (Piaget, 1962)).

La construction de ce MPR va nous permettre d'identifier les savoirs à construire avec les élèves. Nous chercherons également à voir la cohérence entre ce MPR et les textes de savoir proposés par les manuels.

¹ T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique et TEL pour Technology Enhanced Learning. Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

2. *L'institutionnalisation dans la théorie des situations didactiques*

Dans la théorie des situations didactiques, l'ensemble des chercheurs ayant travaillé sur l'institutionnalisation sont d'accord pour dire que c'est un processus qui permet de construire des savoirs à partir de connaissances inscrites dans une situation qui, dans l'idéal de la théorie, est a-didactique. Dans son glossaire, Brousseau précise qu'une situation d'institutionnalisation est « une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives » (Brousseau, 2010, p.4).

Nous cherchons donc à identifier et à caractériser « les références » ou textes de savoir que les manuels proposent d'institutionnaliser. En effet, Chevallard (1991) précise l'importance de ces textes de savoir qui peuvent être écrits ou oraux. Il affirme que c'est le texte de savoir qui justifie les différentes mises en œuvre du maître lors de son enseignement. C'est ce texte qui « fait seul exister l'enseignant comme tel, et qui est en même temps l'instrument thérapeutique principal. Puisque c'est par lui que l'enseignant agit pour enseigner, qu'il agira pour modifier les effets de l'enseignement. » (Chevallard, 1991, p.21).

Allard (2015), elle, différencie les textes de savoir écrits de ceux oraux. En effet, elle émet l'hypothèse que les textes de savoir oraux renvoient plus à des phases de rappel ou de formulation. Les textes de savoir écrits ont une fonction de synthèse et permettront aux élèves de mémoriser le savoir. Elle pointe, elle aussi, l'importance de ces textes de savoir dans le processus d'apprentissage des élèves.

Il est donc pertinent d'analyser les textes de savoir proposés par les manuels pour identifier les savoirs mis en évidence et leur cohérence avec le MPR identifié.

QUELQUES ASPECTS METHODOLOGIQUES POUR CONSTRUIRE UN MODELE PRAXEOLOGIQUE DE REFERENCE SUR LES GRANDEURS ET MESURES

Pour construire notre Modèle Praxéologique de Référence (MPR), pour la grandeur contenance, nous avons analysé dans un premier temps les programmes de 2020 du cycle 2 (MEN, 2020) ainsi que les documents d'accompagnement en lien avec les grandeurs et mesures (MEN, 2016). Cette analyse linéaire nous a permis d'identifier les praxéologies à enseigner. Nous avons justifié ces praxéologies par des éléments technologiques en lien avec le savoir savant ce qui nous permet d'obtenir notre MPR que nous allons ensuite confronter aux différents modèles praxéologiques apprêtés (Ravel, 2003) construits à partir de l'analyse de neuf manuels en CP, CE1 et CE2. Les collections analysées sont : Pour comprendre les maths de chez Hachette éducation, Cap Maths et Opération Maths de chez Hatier, Litchi de chez Istra, Méthode de Singapour de la librairie des écoles, Archimaths de chez Magnard, MHM et Vivre les maths de chez Nathan et J'apprends les maths de chez Retz. Les manuels sont des ressources très largement utilisées par les PES et plus largement par l'ensemble des professeurs des écoles (Mounier et Priolet, 2015) ce qui explique notre souhait d'analyser ces ressources pour identifier les propositions faites. En confrontant les modèles apprêtés au MPR construit, nous allons pouvoir identifier le savoir en jeu dans chaque manuel et pointer les choix faits par les auteurs des manuels par rapport au MPR.

Nous avons également répertorié tous les textes de savoir présents dans les différents manuels afin de les caractériser.

DES PREMIERS RESULTATS SUR LE MPR ET L'ANALYSE DE MANUELS

1. Construction du MPR

Notre analyse des documents officiels de cycle 2 (MEN, 2016, 2020) enrichie par une enquête épistémologique, nous a permis de construire notre MPR dont une synthèse est placée en annexe 1. Nous avons pu identifier 5 types de tâches : T1 *comparer des contenances*, T2 *mesurer des contenances*, T3 *estimer des mesures de contenance*, T4 *convertir des unités de mesures de contenance* et enfin T5 *Résoudre des problèmes impliquant des contenances*. Pour chacun de ces types de tâches, nous avons mis en avant plusieurs techniques ou sous-types de tâches pour le type de tâches T5. Pour justifier notre MPR, nous prenons comme référence le savoir savant. Par exemple pour le type de tâches T1 *comparer des contenances*, nous avons quatre techniques, *comparer visuellement*, *comparer directement par transvasement*, *comparer indirectement en utilisant un objet intermédiaire* et *comparer en utilisant une procédure numérique*. Cela peut permettre de définir des relations d'équivalence entre des récipients puis des relations d'ordre entre les différentes classes d'équivalence. En effet, si l'on dispose de deux récipients et qu'on peut transvaser le contenu de l'un exactement dans l'autre, ces deux récipients ont en commun une propriété : on déclare qu'ils ont même contenance. Tous les récipients ayant en commun cette propriété sont regroupés dans une même classe d'équivalence. Si l'on ne parvient pas à transvaser tout le contenu d'un des récipients dans l'autre, on considère que l'un a une contenance plus importante que l'autre. Si les deux récipients ne peuvent être rapprochés, le passage par un troisième récipient peut permettre cette comparaison. Les diverses classes d'équivalence peuvent ensuite être rangées. Les nombres peuvent également être utilisés pour caractériser et comparer les grandeurs.

Notre Modèle Praxéologique de Référence étant défini, nous avons ensuite réalisé de la même manière un Modèle Praxéologique Apprêté pour chacun des manuels analysés (un exemple est proposé en annexe 2) puis nous les avons confrontés au MPR. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence un certain nombre d'éléments que nous présentons dans la partie suivante.

2. Analyse des manuels

Les tâches proposées dans les manuels pour travailler le concept de contenance sont de natures différentes. Il y a des activités de découverte, des exercices d'application et des problèmes (Arsac et al., 1988). Une même tâche peut mobiliser plusieurs types de tâches ou plusieurs techniques. Par exemple, le problème ci-dessous (figure 1) demande d'utiliser les types de tâches T1 *comparer des contenances* et T4 *convertir des unités de mesures de contenance* pour être résolu.

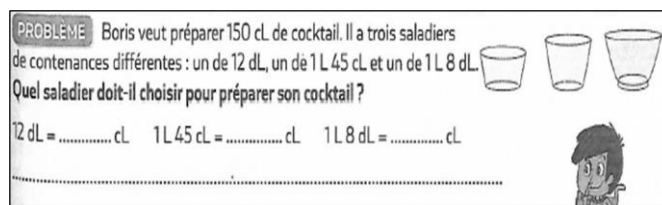


Figure 1. – Pour comprendre les maths, CE2, Hachette

En ce qui concerne l'activité de recherche suivante : « L'enseignant pose sur le bureau quatre récipients. Il demande aux élèves de les ranger de celui qui peut contenir le plus à celui qui contient le moins. », extraite de Cap maths CE1, elle relève du seul type de tâches T1

comparer des contenances mais elle peut être résolue par différentes techniques : *comparaison visuelle, comparaison directe ou indirecte*.

Les types de tâches mis en évidence dans notre MPR sont inégalement représentés dans les propositions des manuels (figure 2).

Nombre de fois où chaque type de tâches est mobilisé dans les différents manuels						
	T1 Comparer	T2 Mesurer	T3 Estimer	T4 Convertir	T5 Résoudre Pbm	
CE1	42	46	8	9	40	145
CE2	25	56	12	71	66	230
Cycle	67	102	20	80	106	375

Figure 2. – nombre de fois où chaque type de tâches est mobilisé dans les manuels analysés.

Sur l'ensemble des 9 collections de manuels étudiées, nous avons constaté que la grandeur contenance n'est pas travaillée en CP. C'est ce qui est préconisé par les instructions officielles. Nous avons pu également montrer que les types de tâches T2 *mesurer des contenances*, T4 *convertir des unités de mesures de contenances* et T5 *résoudre des problèmes relevant des contenances* sont largement travaillés. Par contre les types de tâches T1 *comparer des contenances* et T3 *estimer des mesures de contenances* sont peu travaillés. Le fait que le type de tâches T1 *comparer des contenances* soit peu travaillé indique une difficulté potentielle dans la construction de la grandeur, ici la contenance, comme le montrent les résultats de recherches didactiques (Perrin-Glorian, 2002, Ligozat, 2008, Javoy, 2019) qui ont pointé l'importance de construire la grandeur avant d'aller vers la mesure². Nous avons pu par ailleurs montrer que sur les 67 fois où le type de tâches T1 est mobilisé, il n'y a que 35 situations qui font appel à des comparaisons sans mesure. Il n'y a que 9,33% des tâches qui permettent de construire la grandeur contenance. Les propositions faites par les manuels vont très vite vers la mesure et il nous semble donc important de travailler en formation l'importance de la construction de la grandeur par des tâches de comparaison de contenances sans nécessairement introduire de techniques utilisant la mesure.

3. Les textes de savoir proposés dans les manuels analysés

Les éléments de savoirs présents dans les manuels prennent plusieurs formes et sont de natures différentes. Nous avons pu identifier des textes de savoirs à destination des élèves dans les fichiers et mémos. Ces textes de savoir sont essentiellement constitués de connaissances en lien avec le type de tâches *mesurer des contenances* et plus particulièrement sur les unités de mesure de contenances et les relations qui existent entre elles. L'extrait du mémo du manuel *Vivre les Maths*, CE2 (figure 3) est représentatif des textes de savoir proposés dans les manuels. Seul *Cap Maths*, CE2 institutionnalise le type de tâches *comparer des contenances* dans son mémo (figure 4). Cela est en cohérence avec les propositions faites par les manuels qui donnent une grande place aux types de tâche *mesurer des contenances* et *convertir des unités de mesures de contenances* mais ce constat soulève aussi une interrogation : comment aider un PES à construire un texte de savoir à destination des élèves pour le type de tâches *comparer des contenances* ?

² Nous prenons comme définition de la grandeur celle de l'APMEP (1982) : Une grandeur est un caractère, attaché à un objet, susceptible de variation chez cet objet, ou d'un objet à un autre. Pour la mesure celle de Noirfalise et Matheron (2009) : La mesure est une manière de désigner des grandeurs à l'aide d'un nombre et d'une unité ; elle résulte de la comparaison d'une grandeur avec une autre choisie comme référence.



Figure 3. – Mémo du manuel *Vivre les maths CE2*, de chez Nathan

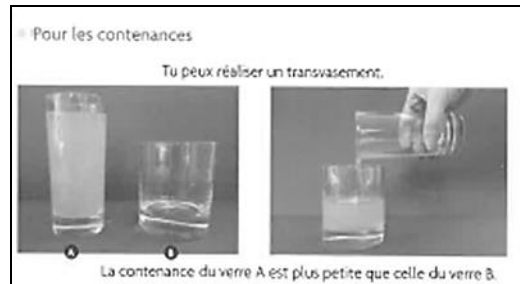


Figure 4. – Mémo *Cap Maths*, CE2 de chez Hatier

Dans les guides du maître, nous avons pu mettre en évidence des conseils didactiques pour institutionnaliser avec les élèves le contenu du savoir. Par exemple dans *Vivre les Maths*, CE1, la démarche de construction des grandeurs et mesures, en commençant par la comparaison de contenances avant d’aller vers la mesure, est rappelée dans le guide du maître. Nous avons pu également pointer la présence d’éléments praxéologiques dans les guides du maître, les techniques et quelques éléments technologiques sont parfois rappelés aux enseignants (figure 5). Ces conseils concernent donc les différents types de tâche mais sont toutefois inégalement représentés d’une collection à une autre. Il nous semble donc important d’amener les PES à questionner en formation les différentes propositions faites par les manuels au regard des textes officiels.

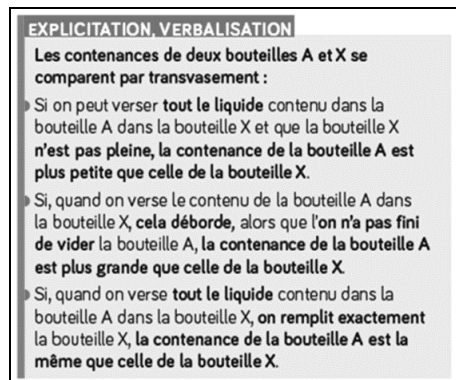


Figure 5. – extrait du guide du maître *Cap Maths*, CE1, Hatier.

CONCLUSION

Afin de répondre à une de nos questions de recherche, nous avons été amenée à construire un Modèle Praxéologique de Référence qui s’appuie sur une méthodologie différente de celle de Bosch et Gascon (2005). Dans la continuité des travaux de Ravel (2003) nous avons fait le choix de parler de savoir à enseigner pour les textes officiels et de savoir apprêté quand nous parlons des propositions des manuels. Notre MPR est donc construit à partir du savoir savant

et du savoir à enseigner comme nous venons de le définir. En confrontant notre MPR aux différents Modèles Praxéologiques Apprêtés construits pour chacun des manuels, nous avons pu montrer que les différents types de tâches ne sont pas travaillés équitablement. Le type de tâches T1 *comparer des contenances* est sous-représenté dans les propositions des manuels et nous pensons qu'au regard des résultats des recherches didactiques citées dans cet article, ceci peut créer des difficultés pour les apprentissages.

Nous avons également pu montrer que les textes de savoirs, à destination des élèves, proposés par les manuels sont essentiellement constitués de connaissances en lien avec les types de tâche *mesurer des contenances* et *convertir des unités de mesures de contenances*. Les connaissances en lien avec le type de tâches *comparer des contenances* sont quasiment inexistantes dans les textes de savoir écrits à destination des élèves. Les éléments praxéologiques (techniques et technologies), même pour les deux types de tâche principalement travaillées, ne sont que peu présents dans les manuels.

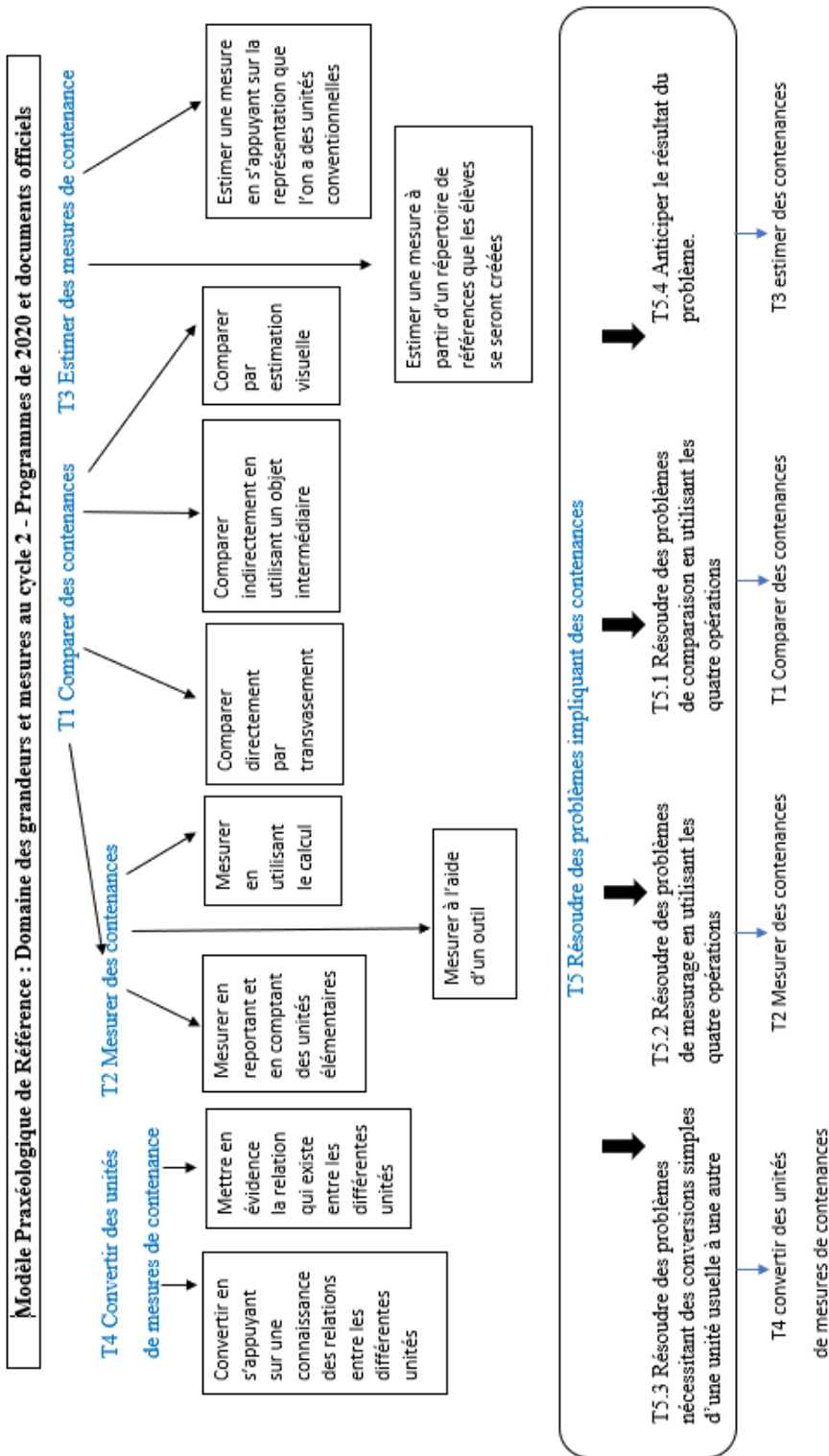
Nous pensons que les différents résultats que nous venons de présenter justifient de proposer une ingénierie didactique de formation qui permettra aux PES de travailler la question de l'institutionnalisation des savoirs dans le domaine des grandeurs et mesures et plus particulièrement de la grandeur contenance. Nous souhaitons amener les PES, à partir de l'analyse d'une sélection de manuels, à prendre conscience de l'importance de proposer aux élèves des activités qui relèvent du type de tâches *comparer des contenances* et de les aider à construire le contenu du texte de savoir correspondant.

RÉFÉRENCES

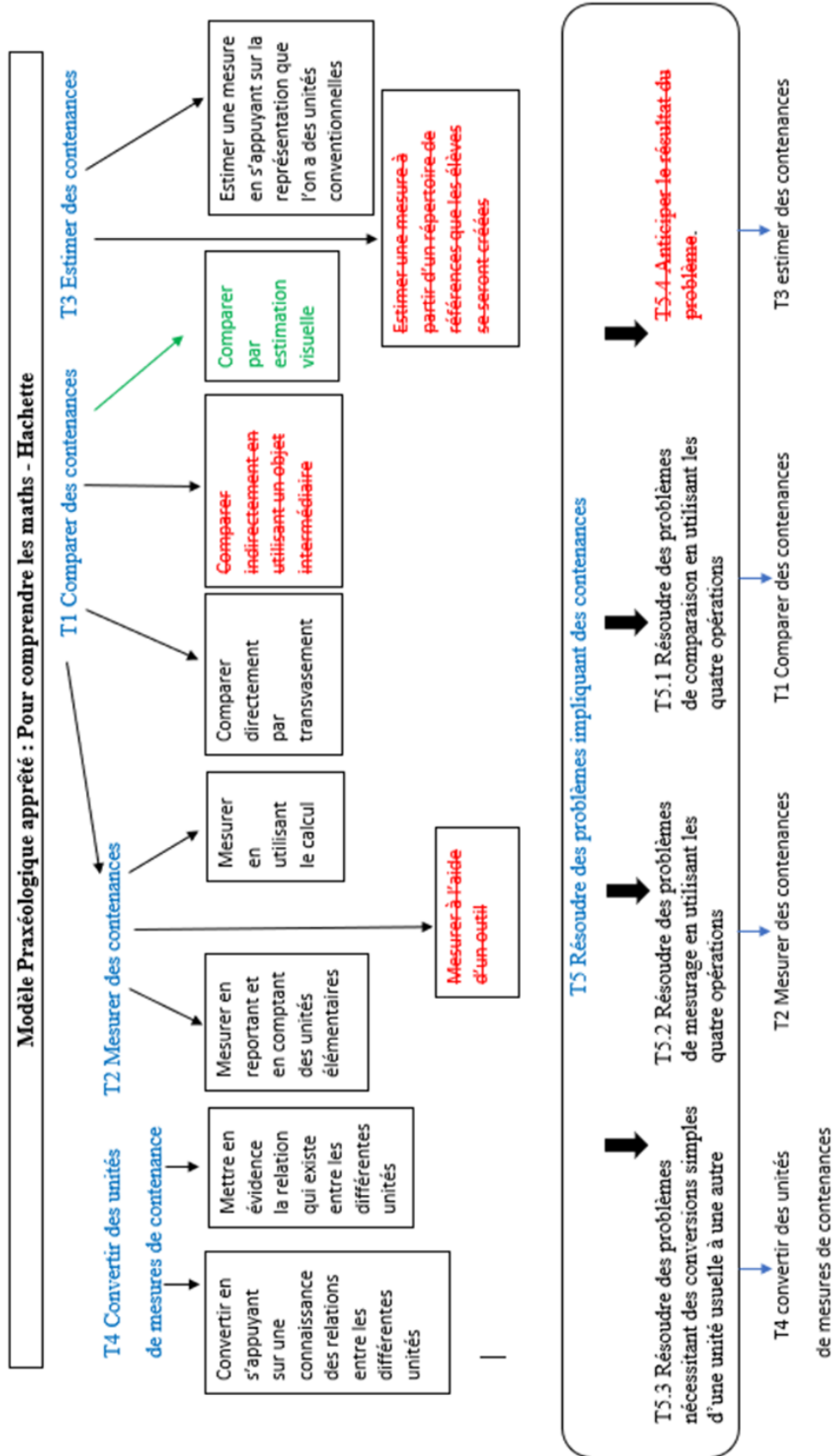
- ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat : Université de Paris VII.
- APMEP (1982). *Grandeur mesure* (collection Mots VI). Brochure n° 46.
- ARSAC, G., GERMAIN, G. et MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon, IREM de l'académie de Lyon.
- BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp 107-122). Grenoble : La pensée sauvage.
- BROUSSEAU, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. Guy Brousseau, didactique des mathématiques. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- CHAACHOUA, H. (2019). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de 2018, ARDM* : France. IREM de Paris - Université Paris Diderot. Consulté le 22 décembre 2020. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document>
- CHARLES-PEZARD, M., BUTLEN, D. & MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éd. (1ère édition : 1985).
- CHEVALLARD, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, approche anthropologique*. Consulté le 22 décembre 2020 : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27
- FRAPPIER-JEGO, C. (2016). *La transposition didactique interne : Des programmes à la classe dans le domaine « grandeurs et mesure »*. Mémoire de Master 1, Université de Bretagne Occidentale.
- JAVOY, S. & al. (2019). *La construction du concept physique de volume en cycle III : Quelles difficultés ? Quelles stratégies didactiques ?* hal-02198011, consulté le 20 septembre 2020 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02198011>.
- JOLIVET, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH*. Thèse de doctorat : Université Grenoble.
- LIGOZAT, F. (2008). *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Etude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement /apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes française et suisses romandes*. Thèse de l'Université de Genève.
- MEN. (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 2. Mathématiques*. Eduscol. Consulté le 19 septembre 2020 https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/69/5/RA16_C2_MATHS_grandeur_et_mesures_doc_maitre_58_7695.pdf
- MEN. (2020a). *Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux, cycle 2*. Consulté le 30 juillet 2020 <https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm>
- MOUNIER, E. & PRIOLET, M. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire : De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire*. CNESCO. <http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Manuels.pdf>

- NOIRFALISE, A. & MATHERON, Y. (2009). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire, géométrie, grandeurs et mesures*. Paris : Vuibert.
- PERDIJON, J. (1998). *La mesure, sciences et philosophie*. Paris : Flammarion.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2002). *Problèmes didactiques liés à l'enseignements des grandeurs*. In J.-L. Dorier, M. ARTAUD, M. ARTIGUE, R. BERTHELOT, & R. FLORIS (eds.), *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques* (p.229-316) Grenoble : La pensée sauvage.
- PIAGET, J. & INHELDER, B. (1962) : *Le développement des quantités physiques chez l'enfant : conservation et anatomisme*. Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.
- RAVEL, L. (2003). *Des programmes à la classe : Étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de doctorat : Université de Grenoble.

ANNEXE 1 : MODELE PRAXEOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE



ANNEXE 2 : UN MODELE PRAXEOLOGIQUE APPRÊTÉ



ANALYSE DE LA PRATIQUE DES ENSEIGNANTS STAGIAIRES DANS LE CADRE DE LA PROBLÉMATISATION : DYNAMIQUE ET OBSTACLES

Sylvie Grau*

RÉSUMÉ

En formation initiale, les enseignants stagiaires participent à des séminaires de formation à et par la recherche en didactique des mathématiques, animés par un formateur et chercheur qui assure aussi le suivi et les visites sur leur lieu de stage. Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP), nous faisons l'hypothèse que toute activité participe à la construction d'un problème et que cette construction est révélatrice de principes liés aux savoirs, aux représentations et aux valeurs de l'individu (Fabre, 2006 ; Grau, 2020). Nous avons donc analysé la pratique des enseignants stagiaires en mathématiques comme la réponse à un problème, dont nous analysons la construction à partir des traces de leur activité et de ce qu'ils en disent. L'évolution des pratiques sur l'année de formation témoigne d'une dynamique de problématisation et d'obstacles que certains enseignants stagiaires peinent à dépasser (Hersant, 2020). Que ce soit au premier comme au second degré, il semble que des passages obligés balisent la construction de ce regard didactique. L'identification de cette dynamique devrait nous permettre de penser des dispositifs de formation favorisant des ajustements didactiques en situation (Saillot, 2020).

Mots-clefs : enseignement, formation initiale, analyse de pratiques, obstacle, problématisation.

ABSTRACT

In initial training, trainee teachers participate in training seminars in and through research in didactics of mathematics, led by a trainer and researcher who also ensures the follow-up and visits them to their training site. Within the theoretical frame of learning by problematization (CAP), we hypothesize that any activity participates in the construction of a problem and that this construction reveals principles related to the individual's knowledge, representations and values (Fabre, 2006; Grau, 2020). We have therefore analyzed the practice of trainee teachers in mathematics as a response to a problem, the construction of which we analyze from the traces of their activity and what they say about it. The evolution of practices during the training year testifies to a dynamic of problematization and obstacles that some trainee teachers find difficult to overcome (Hersant, 2020). Whether in the first or second degree, it seems that there are obligatory passages that mark out the construction of this didactic view. The identification of this dynamic should allow us to think of training devices that promote didactic adjustments in situations (Saillot, 2020).

Keywords: education, initial training, analysis of practices, obstacle, problematization

CONTEXTE ET FINALITE DE LA RECHERCHE

Depuis 2016, un séminaire de recherche à l'INSPE¹ de l'académie de Nantes réunit des enseignants chercheurs et des formateurs autour de la question " Débuter, quelle activité pour quelle école ? " Différents symposiums ont été proposés, l'un d'eux s'intéresse à la formation au regard didactique des étudiants, il est dirigé par Sylvain Doussot, professeur des universités en didactique de l'histoire. Différentes disciplines et différents niveaux d'étude sont représentés. Magali Hersant, Jean-Philippe Georget et moi participons à ce séminaire, nous sommes tous trois formateurs en master MEEF² premier degré en didactique des mathématiques.

Par ailleurs, dans cet INSPE, la formation à et par la recherche des professeurs des écoles stagiaires (PES) prévoit que les étudiants soient regroupés dans des séminaires de 8 à 12 sur une thématique de leur choix parmi une dizaine de propositions. Pour les PES, le directeur de mémoire ou d'écrit réflexif est aussi la personne qui l'accompagne sur son stage et donc effectue deux visites dans l'année dans la classe du stagiaire qu'il a en responsabilité à mi-

* INSPE de Nantes, CREAD

¹ INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education.

² MEEF : Master dédié aux métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation.

temps. Il est convenu dès la rentrée, que des vidéos pourront être faites par le tuteur lors des visites à des fins de formation et des documents sont fournis aux PES pour qu'ils recueillent les autorisations parentales. L'objectif est de faciliter les allers-retours entre la pratique et les apports théoriques par l'utilisation de données recueillies en situation sur le lieu du stage et d'un travail de co-construction de séances et d'analyse mené collectivement en séminaire.

La recherche que nous allons vous présenter, vise d'une part à pratiquer une analyse réflexive sur les dispositifs et les pratiques de formation et d'autre part à mesurer les effets de la formation sur les pratiques des PES. Nous allons vous présenter le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) qui nous sert de cadre d'analyse de l'activité de l'enseignant. Ensuite nous présenterons trois études de cas. Il s'agit de trois étudiantes en stage dans des classes de maternelle. Nous comparerons les processus au cours de la formation initiale de ces trois stagiaires et les effets du dispositif. En conclusion, nous donnerons quelques pistes pour la formation initiale des professeurs des écoles et repèrerons les limites du dispositif de formation expérimenté.

LE CADRE DE L'APPRENTISSAGE PAR PROBLEMATISATION

Nous allons présenter ici notre méthodologie appuyée sur le cadre de l'apprentissage par problématisation. Dans ce cadre, nous faisons l'hypothèse que l'activité de l'enseignant est une réponse à un problème professionnel (Fabre, 2006 ; Grau, 2020). Nous tentons alors de reconstruire ce problème à partir des traces de l'activité, traces que nous recueillons lors des visites dans les classes, mais aussi de ce que les professionnels peuvent dire de leur pratique (Pastré, 1999). Au cours de la formation initiale, ces traces peuvent être les écrits attendus dans certains cours comme les productions déposées dans les différents onglets de leur portfolio numérique, les devoirs, synthèses, mais aussi les mails ou échanges informels, ainsi que les interactions au cours des séminaires que nous enregistrons. La question professionnelle mise au travail dans le mémoire est un fil rouge sur la deuxième année de master, nous faisons l'hypothèse que cette question se décline en sous-problèmes dans la pratique professionnelle et que ces sous-problèmes ne sont pas les mêmes sur toute l'année scolaire. Leur évolution témoigne d'un apprentissage et donc d'une formation. La reconstruction de ces problèmes et la dynamique de leur évolution permettent de mettre en évidence les raisons, nécessités, modèles qui organisent consciemment ou non l'activité (Vinatier & Pastré, 2007).

La problématisation peut être schématisée par un losange avec un axe horizontal question/réponse qui correspond à la résolution du problème alors que l'axe vertical (données/conditions) met en tension d'une part les faits construits, choisis, formulés et considérés comme vrais - du moins temporairement - avec les conditions du problème que sont les connaissances, les compétences, les expériences, le vécu personnel, les représentations du sujet (voir Figure 1). Cette mise en tension peut entraîner de nouvelles factualisations, des fermetures et ouvertures, une orientation ou réorientation de la résolution. Les modèles de référence alors mobilisés caractérisent un certain paradigme que nous appelons REX pour registre explicatif. Nous considérons que l'évolution du REX témoigne d'un apprentissage.

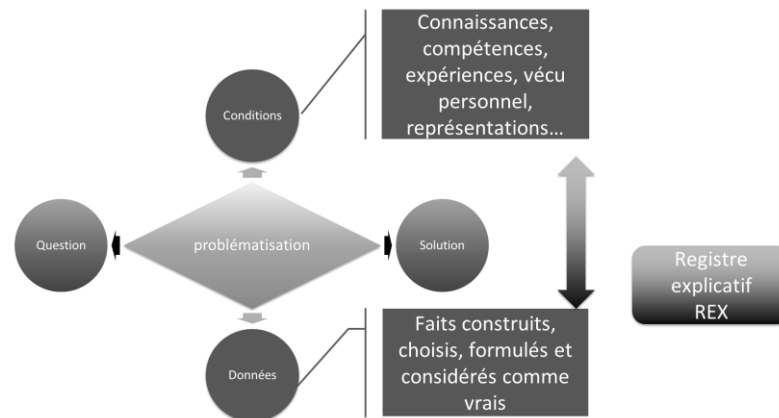


Figure 1. – Schéma du losange de problématisation (Fabre, 2005)

Dans le cadre de cette recherche, nous considérons que la pratique effective du PES est la solution. La question n'est pas toujours explicitement formulée par le PES, elle peut l'être après le travail d'accompagnement du stage par le tuteur ou d'analyse en séminaire. Nous recueillons des données sur les pratiques du PES (observations, vidéos, audios, productions d'élèves, préparations, analyses réflexives, comptes-rendus de séances...) et remontons aux conditions en analysant ce que les PES disent de leur activité. Leurs explications permettent de concevoir les modèles associés à ces discours et l'identification des contraintes qui pèsent sur leurs choix. Dans le cadre théorique de la double approche (Robert & Hache, 2013), la complexité de la pratique enseignante est analysée à partir de deux points de vue : un point de vue didactique et un point de vue ergonomique. Nous considérons par ailleurs, dans la continuité des travaux de Butlen, Charles-Pézarid et Masselot (Butlen et al., 2011), que les contraintes qui pèsent sur l'activité de l'enseignant peuvent relever de deux logiques : une logique d'apprentissage et une logique de socialisation, sans que ces deux logiques n'entrent forcément en tension. Une hypothèse forte est que ces logiques jouent sur l'équilibre entre les différentes contraintes, équilibre qui répond à une nécessaire cohérence en lien avec un registre explicatif. Ces contraintes peuvent être d'ordre différent tout en relevant d'une même logique. Dans une logique d'apprentissage, on trouve les contraintes institutionnelles car liées au programme, la hiérarchie, les horaires. On trouve des contraintes didactiques (savoirs en mathématiques et en didactique des mathématiques) mais aussi des contraintes scientifiques (liées à un cadre théorique, aux résultats de la recherche ou liées à une méthodologie) et des contraintes cognitives (liées en particulier au développement de l'enfant, au type de tâche) ou encore des contraintes matérielles (temps, outils, place, ressources...). Elles peuvent cependant relever d'une autre logique, la logique de socialisation. Il s'agit alors de contraintes liées au maintien d'un climat serein dans la classe, de relations apaisées avec les collègues, les parents, d'une collaboration entre les différents membres de la communauté éducative, du maintien d'une « paix scolaire » au sens de Charles-Pézarid (2010). Nous allons utiliser cet outil d'analyse dans trois études de cas.

TROIS ETUDES DE CAS

Nous allons nous intéresser à trois PES qui sont stagiaires en responsabilité à mi-temps en cycle 1 dans des classes de petites et moyennes sections (enfants de 2 à 4 ans). A ce niveau de la scolarité, certaines conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage peuvent être des obstacles au développement d'un regard didactique chez nos stagiaires. La spécificité du cycle 1 est de trois ordres. Nous avons une spécificité des savoirs du fait que les mathématiques peuvent y être étudiées dans différents domaines. Par exemple le développement des compétences spatiales se joue autant dans les activités motrices que dans les activités de

représentation de l'espace, les activités créatives ou le langage. Le risque est que ce savoir mathématique ne devienne transparent pour les stagiaires. Une autre spécificité est la spécificité des élèves. En maternelle, l'âge des enfants amène des contraintes fortes liées au langage et l'acculturation au milieu scolaire qui sont tous deux à construire. Enfin la spécificité des organisations est que les pratiques en France sont relativement uniformes, avec une alternance de temps collectifs et d'ateliers dirigés ou libres et une ergonomie des lieux avec des "coins" considérés comme des espaces dédiés à des activités spécifiques (coins jeux, bibliothèque, dessin...). A la maternelle, un certain nombre de doxas pédagogiques circulent, comme le fait que l'élève apprend directement par fréquentation du matériel, ou que l'organisation de la succession d'activités suffit à rendre possible les apprentissages. Il s'agit d'impensés et d'indiscutés qui justifient ou orientent les pratiques mais gênent la compréhension de ces pratiques. Pour Fondeville (2018), ces doxas ont une fonction simplificatrice de la complexité du métier et il considère qu'elles sont issues d'une transformation du savoir théorique. Ainsi penser que la fréquentation du matériel suffit à générer des apprentissages, peut être une transformation du constructivisme pour en faire une forme opératoire dans le contexte du cycle 1. Nous avons donc un rôle en tant que formateurs dans la genèse de ces doxas pédagogiques.

Nous avons repéré trois conceptions très fréquentes au cycle 1 qui relèvent de ces doxas. La première est la conception chronologique, que Hersant a montrée sur une étude de cas (Hersant, 2020), conception selon laquelle l'organisation matérielle de la succession d'étapes est porteuse des apprentissages sans que la fonction didactique de ces étapes et du matériel ne soit interrogée. Une autre conception est la conception ludique, partagée par les PES et étudiants. Elle consiste à penser qu'un habillage de l'activité sous forme de jeu permet la dévolution du problème sans interroger la pertinence didactique de l'activité ni du contexte ludique choisi. La conception naturaliste, consiste quant à elle à penser que les élèves acquièrent naturellement les savoirs scolaires par leur fréquentation sans qu'il soit nécessaire pour l'enseignant d'explicitier ces savoirs. Le but de notre recherche est de mener des analyses permettant l'émergence d'hypothèses sur les conceptions de l'enseignement des PES, en repérant si la formation initiale, et en particulier l'alternance entre le stage et la formation universitaire, fait évoluer ces conceptions ou du moins permet à l'enseignant d'en prendre conscience.

Par ailleurs les trois PES sont en reconversion. Cette particularité fait que ces trois stagiaires sont très motivées, leur choix de reconversion est réfléchi. Elles sont aussi plus âgées que les autres étudiants et sont mères, elles ont donc une connaissance de la petite enfance au travers de leurs propres enfants. Elles ont enfin toutes une courte expérience professionnelle d'enseignement, elles ont été vacataires, ont donné des cours dans des structures hors de l'école ou ont travaillé dans le milieu périscolaire.

1. Le cas Sonia

Pour la première PES, Sonia, son cheminement a été analysé en détail lors d'une communication au colloque 2021 de la COPIRELEM (Grau, 2021). Nous allons ici synthétiser son parcours en trois grandes étapes. Lors de la première visite, nous observons des micro-tâches proposées aux élèves mais pas de situations problèmes. La PES veut transmettre la procédure efficace aux élèves pour qu'ils puissent ensuite effectuer la tâche seuls, elle montre donc comment compter, les élèves doivent l'imiter. Elle demande aux élèves de refaire et elle corrige les erreurs, encourage les essais. Elle se retrouve cependant devant une difficulté, de nombreux élèves ne progressent pas malgré la répétition de l'exposition de la procédure qu'elle considère comme la procédure experte. On peut estimer que sa conception initiale est naturaliste alors même qu'elle cherche à transmettre le savoir,

elle expose bien la méthode (le comptage numérotage) mais sans expliciter les savoirs mathématiques.

Après des apports en formation sur la didactique des mathématiques, elle cherche à proposer des problèmes mathématiques aux élèves. Elle choisit une ressource didactiquement pertinente et conçoit sa mise en œuvre en pensant la formulation et en anticipant certains jeux sur les variables didactiques. Son problème est alors de faire entrer les élèves dans la résolution du problème. Nous assistons à l'animation d'un atelier dirigé sur la situation « juste assez³ » où les élèves doivent prendre juste assez de cubes pour recouvrir chacun des points d'une carte qu'ils ont observée, puis qui a été cachée. L'objectif de la situation est d'amener les élèves à mémoriser la quantité. La validation se fait en constatant que tous les points sont bien recouverts et qu'il ne reste pas de cubes. Lors de cet atelier, un nouveau paradoxe amène la stagiaire à prendre conscience du poids de ses représentations dans son ajustement en situation (Saillot, 2020). En effet, une élève réussit la tâche (elle prend 3 cubes et encore 3 cubes pour recouvrir une carte où sont représentés 6 points) alors qu'elle n'est pas capable d'énoncer la quantité de cubes qu'elle doit prendre (l'élève dit qu'elle a pris 3 cubes et non 6). Sonia comprend le rôle de l'analyse *a priori* et de l'importance de l'observation et de l'interprétation des stratégies d'élèves non prévues *a priori*, afin de comprendre comment l'élève, de son point de vue et fonction de ce qu'il connaît et sait faire, se représente la tâche. Si Sonia sait qu'il existe différentes procédures pour mémoriser la quantité, elle pose cependant la question "combien de cubes faut-il prendre ?" à tous les élèves, avant qu'ils ne cachent la carte, et redemande "combien de cubes as-tu pris ?" pour valider la solution. La réussite de la tâche par cette élève qui ne sait pas nommer la quantité, l'amène à comprendre la fonction didactique du matériel. Son problème à l'issue de cette étape devient alors de permettre les apprentissages mathématiques de chaque élève en tenant compte de ce qu'il a déjà construit et en pensant un feedback lui permettant de faire évoluer ses connaissances. On voit que, sur le parcours de formation de cette étudiante, de nouvelles nécessités font évoluer sa conception de l'enseignement vers une conception plus constructiviste et que ces nouvelles nécessités apparaissent lorsqu'elle est face à un paradoxe. Chaque paradoxe révèle en fait un obstacle qu'elle doit dépasser. Le dépassement du premier obstacle permet de construire la nécessité de mettre les élèves face à des problèmes, la nécessité de la dévolution et la nécessité de concevoir des situations auto-validantes. Le second obstacle amène à construire la nécessité d'une analyse *a priori* permettant l'observation de l'activité des élèves et l'interprétation de leurs stratégies lors de la mise en œuvre et d'un feedback ajusté.

2. Le cas Nadège

Pour la deuxième PES, Nadège, sa préoccupation en début d'année scolaire est essentiellement de reproduire la forme scolaire. Elle a une expérience d'enseignante en école privée hors contrat auprès de petits groupes d'élèves de cycle 3, où la relation pédagogique, l'organisation et les contenus d'enseignement étaient très différents de ce qu'elle connaît du système scolaire français. Dans cette école privée, elle n'a pas bénéficié d'une formation professionnelle à proprement parler, elle dit avoir appris le métier par imitation au sein du collectif. Arrivée en cycle 1, elle cherche à reproduire les pratiques observées chez ses formatrices ou collègues comme elle a pu le faire dans le collectif de l'école privée fréquentée, mais sans pouvoir bénéficier dans cette nouvelle équipe pédagogique d'autant d'échanges, ni de la même volonté d'acculturation. Elle n'a donc pas accès aux raisons des choix de ses collègues, nous avons ici l'exemple d'une circulation de doxas pédagogiques qui amène en particulier la stagiaire à mettre en place des rituels en classe, sans que la fonction didactique de ces rituels ne soit interrogée. N'ayant pas l'habitude d'un public aussi jeune,

³ (Thomas & Hersant, 2015, p.63)

Nadège est très soucieuse de la sécurité affective de ses élèves. Elle est donc face à un conflit : elle essaye de mettre en place des temps de regroupement mais ne comprend pas pourquoi il faut contraindre l'élève à rester assis dans le groupe et elle propose des rituels mais ne voit aucun sens à ces activités. Elle se retrouve très vite dans une situation de mal-être qui l'amène à exprimer sa difficulté en analyse de pratique. En parallèle, elle suit les cours de didactique des mathématiques et découvre des activités porteuses de sens qu'elle adapte à ses temps de regroupement. Elle lit de nombreux ouvrages scientifiques, aussi bien des articles en didactique des disciplines qu'en sciences cognitives, elle s'intéresse en particulier aux travaux de Marie-Thérèse Zerbato-Poudou (1996) et travaille sur l'organisation socio-technique de sa classe.

Nadège réalise alors qu'elle n'a aucune obligation de reproduire les pratiques des collègues de l'établissement qu'elle considère, à partir de ses lectures, comme relevant de la « forme scolaire » au sens de Vincent (Troger, 2016; Vincent et al., 1994). Elle repense ses espaces, crée son matériel, en s'inspirant de ressources didactiques, des situations analysées à l'INSPE ou coconstruites. Elle hésite moins à remettre en cause l'organisation de la titulaire de la classe ou de l'équipe concernant par exemple les lieux partagés comme la cour ou la salle de motricité. Sur la période suivante, son problème est de rendre ses élèves autonomes dans leurs apprentissages. Elle va alors concevoir des systèmes symboliques pour expliciter l'activité attendue des élèves. Elle va par exemple concevoir des icônes pour signifier "regarder", "mémoriser", "voir dans sa tête". Elle les représente sur des cartes qu'elle utilise pour indiquer des étapes par lesquelles passer lorsqu'il s'agit de reproduire un modèle qu'on va cacher. Elle va aussi construire des grilles d'autoévaluation ou de co-évaluation. Elle va en particulier comprendre comment jouer sur les variables didactiques pour faire évoluer les situations et donc les adapter aux objectifs d'apprentissage pour chaque élève.

Pour cette stagiaire, l'évolution est produite par des apports scientifiques (issus de lectures personnelles ou des dispositifs de formation). On peut estimer qu'elle est passée d'une conception chronologique plus ou moins imposée à une conception constructiviste et plus explicite de l'enseignement. Le moteur de son développement professionnel est son état émotionnel en lien avec son besoin de cohérence entre ce qu'elle fait, ses valeurs et ses représentations de l'apprentissage et du développement. L'évolution de ses pratiques sur le plan pédagogique lui permet en fait d'orienter consciemment ses choix à partir de contraintes didactiques.

3. Le cas Clémentine

Dans le cas de Clémentine, son premier problème en début d'année est de concevoir des ateliers de manipulation. La première visite montre une mise en place de vrais problèmes mathématiques mais contextualisés, en ce sens que le matériel prend une grande place symbolique, en lien avec les autres activités menées dans la classe. La situation mathématique proposée aux élèves reprend par exemple des éléments de l'histoire lue la semaine précédente, on y retrouve les personnages et une trame du récit. Les élèves sont très jeunes (2 à 3 ans), l'espace très sonore, l'attention des élèves en ce début d'année n'est pas évidente à capter. Sur des temps d'ateliers en petits groupes de quatre ou cinq élèves, la PES propose le matériel, les élèves jouent avec, puis elle propose une consigne, montre la manipulation attendue. Elle verbalise tous ses gestes et cherche à formaliser les savoirs mathématiques. Elle est cependant dans une posture de démonstration, face à des élèves qui ne semblent pas forcément réceptifs. Elle retire souvent le matériel de leurs mains pour attirer leur attention, mais le sens de l'activité est alors perdu. Elle peine à éviter les distracteurs. Elle se sent en difficulté et cela l'amène à poser la question de la dévolution.

Son problème suivant est donc d'amener les élèves à agir par eux-mêmes. Elle s'empare des activités vues en cours de didactique des mathématiques et les contextualise pour sa classe, toujours en lien avec les thèmes de travail en cours. Ses ateliers sont donc plus pertinents du point de vue didactique et ses adaptations montrent qu'elle sait jouer sur les variables didactiques. Elle se retrouve alors devant une nouvelle difficulté, les élèves ne font pas exactement ce qui était prévu, elle se sent démunie devant leurs réponses, leurs procédures, elle ne sait pas s'ajuster didactiquement en situation. Il s'agit alors pour elle de comprendre l'activité des élèves et pour cela elle va chercher à proposer des situations auto-validantes pour voir comment ils se confrontent aux rétroactions du milieu. Elle comprend ainsi que le matériel peut amener des malentendus et que l'analyse didactique doit primer sur l'adaptation au contexte.

Cette PES met en œuvre en classe des activités en lien direct avec celles travaillées dans les cours de l'INSPE. Elle est très soucieuse de répondre aux attentes de la formation, de ses tuteurs, de l'institution. Elle cherche donc à appliquer les exemples proposés ou analysés. Ce sont ces expérimentations qui l'aident ensuite à construire peu à peu un registre de savoirs professionnels. Elle ne s'appuie pas sur des apports théoriques mais sur les exemples travaillés, vécus ou analysés en formation. Sa conception évolue d'une conception ludique avec cependant une vigilance à formaliser le savoir mathématique, à une conception plus proche du cadre de l'apprentissage par problématisation en amenant les élèves à construire les problèmes.

Malgré cette évolution, la soutenance de son mémoire donnera accès à de nouveaux éléments de sa pratique qui montrent que le manque de savoirs théoriques n'a pas permis à la PES de construire des règles d'action stables. En fait, face à un nouveau domaine d'enseignement pour lequel elle n'a pas bénéficié des analyses collectives faites en formation, elle se retrouve devant la difficulté de construire une situation didactiquement pertinente. Elle n'a pas construit les savoirs nécessaires pour faire seule l'analyse *a priori* des situations et elle repère difficilement les variables didactiques.

COMPARAISON DES PROCESSUS ET DES EFFETS

Ces trois PES portent un regard différent sur leur formation initiale. Sonia pointe l'importance des visites des tuteurs. C'est en effet lors de ces visites que les paradoxes ont été mis en évidence :

« Je tiens à préciser le rôle important des visites lors de cette année de stage, en effet, cela m'a permis de déconstruire un certain nombre de mes représentations sur la construction du nombre en maternelle pour me permettre de m'interroger sur mes propres représentations et ainsi de rompre avec certaines certitudes. » (conclusion du mémoire)

Nadège témoigne de l'importance pour elle du travail de recherche, de ses lectures et de l'écriture :

« Pour moi le travail sur l'écrit réflexif est nécessaire pour faire évoluer mon travail au quotidien, c'est pas quelque chose en plus ou en parallèle, c'est vraiment au cœur. » (groupe d'analyse de l'activité)

Pour Clémentine, elle exprime plutôt ses difficultés à s'appropriier les concepts théoriques de la didactique des mathématiques :

« Du fait de mon histoire personnelle, l'appropriation des concepts et théories didactiques n'a dans un premier temps pas été très simple pour moi et le temps d'expérimentation a été trop court. » (soutenance de l'écrit réflexif)

1. Trois processus de formation chez les PES

On peut donc synthétiser ces trois parcours en spécifiant la manière dont ces PES construisent leurs problèmes professionnels par la mise en évidence de trois processus. Pour chaque processus nous pouvons déterminer ce qui joue le rôle d'événements de problématisation, considérés comme des moments clés qui, par une ouverture ou une fermeture de possibles, amènent une certaine orientation du problème par évolution du registre explicatif. Pour Sonia, les événements de problématisation sont les moments où elle se retrouve face à des paradoxes qui l'amènent à envisager d'autres possibles. C'est par la comparaison de solutions et la confrontation à des nouveaux faits, qu'elle remet en cause ses représentations premières. Son registre explicatif évolue par dépassement d'obstacles. Pour Nadège, les événements de problématisation sont les moments où elle découvre des réponses à ses questions dans les résultats de la recherche. Ces réponses modifient les conditions du problème par de nouveaux apports théoriques. Son registre explicatif évolue plutôt par adaptation et assimilation de savoirs de la didactique et des sciences cognitives qu'elle transpose dans le contexte de sa classe. Enfin pour Clémentine, les événements de problématisation sont des nouveaux faits qu'elle construit par incitation du dispositif de formation. Elle produit ainsi de nouvelles données. Son registre explicatif évolue par une factualisation lors des expérimentations qui l'amène à faire évoluer ses gestes du métier.

Nous avons défini quatre rôles clés dans la problématisation : agir permet de produire de nouveaux faits, questionner amène à sélectionner ce qui est hors question et ouvrir de nouveaux possibles, vérifier assure la cohérence entre données, conditions, question et solution, formaliser permet de prendre conscience des contraintes. Chacun des trois processus évoqués plus haut correspond en fait à la prise par chaque stagiaire d'un rôle spécifique. Ce cadre d'analyse permet de caractériser un processus de vérification pour Sonia, de questionnement pour Nadège et d'action pour Clémentine (voir Tableau 1).

Evènements de problématisation	Paradoxes et ouvertures de possibles	Résultats de la recherche	Factualisation
Evolution du REX	Par dépassement d'obstacles	Par adaptation et assimilation de savoirs de la didactique et transposition dans le contexte de la classe.	Par intégration de gestes métiers et expérience
Processus	Comparaison de solutions et confrontation à de nouvelles données	Modification des conditions par des apports théoriques	Production de nouvelles données
Rôle	Vérifier	Questionner	Agir

Tableau 1. – Caractérisation de trois processus de formation dans le CAP

2. Effets sur les pratiques des enseignants stagiaires

Tout d'abord les travaux et les analyses déposés par ces trois PES sur leur portfolio numérique ainsi que les compte-rendus de visites dans les classes ont permis de voir une évolution des préparations de classes montrant une meilleure maîtrise de l'analyse *a priori*, du choix des variables didactiques, de la différenciation et de l'identification des savoir en jeu.

Ensuite les résultats aux évaluations de ces PES ainsi que leur participation en séminaire recherche ou en analyse de l'activité, montrent une évolution de l'analyse réflexive : les PES remettent en cause leurs représentations, elle apportent spontanément des vidéos ou audios de leur classe, savent donc prendre des indices pour les apporter dans le collectif afin de les analyser, et ces apports se font dans l'idée de poser au groupe une question en lien avec une interprétation des traces de l'activité des élèves. On peut donc penser que le dispositif de

formation a permis un processus de formation chez chacune des stagiaires, et a apporté des éléments d'amélioration des pratiques en particulier par le développement d'un regard didactique au moment de la conception des séances, au cours de leur mise en œuvre et sur le temps de l'analyse réflexive.

Pourtant les mêmes données montrent aussi une difficulté à formaliser les savoirs mathématiques sur les différents temps - préparation, mise en œuvre, analyse réflexive. Ces savoirs ont pour les PES un côté naturalisé difficile à dépasser. Les apports en didactique des mathématiques sont insuffisants à l'issue de la formation pour couvrir tous les domaines mathématiques et le temps de formation est trop court pour apporter une modification des comportements. Ainsi, lors des visites, nous avons constaté un ajustement en situation difficile, soit que les représentations initiales ressurgissent (chez Sonia et Clémentine), soit que d'autres préoccupations interfèrent avec le développement d'un regard didactique (en particulier pour Nadège, le poids de la forme scolaire peut l'amener à perdre ses objectifs d'enseignement), soit que les PES manquent de connaissances sur le savoir mathématique ou en didactique des mathématiques pour adopter un point de vue didactique sur l'anticipation et l'observation. Sans doute le cycle 1 est-il spécifique car l'enseignant se retrouve plus souvent face à l'activité des élèves en petits groupes et donc devant la nécessité d'analyser l'activité de chacun pour donner un feedback immédiat. Ces difficultés d'ajustement seraient sans doute les mêmes pour les autres cycles mais elles sont moins visibles dans une gestion collective.

3. Analyse du dispositif de formation à et par la recherche et des évaluations

Le dispositif de formation s'articule autour de quatre grandes entrées : les enseignements en didactique des mathématiques (apports ; mises en situation ; analyse de vidéos de classe, de productions d'élèves), l'accompagnement du stage (visites, entretiens, co-construction, analyse de vidéos de classe, de productions d'élèves), l'analyse de l'activité (questions transversales, groupes d'analyse, utilisation de cadres et d'outils de la didactique professionnelle), les séminaires de recherche (lectures scientifiques, apports de résultats de la recherche, méthodologie, problématisation, mobilisation de cadres théoriques de la didactique des mathématiques).

Les évaluations proposées en master MEEF dans le cadre du dispositif présenté sont des situations complexes directement adossées à la pratique enseignante. Il est en effet demandé aux étudiants en fin du troisième semestre d'analyser des productions d'élèves recueillies en stage. Tout au long de l'année, ils doivent faire classe et avoir un regard réflexif sur leur pratique dont les tuteurs témoignent dans des bilans des visites et d'entretiens. Ils ont à analyser l'évolution de leur pratique sur l'année en mettant en évidence quatre compétences du référentiel professionnel dont ils témoignent par des traces de leur activité dans un portfolio numérique, ils en font une synthèse qu'ils soutiennent à l'oral en fin d'année. Ils doivent aussi utiliser les résultats de la recherche et les méthodes de la recherche dans l'écriture d'un mémoire (ou écrit réflexif) et lors de la soutenance de ce mémoire.

Il manque cependant un travail spécifique et une évaluation de la préparation. En formation, les étudiants sont entraînés à analyser des ressources et co-construire des séances mais la plupart du temps ce sont des séances qu'ils ne réalisent pas. Les préparations sont bien évaluées lors des visites mais plutôt de manière rétroactive, ce qui ne permet peut-être pas de construire des principes pro-actifs. C'est pourtant sur ce temps de préparation que le regard didactique gagnerait à être développé pour anticiper les ajustements didactiques en situation.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Cette analyse montre que la formation initiale des enseignants peut amener un développement du regard didactique à travers trois processus de formation : par comparaison de solutions et

confrontation à de nouvelles données ; par des apports théoriques ; par l'expérimentation et la production de nouvelles données. Certaines conditions semblent favorables à l'émergence de ces processus et donc à une évolution du registre explicatif des PES. En premier, la confrontation du PES à ce qu'il dit, pense et fait semble indispensable. Cela est possible dès que le PES peut se voir, s'entendre ; ou peut être rendu possible lors de jeux de rôle en formation. Ensuite, nous avons pu attester que lors des visites, certains feedbacks du formateur peuvent permettre la prise de conscience de certains impensés, il s'agit de remettre en question ce qui ne l'était pas. Nous avons aussi pu mesurer l'impact des lectures scientifiques et des apports théoriques chez certains stagiaires. Par ailleurs, les analyses croisées amenant les stagiaires et les chercheurs à partager données, outils et méthodologie sont un temps très important, amenant à formaliser les contraintes, expliciter (Grau, 2019, 2020). Le suivi de quelques stagiaires montre aussi la nécessité d'un temps long de formation, certains obstacles sont résistants et demandent de revenir plusieurs fois sur les mêmes situations dans des contextes différents pour bien comprendre ce qui est en jeu. Changer de comportement ne peut se faire que dans la durée. Enfin nous avons pu mesurer l'apport d'un accompagnement des stagiaires sur leur stage en parallèle de la direction de leur mémoire. Si cet accompagnement donne un peu accès au travail réel de préparation de la classe, il s'avère insuffisant pour comprendre l'activité du PES sur ce temps. Cette question ouvre un nouveau champ de recherche qui pourrait commencer avec l'analyse des temps de co-construction de séances menés en formation continue dans le cadre des constellations et pourrait apporter des éléments pour penser le travail des futurs étudiants avec les maîtres d'accueil lors des stages prévus en première et seconde année de master MEEF à partir de 2021. En effet, ces stages doivent amener l'étudiant à mettre en oeuvre des séances préparées par le titulaire de la classe, coconstruites avec lui, puis celles dont il aura seul l'initiative. Devant la diversité des pratiques, il serait utile de comprendre ce que les enseignants titulaires montrent et disent de leur travail de préparation aux stagiaires et quels conseils ils donnent.

Le dispositif présenté montre aussi des limites. La première est que de multiples formateurs interviennent dans la formation sans que soit pensée l'articulation entre les différents enseignements. L'ensemble peut rester incohérent pour les étudiants. Par ailleurs, la taille des groupes d'étudiants ne permet pas toujours la richesse des échanges. Des séminaires de huit étudiants ne sont pas possibles dans tous les INSPE, de même qu'il n'est pas toujours possible d'assurer toutes les visites de stage par manque de formateurs. Enfin nous avons montré que l'évolution se fait sur un temps long, à partir de 2021, les étudiants ne sont plus dans une classe à l'année, ils n'auront donc pas la même possibilité de progression. On peut aussi s'interroger sur la durée de la formation qui est souvent réduite du fait de la préparation au concours avec un écart dans les attendus.

Ce travail ouvre aussi différentes pistes pour aller plus loin dans la compréhension du processus de formation. Il serait par exemple intéressant d'analyser la pratique des PES un et deux ans après la formation initiale. Un questionnaire pourrait permettre d'identifier les apports de la formation initiale qui agissent durablement sur les pratiques et une observation en classe pourrait mettre en évidence la manière dont leur regard didactique a continué à se développer ou non. Une autre piste serait d'associer les maîtres d'accueil temporaire et professeur des écoles maîtres formateurs aux séminaires recherche de l'INSPE afin de partager avec eux les outils et résultats de la recherche. L'objectif serait double : reproblématiser les résultats de la recherche dans le contexte de leur classe, construire une communauté de praticiens réflexifs. En particulier, le cadre théorique que nous utilisons permet à travers le concept de registre explicatif (REX), de dessiner les contours du cadre théorique dans lequel les enseignants problématisent leur pratique. C'est en reconstruisant le problème professionnel auquel répondent les pratiques, que nous pouvons identifier les nécessités qui, au sein du REX, orientent l'activité de l'enseignant. Le but de la formation est

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

de faire évoluer ce REX en ouvrant de nouveaux possibles, mais cette évolution ne peut se faire que dans le cadre théorique dans lequel il problématise son activité. Les avancées dans la compréhension des REX mobilisés par les enseignants devraient permettre de mieux cerner les obstacles au développement de leur regard didactique et l'accompagnement de ce développement par les formateurs et formatrices (Paul, 2022).

RÉFÉRENCES

- AMIGUES, R., & ZERBATO-POUDOU, M.-T. (1996). *Les pratiques scolaires d'apprentissage et d'évaluation*. Malakoff : Dunod.
- BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M., & MASSELOT, P. (2011). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Le travail enseignant au XXIème siècle Perspectives croisées : didactique et didactique professionnelle*. Colloque international INRP.
- CHARLES-PEZARD, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 30(2), 197-261.
- FABRE, M. (2006). Analyse des pratiques et problématisation. Quelques remarques épistémologiques. *Recherche et formation*, 51, 133-145.
- FONDEVILLE, B. (2018). Genèse et fonctions des doxas pédagogiques. *Education et formation*, e-310, 16-23.
- GRAU, S. (2020). Quelles conditions pour une formation initiale des enseignants du 1^{er} degré en didactique des mathématiques par le travail sur le mémoire ? *Revue de Mathématiques pour l'école*, 333, 28-38.
- GRAU, S. (2021). Conditions d'une vigilance didactique chez les professeurs des écoles stagiaires. *Actes du 47e colloque COPIRELEM*.
- HERSANT, M. (2020). Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : Matérialité des situations et chronologie. *Revue française de pédagogie*, 208(3), 17-30.
- PASTRE, P. (1999). La conceptualisation dans l'action : Bilan et nouvelles perspectives. *Éducation permanente*, 2(139), 25.
- PAUL, M. (2022). *Accompagner la problématisation des situations professionnelles*. Louvain-la-Neuve : De Boeck.
- ROBERT, A. & HACHE C. (2013). Les analyses de pratiques des enseignants de mathématiques (la double approche didactique et ergonomique). *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 5, 57-63.
- SAILLOT, E. (2020). *(S')ajuster au cœur de l'activité d'enseignement-apprentissage. Construire une posture d'ajustement*. Paris : L'Harmattan.
- TROGER, V. (2016). Les critiques de la forme scolaire. In FOURNIER, M., *Éduquer et Former* (p. 179-188). Auxerre : Éditions Sciences Humaines.
- VINATIER, I., & PASTRE, P. (2007). Organismes de la pratique et/ou de l'activité enseignante. *Recherche et formation*, 56, 95-108.
- VINCENT, G., LAHIRE, B., & THIN, D. (1994). L'éducation prisonnière de la forme scolaire. *Scolarisation et socialisation dans les sociétés industrielles*. Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

TRAVAIL DOCUMENTAIRE COLLECTIF EN FORMATION INITIALE : USAGE DU NUMERIQUE ET AUTONOMIE DES ELEVES

Ghislaine Gueudet*, Sophie Joffredo-Le Brun**, Marie-Pierre Lebaud***

RÉSUMÉ

Articuler développement de l'autonomie des élèves et usage du numérique est un enjeu complexe pour les enseignants de mathématiques. Nous avons considéré cet enjeu dans nos travaux associant analyses théoriques, recherches empiriques et conception de ressources pour l'enseignement et la formation initiale et continue. Dans ce séminaire nous considérons plus particulièrement la formation initiale de futurs professeurs de mathématiques. Nous avons conçu et testé une formation au cours de laquelle les stagiaires travaillaient en premier lieu à analyser des scénarios de classe existants à l'aide d'une grille d'analyse issue d'une première phase de la recherche. Ensuite les équipes de stagiaires concevaient et testaient en classe leur propre séance. L'analyse des réponses à un questionnaire, et d'une séance conçue, montre qu'à l'issue de cette formation les stagiaires ont développé une réflexion sur les différentes formes de l'autonomie des élèves ; cependant l'emploi du numérique qu'ils proposent ne contribue pas nécessairement au développement de cette autonomie.

Mots-clefs : Autonomie, Formation Initiale, Numérique, Ressources, Travail documentaire

ABSTRACT

Combining the development of students' autonomy and the use of digital technology is a complex issue for mathematics teachers. We have considered this issue in our work associating theoretical analysis, empirical research and the design of resources for teaching and initial and in-service training. In this seminar we considered more specifically the initial training of future mathematics teachers. We designed and tested a training program in which trainees first worked on analyzing existing classroom scenarios using an analysis grid derived from a first phase of the research. Then the trainee teams designed and tested their own classroom sessions. The analysis of the answers to a questionnaire, and of a training session, showed that at the end of this training, the trainees have developed a reflection on the different forms of student autonomy; however, the use of digital technology that they propose does not necessarily contribute to the development of this autonomy.

Keywords: Autonomy, Initial teacher education, Technology, Resources, Documentation work

CONTEXTE DE LA RECHERCHE : LE PROJET EFRAN IDÉE

Le travail présenté ici s'insère dans le cadre du projet « Interactions Digitales pour l'Éducation et l'Enseignement » (IDÉE, projet retenu en réponse à l'appel eFRAN). Ce projet est porté par une large équipe pluridisciplinaire, associant chercheurs en sciences de l'éducation, en sociologie, en économie et en didactique (mathématiques, anglais, physique). Il porte sur les usages du numérique et le développement de l'autonomie des élèves, dans une perspective de réduction des inégalités socio-éducatives. Le terme « numérique » est pris ici dans une acception très large, englobant des logiciels disciplinaires ou non, des vidéos, des outils de travail collaboratif etc. Nous avons au sein de ce projet conçu successivement un outil d'analyse de scénarios de classe existants ; des scénarios de classe originaux ; un module de formation initiale et un parcours M@gistère pour la formation continue.

Dans ce séminaire, nous considérons la partie « formation initiale » du projet. La question de recherche que nous étudions est la suivante :

À quelles conditions une formation initiale (d'enseignants de mathématiques au second degré) peut-elle soutenir le développement de pratiques de classe articulant autonomie des élèves et usage du numérique ?

* Université Paris-Saclay, Etudes sur les sciences et les techniques, 91400, Orsay, France

** Université Catholique de l'Ouest, 44400 Rezé, France

*** Université Rennes 1, UFR mathématiques, 35000, Rennes, France

ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET TRAVAUX CONNEXES

1. Développement de l'autonomie des élèves

Le terme autonomie est le plus souvent utilisé sans être associé à une définition claire, ainsi un premier apport de la recherche consiste à clarifier le sens même de ce concept.

En didactique des mathématiques, Yackel et Cobb (1996) distinguent un élève autonome qui fait appel à ses propres ressources pour résoudre des problèmes de mathématiques, contrôler la validité de son raisonnement ; et un élève hétéronome qui fait appel à une autre personne. Cependant Wood (2016) souligne que l'autonomie peut également être la capacité à faire collectivement des choix pour élaborer une solution. Selon Ben-Zvi et Sfard (2007), si l'élève autonome peut effectuer seul des tâches mathématiques mettant en jeu des savoirs déjà acquis, la confrontation avec un savoir nouveau nécessite une autre forme d'autonomie dans laquelle le collectif joue un rôle important. Dans la didactique des mathématiques de tradition française, le terme d'autonomie est rarement utilisé ; cependant on peut considérer que de nombreux travaux s'intéressent à l'autonomie de manière implicite. En particulier, une situation a-didactique (Brousseau 1998) est une situation dans laquelle l'élève exerce une responsabilité importante vis-à-vis du savoir en jeu : c'est donc une situation qui nécessite une forme d'autonomie, mais aussi qui est propice au développement de celle-ci.

Nous avons dans nos travaux introduit des distinctions visant à mieux comprendre ce que peut désigner l'autonomie des élèves, et les leviers permettant de la développer. Nous nommons « autonomie transversale » les aspects qui ne sont pas liés aux contenus mathématiques (la gestion du temps en classe et hors classe par exemple), en opposition à l'« autonomie mathématique » qui concerne ces contenus. Au sein de l'autonomie mathématique, nous distinguons l'autonomie de mobilisation (de savoirs connus) et l'autonomie d'acquisition (de nouveaux savoirs ou savoir-faire).

Nous avons de plus utilisé des distinctions issues de la recherche en sciences de l'éducation. Dans ses travaux concernant les dispositifs de formation à distance, Albero (2004) propose de distinguer sept domaines de l'instrumentation à visée d'autonomisation : technique, informationnel, méthodologique, social, cognitif, métacognitif et psycho-affectif. Ces différentes catégorisations permettent une approche plus fine des questions d'autonomie, notamment lorsqu'il s'agit de concevoir un enseignement visant à développer celle-ci : il ne s'agit pas de vouloir tout développer à la fois, mais de se centrer sur certains aspects.

2. Autonomie et numérique

Certaines recherches ont déjà mis en évidence les possibilités d'usage du numérique pour le développement de l'autonomie des élèves.

En ce qui concerne l'autonomie transversale, les travaux relevant du courant « Technology Enhanced Learning Environments » (e.g. Bartolomé *et al.*, 2011) ont montré que des environnements numériques proposant des outils pour structurer la démarche de résolution de problèmes (expliciter un but, une stratégie, des éléments pour l'auto-évaluation) contribuaient à développer l'auto-régulation des apprentissages (Zimmerman, 1989). Les recherches appartenant au champ du « Computer Supported Collaborative Learning » (e.g. Faggiano, 2005) ont souligné en particulier l'apport des outils numériques pour le travail collectif des élèves.

D'autres travaux se sont penchés sur les apports du numérique pour l'autonomie mathématique des élèves. Certains logiciels spécifiques : logiciels de géométrie dynamique, langages de programmation, tableurs, peuvent instrumenter la démarche de résolution de problèmes des élèves (e.g. Gueudet & Lebaud, 2015), et donc contribuer au développement

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

de l'autonomie d'acquisition. Cependant il s'agit auparavant qu'ils soient suffisamment maîtrisés par les élèves, ce qui relève d'une forme particulière d'autonomie (dans le domaine technique, selon les catégories de Albero (2004)). En ce qui concerne l'autonomie de mobilisation et l'entraînement à des techniques, des exercices interactifs sont désormais offerts sur de nombreux sites web, par exemple dans le cadre de manuels numériques. Rezat (2021) a montré l'intérêt pour ce travail de techniques mathématiques des possibilités de feedback offertes par ces environnements numériques.

3. Approche documentaire

La perspective théorique qui fonde nos travaux est l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2009). Cette approche s'intéresse aux ressources des professeurs, avec un sens très large issu des travaux de Adler (2000) : tout ce qui peut ressource la pratique professionnelle des professeurs. Les professeurs (dans le cas de cette étude les professeurs stagiaires) cherchent des ressources, les modifient, les associent et produisent d'autres ressources : ceci constitue leur travail documentaire. Au cours de ce travail documentaire, pour un but professionnel particulier, le professeur développe un document, formé d'un ensemble de ressources recombinaisonnées et d'un schème d'utilisation de ces ressources (Vergnaud 1996). Le schème comporte en particulier des invariants opératoire : des concepts considérés comme pertinents (concepts-en-acte) et des propositions considérées comme vraies (théorèmes-en-actes).

Des travaux antérieurs (e.g. Gueudet & Trouche, 2011) ont montré que le travail documentaire collectif dans le cadre de la formation des enseignants pouvait faire évoluer les pratiques de classe. C'est donc ce principe que nous avons adopté pour la formation que nous avons conçue. De plus Prieur (2016) a montré l'intérêt de méta-ressources : des ressources qui soutiennent la conception collective d'autres ressources par les professeurs. En nous appuyant sur ses travaux, nous avons, dans cette formation, proposé une méta-ressource particulière qui permet d'attirer l'attention des stagiaires sur les caractéristiques d'une séance utilisant le numérique pour développer l'autonomie des élèves.

LA FORMATION « ADRIENE »

1. Structure de la formation

La formation ADRIENE (Autonomie, Différenciation, Réduction des Inégalités et Numérique Educatif) a été construite avec un principe de conception collaborative de séance (Gueudet & Trouche, 2011) : les stagiaires, en M2 MEEF, doivent produire par équipe de 3 ou 4 un scénario de classe qu'ils testeront ensuite dans au moins une des classes de l'équipe. Elle peut s'adresser à des étudiants et stagiaires de différents parcours de M2 MEEF, en adaptant les contenus mis à disposition.

La formation comporte a priori trois séances en présence, d'une durée de deux heures. Elle utilise une plate-forme Moodle pour la mise à disposition de contenus (textes issus de la littérature de recherche, courtes vidéos permettant de définir les concepts d'autonomie, d'inégalités éducatives, de travail collectif et de différenciation).

Lors de la première séance, les stagiaires prennent connaissance de ces contenus et les discutent. Nous leur proposons ensuite des exemples de scénarios de classe, ceux-ci ayant été conçus et testés lors du projet IDÉE et leur demandons de les analyser en utilisant une grille que nous décrivons dans le paragraphe suivant. Notons que, si la grille d'analyse permet a priori de prendre en considération n'importe quel format de scénario de classe, ceux qui sont donnés en exemple et issus du projet suivent certaines rubriques (choisies au sein du groupe

de recherche). Ainsi en plus de l'objectif, du niveau de classe et de l'organisation, on trouve une rubrique « autonomie des élèves », ainsi qu'une rubrique « ressources numériques pour les élèves ». Cette première analyse va permettre aux stagiaires de prendre en main cet outil qui devra leur servir de guide pour construire par équipe, lors de la deuxième séance, un scénario de classe mettant l'accent sur l'utilisation du numérique pour favoriser le développement de l'autonomie sans creuser les inégalités éducatives.

Lors de la troisième séance, les scénarios conçus et leurs tests en classe sont présentés et discutés.

2. La grille d'analyse de scénario

La grille d'analyse de scénario comporte cinq catégories, les deux premières concernent la présentation et la clarté de la ressource et sa facilité de prise en main (Gueudet & Lebaud, 2019b). Nous présentons ici les trois dernières catégories directement en lien avec le thème de ce séminaire. Chaque catégorie contient un certain nombre de critères. Précisons que les cellules avec un fond grisé concernent des critères spécifiques aux mathématiques, les autres étant communs aux trois disciplines du projet.

La catégorie 3 (tableau 1) concerne la richesse didactique, fortement liée à l'autonomie didactique. Tout comme pour l'autonomie, nous avons distingué les ressources concernant une situation de recherche (autonomie d'acquisition) de celles concernant une situation d'entraînement (autonomie de mobilisation).

Dans le premier cas, nous valorisons la possibilité pour l'élève de prendre des initiatives au sens où une mise en fonctionnement des connaissances de niveau au moins mobilisable (Robert, 1998) est possible. Dans le deuxième cas, c'est la possibilité de travailler les automatismes qui est retenue. Des éléments permettant l'auto-évaluation sont également valorisés, celle-ci pouvant permettre de s'affranchir de l'autorité de l'enseignant.

3. Le contenu disciplinaire est riche du point de vue didactique	
Cas 1 : résolution de problèmes (acquisition)	Cas 2 : entraînement (mobilisation)
L'activité proposée permet aux élèves une prise d'initiative	L'activité proposée permet aux élèves de travailler des automatismes
L'activité proposée permet à l'élève d'expérimenter et/ou conjecturer	
L'activité proposée permet à l'élève d'utiliser différentes stratégies, il y a plusieurs solutions possibles.	
Les contenus disciplinaires correspondent bien aux objectifs et prérequis annoncés	
L'activité proposée permet de travailler certaines des compétences : chercher / modéliser / représenter / raisonner / calculer / communiquer	
L'activité proposée utilise divers registres de représentation et des conversions de registres	
Des productions demandées aux élèves permettent au professeur d'accéder à leur cheminement	
Des éléments pour l'auto-évaluation sont proposés	

Tableau 1. – Extrait de la grille d'analyse de scénario, catégorie 3

La catégorie 4 (tableau 2) concerne l'utilisation du numérique. Nous avons également distingué deux cas, cette fois sans lien avec l'autonomie, mais pour tenir compte de la spécificité du programme de mathématiques en France où certains apprentissages (comme par exemple les langages Scratch et Python) doivent se faire aussi via le numérique. Dans le premier cas, nous prenons en compte la valeur ajoutée du numérique, aussi bien pour le Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

professeur que pour les élèves, pour permettre de proposer différentes représentations. Dans les deux cas, nous valorisons la possibilité d'un travail collectif, ainsi que d'un travail hors classe.

4. L'utilisation du numérique est pertinente et cohérente avec l'activité mathématique prévue	
Cas 1 : activité qui peut être faite sans le numérique	Cas 2 : activité qui ne peut pas être faite sans le numérique
Le numérique permet au professeur de proposer des représentations, des informations qui ne seraient pas disponibles sinon	
Le numérique permet aux élèves d'accéder à des représentations, des informations qui ne seraient pas disponibles sinon	
Le numérique est nécessaire pour l'atteinte de l'objectif annoncé	
Le numérique permet aux élèves d'effectuer différents essais et de tester leur validité	
Le numérique permet au professeur d'accéder au travail des élèves et /ou de le montrer à la classe	
Le numérique permet au professeur de prendre en compte la diversité des élèves : par exemple personnaliser son parcours.	
Dans le cas où un travail avec le numérique est prévu à la maison, celui-ci peut se faire sur un smartphone.	
Le numérique permet aux élèves d'échanger ou de travailler collectivement	
Le numérique permet aux élèves de travailler dans différents lieux (avec possibilité d'emploi d'un smartphone s'il y a un travail à la maison)	

Tableau 2. – Extrait de la grille d'analyse de scénario, catégorie 4

La catégorie 5 (tableau 3) est directement liée à l'autonomie transversale, tous les critères sont ici communs aux trois disciplines du projet.

Nous avons noté que pour que le numérique aide au développement de l'autonomie, en particulier lors de l'emploi de logiciels, ceux-ci devaient être suffisamment maîtrisés ; la présence d'aides à la prise en main de ces logiciels est donc un des critères retenus. La possibilité d'un travail collectif est à nouveau valorisée.

5. L'activité proposée peut favoriser l'autonomie transversale des élèves
L'activité prévoit la possibilité de rythmes différents
L'activité prévoit des aides en cas de difficultés
Les aides proposées sont variées : textes, images, vidéos etc.
L'activité laisse à l'élève la possibilité de prendre des initiatives
Les élèves peuvent savoir si leur travail est valide sans appeler le professeur
La ressource intègre un ou des supports pour l'auto-évaluation

Des aides sont fournies pour la prise en main du logiciel si besoin, et ces aides intègrent des éléments visuels
L'activité prévoit un recours à certaines formes de travail collectif
L'élève peut faire des choix pour personnaliser son parcours

Tableau 3. – Extrait de la grille d'analyse de scénario, catégorie 5

Nous avons choisi de ne pas faire apparaître explicitement dans cette grille les sept domaines de l'autonomie distingués par Albero (2004), afin d'en faire un outil plus facilement utilisable, en particulier pour des futurs enseignants en formation, et donc les critères retenus sont exprimés sans trop de vocabulaire spécialisé. Mais ceux-ci y sont bien présents. Par exemple, le travail collectif concerne le domaine social, l'auto-évaluation les domaines cognitif et métacognitif, la possibilité de conjecturer ou d'avoir des rythmes différents le domaine méthodologique, etc.

MÉTHODOLOGIE

La formation ADRIENE a été conçue en 2018 par une équipe pluridisciplinaire regroupant différents membres du projet. La première implémentation s'est déroulée en 2018-2019 sur le site de l'INSPE de Brest (stagiaires du premier degré et du second degré en anglais, sciences et espagnol) et de Rennes (stagiaires en mathématiques). Elle a permis de proposer des pistes d'amélioration et des modifications. L'année suivante, ces deux sites ont à nouveau accueilli cette formation qui a été impactée par la crise sanitaire (confinement). Sa mise en œuvre s'est donc limitée à l'emploi de la grille pour analyser les scénarios de classe. En 2020-2021, seuls les étudiants et stagiaires en master 2 MEEF mathématiques ont été concernés avec pour certains des stagiaires, des élèves à distance.

1. Implémentation de la formation à Brest en 2020-2021

Nous nous focaliserons dans cet article sur l'analyse de la formation produite en 2020-2021 sur le site de l'INSPE à Brest.

Cette formation a comporté trois séances de deux heures. Elle a regroupé 28 stagiaires et étudiants, organisés en 7 équipes. En fin de formation, cinq scénarios ont été déposés sur l'espace Moodle dédié. Cependant, entre la séance 2 et 3, un enseignement à distance a été mis en place dans les établissements du second degré du fait de la crise sanitaire. Seulement deux scénarios ont pu être testés dans les classes.

2. Recueil et analyse de données

Plusieurs types de données ont été recueillis pour répondre à notre question de recherche.

Tout d'abord, 18 questionnaires complétés par les stagiaires en fin de formation ont été collectés. Ce questionnaire comporte 5 entrées. Les 3 premières utilisent une échelle de Likert à trois niveaux et renvoient aux objectifs de la formation et à ses apports réels, à la structure de formation et aux ressources mises à disposition pour concevoir le scénario de classe. Les deux dernières sont des questions ouvertes. Une question sur les conditions de l'autonomie des élèves et du travail à distance est posée. Puis, il est demandé aux stagiaires une définition de l'autonomie des élèves. Nous analyserons ces différentes définitions en nous référant aux différents domaines de l'instrumentation à visée d'autonomisation (Albero, 2004).

Par ailleurs, nous avons téléchargé les cinq scénarios déposés sur la plate-forme MOODLE. Nous avons analysé ces scénarios en termes de potentiel pour soutenir l'autonomie des élèves et d'usage du numérique à partir de la grille. Puis la séance 3,

constituée d'échanges autour des mises en œuvre, a été filmée et transcrite. Pour rappel, seulement deux scénarios ont été implémentés : « Découvrir Scratch avec les algoblocs » et « Découvrir la formule de la distributivité simple à l'aide de l'aire du rectangle avec Geogébra ». Dans ce qui suit, nous considérerons plus en détails ce dernier scénario.

RÉSULTATS

1. Définitions de l'autonomie selon les stagiaires

Nous avons recueilli 18 questionnaires en fin de formation ; 12 comportaient des réponses à la dernière question posée « À l'issue de cette formation, quelle définition donneriez-vous de l'autonomie des élèves ? », nous analysons ici ces 12 réponses.

Nous distinguons deux niveaux de définitions.

Le premier niveau relève d'une définition du type « être autonome, c'est travailler seul », « ne pas demander de l'aide au professeur ». Il ne relève que d'une seule caractéristique de l'autonomie, « travailler seul ».

Le second niveau recouvre des définitions plus approfondies que nous pouvons relier à certains domaines d'application de l'autonomie (Albero, 2004).

Ainsi, certains stagiaires mettent en évidence que l'autonomie est « la capacité des élèves à prendre en main une ressource ». Cette définition caractérise le domaine technique qui concerne la maîtrise des technologies numériques et la capacité à s'adapter face à la diversité des outils et supports (Gueudet & Lebaud, 2019).

La définition « Aller chercher une information » relève du domaine informationnel qui regroupe la capacité à maîtriser les outils de recherche documentaire, à rechercher de l'information pertinente. Les énoncés « Prendre des initiatives, mettre en place une démarche de résolution de problèmes, chercher des solutions » renseignent, quant à eux, le domaine cognitif pour lequel l'autonomie se caractérise par la construction de stratégies par les élèves.

Le domaine métacognitif, comprendre ses erreurs pour adapter une nouvelle stratégie, se retrouve dans les extraits suivants « réussir à se rendre compte de leur difficulté et les comprendre », « situer ses problèmes ou incompréhensions et chercher des pistes de solutions ». Il croise le domaine social comme capacité à collaborer avec d'autres élèves et/ou avec le professeur et solliciter ces derniers à bon escient lorsque les définitions données sont complétées par « Comprendre que l'on a besoin d'aide et la demander au bon moment ».

Cette spécification des différentes définitions en domaines d'autonomie amène à voir que seulement deux stagiaires proposent une définition de premier niveau (réaliser la tâche seul et sans demander l'aide du professeur). Sept stagiaires donnent uniquement une définition de niveau 2. Celles-ci peuvent regrouper différents domaines comme demander de l'aide à un moment opportun, prendre des initiatives, rechercher l'information. Trois stagiaires présentent une définition comprenant les deux niveaux : Par exemple, travailler seul et réussir à prendre en compte ses difficultés (domaine métacognitif).

Il apparaît que le premier niveau de définition reste prégnant puisque plus de 40 % des définitions l'intègrent. Cependant, 83 % des définitions comprennent des éléments du second niveau. Nous pouvons faire l'hypothèse que la formation initiale ADRIENE amène les stagiaires à élargir leurs conceptions de l'autonomie.

Voyons maintenant comment l'autonomie des élèves et usage du numérique se concrétise dans l'analyse d'un scénario de classe et de sa mise en œuvre.

2. Analyse d'une séance conçue

Le groupe A, composé de 4 stagiaires, a conçu et testé en classe de 5^e un scénario intitulé « Découvrir la formule de la distributivité simple à l'aide de l'aire du rectangle ». Ce scénario (qui comporte une seule séance) propose d'utiliser GeoGebra pour amener les élèves à découvrir la formule de la distributivité simple (Figure 1).

Suivez les instructions suivantes pour obtenir la figure ci-dessous.

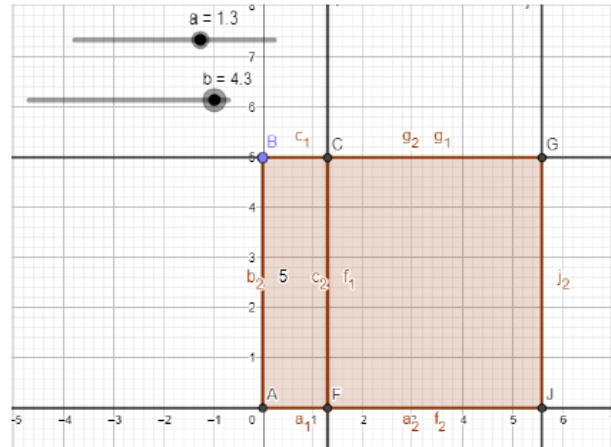


Figure 1. – Figure dynamique GeoGebra attendue des élèves, selon le scénario déposé

Les élèves travaillent en salle informatique, à un ou deux par ordinateur. Ils disposent d'une feuille détaillant pas à pas la construction de la figure sur GeoGebra. Ils doivent faire afficher les aires des 3 rectangles, les noter dans un tableau, constater que la somme des aires des deux petits rectangles est égale à l'aire du grand rectangle. Ils doivent ensuite traduire cette relation sous forme littérale, et répondre à la question : « quelle formule du cours retrouvez-vous ? ».

En ce qui concerne le potentiel de ce scénario en termes d'usage du numérique soutenant l'autonomie des élèves, nous retenons plusieurs aspects.

En termes de richesse didactique, et d'autonomie mathématique, il s'agit plutôt d'autonomie d'acquisition, les élèves doivent découvrir quelle formule du cours on retrouve par le biais de cette construction. Il y a un passage du cadre géométrique au cadre algébrique (notons que l'intérêt de ce changement de cadre pour l'enseignement de la distributivité a été montré par Coulange & Verdugo, 2016). Il y a également un changement de registres de représentation sémiotique : le passage du registre de la figure dynamique à celui de la formule algébrique. La modélisation algébrique de la situation géométrique est plutôt à la charge des élèves ; cependant elle est explicitement demandée, et soutenue par des questions intermédiaires et par la présence des deux curseurs qui introduisent déjà des lettres.

En ce qui concerne l'utilisation du numérique, elle permet aux élèves d'accéder à une forme de représentation particulière, une figure dynamique qui permet de tester de multiples valeurs.

Du point de vue de l'autonomie transversale, des aides sont fournies pour l'utilisation de GeoGebra. Cependant ces aides détaillent étape par étape la construction, ce qui ne laisse que peu d'initiative aux élèves – de multiples figures dynamiques différentes auraient pu convenir, mais en suivant les différentes étapes les élèves arrivent tous à la même figure. Des aides sont aussi prévues pour la modélisation (5 aides graduelles), qui doivent être données progressivement par le professeur en fonction des besoins des élèves.

Cependant, lors du test en classe, les stagiaires ont constaté que les élèves ne connaissaient pas GeoGebra. En conséquence une séance entière a été consacrée à la construction de la figure, l'aspect de modélisation n'étant abordé que lors de la séance suivante.

Lors de la formation les stagiaires ont effectué un travail documentaire, pour le but « concevoir une séance utilisant le numérique et soutenant l'autonomie des élèves ». Ils ont pour ce but mobilisé différentes ressources : GeoGebra, leur propre cours aux classes de 5^e, et les ressources données lors de la formation. Le scénario qu'ils ont proposé, et leurs déclarations lors de la troisième séance de la formation, nous conduisent à inférer certains invariants opératoires en cours de développement : « GeoGebra permet aux élèves de faire de multiples essais, d'observer une égalité numérique et de la relier à une formule algébrique » :

« Le but là de Geogebra c'est qu'on puisse le tester plein de fois sans être obligé à chaque fois de redessiner un rectangle. Qu'ils puissent le tester plein de fois pour voir que ben ça marche à chaque fois et après ils passaient au calcul littéral pour le prouver. » (Groupe A, séance 3)

Ils ont aussi été attentifs à proposer des aides graduelles pour accompagner la modélisation par les élèves :

« Au début je leur laisse complètement champ libre. C'est eux qui raisonnent et s'ils ne voient vraiment pas comment faire je leur propose à chaque fois une aide différente, je leur laisse quelques minutes, s'ils ne reviennent pas je propose l'aide suivante » (Groupe A, séance 3)

Ces stagiaires semblent avoir développé un invariant opératoire du type « lors d'une situation de recherche, des aides graduelles permettent de soutenir l'autonomie des élèves ». Cependant en ce qui concerne GeoGebra, l'aide prévue était en fait un protocole complet de construction. De plus, comme les élèves ne connaissaient pas le logiciel, celui-ci ne pouvait pas contribuer à soutenir leur autonomie mathématique. Les stagiaires ont retenu les deux objectifs : utiliser le numérique, et développer l'autonomie des élèves ; mais la séance conçue ne parvient pas à articuler les deux de manière satisfaisante.

CONCLUSION

Dans cette conclusion nous présentons des éléments de réponse à la question posée au départ de notre travail : « À quelles conditions une formation initiale (enseignants de mathématiques au second degré) peut-elle soutenir le développement de pratiques de classe articulant autonomie des élèves et usage du numérique ? ».

Des travaux antérieurs ont montré l'intérêt de formations continues fondées sur la conception collective de séances testées dans les classes des participants (Gueudet & Trouche, 2011). La mise en œuvre de la formation initiale ADRIENE en 2020-2021 a été fortement impactée par la crise sanitaire ; elle a conduit à la conception et surtout au test en classe d'un nombre réduit de scénarios. Cependant les éléments présentés ci-dessus, et d'autres analyses conduites avant la crise sanitaire (Gueudet & Joffredo-Le Brun, 2021) montrent que cette modalité de formation peut amener des genèses documentaires, et donc des évolutions de connaissances professionnelles, aussi pour les professeurs stagiaires.

Dans le cas d'une formation concernant l'usage du numérique pour contribuer au développement de l'autonomie des élèves, nous observons en fin de formation que les stagiaires ont développé une certaine vigilance à différents aspects de l'autonomie. Les définitions de l'autonomie, qu'ils donnent, mentionnent la recherche d'informations, la prise en main de ressources, la capacité à évaluer ses difficultés et à poser des questions à bon escient. Les scénarios conçus montrent que les stagiaires sont attentifs à concevoir des aides graduelles, qui permettent une forme de différenciation. La grille d'analyse de scénario, utilisée également comme guide de conception, a joué le rôle de méta-ressource pour le travail documentaire collectif des stagiaires. Avec les autres apports donnés en formation, elle a amené les stagiaires à être attentifs à la différenciation et aux possibilités d'aides.

Cependant l'articulation entre usage du numérique et autonomie des élèves est réduite dans les scénarios proposés par les stagiaires, en particulier dans ceux qui font appel à des logiciels spécifiques des mathématiques (GeoGebra ou tableur). En effet ces logiciels nécessitent une prise en main spécifique. D'une part, s'ils ne sont pas suffisamment maîtrisés par les élèves,

ils ne peuvent pas soutenir l'autonomie mathématique. D'autre part, pour la prise en main du logiciel, les stagiaires semblent revenir à une conception de l'autonomie du type : « l'élève travaille seul », en fournissant des fiches très détaillées à suivre pas à pas.

Ces analyses devraient nourrir des versions ultérieures de la formation, et d'éventuelles évolutions de la méta-ressource « grille ».

RÉFÉRENCES

- ADLER, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205-224.
- ALBERO, B. (2004). L'autoformation dans les dispositifs de formation ouverte et à distance : instrumenter le développement de l'autonomie dans les apprentissages. Saleh I., Lepage D., Bouyahi S. (Dir.) *Les TIC au cœur de l'enseignement supérieur, Actes de la journée d'étude du 12 novembre 2002*, Laboratoire Paragraphe, Université Paris VIII-Vincennes-St Denis, coll. Actes Huit, 139-159. <http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/00/17/75/PDF/AlberoVincennes.pdf>
- BARTOLOMÉ, A. & STEFFENS, K. (2011). Technologies for self-regulated learning. In R. Carneiro, P. Lefrere, K. Steffens, & J. Underwood (Eds.), *Self-regulated learning in technology enhanced learning environments* (pp. 21–32). Sense Publishers.
- BEN-ZVI, D. & SFARD, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings and the learner's autonomy. *Éducation & Didactique* 1(3), 117-134.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- COULANGE, L. & VERDUGO, P. (2016). Une étude comparative de l'enseignement du calcul algébrique en France et au Chili. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 153 - 185.
- FAGGIANO, E., PERTICHINO, M. & ROSELLI, T. (2005). CSCL in mathematics education. In IEEE Education Society, IEEE Computer Society, American Society for Engineering Education, & Indiana University - Purdue University Indianapolis (Éds.). *Pedagogies and technologies for the emerging global economy: 35th annual frontiers in education; conference proceedings; The Westin Indianapolis, Indianapolis, Indiana, October 19 - 22, 2005*. Stipes Publ. LLC.
- GUEUDET, G. & JOFFREDO-LE BRUN, S. (2021). Teacher education, students' autonomy and digital technologies: A case study about programming with Scratch. *Review of science, mathematics and ICT education*, 15 (1), 5-24, <https://pasiithe.library.upatras.gr/review/article/view/3575>
- GUEUDET, G. & LEBAUD, M.-P. (2015). Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ? *Recherches en éducation* 21, 81-94. <http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article308>
- GUEUDET, G. & LEBAUD, M.-P. (2019). Développer l'autonomie des élèves en mathématiques grâce au numérique. 1. Différentes dimensions de l'autonomie. *Petit x* 109, 3-16
- GUEUDET, G. & LEBAUD, M.-P. (2019b). Développer l'autonomie des élèves en mathématiques grâce au numérique. 2. Analyser le potentiel des ressources pour le professeur. *Petit x* 110-111, 85-102
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199–218.
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. *ZDM Mathematics education*, 43(3), 399-411.
- PRIEUR, M. (2016). *La conception co-disciplinaire de méta-ressources comme appui à l'évolution des connaissances des professeurs de sciences*. Thèse de doctorat de l'Université Lyon 1.
- REZAT, S. (2021). How automated feedback from a digital mathematics textbook affects primary students' conceptual development: Two case studies. *ZDM Mathematics Education* 53, 1433-1455. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01263-0>
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-189.
- VERGNAUD, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Presses Universitaires de France.
- WOOD, M. B. (2016). Rituals and right answers: barriers and supports to autonomous activity. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 327-348.
- YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 58-477.
- ZIMMERMAN, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, 81(3), 329-339.

PARALLÉLISME AU CM1 : ANALYSE D'UNE MISE EN ŒUVRE EN CLASSE D'UNE SEANCE ISSUE DU MANUEL *MHM*

Claire Guille-Biel Winder*, Edith Petitfour**

RÉSUMÉ

Nous étudions la mise en œuvre dans une classe de CM1, par un enseignant chevronné, de la séance d'enseignement concernant l'introduction de la relation de parallélisme proposée dans le manuel numérique *La Méthode Heuristique de Mathématiques (MHM)*. L'analyse *a priori* de la situation d'enseignement proposée dans ce manuel nous permet d'identifier les types de tâches proposés, d'envisager les techniques de résolution possibles et les connaissances en jeu, ainsi que les difficultés qui peuvent émerger pour les élèves et qui seront à gérer par l'enseignant. Nous réalisons ensuite une analyse *a posteriori* de la mise en œuvre effective de la séance, à partir de données filmées et enregistrées, en étudiant plus particulièrement les actions des élèves et interactions élèves - enseignant, avec des outils d'analyse sémiotique. Nous mettons en exergue les adaptations réalisées par l'enseignant à partir des propositions du manuel, ainsi que les réussites et les difficultés des élèves. Nous concluons en revenant sur l'impact de la ressource sur la séance observée.

Mots clefs : parallélisme, manuel scolaire, pratiques enseignantes, action instrumentée, sémiotique

ABSTRACT

In this article, we study the implementation of an introductory session on parallelism provided by the digital textbook '*La Méthode Heuristique de Mathématiques*' (*MHM*). This session was conducted by an experienced teacher in a CM1 class (year 5 or 4th grade equivalent). The *a priori* analysis of the teaching situation suggested in this textbook allows us to identify different types of tasks, to consider the possible resolution techniques and the knowledge involved, as well as the difficulties that may emerge for the students and that will have to be addressed by the teacher. We then carry out an *a posteriori* analysis of the actual session's implementation, based on filmed and recorded data. More specifically, we focus on students' actions and student-teacher interactions, through a semiotic analysis. We highlight the adaptations made by the teacher based on the textbook's material, as well as the students' achievements and difficulties. To conclude, we evaluate the impact of the resource on the observed session.

Key words: parallelism, textbook, teaching practices, instrumented action, semiotics

INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans le prolongement de nos travaux portant sur les propositions d'enseignement de notions géométriques (perpendicularité et parallélisme) faites dans les manuels scolaires dans le cadre des programmes français d'enseignement à l'école primaire (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2018, 2021a, 2021b). Après avoir étudié la manière dont les manuels visent à fournir un accès à ces savoirs géométriques, nous portons notre attention sur leur implémentation dans les classes. Plus précisément, notre problématique générale porte sur la possibilité d'une mise en lien entre l'analyse de la « qualité intrinsèque » d'un manuel et les effets constatés dans son utilisation par un enseignant pour conduire des situations d'apprentissage.

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'usage du manuel numérique *La Méthode Heuristique de Mathématiques*¹ (*MHM*) par un enseignant de CM1. Nous interrogeons l'impact de cet usage sur la mise en œuvre de la séance d'enseignement concernant l'introduction de la relation de parallélisme. Ainsi, nous cherchons à identifier les adaptations réalisées par l'enseignant à partir des propositions du manuel, nous étudions comment les significations de la relation de parallélisme circulent et se construisent au cours de la séance

* ADEF UR 4671, Aix-Marseille Université

** Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ. Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France

¹ <https://methodeheuristique.com>

d'enseignement et enfin comment le processus d'appropriation des instruments se met en place.

Nous exposons dans une première partie nos appuis théoriques et la méthodologie de l'étude. Nous présentons ensuite l'analyse *a priori* de la séance (deuxième partie) et son analyse *a posteriori* (troisième partie) avant de conclure.

APPUIS THEORIQUES, METHODOLOGIE

1. Cadre général de l'étude

Pour étudier les adaptations des propositions du manuel *MHM* réalisées par un enseignant sur la séance d'introduction de la notion de parallélisme, nous mettons en regard l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* (Brousseau, 1998) de la séance étudiée.

Nous procédons d'abord à une analyse *a priori* en modélisant l'activité mathématique prévue par le manuel sous forme d'organisations mathématiques locales (Chevallard, 1999) : nous relevons les types de tâches proposés, nous envisageons les techniques de résolution possibles ainsi que les significations du parallélisme en jeu qui leur sont associées. Nous identifions aussi les difficultés qui pourraient émerger pour les élèves et les initiatives qui seraient à prendre par l'enseignant, au vu des tâches proposées et des éléments apportés dans le manuel, en particulier dans le guide de l'enseignant (GdE). Cette analyse *a priori* s'appuie sur une analyse préalable du manuel *MHM*, selon la méthodologie que nous avons développée (Guille-Biel Winder et Petitfour, à paraître), dont la synthèse et la grille d'analyse sont présentées en partie I.2.

Nous réalisons ensuite l'analyse *a posteriori* de la séance mise en œuvre par un enseignant en nous intéressant à ses choix relativement aux propositions du manuel, ainsi qu'à leurs effets. Pour ce faire, nous prenons appui sur une observation de la séance et sur des extraits filmés de celle-ci. En nous plaçant dans une approche sémiotique (Arzarello, 2006), nous analysons l'émergence des connaissances associées à la notion étudiée et leur exploitation par l'enseignant pour exposer les savoirs en jeu. Ainsi, à l'instar de Houdement et Petitfour (2017), nous prenons appui sur les signes – oraux, graphiques, gestuels, liés à du matériel – que renvoient les élèves et l'enseignant dans leurs actions et interactions pour analyser l'activité mathématique qui en résulte.

2. Analyse préalable du manuel

Nous présentons succinctement la grille d'analyse de manuels (Guille-Biel Winder et Petitfour, à paraître) avant de donner la synthèse de l'analyse du manuel *MHM*.

En lien avec les contraintes auxquelles est assujéti l'enseignement des savoirs mathématiques proposé par un manuel, les analyses se déclinent selon cinq critères : conformité institutionnelle, adéquation pédagogique, pertinence, cohérence et validité. La *conformité institutionnelle* interroge la conformité des propositions des manuels aux instructions officielles transmises par l'institution concernant les savoirs et savoir-faire à enseigner, mais aussi l'organisation de la classe. L'*adéquation pédagogique* interroge l'adéquation entre les appuis théoriques revendiqués par les auteurs et le déroulement proposé. La *pertinence de l'enseignement des savoirs proposé* interroge les choix didactiques de(s) auteur(s) concernant la progression retenue, les tâches mathématiques et le choix des objets sur lesquels elles portent, les significations abordées, la présentation des techniques réalisées ainsi que les formulations langagières. La *cohérence par rapport aux savoirs enseignés* porte sur deux niveaux. Au niveau local, les liens entre le(s) type(s) de tâche(s) proposé(s) dans la première rencontre avec la notion, la(les) signification(s) en jeu, la(les)

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

technique(s) donnée(s) et les tâches proposées dans les différentes activités du manuel sont interrogés. Aux niveaux global et régional, il s’agit de questionner l’organisation des savoirs adoptée pour travailler les notions. La *validité* des propositions par rapport aux mathématiques proposées à la fréquentation des élèves par le manuel est en lien avec les contraintes de la discipline. Elle est questionnée par l’étude des formulations langagières, des notations symboliques utilisées, mais aussi *via* l’analyse du domaine de validité des concepts et l’usage des artefacts proposés. Les trois derniers critères rendent compte de ce que nous avons appelé *la qualité didactique* du manuel. L’analyse d’un manuel selon ces cinq critères s’opérationnalise alors en portant l’attention sur les types de tâches proposés et les techniques ainsi que les ostensifs associés, sur les savoirs en jeu et enfin sur leur organisation.

La figure 1 donne une vue synoptique des résultats de l’analyse des propositions d’enseignement de la relation de parallélisme du manuel *MHM* réalisée dans (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2021b). La validation plus ou moins grande des critères est exprimée par un code couleur.

	Conformité institutionnelle	Adéquation pédagogique déclarée / proposé	Qualité didactique		
			Pertinence	Validité	Cohérence
Tâches et types de tâches	Conformité aux documents institutionnels des types de tâches proposés	Adéquation des tâches proposées avec les intentions déclarées des auteurs	Pertinence des tâches proposées relativement à l’enseignement de la relation		Cohérence entre les tâches proposées et les techniques institutionnalisées
Techniques	Conformité aux documents institutionnels des techniques présentées	Adéquation des techniques proposées avec les intentions déclarées	Pertinence de la présentation des techniques		Cohérence entre les significations de la relation abordées et les techniques proposées
Savoirs	Conformité aux documents institutionnels des significations abordées	Adéquation de l’introduction des savoirs avec les intentions déclarées des auteurs	Pertinence de l’enseignement des différentes significations abordées	Validité mathématique des significations abordées	Cohérence entre la première rencontre avec la relation et les savoirs institutionnalisés
Ostensifs (objets et instruments, langages)	Conformité aux documents institutionnels des symboles et notations mathématiques proposés		Pertinence du choix des objets par rapport à l’enseignement de la relation	Validité mathématique de l’usage des instruments	
			Pertinence des formulations langagières par rapport à l’enseignement du savoir	Validité mathématique des symboles et des notations	
Eléments organisationnels et planificateurs	Conformité aux documents institutionnels de la programmation	Adéquation de la programmation avec les intentions déclarées des auteurs	Pertinence de la progression par rapport à l’enseignement du savoir	Validité mathématique des formulations langagières	Cohérence de l’organisation des savoirs

Critère validé	Critère validé pour une partie des propositions	Critère non validé
----------------	---	--------------------

Figure 1. – Synthèse de l’analyse du manuel *MHM*

Nous avons notamment relevé des problèmes au niveau de la *qualité didactique*. En ce qui concerne plus particulièrement l'activité que nous analysons dans cet article, nous relevons un problème de *cohérence* entre cette première rencontre de la relation de parallélisme et son institutionnalisation : la signification « droites d'écart constant » est en effet institutionnalisée dans la trace écrite alors qu'elle n'a pas été abordée dans la situation introductrice (uniquement centrée sur la signification « droites qui ne se coupent jamais »). Nous relevons aussi des problèmes de *pertinence* dans l'enseignement des significations du parallélisme abordées (notamment le passage entre la signification liée à l'incidence et celle liée à l'écart constant n'est pas aménagé, la distance entre un point et une droite ou entre deux droites, appelée « écartement », n'est jamais explicitée), ainsi que dans la présentation des techniques instrumentées (aucune technique de reconnaissance de la relation n'est institutionnalisée, même si certaines sont présentées dans les capsules de Canopé). Nous relevons enfin un problème de *validité* mathématique dans l'ignorance de l'emboîtement des classes « droites perpendiculaires » et « droites sécantes » dans l'activité introductrice (nous y reviendrons dans la partie suivante).

3. Données recueillies

Nous avons choisi d'observer la mise en œuvre de séances du manuel *MHM* par un enseignant chevronné, pour éviter que les adaptations produites ne soient imputées à l'inexpérience d'un débutant. Nous souhaitons de plus que l'enseignant utilise le manuel *MHM* comme seule ressource d'enseignement en mathématiques, de manière à éliminer les interférences avec d'autres manuels, et ce depuis plusieurs années, pour que des routines (Butlen, Mangiante-Orsola et Masselot, 2017) telles que gérer une phase d'explicitation, de synthèse de productions d'élèves débouchant à une institutionnalisation par exemple, soient déjà installées dans l'usage de ce manuel.

Monsieur C. répond à ce profil. Enseignant expérimenté, il enseigne depuis vingt ans. Après l'obtention d'une licence scientifique, il a suivi une formation à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres. Il a rencontré l'auteur du manuel *MHM*, lors de sa formation pour être Professeur des Écoles Maître Formateur en 2015-2016, et s'est porté volontaire pour être « testeur » du manuel *MHM* au cycle 3. Depuis, il « suit cette méthode » pour enseigner les mathématiques à ses élèves de CM1. Il a aussi proposé en 2018-2019 une animation pédagogique de trois heures pour répondre à des demandes d'aide de collègues souhaitant « mettre en œuvre la méthode ».

Durant l'année scolaire 2019-2020, nous avons filmé dans sa classe les séances consacrées à l'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme avec deux caméras, l'une fixe dirigée sur la classe et le tableau, l'autre mobile captant des interactions entre élèves ou entre les élèves et l'enseignant. Nous avons également enregistré l'enseignant avec un micro-cravate. Les séances ont été retranscrites à partir de ces données filmées et enregistrées.

ANALYSE A PRIORI DE LA SEANCE D'INTRODUCTION DU PARALLELISME

1. La séance

Dans le GdE, l'apprentissage relatif à la notion de parallélisme est présenté en trois points : une situation de découverte du parallélisme à réaliser en binômes (figure 2) ; la lecture de la leçon 12 « Les droites » (annexe 1) suivie d'une recherche d'exemples de droites parallèles

dans la classe en équipe de trois ; enfin le visionnage d'une vidéo² portant sur la reconnaissance instrumentée du parallélisme à la suite duquel est proposé un exercice individuel de reconnaissance de la relation au sein d'un réseau de cinq droites. Nous nous intéressons dans ce texte à la situation de découverte et la lecture de la leçon.

La première rencontre avec la notion de parallélisme se réalise ainsi par le biais d'une activité de classement de neuf couples de droites (figure 2). Le GdE demande de « faire émerger les trois possibilités : droites qui se coupent (sécantes), droites perpendiculaires et droites qui ne se coupent pas » puis de « donner le vocabulaire : 'des droites parallèles sont des droites qui ne se coupent jamais' ». Les relations *sécantes*, *perpendiculaires* et *parallèles* semblent ainsi constituer des classes disjointes alors qu'elles doivent être organisées dans une classification issue de deux tris successifs : sécantes / non sécantes puis tri des droites sécantes en perpendiculaires / non perpendiculaires.

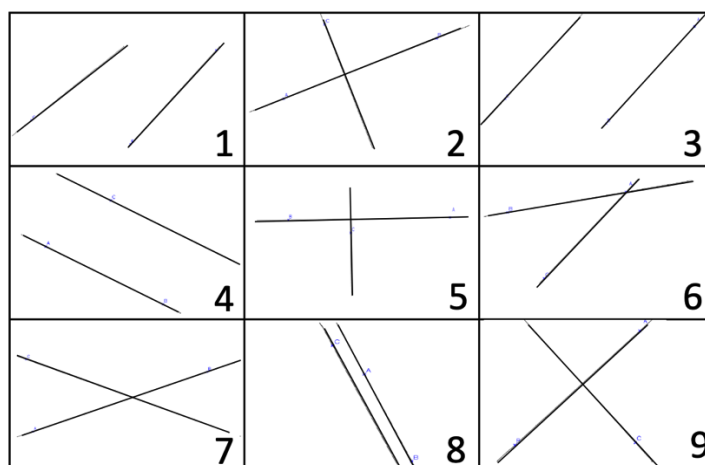


Figure 2. – « Fiche Classement de droites³ ».

Le classement des couples de droites selon leur relation d'incidence comporte deux classes : celle des droites parallèles (couples 3, 4 et 8) et celle des droites sécantes (couples 1, 2, 5, 6, 7 et 9). Il permet de faire émerger la relation de parallélisme identifiée grâce à la comparaison des neuf couples de droites. Le choix de ces couples par l'auteur du manuel révèle sa prise en compte de certains obstacles liés à la reconnaissance de la relation d'incidence entre deux droites. Tout d'abord, pour le couple 1, le point d'intersection des droites n'est pas représenté et la perception visuelle peut être mise en défaut, les droites étant presque parallèles : prolonger leur représentation – mentalement ou avec une règle – permet de percevoir qu'elles se couperont. Ensuite, un seul couple de droites (5) a des directions privilégiées (horizontale et verticale) facilitant la reconnaissance immédiate de la relation de perpendicularité par perception visuelle. Deux couples de droites (6 et 7) peuvent être reconnus visuellement comme sécantes et non perpendiculaires. Pour les autres couples, l'usage d'instruments peut s'avérer utile : l'équerre pour vérifier la relation de perpendicularité (2 et 9), la règle et l'équerre pour mesurer et comparer des écarts entre les droites, notamment lorsqu'ils sont importants (1, 3 et 4).

La signification du parallélisme mise en jeu dans cette introduction est ainsi uniquement associée à la relation d'incidence dans le GdE. Pourtant d'autres significations peuvent émerger et notamment celles liées à la notion d'écart (« droites d'écart constant ») ou de direction (« droites de même direction »). Elle est mise en avant dans le GdE en conclusion de

²<https://lesfondamentaux.reseau-canope.fr/video/mathematiques/geometrie-du-plan/paralleles/reconnaitre-des-droites-paralleles>

³ Numérotation ajoutée par nos soins

l'activité de classement, « droites qui ne se coupent jamais », puis reprise dans la leçon 12 avec l'ajout d'une deuxième signification en lien avec la notion d'écart et ainsi formulée « gardent toujours le même écartement ». Cette formulation est alors accompagnée d'une représentation de deux droites parallèles entre lesquelles sont placées deux doubles flèches (figure 3). Ce codage non usuel n'indique pas les contraintes sur la direction de ces flèches, ni sur leur longueur.

⇒ Quand deux droites gardent toujours le même écartement, qu'elles ne se coupent jamais, on dit qu'elles sont **parallèles**.

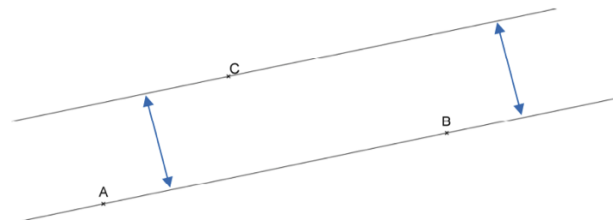


Figure 3. – Extrait de la leçon 12

2. Synthèse

Différents points non abordés dans le GdE peuvent s'avérer problématiques pour l'enseignant.

À sa charge en effet d'identifier et de mettre en lien les significations du parallélisme qui pourraient émerger au cours de l'activité de classement (notamment en lien avec la relation d'incidence, la notion d'écart, ou celle de direction).

L'enseignant devra aussi prendre en compte les difficultés inhérentes à l'enseignement de la notion de parallélisme mais non explicitées dans le manuel, comme la confusion entre l'objet géométrique et l'objet graphique qui le représente ou la nécessité de sortir d'une perception visuelle « spontanée » et des représentations prototypiques.

Il devra expliciter des techniques instrumentées de reconnaissance de droites parallèles ou non parallèles.

Il devra faire entrer et avancer les élèves dans leurs propositions de classement de couples de droites, gérer la mise en commun en exploitant les productions des élèves pour faire émerger le savoir visé.

Nous relevons finalement une vigilance nécessaire de la part de l'enseignant lors de son utilisation du manuel *MHM* sur trois points : la validité mathématique des classements de couples de droites, la prise en compte de l'existence et de la mise en lien de différentes significations de la relation de parallélisme, l'exposition de techniques de reconnaissance de cette relation. Nous étudions dans ce qui suit la manière dont ces points de vigilance sont pris en compte dans la séance menée par monsieur C.

ANALYSE A POSTERIORI DE LA SEANCE D'INTRODUCTION DU PARALLELISME

La présentation rapide du déroulement de la séance est suivie par une explicitation des savoirs en circulation. Puis nous présentons les adaptations réalisées par l'enseignant.

1. Déroulement de la séance

Après avoir donné la consigne et fait distribuer le matériel, l'enseignant propose l'activité de classement de droites en binômes. Durant la phase de recherche, il passe auprès de binômes d'élèves et les questionne sur leur choix de regroupement, leur demandant pourquoi ils ont mis tel et tel couples ensemble ou pas.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Tous les élèves prennent appui sur leur perception visuelle : l'enseignant n'a pas spécifié l'utilisation d'instruments – le GdE n'en fait pas non plus mention – et aucun élève n'en prend l'initiative. L'enseignant utilise l'équerre seulement lors de la correction au tableau pour rappeler à la classe ce que signifie « droites perpendiculaires ».

Un binôme d'élèves s'écarte de la tâche attendue de classement, à l'insu de l'enseignant, en cherchant à reconstituer la feuille A4 avec les neuf étiquettes reçues. D'autres commencent par appairer les couples de droites. L'enseignant intervient pour réguler en demandant à la classe ce que signifie « les trier ou les classer » et valide la réponse « les mettre par famille » immédiatement donnée par un élève. La contrainte d'obtention de « familles disjointes » n'est pas évoquée par l'enseignant, tout comme elle n'a pas été prise en compte dans le GdE avec les « trois possibilités » attendues. L'enseignant réalise ensuite une mise en commun, suivie d'une lecture commentée de la leçon. Le déroulement est ainsi conforme à ce que prévoit le GdE, excepté l'absence de synthèse pour clore la mise en commun.

2. Savoirs en circulation lors de l'activité introductive de la notion de parallélisme

Nous analysons à présent les premières appréhensions des élèves de la notion de parallélisme à partir des interactions successives de l'enseignant avec trois binômes d'élèves sur leur classement pendant la phase de recherche : Léo et Louna, Nestor et Élina, Ralph et Erwin⁴.

Léo regroupe les couples de droites en se référant à leur direction. Il l'exprime dans un discours accompagné de gestes, à deux reprises. Tout d'abord, en réponse à l'enseignant (« Pourquoi tu as mis ces deux-là ensemble ? », 9'44) qui pointe l'appariement des couples 8 et 4), il fait explicitement abstraction de la longueur des traits et explique la ressemblance des couples par le fait qu'« ils ont deux traits ensemble », en pointant à chaque fois les deux traits en question d'un geste déictique analogue avec le pouce et le majeur (figure 4). Les appariements qu'il a réalisés, 8-4 d'un côté et 3-1 de l'autre, peuvent être liés à l'orientation des traits sur le support, les couples présentant le même type d'obliques.

9'48 - Léo			
Ben que en fait, ils ont deux traits	même s'ils ne sont pas de la même longueur	ben ils ont quand même deux traits ensemble !	Eux-aussi !

Figure 4. – Tableau sémiotique, intervention 9'48

Ensuite, suite au regroupement des couples 8-4 et 3-1 réalisé par Louna, Léo précise que les couples « ont tous des traits droits » (10'20, figure 5).

⁴ Tous les prénoms ont été modifiés.

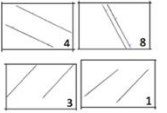
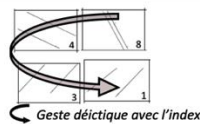

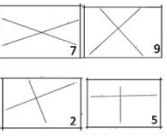
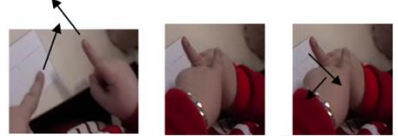
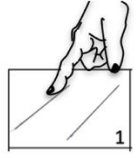
10'18 - Prof		10'20 - Léo	
Alors pourquoi vous mettez	celles-là ensemble ?	Parce qu'ils ont tous des traits droits	
			<i>Léo fait deux fois cette suite de gestes avec ses mains</i>
10'23 - Léo		10'24 - Louna	
alors que eux, ils sont en	
		Nan mais lui, il a pas un trait droit !	
			
<i>Léo place ses mains au-dessus de 7, 8, 2, 5.</i>	<i>Approche ses index</i> <i>Index croisés</i> <i>Éloigne les index</i> <i>Il fait deux fois cette suite gestuelle avec ses index.</i>		

Figure 5. – Tableau sémiotique, interventions 10'18 à 10'24

La séquence de gestes qui accompagne ces propos (doigts qui se déplient droit devant) et la mise en opposition qu'il fait avec les couples 7-9-2-5 de façon gestuelle (déplacement de ses index jusqu'à former une croix) montrent une prise en compte corporelle et dynamique de la direction des droites. Léo n'a pas encore de mots pour la formuler. Louna, qui conteste l'expression de « trait droit » formulée par Léo, en l'interprétant probablement dans son sens spatial de « trait non penché » (10'24, figure 6), va apporter le terme de « croix » en proposant de mettre ensemble 7-9-2-5 et 6 : « *Ouais mais dans ce cas-là eux aussi peuvent être ensemble, comme là y'a la croix* » (Louna, 10'45).

Nestor et Élina ont réparti les neuf couples de droites de la même façon que Léo et Louna en se référant pour leur part à la signification du parallélisme liée à la notion d'écart constant. Nestor explique en effet à l'enseignant que chacun des couples (1-3-4-8) ont « deux droites qui sont séparées par un espace », espace qu'il matérialise avec sa main par l'écartement pouce-index, alors que les autres couples de droites « se croisent ».

Ralph et Erwin ont réalisé trois familles. Ralph utilise des termes géométriques pour les qualifier : les droites parallèles (3-4-8), les perpendiculaires (2-5-9) et « celles qui ont rien de particulier » (1-6-7). À l'enseignant qui lui demande ce que veut dire droites parallèles, il répond que « c'est une droite et que si on la continue elles se couperont jamais ». Ceci montre qu'il a déjà rencontré la notion de parallélisme et qu'il se réfère à la relation d'incidence.

3. Adaptations réalisées par l'enseignant

Les adaptations réalisées par l'enseignant portent sur les supports de travail ou mettent en jeu une palette de gestes professionnels non explicités dans le GdE.

Concernant les supports de travail, l'enseignant prend tout d'abord l'initiative de donner les neuf couples de droites (figure 2) sur des feuilles séparées pour permettre aux élèves de regrouper matériellement ces couples selon leur critère de classement. Conformément au support d'origine, ces couples ne sont pas identifiés par un numéro. Pour la mise en commun l'enseignant décide de les vidéo-projeter. Il utilise pour cela le fichier original présentant les couples de droites, auxquels il a ajouté des numéros (comme présenté sur la figure 2). Cette adaptation semble faciliter la communication pour désigner les couples de droites présentés au tableau. En revanche, l'absence de ces désignations sur les feuilles séparées des élèves n'en permet pas une orientation commune, ce qui rend leur repérage et leur mise en lien avec les couples affichés au tableau, plus difficiles pour les élèves.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Lors du lancement de l'activité, l'enseignant clarifie collectivement la tâche en faisant décrire ce qu'il y a sur les feuilles en termes géométriques (des droites et non pas des segments ni des traits). Cela permet également de situer l'activité dans le contexte géométrique. Durant la recherche, il régule, identifie les différents classements et repère ceux sur lesquels il va s'appuyer lors de la mise en commun. Il contribue à l'échange entre élèves et aide au développement de l'argumentation en demandant la justification de leurs propositions. Il exige aussi l'emploi d'un lexique géométrique (« droite » plutôt que « trait », « se coupent » plutôt que « se croisent ») et reprend les élèves le cas échéant – quelquefois au risque d'interrompre l'expression du raisonnement. Pendant la mise en commun l'enseignant choisit de présenter deux propositions de classement (celle de Nestor, puis celle de Ralph), il valide la seconde mais reste neutre face à la première. Il ne porte aucun intérêt aux autres productions et ne garde d'ailleurs aucune trace de l'activité des binômes (il fait ramasser toutes les feuilles à la fin de la séance). Il maintient donc l'incertitude concernant la validité des propositions. En revanche il fait justifier chaque regroupement, revient sur le vocabulaire géométrique (« se coupent », « droites », « perpendiculaires »). Il expose des connaissances géométriques (notion de droite, droites perpendiculaires, angle droit, droites parallèles), explicite le lien entre perpendicularité et angle droit. Il prend notamment en charge l'explicitation de la signification « ne se coupent jamais » : la définition proposée dans la synthèse orale peut en effet être source d'obstacle (« ne se coupent jamais » ou « ne se coupent pas dans l'espace de la feuille »), les couples de droites étant présentés dans des zones du plan bien délimitées par un cadre. Il présente la technique de vérification de non-parallélisme par prolongement, mais n'explicite pas de technique instrumentée de vérification de la relation. Il ne réalise pas de synthèse à l'issue de la mise en commun mais fait lire la trace écrite par des élèves en commentant le codage et le texte et en ponctuant ses explications par des gestes, comme illustré dans l'épisode suivant (30'25) puis figure 6 :

Élève [lit la trace écrite] : Une droite est un ensemble de points alignés. On la note (D) ou (AB).

Enseignant : Très bien, donc, [il suit les mots avec le doigt] une droite est une suite de points alignés, c'est un ensemble infini de points alignés [il pointe successivement différents points de la droite représentée, en les touchant avec son doigt], qui ne s'arrête jamais, qui est donc infini. On la note (D) ; on peut lui donner une lettre, un nom [il désigne la lettre D] ou alors, si j'ai deux points A B qui sont sur la droite [il désigne ces points sur le dessin], je peux aussi l'appeler la droite (AB), le tout, regardez, entre/ des parenthèses, d'accord ? Ca, c'est le code /que l'on utilise pour nommer une droite. (...).


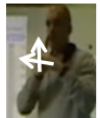
32'40- Prof	32'43 – Élève	32'45- Prof	32'47-Prof
Donc pour être perpendiculaires, il faut que des droites	soient d'abord/	se coupent/ faut qu'elles soient sécantes...	...et en plus qu'elles forment un angle droit
	se coupent		
			

Figure 6. – Tableau sémiotique, interventions 32'40 à 33'

Il fait également relever et colorier les « mots importants » et met en relation chaque mot avec sa définition (« sécantes » et « se coupent » ; « perpendiculaires » et « se coupent en formant un angle droit » ; « parallèles », « ne se coupent jamais » et « même écartement »). Il apporte des connaissances géométriques complémentaires essentielles : il ajoute le qualificatif « infinie » dans la définition d'une droite ; il prend en charge l'explicitation de la notion de distance d'un point à une droite ou entre deux droites appelée « écartement » dans le manuel ; il explicite les critères emboîtés (« sécantes et en plus forment un angle droit »).

CONCLUSION

Nous avons relevé de nombreuses adaptations qui témoignent à la fois des connaissances mathématiques et de l'expertise de l'enseignant dans la gestion de la mise en œuvre d'une situation d'enseignement, telle la prise en compte des conditions matérielles de gestion de classe, l'activation d'une circulation de connaissances géométriques lors des interactions entre enseignant et élèves ou encore la manifestation de gestes professionnels qui engagent les élèves dans les apprentissages. L'enseignant assure en effet la dévolution de la situation de découverte, il est attentif à faire avancer les élèves dans la phase de recherche, il fait verbaliser leurs choix, il expose les connaissances lors de la mise en commun. Ainsi, tout ce qui était passé sous silence dans le GdE a bien été pris en charge par l'enseignant, que nous avons choisi comme expérimenté. On peut maintenant se demander ce qu'il en serait pour un enseignant débutant. L'expertise de l'enseignant n'a, en revanche, pas permis de compenser les manques de *qualité didactique* soulevés dans notre analyse du manuel *MHM*. Le problème de *cohérence dans l'enseignement des savoirs* que nous avons relevé dans le manuel n'a pas été résolu : deux significations du parallélisme ont été abordées lors de la lecture de la leçon (incidence, écart constant) alors qu'une seule (incidence) a été mise en évidence dans la mise en commun. Des problèmes de *pertinence de l'enseignement* des savoirs et des techniques sont aussi apparus. Concernant les savoirs, les significations de la relation de parallélisme non mentionnées dans le GdE, mais en circulation dans des propositions de classement des couples de droites des élèves (même direction, écart constant), n'ont été ni exploitées par l'enseignant, ni mises en lien avec la seule signification explicitée (incidence). Concernant les techniques, aucun enclenchement du processus d'appropriation des instruments n'a été réalisé : aucune technique instrumentée de reconnaissance de la relation de parallélisme n'a été abordée. Enfin le problème de *validité mathématique* du classement indiqué dans le GdE n'a pas été perçu par l'enseignant, qui a clôt la mise en commun par la répartition mathématiquement invalide des neuf couples de droites en trois familles disjointes : les couples de droites perpendiculaires, les couples de droites sécantes et les couples de droites parallèles.

Ainsi les actions de l'enseignant, pourtant expert, ne pallient pas les insuffisances de la qualité didactique du manuel mises à jour par les chercheuses, ce qui révèle, à notre sens, le fort impact du manuel sur la pratique de l'enseignant. Mais d'autres investigations restent à mener pour confirmer cette analyse. Étudier l'impact de l'usage du manuel sur les apprentissages des élèves est une autre piste de recherche.

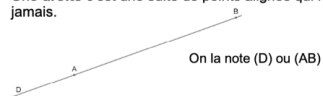
RÉFÉRENCES

- ARZARELLO F. (2006). Semiosis as multimodal process, Dans L. Radford et B. D'Amore (Eds) Sémiotique, culture et pensée mathématique, *Número especial, Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-299.
- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BUTLEN D., MANGIANTE-ORSOLA C., & MASSELOT, P. (2017). Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des professeurs des écoles en mathématiques. *Recherches en didactiques*, 24, 25-40.
- CHEVALLARD Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(3), 221-266.
- GUILLE-BIEL WINDER C., & PETITFOUR E. (2018). L'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme dans le manuel Méthode de Singapour. *Grand N*, 102, 5-40.
- GUILLE-BIEL WINDER C., & PETITFOUR E. (2021a). Contribution à l'analyse didactique de manuels scolaires numériques du premier degré : une étude de cas. *Education et didactique*, 15(2), 49-76.
- GUILLE-BIEL WINDER C., & PETITFOUR E. (2021b). Analyse de l'initiation au processus d'instrumentation dans les manuels scolaires utilisant le numérique. *Actes de la 20ème école d'été de didactique des mathématiques ARDM*. La pensée sauvage éditions.
- GUILLE-BIEL WINDER C., & PETITFOUR E. (à paraître). Outil d'analyse de l'enseignement de la géométrie dans les manuels scolaires. Dans C. Guille-Biel Winder et T. Assude (eds.) *Articulations entre espace sensible, espace graphique et espace géométrique. Ressources, pratiques et formation*. London : Iste Editions.
- HOUEMENT C., & PETITFOUR E. (2017). L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 23, 9-40.

ANNEXE 1

Leçon 12 : Les droites

Une **droite** c'est une suite de points alignés qui ne s'arrête jamais.



⇒ Quand deux droites se coupent, on dit qu'elles sont **sécantes**.



⇒ Quand deux droites se coupent en faisant un angle droit, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.



On utilise l'équerre pour vérifier si deux droites sont perpendiculaires.

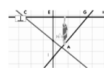
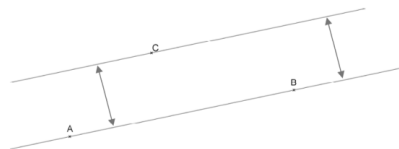


<https://huit.re/paralleles1>



<https://huit.re/paralleles2>

⇒ Quand deux droites gardent toujours le même écartement, qu'elles ne se coupent jamais, on dit qu'elles sont **parallèles**.



<https://huit.re/perpendiculaires1>



<https://huit.re/perpendiculaires2>

FORMER LES PROFESSEURS DES ECOLES AU REGARD DIDACTIQUE EN MATHÉMATIQUES : ÉTUDE D'UNE DYNAMIQUE DE PROBLÈMES

Magali Hersant*

RÉSUMÉ

Nous présentons un dispositif de formation au regard didactique en mathématiques destiné à des professeurs des écoles, ainsi que ses fondements. Puis, afin d'envisager des effets de ce dispositif sur la formation des PE, nous présentons l'analyse du parcours d'une stagiaire, menée dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (Fabre, Orange, 1997). À partir de données recueillies dans la classe de la professeure des écoles stagiaire (PES), lors des séminaires et en lien avec son travail de mémoire, nous nous attachons à repérer les grands problèmes professionnels relatifs à l'enseignement des mathématiques que la stagiaire construit au cours de l'année et la façon dont elle y apporte des réponses, en appui ou pas sur la formation proposée dans le séminaire. Nous retraçons ainsi la dynamique de ses problèmes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques.

Mots-clefs : formation des enseignants, problématisation, pratiques enseignantes

ABSTRACT

We present a training device for the didactic view in mathematics intended for primary teachers' trainees and its foundations. Then, in order to consider the effects of this device on the training of PE, we present the analysis of the development of a trainee, conducted within the framework of learning by problematization (Fabre, Orange, 1997). Based on data collected in the class of the trainee teacher, during the seminars and in connection with her dissertation, we set out to identify the major professional problems relating to the teaching of mathematics that the trainee constructed over her development during the year and the way in which she responded to them, whether or not with the support of the training offered in the seminar. In this way, we recount the dynamics of her problems relating to the teaching and learning of mathematics.

Keywords: primary teachers' trainee, problematization, teachers practices

INTRODUCTION

Ce séminaire rend compte d'une recherche en cours, initiée au sein d'un travail pluridisciplinaire « former au regard didactique », animé par S. Doussot dans le cadre de la recherche « Débuter : quels savoirs ? Quelles activités ? Quelles pratiques pour quelles formations ? » financée par l'ÉSPÉ des Pays de la Loire. Il fait écho à celui de S. Grau dans ces mêmes actes ; elle participe aussi en effet à cette recherche.

En tant que formatrice, nous constatons les effets contrastés de la formation sur les futurs PE c'est pourquoi nous souhaitons contribuer à une meilleure compréhension des conditions de possibilités de leur formation à l'enseignement des mathématiques dans le but de faire évoluer la formation des professeurs des écoles (PE) en mathématiques et, ainsi, les pratiques des PE en mathématiques. La didactique des mathématiques dispose de résultats sur les pratiques des jeunes enseignants et de quelques travaux sur les effets de formations mais ils sont encore peu nombreux (Butlen & al., 2003, 2011, 2019 par exemple). Nous savons en particulier que les choix des débutants ne tiennent pas toujours compte du didactique et relèvent souvent du pédagogique et de la reproduction d'habitudes non questionnées de la profession, de doxa (Hersant, 2020). Nous pensons que la non-prise-en-compte du didactique chez les PE joue un rôle dans la création d'inégalités et de malentendus scolaires (Rochex & Crinon, 2011). Il s'agit donc d'identifier des conditions de possibilité d'appropriation par les PE, en formation initiale, de savoirs du didactique, c'est-à-dire de savoirs relatifs aux

* INSPÉ, Nantes Université, CREN

conditions didactiques à mettre en œuvre pour permettre l'apprentissage de tous les élèves, en mathématiques.

Avec la masterisation de la formation, la recherche a pris une place croissante dans la formation initiale des enseignants. L'acculturation à la didactique des mathématiques des futurs enseignants par la recherche – qui implique une dimension pratique de la didactique et une dimension d'acculturation aux concepts et aux méthodes – a offert de nouvelles possibilités de formation. Nous avons ainsi conçu en 2016 un dispositif de formation « former au regard didactique » fortement adossé à la recherche en didactique des mathématiques pour les étudiants de master 2. Ce dispositif propose des outils issus de la recherche et vise à permettre aux PE de développer un regard didactique sur leur activité de préparation de séances, sur leur activité et celle des élèves au cours de la séance puis en aval de la séance. Il s'agit pour nous de contribuer aux travaux sur la formation des enseignants en étudiant les effets possibles de ce dispositif et en identifiant à quelles conditions ce dispositif outille effectivement les PE débutants pour l'enseignement des mathématiques.

Après avoir présenté le dispositif de formation et les hypothèses qui le sous-tendent, nous précisons notre cadre théorique et notre méthodologie puis détaillons la façon dont le regard didactique de Françoise (le prénom a été changé pour préserver l'anonymat), stagiaire dans une classe de Moyenne - Grande section de maternelle, évolue au cours de son année de M2. Pour cela, nous reconstruisons la dynamique des problèmes relatifs à l'enseignement des mathématiques qu'elle construit.

LE DISPOSITIF DE FORMATION

Le dispositif de formation proposé aux étudiants résulte de conditions posées par l'institution (ministère, inspection et ÉSPÉ), de notre adhésion à certaines hypothèses ou résultats concernant les pratiques des débutants, repris de travaux didactiques antérieurs et, à l'intérieur de cet espace, de choix de la formatrice.

1. Contexte institutionnel

La formation des PE a subi des modifications de différentes natures depuis une vingtaine d'années, avec des cadrages nationaux de plus en plus précis, en particulier depuis le passage à la masterisation en 2009. Au cours de ces réformes la place de la formation « à et par la recherche » a évolué. Il en est de même des exigences et objectifs assignés au mémoire dans cette formation : d'un mémoire professionnel rédigé du temps des IUFM à un mémoire de master attestant d'une initiation à la recherche en lien avec des préoccupations professionnelles dans les INSPÉ.

À l'intérieur de ces contraintes, chaque institut de formation a fait des choix et dégagé des marges de manœuvre. À l'ESPÉ des Pays de la Loire, en Master 2 MEEF 1er degré, la mise en place d'un mémoire « recherche » a conduit à l'instauration de « séminaires de recherche » étroitement reliés au stage des étudiants. En effet, le formateur responsable du séminaire est aussi le directeur de mémoire et le tuteur du stage du PES (le cas échéant). En tant que tuteur, il est chargé d'effectuer deux visites annuelles suivies d'entretiens. Les séminaires regroupent un petit nombre d'étudiants (10 à 15).

Ainsi, nous sommes tutrice ÉSPÉ de l'ensemble des PES dont les trajectoires sont étudiées dans notre recherche. Chacune de nos visites consiste en l'observation de séances de mathématiques suivie d'un entretien qui porte sur les séances observées. Les PES effectuant un stage en responsabilité, nous n'intervenons pas dans le choix des situations qu'ils réalisent en classe. En revanche, le choix de ces situations peut être contraint ou orienté par l'enseignant titulaire de la classe ou l'équipe enseignante de l'école (organisation spiralaire

des apprentissages dont il est difficile de s'extraire, contraintes liées à manuel utilisé par l'équipe et le matériel disponible, conseils du binôme et de l'équipe enseignante...). Nous n'intervenons pas non plus dans les enseignements de « mathématiques » dont ils bénéficient par ailleurs dans le cadre la formation.

2. Hypothèses et résultats qui sous-tendent le dispositif

C'est à l'intérieur de ce cadre institutionnel que nous avons conçu notre dispositif de formation, en appui sur des grandes hypothèses relatives aux pratiques enseignantes, ainsi que sur des résultats de travaux sur les pratiques. En particulier, nous considérons que :

- les pratiques sont des mises en acte cohérentes des conceptions des stagiaires de la discipline, de l'école, de l'apprentissage et de l'élève (Butlen & al., 2012) ;
- ce sont les connaissances qui font obstacle à la construction de connaissances (Bachelard, 1938) ;
- il y a une tendance à mettre les élèves « en activité » sans questionner suffisamment la nature de cette activité, ses fondements didactiques (Laparra, Margolinas, 2011b) ;
- les savoirs ont une certaine « transparence » dans la classe mathématique (Laparra, Margolinas, 2011a), ils ont un caractère « incident » (Coulange, 2011), c'est-à-dire accessoire, et les enseignants n'aident pas les élèves à identifier les enjeux d'enseignement (Butlen et al., 2016).

D'autre part, spécifiquement pour les débutants, nous considérons que

- la fiche de préparation est envisagée comme une finalité (« faire sa fiche de prep ») et non comme un processus de préparation de la séance qui permet, notamment, de questionner les enjeux d'apprentissage et d'anticiper l'activité des élèves dans la situation choisie (Hersant, 2020).

Ces différents résultats plaident en la faveur d'une formation spécifique pour développer chez les futurs PE un regard didactique qui, d'une part, dépasse le pédagogique (par exemple, structurer une séance en phases « classiques » sans penser le rôle de ces phases dans les apprentissages des élèves et leur pertinence au regard du savoir visé) et, d'autre part, met en dialogue le savoir et les apprentissages visés chez les élèves avec les choix de l'enseignant (choix de la situation, choix d'interventions auprès des élèves au cours du déroulement...). Il s'agit donc de permettre aux PE de questionner les savoirs en jeu et d'anticiper l'activité mathématique de leurs élèves au regard des conditions qu'ils proposent pour leur permettre de construire des situations didactiquement pertinentes.

3. Le dispositif

Pour développer chez les futurs PE un regard didactique sur l'activité de leurs élèves et sur la préparation de séances, nous avons mis en place un séminaire dans lequel les étudiants analysent, collectivement, des situations qu'ils ont réalisées dans leurs classes. Excepté pour le premier séminaire, les analyses portent ainsi sur des séances préparées et réalisées par un stagiaire dans sa classe. Elles s'appuient sur des éléments objectifs : la fiche de préparation réalisée, des extraits vidéos et des productions d'élèves recueillis par le stagiaire ou la formatrice lors d'une visite.

Cette analyse est outillée par une grille (voir annexe) adossée explicitement à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et à la dialectique outil-objet (Douady, 1986) et introduite par la formatrice en début d'année. Cette grille affirme d'emblée que l'activité des élèves est étroitement liée à celle de l'enseignant et les questions guident une analyse en trois temps : « analyse préalable », « analyse a priori », « analyse a posteriori ». Cette désignation des trois temps de l'analyse est reprise du vocabulaire utilisé dans le cadre de la conception

d'ingénieries didactiques (Artigue, 1990) mais l'objet de chacune des analyses en diffère légèrement.

Comme indiqué précédemment, la formatrice n'intervient pas dans le choix de la situation. La situation proposée en classe est, le plus souvent construite à partir d'une ressource (manuel, site internet, situation fournie par un collègue...). En séminaire, l'analyse préalable porte spécifiquement sur la situation proposée par la ressource et son adéquation avec les savoirs que le PE souhaite que ses élèves apprennent : il s'agit d'interroger le savoir visé et de questionner la pertinence didactique de la situation au regard du savoir visé et des connaissances des élèves, afin d'envisager d'éventuelles modifications de la ressource. Ce premier temps d'analyse doit amener (et habituer) le futur PE, d'une part, à se questionner sur le savoir en jeu et à expliciter les raisons pour lesquelles il choisit une situation, et d'autre part, à expliciter les modifications effectuées sur la situation de la ressource et les raisons. Ce temps d'analyse nous est apparu nécessaire pour que les futurs PE prennent l'habitude de questionner toutes les ressources et pour qu'ils explicitent les modifications qu'ils effectuent sur la situation et les raisons de ces modifications. En effet, pour certains d'entre eux, le fait même que la situation soit extraite d'un manuel publié constitue un gage de pertinence. Et, par ailleurs, ils ont tendance à modifier les situations des ressources sans suffisamment envisager les conséquences de ces modifications. En d'autres termes, il s'agit de leur faire prendre conscience qu'ils font des choix et de leur en faire identifier les raisons.

L'analyse a priori – au sens de Perrin-Glorian et Hersant (2003) – est réalisée à partir de la fiche de préparation du stagiaire, elle vise essentiellement à envisager l'activité possible de(s) élève(s) et à s'assurer que la situation permet bien à chaque élève de rencontrer le problème visé de façon à lui donner l'opportunité de construire le savoir visé. Cette analyse permet d'anticiper aussi d'éventuelles interventions de l'enseignant.

L'analyse a posteriori est réalisée à partir d'un extrait vidéo de la séance, choisi par la formatrice, et des productions écrites d'élèves. Elle vise à confronter le réalisé et l'attendu, à questionner l'origine des écarts. Elle permet d'interroger l'effet des interventions de l'enseignant sur l'activité mathématique des élèves et leur participation au processus d'institutionnalisation.

Dans le séminaire, les modalités de travail sont les suivantes. Le stagiaire indique son objectif d'apprentissage et la ressource utilisée ; le collectif effectue ensuite l'analyse préalable. Puis l'étudiant présente la situation choisie à partir de sa fiche de préparation, le collectif effectue l'analyse a priori et anticipe ainsi l'activité possible des élèves ainsi que les possibilités d'apprentissage associées. Ensuite, le collectif visionne l'extrait vidéo et confronte avec les prévisions issues de l'analyse a priori. Ces éléments permettent de conclure sur les conditions pertinentes pour permettre les apprentissages des élèves et d'envisager d'éventuelles modifications de la situation.

Notons que le mémoire porte sur une thématique (la construction du nombre, la mise en place de situations-problèmes, etc) et est constitué d'analyse de situations de classe en lien avec cette thématique. Il est explicitement attendu que les analyses effectuées reprennent les éléments d'une analyse outillée par la grille.

CADRE ET MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Cadre de l'analyse

Nous inscrivons notre recherche dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP dans la suite du texte) (Fabre & Orange, 1997 ; Hersant, 2021). Nous faisons l'hypothèse que le travail effectué dans le séminaire, les visites (avec entretiens) et le travail de mémoire sont

sources de problématisation chez le PE et contribuent à la dynamique des problèmes qu'il se pose au cours de l'année. Nous supposons aussi que les problèmes relatifs à l'enseignement des mathématiques que chaque stagiaire de notre séminaire se pose évoluent au cours de l'année en lien avec le séminaire et les séances qu'il met en place dans sa classe, autrement dit qu'il y a une dynamique de problématisation. On peut penser que cette dynamique de problématisation se réalise en lien avec les réalisations en classe et l'ensemble de la formation qui sont source d'événements de problématisation (Doussot, Hersant & Orange-Ravachol, 2013 ; Hersant, 2022) pour les stagiaires mais nous n'avons accès qu'à une partie de ces « expériences » du PES.

2. Éléments de méthodologie

Nous cherchons à rendre compte du développement (éventuel) du regard didactique des stagiaires au cours de leur seconde année de formation et à identifier des conditions favorables à la construction d'un regard didactique. Pour cela, nous reconstituons la dynamique des problèmes relatifs à l'enseignement des mathématiques qu'ils se posent et la façon dont ils y répondent.

Nous parlons de « reconstruction » d'une part, car il s'agit d'une construction par la chercheuse de l'activité des stagiaires à partir des différentes traces recueillies (audio des séminaires, échanges mail, documents de préparation de séances, visites, entretiens de visite, écrits mémoire, soutenance mémoire) et, d'autre part, car ces problèmes peuvent être plus ou moins explicites pour le stagiaire. Toutefois le regard réflexif qu'est invité à prendre le stagiaire tout au long de l'année, et en particulier lors des entretiens de visite et au moment de la rédaction de son mémoire, sont susceptibles d'en favoriser l'identification.

À partir des différents éléments dont nous disposons nous cherchons d'abord à identifier les grands problèmes que le stagiaire se pose concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ainsi que les données et les conditions qu'il mobilise pour y répondre, en référence à un cadre qui délimite des façons d'envisager le problème et ce qui sera mis en ou hors question par le stagiaire. Ainsi, par exemple, la question de la mise en activité des élèves peut se penser dans un cadre didactique (on pensera alors en termes de dévolution d'un problème) ou non didactique (on pensera alors en termes d'enrôlement ou de motivation). De la même façon la question de la résolution de problème dans un cadre didactique sera envisagée en relation avec les connaissances construites au cours de la résolution alors que dans un cadre non didactique elle pourra être finalisée uniquement par l'obtention de la solution ou la réussite, voire la simple mise en activité des élèves.

L'enjeu est alors de reconstituer la dynamique de problèmes que chaque PE se pose au cours de l'année et la façon dont il y répond pour rendre compte du développement de son regard didactique, identifier les liens possibles avec le dispositif de formation « à et par la recherche » et mettre à jour des conditions favorables à la construction d'un regard didactique.

ÉTUDE DU CAS DE FRANÇOISE

Nous proposons ici de rendre compte de la dynamique des problèmes relatifs à l'enseignement des mathématiques pour Françoise.

1. Précisions sur le parcours de la stagiaire et ses préoccupations initiales

Françoise possède une licence de mathématiques pures et est en reconversion professionnelle. Ayant songé à l'issue de sa licence à devenir enseignante de mathématiques dans le secondaire, elle développe ensuite un intérêt pour le premier degré qui l'amène à passer le

CRPE après avoir exercé un autre métier, dans un domaine différent de celui de l'éducation, pendant plusieurs années.

Françoise est stagiaire à mi-temps dans une classe de MS – GS. Elle a choisi d'assister à notre séminaire. Lors de la première séance, elle indique que la thématique de recherche sur laquelle elle souhaite travailler pour son mémoire est l'autonomie des élèves dans leurs apprentissages et la posture de l'enseignante.

Ces éléments de parcours mettent en évidence que Françoise aime les mathématiques et ne présente pas de difficulté scolaire dans cette discipline. Par ailleurs, bien qu'elle ait choisi notre séminaire, les préoccupations initiales de Françoise ne sont pas formulées de façon spécifique à l'enseignement des mathématiques, mais plutôt comme des questions pédagogiques classiques. Cette première formulation constitue pour nous son premier problème que nous noterons P1.

2. Évolution des problèmes que se pose Françoise au cours de l'année

Au cours du premier séminaire la grille est présentée. Elle est ensuite utilisée pour analyser, selon les trois temps décrits précédemment, un atelier réalisé dans une classe de PS qui présente des limites en particulier du point de vue de la validation. Par ailleurs, la consigne porte à la fois sur la couleur et sur le nombre, ce qui n'aide pas à savoir quel savoir est visé. S'agissant du premier séminaire, la vidéo n'est pas recueillie dans la classe d'un des étudiants du groupe. Le groupe est ensuite invité à effectuer l'analyse a priori d'une ressource qui présente de bonnes potentialités adidactiques (Perrin-Glorian et Hersant, 2003). Ces deux situations concernent l'apprentissage du nombre en PS et permettent, en particulier, un travail explicite sur la validation, au sens de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) : on parle de validation quand la situation renvoie à l'élève des informations qu'il peut comprendre et qui lui permettent de savoir si la réponse qu'il a proposée est correcte ou pas. Les possibilités de validation sont souvent associées à l'explicitation de critères de réussite dans la consigne.

Pour le second séminaire, Françoise apporte des productions de ses élèves (mais pas de vidéo) issues d'un atelier. Elle soumet ces éléments à l'analyse car elle estime que sa préparation était insuffisante. Françoise a demandé à ses élèves de découper des rectangles dessinés sur une feuille puis de les « classer du plus grand au plus petit » et de les coller (dans l'ordre). Les élèves n'ont pas compris le sens du mot « classer » pour la plupart et se sont contentés de coller les rectangles, les uns à côté des autres sans vraiment les comparer du point de vue de leur « hauteur » comme l'attendait Françoise. Le travail réalisé en séminaire permet d'interroger les savoirs visés (que signifie « classer des rectangles du petit au plus grand »? que peuvent apprendre les élèves avec cette situation ?), de questionner le fait que la situation corresponde à un problème pour les élèves, de revenir sur l'importance de la validation et la formulation de critères de réussite dans la consigne et de poser aussi la nécessité d'avoir un milieu contraignant (Hersant, 2010), c'est-à-dire un milieu qui contraint l'élève à construire / utiliser les savoirs visés. En effet, dans cette situation, l'élève qui a collé les rectangles les uns à côté des autres peut avoir l'impression d'avoir répondu à la consigne sans qu'il ait pour autant travaillé sur la comparaison de longueurs.

Le troisième séminaire permet de revenir encore sur ces éléments, avec l'analyse d'une situation réalisée dans une classe de PS et dans laquelle le savoir en jeu n'est pas clair, la validation n'est pas possible et les élèves jouent rapidement avec le matériel mis à disposition.

La première visite de stage se situe à l'issue de ces 3 séminaires, la séance observée porte sur la construction du nombre. Les échanges que nous avons avec Françoise en amont de cette visite (envoi de sa fiche de préparation et précision sur ses choix) montrent que son questionnement évolue et commence à s'inscrire dans un cadre didactique : il s'agit alors pour

elle de proposer à ses élèves des situations « autovalidantes » comme elle le mentionne dans un mail (problème 2). Sa fiche de préparation et la présentation qu'elle fait de la situation choisie (mail qui accompagne l'envoi de la fiche de préparation) montrent que, relativement, à ce problème, certaines conditions pour le choix d'une situation dans une ressource se mettent en place : la consigne donne des critères de réussite, la situation permet la validation, le matériel proposé contraint l'usage / la production des connaissances visées, chaque élève doit pouvoir avoir une activité mathématique, l'enseignant ne donne pas la procédure pour réussir. Françoise a choisi une situation qu'elle juge pertinente dans une ressource. Ainsi des éléments issus des premiers séminaires, en lien direct avec la grille (voir annexe), semblent fournir à Françoise des données et des conditions pour élaborer une solution à son nouveau problème.

La réalisation de la situation dans la classe ne se passe pas comme Françoise le prévoyait ; il s'avère en effet que pour produire la bonne solution les élèves contournent certaines contraintes posées dans la consigne, ce qu'elle résume en disant qu'ils « trichent ». Cela génère chez Françoise un nouveau problème (problème 3) : comment faire pour que les élèves fassent effectivement des mathématiques, « ne trichent pas » ? La réalisation de cette séance et l'analyse qui en est faite lors de l'entretien montrent que, pour construire ce nouveau problème, Françoise retient en particulier de cette réalisation certains éléments empiriques (données du problème dans le CAP). Elle accède alors à trois nouvelles données du problème : aimer les mathématiques ne suffit pas pour les enseigner et les faire apprendre ; le goût de la recherche d'un problème n'est pas « inné » ; l'existence de potentialités adidactiques ne garantit pas que les élèves vont accepter leur réponse comme erronée. Cela la conduit à identifier certaines conditions pour que les élèves fassent des mathématiques, en lien avec le travail réalisé dans le séminaire et pour son bilan intermédiaire de janvier : il s'agit avant tout de « se poser des questions sur ce qui ne fonctionne pas » écrit-elle ; ensuite il faut que l'enseignant modère l'enjeu de réussite pour les élèves au profit de l'enjeu d'apprentissage (il ne s'agit pas de gagner ou de perdre mais d'apprendre) et qu'il soit plus ferme sur le respect des contraintes posées ; enfin, il faut installer une attitude d'élève-chercheur, ce que l'on peut formuler dans les termes de la théorie des situations didactiques comme un entretien de la dévolution et plus largement la mise en place d'un contrat didactique favorable à la recherche.

Dans l'évolution de son questionnement, entre les problèmes 2 et 3 que nous reconstruisons, le cadre reste didactique mais il semble se préciser : dans le problème 2 Françoise est centrée sur les propriétés de la situation, dans le problème 3 elle accorde en plus beaucoup d'importance au rôle de l'enseignant.

Dans la suite de l'année, les séminaires permettent, sur des sujets variés, de mettre en évidence la nécessité de questionner finement les savoirs. Ils amènent aussi à interroger la possibilité de ne mettre en place que des situations-problèmes (Douady, 1986) au regard de la nature des savoirs à enseigner et des contraintes de temps. Le processus d'institutionnalisation est ainsi mis au travail.

De son côté, comme elle le relate dans son mémoire et lors de sa soutenance, Françoise continue de mettre en place des situations dont elle juge qu'elles ont des propriétés didactiques pertinentes mais elle n'est pas satisfaite des apprentissages des élèves. Cela l'amène à formuler un autre problème : comment faire pour que tous les élèves apprennent ? (problème 4). Ce nouveau problème la conduit à interroger les savoirs. Elle identifie alors que, contrairement à ce qu'elle pensait en tant qu'élève qui n'a pas eu de difficulté en mathématiques, « tout s'enseigne », même certains savoirs qui peuvent sembler évidents. C'est-à-dire qu'il ne faut pas supposer que les élèves vont savoir sans qu'on y consacre un temps explicite. Cela la conduit à se forcer à « être au clair » avec les savoirs, à anticiper la façon dont elle va les formuler et les institutionnaliser. Elle porte par ailleurs comme une

condition d'apprentissage la nécessité de tenir compte des connaissances anciennes des élèves et identifie alors mieux le rôle des évaluations diagnostiques. À travers la construction de ce dernier problème, il apparaît que Françoise donne de l'épaisseur au cadre didactique qui organise désormais son activité d'enseignement des mathématiques : ce cadre comprend les propriétés didactiques de la situation, l'enseignant, l'élève et le savoir.

CONCLUSION

Ainsi cette étude de cas, dont nous n'avons présenté que les grands traits, met en évidence la dynamique des problèmes construits par Françoise au cours de l'année et les grandes étapes du développement de son regard didactique : partant d'un problème professionnel non didactique, cette PES construit plusieurs problèmes de l'ordre du didactique, jusqu'à finalement circonscrire la question en prenant en compte à la fois les savoirs, les élèves, le professeur et les propriétés didactiques des situations. Dans les termes du cadre de l'apprentissage par problématisation, nous pouvons dire qu'il y a une évolution du registre explicatif, du cadre, dans lequel la PES construit son questionnement professionnel sur les apprentissages mathématiques des élèves et le rôle de l'enseignant, en lien avec différents événements de problématisation (Doussot, Hersant, Orange-Ravachol, 2013).

L'appropriation, dans le cadre du séminaire, d'outils d'analyses préalables, a priori et a posteriori apparaît comme une condition de la dynamique de problématisation observée dans la mesure où cela permet à Françoise d'identifier des données et des conditions pour la construction de problèmes de plus en plus didactiques et pour envisager des solutions à chacun d'eux. La construction d'un regard didactique nous semble ainsi étroitement lié au développement d'une capacité d'analyse des séances réalisées outillée par la grille. D'autres études de cas, plus fines et sur des PES qui ont un rapport aux mathématiques différent, restent toutefois à mener pour mieux comprendre les conditions et les possibilités du développement de ce regard didactique chez tous les PE.

RÉFÉRENCES

- BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BUTLEN, D., MASSELOT, P., & PEZARD, M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs des écoles débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation. *Recherche et formation*, 44, 45-61.
- BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M., & MASSELOT, P. (2011). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des milieux défavorisés : Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Le travail enseignant au XXIème siècle*, Ifé. <http://www.inrp.fr/archives/colloques/travail-enseignant/contrib/70.htm>
- BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M., & MASSELOT, P. (2016). Apprentissage et inégalités au primaire : Le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire. *Grand N*, 97, 74-77.
- BUTLEN, D., & MASSELOT, P. (2019). Enjeux et modalités de formation pour les professeurs des écoles en didactique des mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(2), 91-106. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00048-8>
- COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. In La construction des inégalités scolaires (J.-Y. Rochex et J. Crinon, p. 33-44). *Presses Universitaires de Rennes*.
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- DOUSSOT, S., HERSANT, M., & ORANGE-RAVACHOL, D. (2013). Événements de problématisation et dynamiques de problématisation. *10è colloque du Réseau Probléma*, Bruxelles.
- FABRE, M., & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- HERSANT, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques*. Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604/document>
- HERSANT, M. (2020). Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : Matérialité des situations et chronologie. *Revue française de pédagogie*, n° 208(3), 17-30.
- HERSANT, M. (2022). *Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques*. In *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. (Doussot S., Hersant M., Lhoste Y., Orange-Ravachol D., p 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- HERSANT, M. (2021). L'usage du CAP en didactique des mathématiques : Quels apports possibles ? In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2020* (A. Chesnais, H. Sabra, p. 202-224).
- LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2011a). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (J.-Y. Rochex et J. Crinon, p. 19-32). Presses Universitaires de Rennes.
- LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2011). Quand les maîtres contribuent à leur insu à renforcer les difficultés des élèves. In *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (PUR, J.-Y. Rochex, J. Crinon PUR, p. 111-131). Presses Universitaires de Rennes.
- PERRIN-GLORIAN, M. J., & HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.
- ROCHEX, J.-Y., CRINON, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2011). Quand les maîtres contribuent à leur insu à renforcer les difficultés des élèves. In *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (PUR, J.-Y. Rochex, J. Crinon PUR, p. 111-131). Presses Universitaires de Rennes.
- PERRIN-GLORIAN, M. J., & HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.
- ROCHEX, J.-Y., CRINON, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

ANNEXE

Analyser l'activité mathématique des élèves avec un regard didactique

M. HERSANT - M2 EPD - INSPÉ Académie de Nantes

D'un point de vue didactique, les apprentissages mathématiques des élèves dépendent de leur activité en classe.

Cette activité dépend de conditions liées au problème posé (au regard des connaissances des élèves, du matériel mis à disposition et d'autres variables didactiques) et de l'activité de l'enseignant.

L'activité de l'enseignant correspond à la fois à son activité lors de la préparation de la séance (identification des savoirs en jeux, choix de situations et anticipation de son discours) et à son activité au moment de la séance (adaptation de la situation,...). C'est pourquoi, nous distinguerons trois aspects de l'analyse didactique de situations.

Une analyse préalable de la situation

- Quel savoir est visé ? (qu'est-ce que mes élèves doivent savoir à la fin de la séance et qu'ils ne savaient pas avant ?)
- La situation proposée dans la ressource / que j'envisage permet-elle cet apprentissage ? Quelles conditions crée t-elle pour cela ?
- Si les conditions ne semblent pas réunies quelles modifications peut-on apporter à la situation ?

Une analyse a priori de la situation réalisée (analyse de l'activité possible de(s) élève(s) au regard du problème posé et du savoir visé).

- Quel problème les élèves ont-ils à résoudre ?
- Quelles procédures peuvent-ils utiliser pour cela ?
- Quelles connaissances sont nécessaires pour résoudre ce problème ? Ces connaissances sont-elles nouvelles ou anciennes pour les élèves ?
- Les élèves peuvent-ils facilement imaginer une solution au problème ? Peuvent-ils facilement tester une procédure, faire des essais ?
- La solution / procédure pour résoudre le pb mobilise t-elle la connaissance visée ? Les élèves peuvent-ils produire la solution sans mobiliser la connaissance visée ? La connaissance visée correspond t-elle à la façon la plus efficace de résoudre le pb ?
- Les élèves peuvent-ils se rendre compte par eux-mêmes de la validité de leur solution ? une intervention de P est elle nécessaire ?

Une analyse a posteriori de la séance réalisée

- L'activité des élèves est-elle celle attendue ? Est-ce qu'ils résolvent le pb souhaité ? En cas de différence, quelle peut être l'origine de cette différence ?
- Y'a t-il effectivement validation de l'action des élèves ?
- Quel est le rôle de l'enseignant au cours de la résolution du pb : guidage, aide, évaluation ... en quoi ces interventions modifient-elles l'activité des élèves ?
- Quelles sont les actions de l'enseignant relatives au processus d'institutionnalisation ?

Conclusion de l'analyse

- De quelle(s) condition(s) résulte l'activité de l'élève ?
- À l'avenir, est-il souhaitable de modifier la situation ? en quoi ? et pourquoi ?

Cette grille d'analyse s'appuie sur des référents théoriques (la théorie des situations didactiques de Brousseau et la dialectique outil-objet de Douady) qui repose sur deux hypothèses d'apprentissage : une hypothèse d'apprentissage par adaptation et une hypothèse d'apprentissage par acculturation. Elle pourra être précisée au cours de l'année.

UNE ENQUETE SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES EN MATHEMATIQUES EN CM2 ET EN 3EME (PRAESCO) : METHODOLOGIE ET RESULTATS

Julie Horoks*, Éric Roditi**

RÉSUMÉ

Les enquêtes PRAESCO sont des enquêtes nationales menées depuis 2019 sur les pratiques enseignantes spécifiques aux contenus enseignés. Elles ont commencé avec les mathématiques. Nous développons ici les résultats de ces premières enquêtes conduites à deux niveaux scolaires : la dernière année de l'école primaire et la dernière année du collège. Les deux enquêtes reposent sur des questionnaires adressés à un échantillon représentatif des deux populations enseignantes. Les analyses montrent les pratiques partagées par les enseignants ou qui les différencient ainsi que les effets des variables personnelles et de contexte sur ces pratiques. Enfin, une typologie des pratiques est proposée qui rend compte des groupes de professeurs que l'analyse statistique met au jour.

Mots clefs : pratiques enseignantes, enquête à grande échelle

ABSTRACT

The PRAESCO surveys are national surveys conducted since 2019 on content-specific teaching practices. They started with the teaching of mathematics. We present here the results of these first surveys conducted at two school levels: the last year of primary school and the last year of secondary school. Both surveys are based on questionnaires sent to a representative sample of the two teaching populations. The analyses show the practices shared by the teachers or which differentiate them, as well as the effects of personal and contextual variables on these practices. Finally, a typology of practices is proposed, reflecting the groups of teachers revealed by the statistical analysis.

Key words: teaching practices, large scale survey

INTRODUCTION

Les enquêtes nationales et internationales comme EPODE et TALIS ont produit de nombreuses données sur les différents aspects du métier de professeur : formation, travail individuel et collectif, orientation des élèves, satisfactions et insatisfactions, etc. De façon complémentaire, les enquêtes nationales PRAESCO visent à mettre au jour les pratiques enseignantes en ce qu'elles ont de spécifique aux contenus disciplinaires enseignés.

Ce texte présente les enquêtes PRAESCO conduites en mathématiques en 2019 auprès d'enseignants de CM2 et de 3^e. La première partie décrit l'organisation de l'enquête, la conception des questionnaires utilisés et quelques points de méthodes pour l'analyse des données obtenues. La seconde partie développe les résultats issus des tris à plat et tris croisés, tandis que la troisième et dernière partie présente une typologie des pratiques issue des analyses effectuées sur les résultats tirés des traitements statistiques effectués.

LES ENQUÊTES PRAESCO : DES ENQUÊTES SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES SPÉCIFIQUES AUX CONTENUS MATHÉMATIQUES ENSEIGNÉS

1. Organisation des enquêtes PRAESCO

Menées pour la première fois en 2019 sur l'enseignement des mathématiques en CM2 et en 3^e, les enquêtes PRAESCO ont été conduites par la DEPP en partenariat avec des didacticiens

* Université Paris Est Créteil, LDAR, France - représentant l'équipe de l'enquête PRAESCO 2nd degré

** Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris, France - représentant l'équipe de l'enquête PRAESCO 1er degré

et didacticiennes principalement affilié-es à deux laboratoires de recherche parisiens, EDA et LDAR. Elles ont été menées par questionnaire, à grande échelle, sur un échantillon national représentatif de chaque population concernée. Sans objectif d'évaluation, elles cherchent à rendre compte de leurs pratiques d'enseignement.

L'enquête porte sur un échantillon national représentatif de 1 317 professeur.es exerçant avec des élèves de CM2 et de 1801 professeurs de 3^e. Les questionnaires appellent des réponses fermées sur une échelle ordinale indiquant leur niveau d'accord avec des affirmations qui leur étaient proposées, la fréquence à laquelle ils proposent de travailler telle notion, tels types de problèmes, telle modalité de travail ou à laquelle ils mettent en œuvre telle modalité d'enseignement, etc.

2. Conception des questionnaires d'enquête

Les questionnaires ont été conçus en référence à la « double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques » dont l'élaboration a débuté dans les années 2000 (Robert & Rogalski 2002 ; Peltier-Barbier 2004 ; Vandebrouck 2008 ; Roditi 2013). Ils comportent un volet consacré au contexte d'enseignement et au parcours professionnel des répondants : formation initiale et continue, ancienneté, expérience antérieure dans une autre profession, contexte d'exercice, niveau des élèves pris en charge, satisfactions et difficultés rencontrées, etc. Les autres volets des questionnaires interrogeaient les professeur.es sur leur enseignement des mathématiques en s'appuyant sur des activités de préparation, d'enseignement ou d'évaluation en lien avec des notions précises. Nous cherchions ainsi à identifier les choix relatifs aux situations d'introduction, leurs retours sur les activités des élèves, la variété des tâches proposées, avec une éventuelle progressivité dans la complexité. Nous recherchions également des informations quant aux déroulements en classe, leur variabilité, en lien avec les initiatives que les élèves prennent dans les phases de recherche, de correction, de bilan, d'évaluation, etc. Les informations demandées portaient aussi sur la fréquence des modalités de travail des élèves entre travail individuel, en groupes ou en collectif.

Un arbitrage a été réalisé pour déterminer les contenus mathématiques concernés par les enquêtes. Pour le premier degré, il est apparu nécessaire d'interroger les professeurs sur des notions qui sont généralement enseignées par les titulaires de la classe, même s'ils exercent à temps partiel. Certaines notions et certains domaines ont ainsi été écartés comme les fractions, la gestion de données ou la géométrie. Les questions ont ainsi porté sur l'enseignement des nombres décimaux et de la numération, de la division et de la résolution de problèmes numériques. Pour le second degré, afin d'approfondir suffisamment l'analyse et de la faire porter sur un thème qui nous paraît central dans la suite des études des élèves, c'est le domaine de l'algèbre élémentaire qui a été retenu. Les questions portant sur l'enseignement de ces contenus sont fondées par des résultats de recherche en didactique des mathématiques. Pour le premier degré, mentionnons notamment Allard (2015), Charles-Pézarid, Butlen & Masselot (2012), Peltier-Barbier (2004), Houdement (2011), Roditi (2007) et Tempier (2020). Pour le second degré citons Chevillard (1985, 1989), Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue (1987), Kieran (2007), Pilet (2015), Coppé, Grugeon-Allys & Pilet (2016) et Horoks & Pilet (2015).

En outre, il a été choisi d'interroger les professeurs, en particulier dans le premier degré où ils enseignent plusieurs disciplines, sur leurs pratiques en mathématiques de manière assez générale, sur les orientations pédagogiques, l'organisation de l'enseignement, les modalités d'interaction et d'évaluation, le travail effectué sur les erreurs, l'adaptation de l'enseignement en fonction des élèves, l'exposition et l'approfondissement des connaissances, etc. Une seconde catégorie de questions aborde l'enseignement de notions mathématiques précises :

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

leur introduction, le choix des exercices et des problèmes pour l'enseignement comme pour l'évaluation, les ajustements opérés quant aux valeurs des variables didactiques, du niveau d'approfondissement et d'autonomie attendu, etc. Ainsi, pour le second degré, certaines questions portent sur des choix spécifiques de contenu ou de déroulement pour l'enseignement de l'algèbre, tandis que d'autres abordent les choix d'enseignement ou d'évaluation en mathématiques de façon plus générale.

3. Traitements statistiques dédiés à aux différentes analyses des réponses des professeurs enquêtés

De manière classique, des tris à plats et croisés¹ ont été réalisés. Ils documentent globalement les pratiques des enseignants et les spécifient en fonction de variables personnelles, professionnelles ou contextuelles. Pour compléter ces deux types d'analyse des résultats, des regroupements d'enseignants dont les pratiques sont ressemblantes ont été effectués.

Construire des indicateurs pour comparer les pratiques

Différentes dimensions des pratiques correspondantes chacune à plusieurs items (questions élémentaires) ont été définies *a priori* à partir des références théoriques et de la littérature issue de recherches qualitatives sur les pratiques enseignantes.

Pour le premier degré, 29 dimensions ont ainsi été déterminées. Certaines renseignent sur la composante personnelle des pratiques comme la mise en acte de conceptions de l'enseignement des mathématiques. D'autres portent sur leur composante cognitive : les points d'appui de l'enseignement (jeux, tâches techniques, problèmes, etc.) ; les visées d'apprentissages portant sur des fonctions cognitives (mémoriser, essayer, organiser, etc.), les connaissances (approfondissement, structuration, etc.) et les procédures (variété, liens, validité, etc.). D'autres encore portent sur la composante médiative des pratiques et notamment l'adaptation de l'enseignement aux élèves (différentes prises d'information, adaptation des tâches à la classe, ajustement à chaque élève, etc.). Enfin certaines dimensions concernent les composantes institutionnelles et sociales (difficultés d'enseignement, travail collectif, etc.).

Pour le second degré, 13 dimensions ont été construites qui portent essentiellement sur les composantes cognitive et médiative des pratiques. Elles documentent l'enseignement du calcul littéral (équilibre entre technique de calcul et résolution de problèmes, motivation du sens du calcul littéral, formulation des propriétés, etc.) ; l'organisation globale de l'enseignement pour et dans la classe (ressources, outils numériques, évaluations diagnostique et sommative, etc.) ; et la prise en compte de l'élève (prise en compte de l'erreur, aides et moyens de contrôle en classe).

Pour chaque dimension, un indicateur a été construit mesurant l'intensité des pratiques selon cette dimension. La valeur de l'indicateur résulte des réponses des enseignants, elle est normalisée afin que les valeurs des différents indicateurs soient comparables et interprétables en valeur absolue. La valeur de l'indicateur pour un groupe de professeurs correspond ainsi à l'écart à la moyenne de l'indicateur calculé sur l'ensemble des professeurs enquêtés (égale à zéro par construction), écart exprimé en point de pourcentage d'écart-type (pp par la suite).

Ces indicateurs sont très utiles pour interpréter ou pour comparer des pratiques, mais demandent quelques précautions : si, pour un groupe donné d'enseignants, l'un des indicateurs prend une valeur négative, cela signifie que l'aspect des pratiques documenté par

¹ Méthodes d'analyse des résultats d'une étude quantitative : le tri à plat est un calcul de pourcentage effectué question par question, le tri croisé est un calcul de pourcentage effectué en croisant plusieurs variables (par exemple, nombre d'années dans le métier et choix de déroulement pour un moment de correction).

cet indicateur est moins développé qu'en moyenne au sein du groupe d'enseignants mais cela ne dit rien sur le « niveau absolu » de cet aspect chez les enseignants en question.

Partitionner l'ensemble des professeurs pour élaborer une typologie des pratiques

Regrouper des professeurs selon la proximité de leurs réponses au questionnaire a pour but de distinguer des types de pratiques indépendamment des caractéristiques personnelles ou professionnelles des enseignants et indépendamment de leur contexte d'exercice. Trois traitements statistiques ont été effectués pour constituer ces groupes et comprendre ce qui est commun aux pratiques au sein d'un même groupe : une analyse factorielle des correspondances multiples (ACM)², une classification ascendante hiérarchique (CAH)³ et une optimisation des groupes identifiés par la CAH. Avec cette méthode, plus le nombre de groupes est important, plus la cohérence intra-groupe est forte, mais plus il est difficile de les distinguer. Le nombre de groupes a été déterminé en tenant compte de la part d'information recueillie et de la clarté des interprétations quant aux pratiques de ces groupes. Cela nous a conduit à distinguer 5 groupes en CM2, et 4 en 3^{ème}. Pour l'interprétation des pratiques des groupes de professeurs ainsi constitués, les variables personnelles, professionnelles et de contexte ont été réintroduites.

CONVERGENCES ET DIFFERENCES DE PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN CLASSES DE CM2 ET DE 3^E

Avant de présenter les résultats sur les pratiques d'enseignement, résumons quelques indications sur les populations enquêtées par le tableau 1. Indiquons aussi que plus de la moitié (56 %) des professeurs qui ont la charge d'élèves de CM2 enseignent dans une classe multiniveau, ce qui n'existe pas dans le second degré.

	Femmes	Public hors éducation prioritaire	Éducation prioritaire	Privé sous contrat	Âge moyen (en éducation prioritaire)	Ayant exercé un autre métier auparavant
CM2	78 %	71 %	16 %	13 %	43,2 ans (40,4 ans)	34 %
3 ^e	52 %	61 %	16 %	21 %	43,8 ans (41,1 ans)	25,6 %

Tableau 1. – Profil des répondants de chacun des deux questionnaires

1. Des pratiques hétérogènes d'enseignement des mathématiques, tant en CM2 qu'en 3^e

Le tri à plat des réponses conduit à mettre au jour des pratiques partagées par les enseignants des deux degrés ou d'un seul degré, mais aussi des variations entre les professeurs de chaque degré. Pour plus de clarté, nous indiquons quelques résultats saillants dans les deux degrés.

² L'Analyse des Correspondances Multiples (ACM) est une méthode qui permet d'étudier l'association entre au moins deux variables qualitatives.

³ La classification ascendante hiérarchique (CAH) visant à partitionner une population en différentes classes ou sous-groupes. On cherche à ce que les individus regroupés au sein d'une même classe (homogénéité intra-classe) soient le plus semblables possibles tandis que les classes soient le plus dissemblables (hétérogénéité inter-classe).

Convergences et contrastes des pratiques des professeurs ayant en charge des élèves de CM2

Les professeurs en charge d'élèves de CM2 déclarent pratiquement tous utiliser souvent un manuel pour préparer leur enseignement (98 %) ; ce n'est pas le cas des revues ou ouvrages pédagogiques (16 %) ou des documents élaborés avec des collègues (20 %). Près des trois quarts des professeurs déclarent rechercher souvent des supports pour mettre les élèves en activité et moins d'un tiers déclare rechercher souvent de la documentation pour l'enseignant.

De façon quasi-unanime, ils déclarent mettre souvent en place des activités pour que les élèves développent des automatismes en calcul (89 %), mais aussi comprennent les procédures qu'ils appliquent (86 %). Les trois quarts environ (78 %) visent la mémorisation des règles et techniques, et que les élèves s'exercent sur des problèmes qu'ils doivent savoir résoudre facilement (74 %). Concernant la résolution de problèmes, les pratiques sont davantage différenciées puisque la moitié environ propose souvent des problèmes pour découvrir une notion (48 %) ou pour apprendre à chercher (50 %).

La quasi-totalité déclare porter fréquemment attention au travail des élèves, en relevant leur cahier (92 %) ou en passant auprès d'eux (91 %). Ils cherchent ainsi à aider immédiatement les élèves (95 %), à comprendre leurs procédures (89 %) ou à identifier leurs connaissances (84 %). Lorsqu'une réponse juste est proposée, une grande majorité des enseignants (89 %) estime nécessaire de donner ou demander une explication. Lorsque plusieurs méthodes correctes ont été identifiées, les enseignants cherchent fréquemment à faire en sorte que les procédures soient présentées (82 %) et organisent une discussion collective (80 %).

Les enseignants déclarent unanimement (95 %) faire travailler sur les erreurs de leurs élèves lorsqu'elles apparaissent en classe et qu'elles sont assez fréquentes. Ils sont majoritaires à le faire sur les erreurs qu'ils ont repérées en corrigeant l'évaluation (71 %) ou qu'ils ont observées en classe même s'il n'y a que deux ou trois élèves concernés (59 %). Une minorité les fait travailler sur les erreurs anticipées durant la préparation de la séance (45 %).

Convergences et contrastes des pratiques des professeurs de mathématiques de 3^e

Parmi les professeurs de mathématiques de 3^e, plus des trois quarts (78 %) mobilisent couramment leurs préparations des années précédentes et une part encore plus importante (87 %) a fréquemment recours aux manuels scolaires (77% seulement pour les formateurs).

Pour débiter la séquence sur les expressions algébriques, 61 % des enseignants privilégient la résolution de problèmes, mobilisant ainsi l'algèbre comme un outil. Les autres privilégient au contraire les techniques de calcul en commençant par des exercices du type « Développer et réduire des expressions littérales ». Par la suite, dans la séquence, 40 % des enseignants passent plus de temps sur le calcul contre 11 % plutôt sur les problèmes. De façon plus générale, près des deux tiers des enseignants (64 %) déclarent faire fréquemment travailler les élèves sur des problèmes pouvant être résolus de plusieurs façons, laissant ainsi l'autonomie aux élèves de proposer leur procédure. Face à différents choix d'énoncés plus ou moins complexes pour un exercice de preuve, ils sont 55 % à choisir couramment des formulations ne laissant pas aux élèves la responsabilité d'engager un raisonnement algébrique pour prouver. En ce qui concerne le cours, la formulation explicite de propriétés mathématiques, telle que la distributivité, n'est donnée que par un enseignant sur deux.

Lors de la résolution de problèmes, la modalité de travail la plus fréquente est le travail individuel (86 %), plus qu'en binôme (57 %) ou en petits groupes (27 %). Seuls 38 % des enseignants déclarent laisser fréquemment les élèves travailler sur la résolution d'un problème pendant au moins 15 minutes sans intervenir collectivement, et à peine plus de deux enseignants sur cinq animent « souvent » ou « très souvent » une mise en commun après la recherche. Les enseignants déclarent cependant à 72 % demander régulièrement aux élèves de

justifier leur réponse et d'expliquer leur démarche pendant les temps de mise en commun, mais sans demander fréquemment un avis sur (45 %) ou une comparaison entre (21%) les productions des élèves. La situation de correction en classe la plus fréquente correspond à un déroulement où un élève volontaire vient corriger au tableau et où la classe est sollicitée pour valider la solution proposée par l'élève (78 %). Pour un thème mathématique donné, seuls 28 % des enseignants fournissent fréquemment aux élèves des informations précises en prévision de l'évaluation sommative qui comporte, pour 91% des enseignants, des exercices proches de ceux vus en classe, et plus rarement des exercices nouveaux (27%) ou plus difficiles (22%).

2. Des pratiques marquées de manière inégale par les variables personnelles et de contexte

Quelques tris croisés des réponses des professeurs interrogés et l'utilisation des indicateurs synthétiques ont mis en lumière des pratiques parfois contrastées selon leurs dimensions suivant que les professeurs sont des hommes ou des femmes, suivant leur formation initiale et leur expérience professionnelle, et suivant les contextes dans lesquels ils exercent. Nous indiquons ici les résultats les plus marqués en distinguant les deux degrés d'enseignement.

Effets des variables personnelles et de contexte sur les pratiques en CM2

Les pratiques des femmes et des hommes se différencient peu selon la composante cognitive des pratiques, elles diffèrent en revanche significativement selon leur composante médiative : les femmes déclarent plus souvent adapter les tâches à effectuer en fonction du niveau de leurs élèves et agir en tenant compte de chacun d'eux. La formation initiale professionnelle ne distingue pas les pratiques déclarées d'enseignement des mathématiques, c'est en revanche le cas de l'ancienneté. Les professeurs entrés plus récemment dans le métier (ancienneté inférieure à dix années) indiquent davantage que les plus anciens (professeurs avec une ancienneté supérieure à vingt années) (+51 pp) que leurs difficultés tiennent à leurs conditions de travail (manque de temps et de formation, effectif de la classe, etc.). Ils déclarent davantage utiliser du matériel didactique (+48 pp) et consulter des ressources pour leurs préparations. Ils offrent en revanche moins aux élèves l'occasion de travailler sur des situations complexes (-30 pp), de faire des liens entre les procédures (-26 pp), d'explicitier les connaissances (-23 pp). On ne constate pas de différence selon l'ancienneté en ce qui concerne les interactions avec les élèves et les ajustements de l'enseignement.

Les professeurs en classes multiniveaux sont plus jeunes, plus souvent en milieu rural et moins fréquemment en éducation prioritaire. Le multiniveau constitue une difficulté pour 31 % des enseignants qui y sont affectés. Leurs pratiques sont proches de celles de leurs collègues n'ayant en charge qu'un seul niveau, même s'ils déclarent davantage proposer souvent du matériel ou des jeux, et moins souvent des situations conduisant à un travail réflexif sur les connaissances. Pour près de la moitié des professeurs de l'enseignement privé, le manque de formations sur des contenus mathématiques constitue un facteur de difficulté. Leurs pratiques se différencient essentiellement par le fait de donner plus de tâches techniques (+22 pp) en cherchant moins à établir leur validité (-35 pp) ou le sens de ces techniques (-33 pp).

Les professeurs exerçant en éducation prioritaire attribuent davantage leurs difficultés aux caractéristiques de leurs élèves (+36 pp) ; ils s'appuient davantage sur des sites institutionnels et sur des documents élaborés avec leurs collègues. Leurs pratiques ne se distinguent pas nettement de celles de leurs collègues hors éducation prioritaire, même s'ils orientent davantage leur enseignement vers les élèves individuellement (+21 pp) et qu'ils incitent davantage leurs élèves à chercher (+20 pp), à expliciter (+17 pp) et à structurer leurs connaissances (+17 pp). Ils leur proposent plus de tâches techniques (+12 pp), moins de

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

problèmes complexes (-17 pp) et ils adaptent davantage les tâches aux élèves, par exemple en choisissant les valeurs numériques en fonction des compétences de ces derniers (57 % contre 47 %).

Effets des variables personnelles et de contexte sur les pratiques des professeurs de 3^e

Pour les enseignants de 3^e en mathématiques, la formation reçue et le contexte de travail (public/privé, en et hors éducation prioritaire) ont un effet important sur les pratiques.

Ainsi, en ce qui concerne la composante cognitive, les enseignants contractuels sont plus nombreux à privilégier l'aspect technique du calcul pour introduire les séquences sur les expressions algébriques (+9 pp) ou les équations (+22 pp). À l'opposé, les enseignants déclarant être ou avoir été formateurs (académiques, à l'ESPE ou à l'IUFM, à l'IREM) privilégient la résolution de problèmes pour introduire la séquence sur les expressions algébriques (+14 pp) ou les équations (+16 pp). Les enseignants en éducation prioritaire choisissent moins fréquemment (-10 pp) des exercices de preuve laissant des initiatives aux élèves. Certaines définitions moins rigoureuses sont plus souvent retenues par les enseignants contractuels (+22 pp), par les enseignants n'ayant pas bénéficié d'une formation initiale à l'enseignement (+8 pp) et ceux ayant moins de 10 ans d'ancienneté (+6 pp). À l'inverse, les enseignants ayant une expérience de formateur optent moins fréquemment (-15 pp) pour ce type de définition. De même, le fait de conseiller aux élèves de « passer de l'autre côté » dans une équation est plus fréquent chez les enseignants contractuels (+24 pp) et plus rare parmi les enseignants étant ou ayant été formateurs (-10 pp).

Les choix de modalités pour les déroulements en classe, relevant de la composante médiative, semblent moins influencés par le contexte et les caractéristiques personnelles ou professionnelles. On peut noter cependant que les enseignants exerçant en éducation prioritaire choisissent plus fréquemment d'animer eux-mêmes la correction des exercices (+8 pp), et que les enseignants contractuels ou exerçant dans le privé proposent plus fréquemment que la moyenne une évaluation diagnostique en début de chapitre (+20 pp et +5 pp respectivement).

TYOLOGIES DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN CLASSES DE CM2 ET DE 3^E

Les méthodes statistiques mises en œuvre ont conduit à distinguer 5 groupes de professeurs enseignant à des élèves de CM2 et 4 groupes de professeurs de mathématiques de 3^e. Il apparaît toutefois que certaines pratiques associées à ces groupes sont assez ressemblantes entre les deux degrés, aussi avons-nous choisi de les mettre en parallèle.

1. Un groupe de professeurs spécifique au premier degré : ils expriment des difficultés vis-à-vis des mathématiques et de leur enseignement

Le premier groupe étudié ici n'apparaît que dans le premier degré, il comprend 26 % des professeurs enseignant à des élèves de CM2, il est plus masculin que la population étudiée (32 % vs 22 %). Parmi les facteurs de difficulté à enseigner les mathématiques, ce groupe est le seul qui mentionne particulièrement celui relatif à la complexité supposée ou ressentie de cette discipline (+15 pp) ; cela éclaire sans doute les pratiques de ces professeurs. En classe, plus que dans l'échantillon, ces professeurs exposent de manière magistrale (+23 pp) tout en explicitant moins les règles et leurs justifications (-48 pp). Ils proposent moins de travail réflexif sur les connaissances (-33 pp) et de situations conduisant à approfondir (-26 pp).

Dans leur classe, les procédures sont moins travaillées, que ce soit pour leur variété (-54 pp), leur mise en lien (-50 pp) ou leur validation (-41 pp). Les professeurs de ce groupe s'appuient moins sur le travail des élèves : ils prennent moins d'information sur leurs

réponses (-56 pp) ou sur leurs procédures (-66 pp). Ils adaptent moins les exercices à leur niveau (-37 pp) et à leurs difficultés (-44 pp).

2. Un groupe de professeurs qu'on retrouve dans les deux degrés : ceux qui expriment un engagement moindre, notamment dans l'accompagnement personnalisé des élèves

Le travail statistique fait apparaître, dans les deux degrés, un groupe d'enseignants qui témoignent d'un engagement moindre dans l'enseignement des mathématiques (rappelons que dans le premier degré, les professeurs enseignent aussi d'autres disciplines). Leur proportion est toutefois différente : 21 % dans le premier degré contre 34 % dans le second.

Dans ce groupe, pour ce qui est du premier degré, les enseignants sont plus nombreux que dans l'échantillon à exercer dans le public hors éducation prioritaire (79 % vs 72 %) et à temps partiel (12 % vs 7 %) ; ils déclarent moins se consacrer à leur auto-formation (-59 pp) et au travail avec leurs collègues (-44 pp). En classe, ils proposent moins de situations de travail réflexif sur les connaissances (-58 pp) ou conduisant à expliciter les connaissances (-47pp), ou les approfondir (-59 pp). Leur enseignement conduit également beaucoup moins les élèves à mémoriser (-56 pp), s'organiser (-56 pp), chercher (-42 pp) et s'exercer (-50 pp). Ces professeurs s'appuient moins sur le travail des élèves (-34 pp) et ajustent également moins leur enseignement à leurs difficultés (-48 pp). Ils déclarent retirer moins fréquemment des satisfactions de leur enseignement des mathématiques (67 % vs 75 %) et attribuent davantage aux conditions d'exercice du métier la difficulté à les enseigner (+14 pp).

Dans le second degré, ce groupe apparaît plus masculin que l'échantillon (56 % d'hommes contre 48 %), légèrement plus âgé, et rapporte la plus faible participation à des activités de formation continue. Pour préparer leurs cours, ils ont moins recours aux ressources institutionnelles (-42 pp). Ils rapportent un accès plus difficile aux outils numériques spécifiques aux mathématiques et en font, sans surprise, un usage moindre (-27 pp). Ces enseignants cherchent moins à motiver le sens et l'intérêt du calcul littéral (-19 pp) et proposent moins qu'en moyenne des problèmes complexes (-43 pp). Ils cherchent moins qu'en moyenne à expliciter le lien entre ce qui est fait en classe et la façon dont les élèves sont évalués (-43 pp). Ils s'appuient moins sur les productions de leurs élèves (-49 pp) et leur font moins de retours : ils sont ainsi seulement 68 % à déclarer faire fréquemment des commentaires tout au long des copies de contrôle de leurs élèves (contre plus de 80 % dans le reste de l'échantillon). Leur prise en compte de l'erreur est également nettement moindre (-49 pp).

3. Un groupe de professeurs qu'on retrouve dans les deux degrés : ceux qui proposent un enseignement plutôt transmissif reposant sur des tâches essentiellement techniques

Dans les deux degrés, on retrouve un groupe de professeurs proposant un enseignement plutôt transmissif ; comme précédemment ces groupes ne représentent pas la même proportion des professeurs : 17 % dans le premier degré contre 29% dans le second.

Pour le premier degré, les professeurs de ce groupe ne se distinguent pas par leur contexte d'enseignement. Dans leur carrière, ils ont suivi moins de formations sur des thèmes mathématiques et sont plus nombreux à passer moins de deux heures hebdomadaires à la préparation de leur enseignement des mathématiques (61 % vs 49 %). Ils ont davantage le sentiment qu'il y a des élèves qu'ils ne pourront pas vraiment faire progresser en mathématiques (48 % vs 35 %). Ils dispensent plus fréquemment un enseignement de type magistral (+36 pp). Ils donnent plus de moyens mnémotechniques (+97 pp) qu'ils demandent d'appliquer à des tâches techniques (+63 pp). Ils offrent également moins de moyens de valider les procédures mises en œuvre (-50 pp) ou de donner du sens aux techniques utilisées (-53 pp). Ces professeurs concentrent leur attention sur les réponses de leurs élèves (+36 pp)

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

ainsi que sur leurs erreurs (+37 pp); plus que dans l'échantillon, leurs pratiques d'enseignement visent la réussite immédiate des élèves en mathématiques (+67 pp).

Dans le second degré, ce groupe est plus féminin (59 % de femmes contre 52 %) et légèrement plus jeune. Ces enseignants participent moins à des activités de formation continue et font un usage moindre des outils numériques en classe (-37 pp) et des ressources (-26 pp). Ils sont en revanche un peu plus nombreux à réutiliser leurs préparations des années précédentes (87 % contre 78 %). Leur enseignement du calcul littéral porte plus souvent sur les techniques avec davantage d'exercices du type « développer, factoriser ». Lors des interactions avec les élèves, ils proposent plus souvent des formulations simplificatrices qui n'aident pas à la mise en place de propriétés et de vocabulaire mathématiques (-26 pp). Leur enseignement est plutôt transmissif (-41 pp) avec peu de temps laissé aux élèves pour travailler en autonomie et peu d'activités en petits groupes (15 % contre 27 %). Ils sont en outre les plus nombreux à préférer que le professeur corrige au tableau en expliquant les propriétés utilisées (46 % contre 35 %) et à juger qu'une telle correction est rapide et claire (74 % contre 61 %).

4. Un groupe de professeurs qu'on retrouve dans les deux degrés : ceux qui expriment des choix didactiques affirmés pour que les élèves construisent activement leurs connaissances

Dans les deux degrés, on retrouve et dans les mêmes proportions, des enseignants qui s'appuient sur des choix didactiques clairs et sur une prise en compte marquée des élèves.

Ce groupe représente 22 % des enseignants de CM2. Il contient un peu plus de professeurs enseignant en éducation prioritaire (21 % vs 16 %). Les enseignants de ce groupe travaillent davantage avec leurs collègues (+15 pp) et ont moins le sentiment qu'il y a des élèves qu'ils ne pourront pas vraiment faire progresser en mathématiques (28 % vs 35 %). Par rapport à l'ensemble de l'échantillon, leur enseignement s'appuie sur du travail réflexif sur les connaissances (+34 pp) ou sur des manipulations et des jeux (+43 pp). Ils proposent plus de situations qui permettent aux élèves d'approfondir les procédures qu'ils mettent en œuvre, en leur donnant du sens (+55 pp) ou en les faisant valider (+56 pp). Ils choisissent également plus de situations permettant aux élèves d'expérimenter (+20 pp) ou de s'exercer (+32 pp). Ils enseignent moins les mathématiques de manière magistrale (-38 pp) ou en donnant des moyens mnémotechniques (-66 pp). Ils ne concentrent pas leur attention sur les seules réponses de leurs élèves : ils prennent plus d'information sur les procédures mises en œuvre (+35 pp) et interagissent davantage avec eux à propos des mathématiques en jeu (+21 pp).

Dans le second degré, les enseignants de ce groupe représentent 21 % des répondants, ils sont un peu plus souvent titulaires du CAFFA, tuteurs de stagiaires ou formateurs. Ils se sentent moins démunis face aux difficultés de leurs élèves. Les différences de pratique sont marquées concernant le recours à des ressources (+40 pp), à des outils numériques (+49 pp) ou à des modalités de travail favorisant la collaboration entre élèves (+71 pp). Ce qui distingue ces enseignants le plus fortement est leurs choix didactiques relatifs à l'enseignement du calcul littéral. Ils équilibrent davantage aspects techniques et résolution de problèmes (+66 pp) et cherchent à motiver le sens et l'intérêt du calcul littéral lors des activités d'introduction (+53 pp). Ces enseignants utilisent également moins souvent des formulations simplificatrices, privilégiant des formulations appuyées sur les mathématiques en jeu (+51 pp). Enfin, ils sont plus nombreux, avant de commencer un nouveau chapitre, à s'appuyer sur une évaluation diagnostique (environ un tiers contre 18 %) et à proposer une évaluation sommative en explicitant clairement aux élèves ce qui est évalué et comment (+37 pp).

5. Un groupe de professeurs qu'on retrouve dans les deux degrés : ceux qui font flèche de tout bois pour parvenir à l'apprentissage de leurs élèves

Dans les deux degrés et dans les mêmes proportions, on trouve des enseignants fortement engagés qui recourent à tous les moyens possibles pour faire apprendre les élèves.

Dans le premier degré, ce groupe représente 14 % des répondants. Les enseignants exercent plus fréquemment en milieu urbain (80 % vs 70 %). Durant leur carrière, ils ont davantage participé à des actions de formation sur des contenus mathématiques. Ils sont plus nombreux (62 % vs 51 %) à prendre plus de deux heures par semaine à la préparation de leur enseignement de cette discipline. Pour tous les types d'activités interrogés dans le questionnaire, ils déclarent plus que dans l'échantillon les proposer à leurs élèves, que ce soient des tâches techniques (+67 pp), des problèmes complexes (+98 pp), des applications de règles mathématiques (+81 pp) ou du travail réflexif sur les connaissances (+107 pp), entre autres. Ils déclarent également davantage agir en tenant compte de chaque élève (+92 pp) et ajuster leur enseignement aux difficultés des élèves (+99 pp). Ils prennent plus souvent des informations sur leurs réponses (+44 pp) et sur leurs procédures (+95 pp). Leurs interactions avec les élèves portent plus sur les mathématiques en jeu (+92 pp) et sur l'organisation du travail en classe (+82 pp).

Dans le second degré, ce groupe représente 16 % des personnes interrogées. Les enseignants sont davantage diplômés d'un master ou d'un diplôme de niveau supérieur (62 % contre 57 %). Ils témoignent d'une attention particulièrement forte portée aux élèves, leur faisant davantage de retours (+85 pp) et s'appuyant plus fréquemment sur leurs erreurs (+90 pp). Ils sont en outre moins nombreux à exprimer un sentiment d'impuissance face à la difficulté à faire progresser leurs élèves (50 % contre 57 %) mais plus nombreux à penser que leurs élèves n'ont pas suffisamment travaillé (70 % contre 62 %) en cas de résultats décevants lors d'une évaluation. Néanmoins, ces enseignants présentent des valeurs proches de la moyenne sur l'ensemble des indicateurs concernant les choix didactiques relatifs à l'enseignement du calcul littéral.

EN GUISE DE CONCLUSION

L'exploitation des résultats se poursuit, la nouvelle enquête PRAESCO mathématiques est prévue pour 2024. Les équipes cherchent également à mettre en lien les pratiques des enseignants et les évolutions des acquis des élèves entre le début et la fin de l'année scolaire. Un partenariat avec la DEPP est prévu pour mener ces nouvelles enquêtes.

RÉFÉRENCES

- ALLARD, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot.
- CHARLES-PEZARD, M., BUTLEN D. & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la Pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- COPPE, S., GRUGEON-ALLYS, B. & PILET, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : l'exemple du carré bordé. *Petit x*, 102, 57-80.
- HOROKS, J. & PILET, J. (2015). Étudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un LEA. Dans L. Theis (éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, 791-804. Actes du colloque EMF2015 – GT9 (Alger, 10-14 octobre 2015).
- HOUEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 16, 67-96.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques*. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- KIERAN, C. (2007), Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. Dans *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- PELTIER-BARBIER, M.-L. (dir.) (2004). *Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : la Pensée sauvage.
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 35(2), 273–312.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- RODITI, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 55-81.
- RODITI, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques*, 15, 39-60.
- TEMPIER, F. (2020). Les grands nombres au cycle 3 : de nouvelles pistes de travail. *Grand N*, 105, 75-99.
- VANDEBROUCK, F. (coord.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : OCTARES.
- VERGNAUD, G., CORTES, A. & FAVRE-ARTIGUE, P. (1987), Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-288, Actes du colloque (Sèvres, mai 1987). La Pensée Sauvage éditions Grenoble.

QUE RÉVÈLE LA PRODUCTION DE DESSINS À MAIN LEVÉE PAR LES ÉLÈVES SUR LEUR RAPPORT À LA GÉOMÉTRIE ?

Catherine Houdement*, Édith Petitfour*

RÉSUMÉ

Une analyse sémiotique de données recueillies dans une classe de CM lors d'une séance de géométrie nous conduit à mieux cerner le rapport des élèves aux objets géométriques et leur sensibilité au langage. Le type de tâche étudié est la conversion d'un texte vers un dessin à main levée. Notre étude permet de circonscrire cet objet complexe qu'est le dessin à main levée et de questionner le rôle qu'il pourrait jouer dans l'évolution des connaissances géométriques des élèves.

Mots-clefs : dessin à main levée, figure géométrique, description géométrique, sémiotique, langage

ABSTRACT

A semiotic analysis of data collected in class with students aged 9 to 12 during a geometry session leads us to better understand the students' relationship to geometric objects and their sensitivity to language. The type of task studied is the conversion of a text into a freehand drawing. Our study allows us to circumscribe this complex object that is the freehand drawing and to question the role that it could play in the evolution of the students' geometrical knowledge.

Keywords: drawing, geometric figure, geometric description, semiotic, language

INTRODUCTION

Notre étude s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche normand¹ visant à mieux comprendre et identifier les freins et les leviers au développement de l'ambition scolaire, particulièrement sensible dans les zones rurales à tradition industrielle, à la fois au niveau de la classe, de l'établissement scolaire et de l'environnement. Au sein de l'axe « ambition dans la classe », nous avons mené un travail collaboratif avec quatre enseignantes de CM1-CM2 du département de l'Eure, en vue d'étudier, dans une approche sémiotique, ce qui se joue dans les actions des élèves, leurs interactions, celles avec l'enseignante, lorsqu'ils font des mathématiques.

Hors de notre présence, les quatre enseignantes ont élaboré conjointement la trame d'une séance pouvant s'insérer dans la progression mathématique de leur classe. Leur choix s'est porté sur la géométrie, plus précisément sur la production de dessins à main levée à partir de courts textes, d'abord lus par l'enseignante, puis disponibles par écrit, en appui sur une fiche de travail commune. Nous avons découvert leur projet lors de la séance effective pendant laquelle nous avons recueilli de nombreuses données. Un thème d'étude s'est dégagé d'une première analyse de l'ensemble des données recueillies : le rapport des élèves aux objets géométriques et leur rapport au langage. Dans cet article, nous présentons nos premiers résultats, en appui sur les données d'une seule classe réalisant le dessin à main levée à partir du premier texte proposé, porté à la connaissance des élèves par la lecture de l'enseignante.

APPUI THÉORIQUES

* Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ. Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen.

¹ http://circvaldereuil.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/l_ambition_scolaire_en_milieu_rural_normand_v7.pdf

1. Sur les objets géométriques

Nous considérons que l'objet géométrique est un objet théorique de *Géométrie 2* (Houdement, 2007 ; Houdement et Kuzniak, 1998-1999). À l'instar de Peirce (1978), nous considérons que cet objet théorique se donne à voir par des signes relevant de différents systèmes sémiotiques, comme textes et dessins. Le même objet géométrique peut être représenté par des textes différents. Il existe plusieurs types de dessins, sollicitant des systèmes sémiotiques différents, qui représentent cet objet : des dessins faits aux instruments, qui sont alors semblables ; des composites, dessin avec texte ou codage (qui satisfait à des conventions partagées), alors nommés « figure géométrique » (Laborde et Capponi, 1994). Le rapport aux figures géométriques demandé aux élèves dépend du paradigme géométrique institutionnel : il évolue au cycle 3, entre le CM et la 6^{ème} (Houdement, 2007 ; Houdement et Kuzniak, 1998-1999).

De nombreuses recherches (notamment Duval et Godin, 2005 ; Perrin-Glorian et Godin, 2014), pointent le rôle potentiel du dessin instrumenté dans la conceptualisation de notions géométriques. Ces auteurs considèrent les instruments à disposition des élèves comme une variable didactique. Pour permettre des apprentissages géométriques à des élèves empêchés de manipuler des instruments (élèves en situation de handicap), Petitfour (2017) a développé la dimension langagière liée aux constructions instrumentées : elle a pointé l'intérêt d'un « langage technique », utilisé par l'élève pour guider un pair ou un enseignant dans la construction d'une figure.

Le dessin à main levée fait naturellement partie du patrimoine géométrique, pour l'heuristique et/ou comme un signe accompagnant le texte. Le mathématicien expert utilise fréquemment des dessins à main levée dans son activité mathématique (Coppé, Dorier et Moreau, 2005). Dans les manuels scolaires, la figure qui accompagne un problème de géométrie peut être un dessin à main levée. Le dessin à main levée figure explicitement dans les programmes de mathématiques de cycle 3. Il garde un statut para-mathématique, au sens de Chevallard (1985), il n'est défini que par ses usages.

2. Sur les interactions d'enseignement apprentissage

Nous considérons que l'acquisition de connaissances s'élabore dans un processus social et multimodal (Arzarello, 2006 ; Radford, 2006). Ainsi, nous faisons l'hypothèse que, lorsque les élèves font des mathématiques, leurs interactions avec les différents acteurs de la relation didactique (élèves, enseignant), ainsi que leurs actions « pour eux-mêmes », sont constitutives de leurs apprentissages. Nous nous appuyons sur le concept de faisceau sémiotique (Arzarello, 2006) pour saisir la multimodalité des processus d'apprentissage et prendre en compte le développement dynamique des interactions entre les différents systèmes de signes : mots (parlés ou écrits), autres représentations graphiques (dessins, schémas, symboles), formes d'expression extralinguistique (gestes, regard, intonation, posture, expression du visage, etc.), et gestes liés au matériel. Nous rendons compte de la production et de la transformation des signes durant l'activité mathématique dans un tableau sémiotique (Houdement et Petitfour, 2017, 2020), outil que nous décrirons par la suite.

Enfin, à partir de certaines données, comme les productions orales et graphiques à un moment fixé, nous inférons des interprétations sur l'état des connaissances d'un élève, d'un enseignant, relativement aux tâches proposées. Nous retenons les interprétations les plus plausibles après triangulation (Denzin, 1978) des différentes données que nous avons recueillies et organisées : issues du même moment et d'autres moments, données sur l'élève seul, sur l'élève en interaction avec un pair, avec l'enseignant, sur l'élève au tableau... ; sur l'enseignant en collectif, en accompagnement individuel, d'un groupe, en entretien avec nous. Nous rejetons ainsi des interprétations locales, parfois séduisantes, mais qui ne résistent pas à la triangulation.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

CONTEXTE DE L'ÉTUDE

1. La séance

Le type de tâches proposé consiste à produire un dessin à main levée à partir d'un texte donné dans une modalité orale, puis écrite. Six textes ont été proposés. Comme précisé ci-dessus, nous nous intéressons à la classe de CM1-CM2 de l'enseignante NF et aux productions de ses 21 élèves relatives au premier texte (figure 1) transmis oralement. Notons que ce type de tâches géométriques est nouveau pour les élèves, tout comme pour l'enseignante NF.

Texte donné oralement	Tracé à main levée. (consigne orale)	Tracé à main levée. (consigne écrite)
La figure est formée de deux carrés : un grand et un petit. Les sommets du petit carré sont les milieux des côtés du grand carré.		

Figure 1. – Extrait du document-élève, texte 1

La séance, d'une durée d'une heure trente environ, se déroule en cinq temps. NF introduit l'activité de dessin à main levée dans un premier temps collectif (17'). Elle donne ensuite plusieurs lectures de chacun des six textes et les élèves produisent individuellement au fur et à mesure les dessins à main levée correspondants ; durant tout ce temps le document-élève est plié pour qu'ils n'aient pas accès au texte écrit (16'). Dans un troisième temps, les élèves déplient le document, lisent les textes et produisent de nouveaux dessins s'ils estiment que leurs premières productions ne conviennent pas (6'). La séance se poursuit par un quatrième temps de mise en commun au tableau et discussion sur des propositions de dessins (26'). Un dernier temps de bilan sur l'activité est réalisé (11').

Concernant le premier texte (figure 1), NF donne une première lecture avec la consigne de ne pas tracer encore (« première lecture, vous essayez de vous imaginer à quoi ça va ressembler »). Elle relit ensuite le texte trois fois à la classe, en précisant la possibilité de « faire des essais à l'ardoise » (avant la lecture 3), de gommer (à la fin de la lecture 3) et de vérifier si leur « tracé correspond au texte » (avant la lecture 4). Elle adresse enfin une dernière lecture à un élève qui n'a encore rien tracé.

2. Le recueil de données

Pour recueillir la diversité de signes en circulation, nous avons filmé la séance menée par l'enseignante NF avec trois caméras, l'une fixe placée près du tableau avec vue sur les élèves dans la classe et les deux autres mobiles. Nous avons réalisé des vidéos d'élèves dans l'action de production de dessins à main levée (temps de travail individuel) et des vidéos d'interactions entre élèves et enseignante à propos de leurs productions (temps de mise en commun au tableau). L'enseignante était équipée d'un micro-cravate et quatre enregistreurs étaient répartis dans la classe. Nous avons aussi photographié les traces graphiques produites (dessins à main levée sur les documents-élèves et au tableau). D'autres données (enregistrements) sont issues des échanges que nous avons eus avec les enseignantes avant la séance, juste après, et aussi lors des réunions de travail qui ont eu lieu deux mois plus tard, avec visionnage d'extraits des séances et entretiens d'auto-confrontation puis d'auto-confrontation croisée.

ANALYSE A PRIORI

Le type de tâches proposé est une conversion (Duval, 1993) d'un texte en un dessin à main levée (sans autre instrument qu'un crayon), texte communiqué selon une modalité orale (texte lu par l'enseignante), puis écrite. Nous procédons d'abord à une analyse *a priori* du texte (figure 1) en la découpant en deux parties : l'une engage des connaissances géométriques explicites et implicites ; l'autre concerne plutôt le rapport à langue.

1. Analyse de type « rapport à la géométrie »

Le texte fournit une description de la figure au sens où il permet de rendre compte dans un discours linéaire de la globalité d'un objet géométrique (Lahanier-Reuter, 1999-2000). Il ne donne pas d'instructions chronologiques de tracé tel un programme de construction géométrique. En effet, la description entière doit être lue avant de réaliser le dessin.

La première phrase fixe les unités figurales 2D (Duval, 2005) qui composent le dessin (deux carrés), la seconde indique les relations entre les deux carrés. Les quatre termes géométriques, carré (2D), côté (1D), sommet et milieu (0D) sont *a priori* connus des élèves. La position relative des deux carrés est décrite en se centrant sur les unités figurales 0D (sommets, milieux) : le sommet se réfère à une unité figurale 2D (carré), le milieu se réfère à une unité figurale 1D (côté), qui elle-même se réfère à une unité figurale 2D (carré). La lecture du texte engage donc une déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) mentale de chaque unité 2D.

Deux ordres d'exécution des tracés sont possibles : centripète (de la périphérie vers le centre) et centrifuge (du centre vers la périphérie). Pour le premier, on commence par le grand carré, on place le milieu de chacun de ses côtés (quatre points), puis on trace le carré dont les sommets sont ces quatre points. Pour le second, on commence par le petit carré, on trace des segments centrés sur chacun de ses sommets (un segment par sommet) en les orientant pour former un carré. La seconde technique serait plus difficile que la première pour une construction instrumentée, notamment pour l'orientation des segments. Il se peut aussi qu'elle complexifie le tracé du dessin à main levée. Les connaissances géométriques en jeu sont celles sur le carré et le milieu d'un segment.

2. Analyse de type « rapport à la langue »

Les adjectifs « grand » et « petit » qualifiant les deux carrés informent d'un « ordre de grandeur » entre ces carrés. Le rapport de longueur entre les côtés des deux carrés n'est pas quelconque, il est imposé implicitement par les relations géométriques précisées dans la seconde phrase : une fois un carré tracé, ces relations déterminent les dimensions de l'autre carré. Pour l'élève il indique que les carrés ne sont pas isométriques.

Dans la seconde phrase, la double désignation d'un objet géométrique (Duval, 2014) – des mêmes points sont à la fois « les sommets du petit carré » et « les milieux des côtés du grand carré » – est une difficulté de compréhension *a priori* pour les élèves. La complexité syntaxique du groupe verbal « sont les milieux des côtés du grand carré » renforce aussi cette difficulté de compréhension du sens de la seconde phrase. En outre, il faut comprendre que chacun des sommets du petit carré correspond au milieu d'un côté du grand carré pour chacun des côtés de ce grand carré. Nous parlerons ici d'une « formulation contractée », assez usuelle en géométrie.

Le texte entremêle langue géométrique et langue courante : « grand » et « petit » ne sont pas des termes géométriques, ils donnent des informations spatiales – d'ailleurs inutiles pour aboutir à la figure décrite – sur la place relative prise par les carrés en tant que surfaces (objets 2D). Par contre, le terme « milieu » doit être interprété dans son sens géométrique (point du côté situé à égale distance des extrémités de ce côté) et non dans son sens courant, sens lié aussi à des informations spatiales (lieu également éloigné de tous les points du pourtour de Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

quelque chose). Les termes « côtés » et « sommets » sont aussi polysémiques, ils ont un sens géométrique, et un autre sens dans le langage courant. Les élèves peuvent donc avoir des difficultés à choisir le bon registre d'interprétation vu le texte non entièrement écrit en langage géométrique.

PRODUCTIONS DES ÉLÈVES

1. Focus sur quelques processus de production de dessins à main levée



Nous présentons quelques processus de production de dessins à main levée en appui sur des tableaux sémiotiques construits à partir des bandes-son et audio. Sur ces tableaux, nous indiquons des repères de temps sur la première ligne grisée (l'origine est prise au début de la séance). Nous précisons sur la deuxième ligne les lectures du texte faites par l'enseignante NF ou son discours. Nous relevons sur la troisième ligne ce que fait ou dit un élève donné au cours de sa production de dessin à main levée.

Arry écoute les deux premières lectures en mordillant son stylo. À la fin de la lecture 2, il manifeste une compréhension soudaine (figure 2, 18'56). Il se penche brusquement vers l'avant, rapprochant son visage de sa feuille pour dessiner très rapidement un carré en position prototypique avec un plus petit centré à l'intérieur (18'58). Puis il se redresse, cache le dessin obtenu et n'y touche plus jusqu'à la fin. Arry a ainsi produit un seul dessin (carrés emboîtés) et semble être sûr de sa production.

	18'36	18'56	18'57	18'58	19'05
NF	Lecture 2				
Arry	 Arry, mordillant son stylo, écoute le texte lu par NF.	 hhhh Il inspire de façon brève et vocalisée	 Il se penche brusquement et dessine au stylo.		Il se redresse et met sa trousse sur son dessin.

Figure 2. – Processus de production de dessins à main levée de Arry

Chrys démarre son dessin pendant la deuxième lecture : il trace un carré en position prototypique, puis en fait un autre plus petit, un peu plus loin à droite (figure 3, 18'36). Il observe ensuite son dessin en écoutant la lecture 3. Au bout de quelques secondes, il manifeste une compréhension du texte qui ne correspond plus à son tracé (figure 3, 19'34). Il l'efface et réalise un nouveau dessin pendant la lecture 4 (figure 3, 20'00) : il trace un carré, puis un autre contigu à l'intérieur en traçant une ligne brisée fermée en faisant en sorte que les sommets du petit carré soient placés sur les milieux des côtés du grand carré. Chrys a ainsi obtenu son dessin final en deux temps : carrés juxtaposés puis emboîtés de façon conforme au texte.

	18'36	19'09	19'34	19'44
NF	Lecture 2		Lecture 3	Mais bien sûr qu'on peut gommer !
Chrys	 Tracé 1		Chrys chuchotant pour lui-même : Ah oui ! J'ai compris ! ... Ah, j'peux pas gommer À voix haute : Maîtresse, on peut pas gommer ?	Chrys gomme.

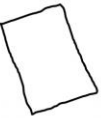



	20'00	20'04	20'08	20'12	20'14
NF	La figure est formée de 2 carrés un grand et un petit.		Les sommets du petit carré	sont les milieux	des côtés du grand carré.
Chrys				Chrys prolonge le côté du petit carré tracé en premier jusqu'au côté du grand carré.	 Tracé 2

Figure 3. – Processus de production de dessins à main levée de Chrys

Paul écoute attentivement le texte lu. Sa question, « Maîtresse, c'est pas des figures qu'on fait tous les jours, si ? », posée à la fin de cette lecture, montre qu'il a déjà une première idée du dessin à produire. À la fin de la deuxième lecture, il chuchote, « c'est bon, j crois qu'c'est ça ». Pendant la troisième lecture, il dessine sur son ardoise un carré (le petit), puis un autre imbriqué (figure 4, 19'25 à 19'30). Il retourne son ardoise en précisant : « Moi, j'vais faire ça ». Il réalise deux tracés successifs sur sa feuille en commençant toujours par le petit carré. Pendant la lecture 5, il démarre son dessin par le grand carré et inscrit le petit à l'intérieur (figure 4, 22'21). Il efface de nouveau ce dessin dont le sommet gauche du petit carré ne convient pas, pour réaliser sa production finale qui correspond bien au texte (22'44).

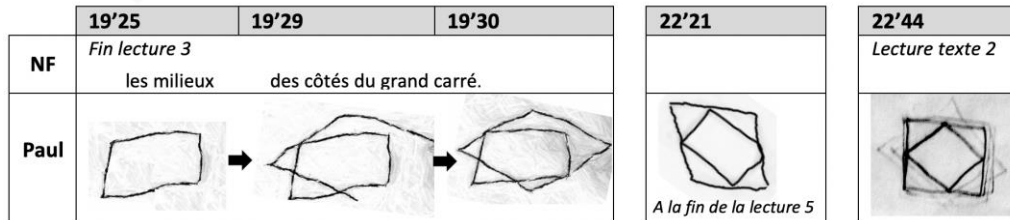


Figure 4. – Processus de production de dessins à main levée de Paul

2. Focus sur la variété des dessins produits

Nous avons étudié les 21 productions de la classe de NF, issues du travail des élèves sur le premier texte, lu plusieurs fois par l'enseignante. Deux élèves ont produit un seul carré, les productions des dix-neuf autres comportent deux carrés².

Pour classer ces productions formées de deux carrés, nous avons retenu trois critères :

- la position relative d'un carré par rapport à l'autre, avec trois valeurs : carrés juxtaposés et carrés emboîtés (parfois précisés par la contiguïté des carrés), carrés imbriqués (figure 6) ;
- l'orientation relative d'un carré par rapport à l'autre, avec deux valeurs : carrés « parallèles » ou carrés « tournés » (l'un par rapport à l'autre, d'un angle souvent proche de 45°) ;
- le respect des incidences : sommet d'un carré sur un côté de l'autre carré (proche du milieu).

Illustrons avec les dessins des élèves étudiés ci-dessus. Le dessin de Arry (figure 2) correspond à « deux carrés emboîtés parallèles non contigus ». Le premier tracé de Chrys (figure 3) correspond à « deux carrés juxtaposés parallèles non contigus », son dernier tracé à « deux carrés emboîtés, tournés, respectant les incidences », qui est le dessin attendu. Le dernier tracé de Paul (figure 4) est du même type.

Dans la classe, les dessins finaux comportant deux carrés se répartissent ainsi :

- 5 productions « carrés juxtaposés parallèles », avec les tailles relatives des deux carrés variables ; ces carrés sont contigus (2 productions) ou non contigus (3 productions) : figure 5
- 2 productions « carrés imbriqués : une « parallèles » (figure 6a), l'autre « tournés » (figure 6b)
- 12 productions « carrés emboîtés » dont 2 « carrés emboîtés parallèles contigus » (figure 7a) et 4 « carrés emboîtés parallèles non contigus » (figure 7b) ; 1 « carrés emboîtés tournés non contigus » et 5 dessins attendus (figure 3, 20'14 et figure 4, 22'44).

² Nous appelons ici « carré » le dessin à main levée d'un carré.



Figure 5. – Exemples de « carrés juxtaposés parallèles »

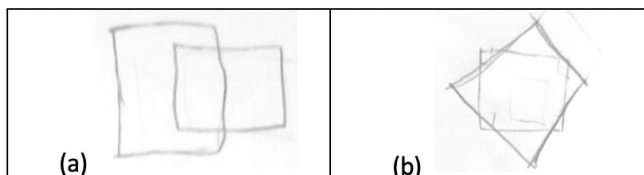


Figure 6. – Les deux productions « carrés imbriqués »

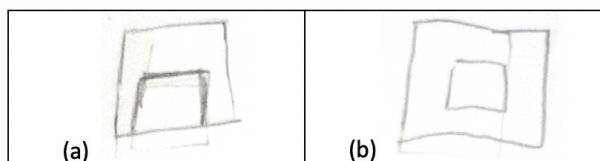


Figure 7. – Exemples de « carrés emboîtés parallèles » contigus ou non

Dans cette classe et pour ce texte, les élèves ont exploré la variété des positions spatiales (topologiques) relatives d'un carré par rapport à l'autre : carrés juxtaposés, imbriqués, emboîtés. Concernant l'orientation spatiale, on ne trouve que des carrés « en position prototypique » (côtés parallèles aux bords de la feuille) et des carrés « sur la pointe » (tournés de 45°).

L'entrée de ces élèves dans la figure semble ainsi se faire avec un point de vue spatial. Il se peut que ce type d'entrée ait été favorisée par la première phrase (« deux carrés : un grand et un petit ») qui les installe dans ce type de rapport à la figure.

Pour beaucoup d'élèves la déconstruction dimensionnelle nécessaire (l'intérêt pour des points milieu, sommet) ne semble pas évidente : pourtant l'enseignante a confirmé que les termes géométriques (milieu, sommet) utilisés dans le texte étaient connus. Il est possible que la complexité sémantique (double désignation) et syntaxique (formulation contractée) de la seconde phrase pointée dans notre analyse *a priori* fasse obstacle à cette déconstruction.

INTERPRÉTATIONS DU TERME « MILIEU »

1. Remarques suite à l'étude de productions des élèves après consigne orale

L'analyse des productions des élèves nous conduit à inférer des interprétations de « moitié » ou de « centre » pour rendre compte de « milieu » et positionner les deux carrés. Décrivons spatialement ces hypothèses d'interprétation. Dans la figure 7a, le petit carré « tient » dans la moitié basse du grand ; dans la figure 7b, le petit carré semble être le grand à l'échelle un demi, il est placé « au centre » du grand carré. Dans la figure 6a, le petit carré semble avoir comme médiatrice un côté du grand carré... Il se pourrait donc que le terme « milieu », dans le contexte observé, occasionne des interprétations autres que géométriques.

Un extrait de la mise en commun va nous conforter dans ces hypothèses.

2. Un extrait de la mise en commun qui révèle des interprétations de milieu

L'enseignante choisit d'organiser une mise en commun après que les élèves ont complété leur fiche et donc « vécu » les deux modalités, écoute de la lecture par l'enseignante, lecture personnelle de chaque texte. Les élèves sont regroupés devant le tableau. Le protocole est le suivant : l'enseignante fait venir un élève (volontaire) au tableau pour dessiner pendant qu'un autre (désigné) lit le texte. Notons qu'elle conserve la modalité orale pour la mise en commun. Elle demande aux élèves de valider la production graphique ou de préciser ce qui ne va pas dans celle-ci. Nous restons centrées sur la production d'un dessin à main levée associé au premier texte (figure 1).

Contexte de l'extrait étudié (annexe 1) : Jim a dessiné au tableau deux « carrés emboîtés tournés avec incidences respectées », un dessin correct donc. Ce dessin est contesté par d'autres élèves, notamment à cause de la forme des carrés qui évoquent plutôt des rectangles. L'enseignante n'intervient pas sur ce point, mais elle engage Jim à reprendre le processus de construction. Jim semble surpris. Dans les échanges qui suivent (annexe 1) le lecteur remarquera les diverses occurrences du terme milieu (en particulier dans les lignes 17 à 27).

Étude des usages de « milieu » dans cet extrait. Rappelons que le milieu (géométrique) met en relation trois points : le milieu est « qualifié »³ (Houdement, 2014) par deux autres points ou par un segment.

Dans l'extrait lignes 17 à 27, nous repérons dans le discours de l'enseignante des usages non géométriques du terme **milieu** : par exemple **milieu du grand carré** qui peut correspondre au centre du carré ou à une zone centrale dans le carré ; **au milieu du** premier (côté) qui semble plutôt évoquer une zone 1D. Ces interprétations relèvent du langage courant certes, mais il nous semble important de les pointer comme des interprétations **spatiales** de milieu car elles permettent de contrôler certains rapports à l'espace, notamment lors de déplacements dans le méso espace. Ces interprétations **spatiales de milieu**, qui relèvent d'erreur sur la dimension des unités figurales en jeu, peuvent brouiller le message géométrique : c'est ce que nous avons constaté dans la partie précédente (Remarques). La précision se nichant dans le choix des articles (milieu des) ou des déterminants (au milieu), l'enseignante dans le feu de l'action peut perdre sa vigilance.

Cette attention aux mots géométriques dépasse la simple connaissance de vocabulaire par les élèves : cela relève de l'usage du vocabulaire en situation, donc plus globalement du langage géométrique. Nous avons pointé au moins deux occurrences de la complexité du langage géométrique, l'une définitoire, l'autre liée aux usages :

- la nécessité d'emboîter des *qualifications*, pour définir certains objets géométriques : milieu d'un côté (qualification associée à milieu) du grand carré (qualification associée à côté).
- l'usage de *formulations contractées* dans les expressions « les milieux des côtés » pour rendre compte d'une caractéristique commune aux milieux de chaque côté du carré ; cet usage peut brouiller la caractéristique du milieu comme point.

Le langage géométrique peut revêtir une syntaxe très complexe, souvent ignorée des enseignants.

CONCLUSION

Revenons tout d'abord sur la spécificité du type de tâche sur un objet géométrique étudié dans cet article. Il s'agit certes d'une conversion d'un texte vers un dessin, mais il est nécessaire de

³ Nous (Houdement, 2014) avons introduit ce terme (*qualification*) et cette compétence (*savoir qualifier*) à propos de la résolution de problèmes arithmétiques. La qualification apparaît aussi cruciale dans le langage géométrique.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

préciser les variables associées : quel texte (syntaxe – sémantique) ? Quelle figure géométrique ? Quelle modalité d'accès au texte ? Quels instruments ?

La complexité du texte (sémantique et syntaxique) a été analysée dans cet article, en relation avec la complexité de la figure. La figure n'est pas connue par la classe. La modalité orale, sans prise de notes autre que le dessin, sollicite la mémoire, y compris pendant la correction au tableau. Modalité orale et première phrase du texte favorisent une approche séquentielle de l'objet géométrique : un carré, puis un autre. Cela et l'absence d'instruments conduit les élèves à faire (et montrer) des hypothèses sur la position relative des deux carrés.

Cette étude nous révèle diverses facettes du rapport des élèves aux objets géométriques. Nous avons en effet relevé des interprétations *de type spatial des figures*, déjà connues des chercheurs avec une dominance de carrés parallèles et une difficulté à tourner le carré. Nous avons aussi mis au jour des interprétations *de type spatial du texte* (aussi par l'enseignante) : le milieu (0D) est vu comme unité figurale 2D ou 1D, le milieu est perçu comme l'état d'un point et pas comme une relation. Nous avons pointé l'insensibilité des élèves (et de l'enseignante dans « le feu de l'action ») à la syntaxe (au milieu, milieu des), la complexité pour les élèves à interpréter une double désignation, des formulations contractées. Remarquons la reformulation implicite de la seconde phrase par l'enseignante, aidante pour les élèves : elle encourage à commencer par les « milieux des côtés du grand carré » (annexe 1, lignes 19-20).

En résumé il nous semble que le dessin à main levée révèle des conceptions premières des rapports des élèves à la figure, qu'il peut engager les élèves dans un rapport topologique à la figure, qu'il bloque les routines de l'action instrumentée. Les élèves ont à mobiliser par eux-mêmes des connaissances techniques embarquées dans l'usage d'un instrument, la déconstruction instrumentale n'est pas sollicitée. *A contrario* on entrevoit ce qu'embarque le dessin instrumenté, notamment des connaissances portées par le bon usage des instruments.

On pourrait croire que la déconstruction dimensionnelle, ici nécessaire, est portée par le terme « géométrique » (croyance d'enseignants) : ce ne semble pas être le cas quand ce terme existe aussi en langage usuel, comme milieu et sommet.

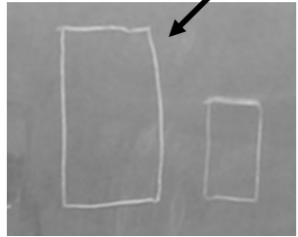
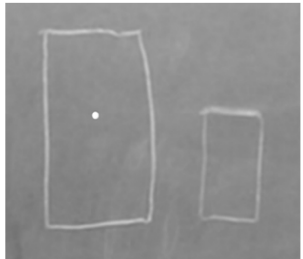
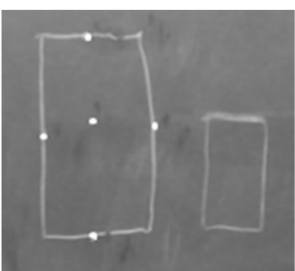
Notre étude nous conduit enfin à souligner l'importance des tâches de conversion d'un texte vers un dessin comme activités fondatrices du passage en Géométrie 2.

RÉFÉRENCES

- ARZARELLO F. (2006). Semiosis as multimodal process, in L.Radford et B.D'Amore (Eds) *Sémiotique, culture et pensée mathématique, Numéro especial, Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-299.
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.
- COPPE, S., DORIER, J.-L., & MOREAU, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^{ème}. *Petit x*, 68, 8-17.
- DENZIN, N. K. (1978). *The research act: a theoretical introduction to sociological methods*. New York : McGraw-Hill
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- DUVAL, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités. Dans Brandt, C. F., & Moretti, M. T. (Orgs.) *As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática* (pp. 227-251). Editions Unijui.
- DUVAL, R. & GODIN (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- HOUEMENT, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM*, 67, 69-84.
- HOUEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. In *Résolution de problèmes mathématiques : regards croisés sur les élèves et les pratiques enseignantes* (pp.7-34). *Le cahier des Sciences de l'Éducation*, 36. En ligne sur http://www.aspe.ulg.ac.be/cah02_156.htm
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1998-1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.
- HOUEMENT C. & PETITFOUR E. (2017). L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 23, 9-40.

- HOUEMENT, C. & PETITFOUR, E. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en didactique des mathématiques*, 40(2).
- LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- LAHANIER-REUTER, D. (1999-2000). Éléments d'analyse de description en mathématiques. *Petit x*, 53, 27-46.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.
- PEIRCE, C.S. (1931 à 1953). *Écrits sur le signe (rassemblés, traduits et commentés par Gérard Deledalle)*. Paris : Éditions du Seuil 1978.
- PETITFOUR, E. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.
- RADFORD, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification. Dans *Sémiotique, culture et pensée mathématique*, Radford, L., D'Amore, B. (eds.). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 103-129.

ANNEXE 1 – EXTRAIT DE LA MISE EN COMMUN

1	<i>Jim au tableau, Chrys lit la première phase</i>	
2	Chrys : la figure est formée de deux carrés, un grand et	
3	un petit	
4	<i>Jim dessine deux « formes ». Il regarde NF.</i>	
5	NF : un grand et un petit.	
6	<i>Elle engage Chrys à lire la suite</i>	
7	Chrys : les sommets du petit carré sont les milieux des	
8	côtés du grand carré	
9	<i>Jim regarde le tableau, sceptique.</i>	
10	NF : qu'est-ce qu'y faut connaître pour tracer ça ?	
11	Jim : il faut savoir si les sommets ...	
12	NF (<i>le coupe</i>) : c'est quoi un sommet ?	
13	Jim (<i>en pointant le sommet haut droit du grand carré</i>) :	
14	un sommet, c'est ça là.	
15	NF : Très bien. Donc on nous a dit qu'les sommets du	
16	petit carré ...	
17	Des élèves : ils étaient des milieux du...	
18	NF : ils doivent être au milieu des côtés du grand carré.	
19	Est-ce que tu peux par exemple repérer le milieu des	
20	côtés du grand carré ?	
21	<i>Jim (toujours un peu perdu) : le milieu...bah ce serait</i>	
22	<i>ici le milieu du ... grand carré (en marquant un point</i>	
23	<i>en zone centrale du carré)</i>	
24	NF : oui, mais nous on t'a pas demandé le milieu du	
25	grand carré	
26	Des élèves : le milieu des côtés	
27	NF : le milieu des côtés . TB	
28	NF : Là (<i>commentant l'action de Jim qui marque au</i>	
29	<i>jugé les 4 milieux</i>) on est au milieu du premier, du	
30	deuxième, du troisième, du quatrième. Et pourquoi on	
31	les a repérés ces milieux-là ? ... parce qu'il faut que...	
32	(<i>réponses d'élèves</i>) faut y positionner le petit carré.	
33	<i>Jim relie alors les quatre milieux du carré</i>	

L'ACTION INCARNEE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION A LA LUMIERE DE L'ANALYSE SEMIOTIQUE DE L'ACTIVITE

Paula Jouannet*

RÉSUMÉ

Adoptant comme hypothèse de travail l'idée que la cognition est incarnée, nous nous interrogeons sur l'implication du corps dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Plus précisément, nous posons la question suivante : dans quelle mesure les actions incarnées sur des objets physiques peuvent-elles soutenir l'émergence du sens mathématique ? Nous rendons compte de deux axes d'entrée à la question. Premièrement, nous proposons une catégorisation d'actions pour aborder la question : actions pragmatiques et actions multiplicatives. Nous opérationnalisons cette catégorisation dans l'analyse d'une tâche multiplicative. Deuxièmement, nous décrivons deux gestes produits par une enseignante de CE2 issus de l'analyse du point de vue sémiotique d'une séance de résolution de dite tâche. La tâche implique l'interaction avec un artefact de manipulation, dénommé boîtes et cubes, et un artefact symbolique, dénommé grille fois-partie-tout. Nous concluons par rapport à la portée didactique de tels éléments à l'égard de la question de départ.

Mots-clefs : Multiplication, division, cognition incarnée, gestes, artefacts.

ABSTRACT

Adopting as a working hypothesis the idea that cognition is embodied, we question the involvement of the body in the teaching and learning of multiplication and division operations. Specifically, we pose the following question: To what extent can embodied actions on physical objects support the emergence of mathematical meaning? We report two lines of entry to the question. First, we offer a categorization of actions to address the issue: pragmatic actions and multiplicative actions. We operationalize this categorization in the analysis of a multiplicative task. Secondly, we describe two gestures produced by a CE2 teacher resulting from the analysis of the semiotic point of view of a session of resolution of said task. The task involves interaction with a manipulative artifact, referred to as boxes and cubes, and a symbolic artifact, referred to as a times-parts-wholes grid. We conclude in relation to the didactic scope of such elements with regard to the starting question.

Keywords: Multiplication, division, embodied cognition, gestures, artifacts.

PROBLEMATIQUE

Le recours à l'action sur des objets physiques et aux situations quotidiennes pour l'enseignement de la multiplication et de la division à l'école primaire est largement valorisée dans le cadre scolaire et au sein de la recherche en didactique des mathématiques (Dias et Durand-Guerrier, 2005). Ces ressources sont comprises dans la recherche développée par Fischbein et collègues – qui procureront l'une des recherches fondatrices du domaine de recherche du champ multiplicatif aux États-Unis (Fischebein et al., 1985) – en tant que *modèles intuitifs des opérations arithmétiques*. Le concept de modèle intuitif est fondamental dans les recherches sur l'intuition en mathématiques développées par Fischbein (Fischbein, 1987). Les modèles intuitifs des opérations arithmétiques correspondent à la contrepartie active de celles-ci, c'est-à-dire aux actions sur des objets physiques et aux situations qu'elles déterminent. Il s'agit de l'addition itérée pour la multiplication et du partage et du groupement pour la division. Ces modèles ont une longue influence dans l'enseignement de ces opérations arithmétiques.

Bien que l'ancrage du corps dans l'intuitif ait fourni un angle d'accès à la question de l'implication du corps dans l'apprentissage, cette perspective continue à reproduire l'inamovibilité de la frontière entre les ressources corporelles et l'appréhension conceptuelle des concepts mathématiques. En effet, le clivage cartésien classique esprit-corps dans lequel

* Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR

s'insère cette idée est remis en question depuis des décennies (Lakoff, 2012 ; Varela, Thomson & Rosch, 1991). Le dualisme cartésien s'insère dans une tradition de longue date de la cognition qui remonte à Platon, selon laquelle la pensée est une activité mentale pure, quelque chose d'immatériel, indépendant du corps, se produisant dans la tête (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). Surmonter la perspective dualiste ne revient néanmoins pas à affirmer que le corps joue un rôle important dans la cognition, comme nous rappelle Radford (2009). En effet, bien que l'épistémologie piagetienne souligne le rôle des actions sensoriello-motrices, elle peut être critiquée depuis l'approche de la cognition incarnée dans la mesure où elle réduit l'implication du corps à une voie éphémère vers l'abstraction. Nous considérons qu'il s'agit plutôt d'aborder la question de savoir comment est-ce que le corps est impliqué dans l'apprentissage, en considérant le discours, les gestes et les actions incarnées sur des artefacts comme des éléments constitutifs de la pensée. De plus en plus utilisée en éducation mathématique, la perspective de la cognition incarnée reste par ailleurs très peu fréquentée en France, et quelque part assimilé à l'intuitif (Rogalski, 2015). Il nous semble donc que la question de l'implication du corps dans l'apprentissage peut être repensée depuis une perspective incarnée. Nous posons ainsi la question : comment les actions incarnées peuvent-elles participer au processus d'enseignement et d'apprentissage des opérations de multiplication et de division ?

CADRE THEORIQUE

1. Apprentissage d'une pensée multiplicative

Aborder la question de l'implication du corps dans l'apprentissage à partir d'une perspective incarnée de la cognition, avec les implications épistémologiques que cela implique. La considération du corps comme élément constitutif de l'acte cognitif, nous a conduit à échapper aux perspectives constructivistes qui réduisent son rôle aux premières étapes de l'apprentissage. C'est la raison pour laquelle notre recherche s'inscrit dans le cadre d'une théorie socio-culturelle de l'éducation : la théorie de l'objectivation. La théorie de l'objectivation (TO) est une théorie éducative largement développée par Radford (Radford, 2011, Radford, 2018 ; Radford 2020). La TO prend appui sur les travaux de psychologie historico-culturelle de Vygotsky et de la théorie de l'activité de Léontiev. Dans une perspective socioculturelle, la TO fournit un cadre conceptuel pour interpréter théoriquement les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En particulier, la TO définit l'apprentissage comme un processus d'acquisition par l'élève de formes culturelles de réflexion. L'élève parvient, au cours du processus, à « donner du sens aux objets matériels et conceptuels qu'il rencontre dans sa culture » (Radford, 2018, p. 64).

Du point de vue de la théorie de l'objectivation, nous comprenons l'apprentissage des opérations de multiplication et de division comme une rencontre avec un objet culturel, dans ce cas, ce que nous appelons une pensée multiplicative. Cette pensée multiplicative correspond à une manière de penser et d'agir sur les grandeurs, constituée par des pratiques historiques et culturelles et caractérisée par la médiation par des artefacts contemporains de manipulation et des artefacts symboliques. Dans le contexte de l'apprentissage des opérations de multiplication et de division, nous nous intéressons à la relation qu'entament des grandeurs quand l'une est un multiple entier de l'autre. Dans ce cas, nous dirons que les grandeurs g et g' et l'entier n constituent une relation multiplicative¹. Pour interpréter cette relation, nous reprenons l'idée de mesure qui apparaît dans l'algorithme d'Euclide, qui est associée à la soustraction itérée ou à l'addition itérée d'une quantité. La relation multiplicative entre

¹ La notion de relation multiplicative peut s'étendre aux cas où la raison n'est pas un nombre entier.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

grandeurs nous semble condenser en quelque sorte cette action tant au niveau de la manipulation qu'au niveau symbolique.

L'apprentissage a lieu, du point de vue de la TO, à l'intérieur d'une activité. Plus précisément, à travers des *déterminations concrètes* que le savoir mathématique acquiert au moyen des ressources sémiotiques. Pour reprendre les mots de Radford : « Gestes, langage, symboles se convertissent ainsi en constituants mêmes de l'acte-cognitif » (Radford, 2011, p. 83). En conséquence, notre accès aux apprentissages est donné par l'activité sémiotique en classe dans laquelle s'implique l'enseignant·e et les élèves.

2. Actions pragmatiques et actions multiplicatives

Pour aborder la question de l'implication du corps, du point de vue des actions incarnées, nous prenons appui sur la distinction proposée par Kirsh et Maglio (1994) dans la théorie de l'action : les actions pragmatiques et les actions épistémiques. Ces chercheurs estiment que la catégorisation offre une perspective pertinente et innovante pour l'interprétation des actions, en surmontant les réductionnismes des récits traditionnels. Selon Kirsh et Malio, la théorie de l'action réduit les actions à la seule fonction de changer le monde. Ils appellent les actions ayant cette fonction des actions pragmatiques. En revanche, certaines actions sont mieux comprises, affirment Kirsh et Maglio (1994), comme ayant pour but d'utiliser le monde pour améliorer la cognition : c'est le cas des actions épistémiques. Elles permettent, par leur réalisation, de découvrir des informations cachées, et d'aider les processus cognitifs tels que la reconnaissance et la recherche.

En reprenant ces travaux, nous comprenons les actions incarnées dans leur interprétation au sens quotidien et comme ayant une portée multiplicative, selon si elles sont mobilisées pour éclaircir l'inconnue dans une relation multiplicative. Autrement dit, la réalisation de l'action poursuit l'objectif de rendre apparent la relation multiplicative entre grandeurs à travers les modifications sur l'organisation des objets.

Les questions que nous abordons ici impliquent deux aspects. D'une part, nous nous interrogeons sur la pertinence de la distinction des actions dans la résolution de tâches multiplicatives. D'autre part, en nous concentrant sur les enseignant·e·s nous nous demandons : est-il possible d'observer chez des enseignant·e·s une activité différenciée face à ces deux dimensions d'actions ? Quelles ressources sémiotiques, y compris l'utilisation d'artefacts, est-il possible d'observer chez des enseignant·e·s pour aborder les actions dans ces deux dimensions ? Et plus particulièrement, comment les gestes des enseignant·e·s peuvent-ils intervenir ?

METHODOLOGIE

Pour accéder à nos questionnements, nous allons nous baser sur une analyse d'une tâche multiplicative. Les activités en classe que nous analysons à cette occasion ont été faites avec l'objet de provoquer une rencontre entre les élèves et la pensée multiplicative telle que nous la concevons. Cette rencontre est médiatisée par l'utilisation d'artefacts de manipulation et symboliques, que nous avons conçus dans le cadre de la recherche développée par Jouannet (2021). Deux artefacts ont été utilisés pour réaliser ces tâches : un artefact de manipulation dénommé boîtes et cubes et un artefact symbolique dénommé grille fois-partie-tout. Nous analysons l'activité qui a eu lieu dans une classe de CE2 d'une école primaire à Paris. Plus précisément, dans le cadre d'un travail collaboratif avec une des enseignant·e·s d'une classe de CE2, nous avons élaboré des tâches dont la résolution est focalisée sur une ou plusieurs dimensions de la pensée multiplicative. Ici nous analysons une tâche de division, proposée en utilisation des deux artefacts. La séance a eu lieu en avril de l'année 2019. Nous avons utilisé deux caméras et deux dictaphones pour l'enregistrer. Nous avons mis les caméras au fond de

la classe aux moments des discussions collectives, lors de la présentation de la tâche et la synthèse de la séance, afin de saisir la globalité de la séance. Au moment du travail en groupe, nous avons installé les caméras sur deux groupes d'élèves.

1. Artefacts

Boîtes et cubes.

L'artefact de manipulation boîtes et cubes consiste en boîtes en plastique de différentes tailles qui sont remplies de petits cubes en bois d'arête 1 cm environ. La figure 1 présente une image du matériel. Les boîtes en plastique utilisées sont des prismes carrés droits ouverts sur une face et ayant deux faces carrées qui coïncident avec celles des cubes. Les boîtes sont remplies avec un nombre fixe de petits cubes. Les tâches prescrites avec l'artefact impliquent le remplissage de boîtes et la construction de lignes avec les boîtes en les mettant l'une à côté de l'autre.

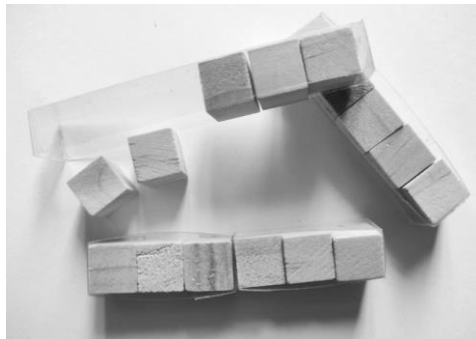


Figure 1. – Artefact boîtes et cubes, composé de boîtes en plastique de taille variable et de petits cubes en bois.

Le savoir mathématique évoqué par l'utilisation de l'artefact implique des concepts mathématiques géométriques et de grandeurs discrètes et continues, ainsi que les relations entre grandeurs. Les cubes engagent au moins deux grandeurs : d'une part, leur quantité, c'est-à-dire la grandeur discrète correspondant à la taille de la collection de cubes ; et, d'autre part, la longueur, une grandeur continue, pour la longueur du côté. Dans ce cas, le côté du cube est interprété en tant que segment de droite. Les boîtes évoquent à la fois leur quantité et la grandeur discrète correspondant à la quantité de cubes à l'intérieur. En termes de longueur, il s'agit de la longueur qui mesure l'arête d'un cube et la longueur de l'arête de la boîte. Enfin, les lignes évoquent trois grandeurs discrètes : leur quantité, la quantité de boîtes qui les constituent et le total de cubes à l'intérieur des boîtes. La quantité de cubes dans la ligne est en relation multiplicative avec la quantité de boîtes dans la ligne et la quantité de cubes par boîte. De même, la longueur de la ligne, la quantité de boîtes et la longueur des arêtes de cubes constituent une relation multiplicative. Les significations mathématiques que nous avons mentionnées ne sont pas transparentes : la simple action de remplir les boîtes des cubes ou de construire des lignes avec les boîtes n'implique pas que ces significations soient saisies.

Grille fois-partie-tout.

L'artefact symbolique grille fois-partie-tout consiste en un diagramme composé de deux rectangles et un cercle. Il a été conçu dans le but de représenter des relations multiplicatives entre grandeurs, en fonction de l'emplacement des signes dans le diagramme. Les rectangles sont accolés horizontalement par la largeur, et le cercle est disposé au-dessus de la case rectangulaire de gauche, plus petite que celle de droite. Le cercle s'appelle « nombre de fois », le rectangle de gauche s'appelle « partie », et le rectangle de droite, « tout ». Nous présentons Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

la représentation d'une relation multiplicative évoqué par le matériel de manipulation dans le diagramme dans la figure 2.

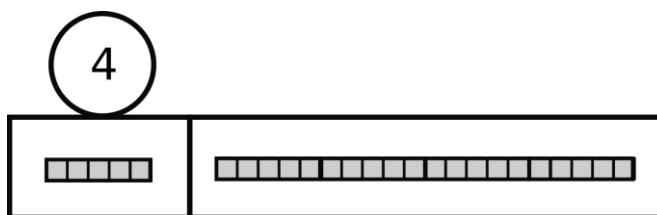


Figure 2. – Représentation de la relation multiplicative constitué par la quantité de cubes dans une ligne construite avec quatre boîtes de 5 cubes.

2. Tâche

Nous présentons l'énoncé de la tâche dans la figure 3.

Énoncé :

Pour commencer, vous construisez une ligne de 7 boîtes de 10 cubes + 2 cubes isolés.

- 1) Vous devez construire une ligne avec la même quantité de cubes (même longueur) en utilisant seulement 6 boîtes. Combien de cubes contiendra chaque boîte ?

- Complétez la grille fois-partie-tout en dessinant les boîtes (grande grille)
- Complétez la grille fois-partie-tout avec des nombres (petite grille)
- Écrivez le calcul correspondant (dans le rectangle)

- 2) Si maintenant vous partagez cette ligne (question 1) en 3 lignes de même longueur, combien de cubes contiendra chaque ligne ?

- Complétez la grille fois-partie-tout en dessinant les boîtes (grande grille)
- Complétez la grille fois-partie-tout avec des nombres (petite grille)
- Écrivez le calcul correspondant (dans le rectangle)

- 3) Entoure la bonne réponse. Dans une grille fois-partie-tout :

-Pour répondre à la question 1, j'ai cherché : la partie le nombre de fois le tout

-Pour répondre à la question 2, j'ai cherché : la partie le nombre de fois le tout

Figure 3. – Énoncé de la tâche prescrite aux élèves.

Le support matériel pour la résolution de la tâche, donné à chaque groupe d'élèves, est constitué par : deux gobelets avec 72 cubes chacun ; 10 boîtes de 10 cubes ; 6 boîtes de 12 cubes ; et la feuille de réponses. Les 6 boîtes de 12 cubes sont à donner seulement une fois pour les élèves ont répondu à la première question. Quant à la feuille de réponses, elle contient pour les deux premières questions : une grande grille qui doit contenir les dessins des lignes de boîtes (item a des questions 1 et 2) ; une grille plus petite qui doit être complétée avec des nombres (item b des questions 1 et 2) ; et un emplacement rectangulaire pour y écrire le calcul correspondant (item c des questions 1 et 2).

ANALYSE

Nous rendons compte de quelques éléments de l'analyse *a priori* de la tâche qui permettent de rendre compte de la pertinence de la distinction des actions du point de vue de leur fonction. Il s'agit du premier aspect de nos questions. Pour répondre aux questions centrées sur les enseignant·e·s, nous présentons l'analyse de deux gestes issue de l'analyse de la dimension sémiotique de l'activité. Il faut prendre en compte que l'activité en classe est l'unité

méthodologique d'analyse depuis la TO (Radford & Sabena, 2015). Pour l'analyse de l'activité, nous avons utilisé dans nos analyses des outils d'analyse sémiotiques provenant de la psycholinguistique (McNeill, 2005), les faisceaux sémiotiques (Arzarrello, 2006) et la méthodologie utilisée dans la TO (Radford & Sabena, 2015). Dans le cadre des travaux de McNeill, nous considérons les gesticulations, c'est-à-dire les gestes co-produits avec la parole qui ont une fonction communicative. Dans ce type de gestes, nous prenons appui sur la catégorisation suivante de gestes : les gestes déictiques, les gestes iconiques. Les premiers sont généralement utilisés pour indiquer. Les gestes iconiques représentent des images d'objets ou des actions concrètes. Petitfour réserve le terme d'iconique pour faire référence aux gestes qui véhiculent des « représentations corporelles, statiques ou dynamiques, des objets, relations ou propriétés géométriques » (Petitfour, 2015, p. 133). Les gestes métaphoriques génèrent des images des idées abstraites.

1. Analyse a priori

Nous allons donner des éléments d'analyse de deux sous-tâches : la sous-tâche ST1, déterminer la taille de boîtes qu'il faut utiliser pour construire une ligne avec 6 boîtes qui ait la même quantité de cubes que la ligne de boîtes de 10 et la construire effectivement ; et la sous-tâche ST2, déterminer la quantité de cubes dans chaque ligne qui résulte de partager la ligne en 3. Pour la sous-tâche ST1, notons d'abord que 6 boîtes de 10 peuvent être partagées en 6 groupes, il reste 12 cubes. On peut alors ajouter 2 cubes à chaque groupe de 10 cubes. La relation multiplicative sous-jacente est ainsi constituée par la grandeur 72 cubes (le tout), le nombre 6 (le nombre de fois), et la grandeur 12 cubes (la partie). Pour la sous-tâche ST2, il suffit de remarquer que chacune des trois lignes doit contenir 2 boîtes de 12 cubes, ce qui donne 24 cubes par ligne. Dans ce cas, 72 cubes est le tout, 3 est le nombre de fois et 24 cubes est la partie.

L'analyse de la tâche nous permet d'apprécier différentes formes d'implication de l'action incarnée dans la résolution de problèmes de partage de division, associées à différentes manières de percevoir les relations multiplicatives sous-jacentes. Pour ST1, le tout peut être réarrangé en fonction de la valeur du nombre de fois, pour obtenir une forme équivalente à celle qui devrait être obtenue en itérant la boîte dont la taille est inconnue. La partie reste ainsi inconnue lors de l'exécution de l'action incarnée de partage. L'action incarnée de partage a une fonction multiplicative dans la mesure où elle devient un outil pour révéler la quantité qui joue le rôle de la partie dans la relation multiplicative. Pour la résolution de la sous-tâche ST2, la manipulation n'est pas orientée vers la relation multiplicative entre grandeurs : c'est le sens quotidien de l'action de partage qui sous-tend la résolution. C'est l'énoncé qui suggère l'action. Les sous-tâches ST1 et ST2 révèlent donc des différences cruciales dans l'implication de l'action de partage, bien qu'il s'agisse dans les deux cas de problèmes de division partage. La différence réside dans le degré de conscience des relations multiplicatives que la réalisation de l'action incarnée de partage exige.

2. Analyse de gestes

Nous présentons l'analyse de deux gestes produits par l'enseignante lors de la synthèse. Nous avons catégorisé ces deux gestes en deux types : le geste iconique de distribuer et le geste de distribution en ligne. Le geste iconique de distribuer est effectué avec la main droite de l'enseignante plus ou moins détendue, avec l'index légèrement en saillie. Approximativement sur une ligne horizontale imaginaire, l'enseignante exécute rapidement des petits coups depuis son tronc vers l'extérieur (voir figure 4). Le geste iconique de distribuer a été coordonné avec la phrase « vous les avez distribués ». Comme le geste d'organiser, le mot « les » remplace la grandeur 72 cubes. Le geste renvoie figurativement à l'action quotidienne de distribuer.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.



Figure 4. – Capture d'écran lors de la production du geste iconique de distribuer. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste.

Le geste iconique de distribution en ligne est produit deux fois, coordonné avec la phrase « un cube, un cube, un cube, un cube, un cube, un cube », la première fois, et « deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes », la seconde fois. Le majeur de la main de l'enseignante produit six petits coups de gauche à droite du point de la classe. Chaque coup est coordonné avec une phrase évoquant une quantité de cubes (un cube ou deux cubes, respectivement) et indique les premiers cubes des boîtes qui forment la ligne de boîtes dans le tableau. Le geste a ainsi une fonction indicative. Nous présentons une capture d'écran de la production du geste dans la figure 5.

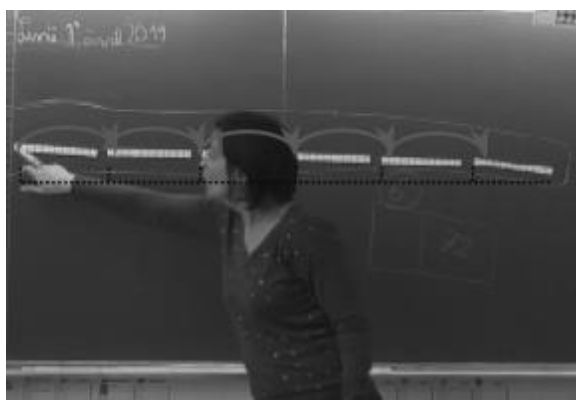


Figure 5. – Capture d'écran lors de la production du geste de distribution en ligne. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste. Les lignes pointillées bleues représentent la structure visuospatiale à partir de laquelle nous interprétons le geste.

La quantité de cubes énoncée correspond à la quantité de cubes signalée dans les boîtes si elles sont remplies de gauche à droite. Avec l'index légèrement en saillie, la main est dans la position du geste iconique de la distribution. La parole et le geste sont coordonnés pour montrer chaque fois les grandeurs qui sont induites par l'action incarnée de distribution ou de partage. Il existe également un accord entre la valeur numérique du nombre de fois, le nombre de coups du geste, et le nombre de fois que les expressions « un cube » ou « deux cubes » sont prononcées. Il nous semble que ces ressources sémiotiques sont coordonnées pour révéler la partie par le biais de l'action incarnée sur les cubes constituant le tout, tout en respectant le nombre de fois. Dans une fonction multiplicative, l'action incarnée de partage sert à donner

du sens à la relation multiplicative entre les grandeurs. Le geste a alors une dimension métaphorique.

CONCLUSIONS

Les questions que nous posons concernent, d'une part, la pertinence du cadre des actions pragmatiques et des actions multiplicatives pour la réflexion sur la résolution de problèmes. Nous avons posé d'autre part des questions sur la manifestation de ces actions chez les enseignant·e·s. Dans une perspective incarnée de la cognition, ces questions sont inscrites dans l'étude de l'apprentissage d'une pensée multiplicative du point de vue de la théorie de l'objectivation. Notre accès à ces questions est au moyen des analyses concernant une tâche qui utilise deux artefacts : l'artefact de manipulation *boîtes et cubes* et l'artefact symbolique *grille fois-partie-tout*. Nos analyses consistent à une analyse *a priori* de la tâche et une analyse sémiotique de l'activité.

Notre analyse *a priori* de la tâche suggère différents types d'actions incarnées dans la résolution de la tâche. La première sous-tâche peut être résolue par manipulation au moyen d'une action incarnée multiplicative de partage. L'action incarnée est dans ce cas orientée vers l'éclairage de la partie dans la relation multiplicative sous-jacente. En revanche, la deuxième sous-tâche peut être résolue à travers une action pragmatique de partage, qui permet ultérieurement de rendre compte de la relation multiplicative entre grandeurs. L'approche de l'action incarnée permet ainsi un degré de subtilité intéressant pour rendre compte des relations complexes entre le conceptuel et le matériel. Comme l'analyse *a priori* de la tâche multiplicative suggère, ce cadre s'avère utile pour cerner les enjeux mathématiques qui peuvent être impliqués dans la manifestation des actions incarnées. Il nous semble que le cadre est potentiellement utile à l'élaboration de tâches qui cherchent l'apprentissage des opérations de multiplication et de division dans le contexte de manipulation.

L'analyse sémiotique de l'activité dans une classe de CE2, centrée sur les gestes, nous a permis d'identifier deux types de gestes de l'enseignante : le geste iconique de distribuer et le geste de distribution en ligne. Nous constatons des différences structurales importantes du geste de distribution en ligne avec le geste iconique de distribuer, dont la signification est ancrée au quotidien. Ces différences soulignent l'intervention de la fonction multiplicative de l'action incarnée de partage dans le geste de distribution en ligne, et donc d'une activité différenciée de l'enseignante face aux deux dimensions d'actions identifiées. L'enseignante adapte le geste pour le coordonner sensuellement avec d'autres ressources sémiotiques, notamment l'artefact grille fois-partie-tout, afin de présenter une manière incarnée de percevoir la division partage. Autrement dit, le sens mathématique de l'opération en termes de relation multiplicative émerge dans la coordination de ces ressources sémiotiques, dont le corps et les actions incarnées.

RÉFÉRENCES

- ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1), 267-299.
- DIAS, T., & DURAND-GUERRIER, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60, 61-78.
- FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.
- JOUANNET (2021) *Les actions incarnées et l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions partage et groupement*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7, 2021.
- KIRSH, D., & MAGLIO, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive science*, 18(4), 513-549.
- LAKOFF, G. (2012). Explaining embodied cognition results. *Topics in cognitive science*, 4(4), 773-785.
- MCNEILL, D. (2005). *Gesture and thought*. University of Chicago press.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- PETITFOUR, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition cm2-6ème*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7.
- RADFORD, L. (2009). Why do gestures matter? sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational studies in mathematics*, 70(2), 111–126.
- RADFORD, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : La théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1–27.
- RADFORD, L. (2018). Une théorie vygotkienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*, 314–332.
- RADFORD, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* 21, 19–41.
- RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009a). Introduction: beyond words. *Educational studies in mathematics*, 70(2), 91–95.
- RADFORD, & SABENA, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157-182). Springer, Dordrecht.
- ROGALSKI, J. (2015). Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene... ? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* 13, 1–71
- ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.
- VANDEBROUCK, F., & ROBERT, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2–3), 333-382.
- VARELA, F. J., THOMSON, E., & ROSCH, E. (1993). *L'inscription corporelle de l'esprit : sciences cognitives et expérience*

CRITERES POUR CARACTERISER LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EFFECTIVEMENT PRODUIT

Assia Nechache*

RÉSUMÉ

Dans le cadre de cette contribution, nous allons présenter les critères qui ont été utilisés pour caractériser des formes de travail mathématique effectivement produites. Ces critères ont été définis dans le cadre de la théorie des Espaces de Travail Mathématique. Ils ont été utilisés dans une étude portant sur le travail géométrique effectivement produit par les étudiants inscrits en première année de master enseignement. L'analyse du travail à l'aide de ces critères a permis d'identifier des formes de travail géométrique pratiquées par les étudiants. L'usage de ces critères dans cette étude a également permis d'identifier des formes erronées mais très fréquentes de travail géométrique réalisé par des étudiants.

Mots-clefs : Travail mathématique, caractérisation, Espace de Travail Mathématique

ABSTRACT

In this contribution, we will present the criteria that have been used to characterize effectively produced forms of mathematical work. These criteria have been defined in the framework of the theory of Mathematical Work Spaces. They have been used in a study of the geometric work effectively produced by students enrolled in the first year of a master's degree in teaching. The analysis of the work using these criteria allowed the identification of forms of geometric work practiced by the students. The use of these criteria in this study also allowed us to identify incorrect but very frequent forms of geometric work performed by students.

Keywords: Mathematical work, characterization, Mathematical Workspace

INTRODUCTION

Nos études sur la résolution de problèmes géométriques par des étudiants-enseignants du primaire français dans l'environnement papier crayon nous ont permis d'identifier des formes erronées mais très fréquentes de travail géométrique réalisé par ces étudiants (Kuzniak & Nechache, 2020). Ces formes, sont principalement caractérisées par le fait que ces étudiants semblent respecter le travail géométrique standard qu'ils ont rencontré au cours de leur scolarité mais, en fait, le résultat qu'ils ont produit n'est pas correct. Leur travail géométrique semble répondre à certaines attentes institutionnelles sans être mathématiquement correct par manque de moyens de contrôle. La théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM) a été utilisée pour analyser et caractériser ces formes de travail. Pour ce faire, trois critères ont été construits dans le cadre de cette théorie qui s'est révélée (ou qui se sont révélés) utile(s) pour évaluer le travail géométrique.

Dans le cadre de cette contribution, nous allons exposer ces critères ainsi que la méthodologie utilisée pour évaluer le travail mathématique effectivement produit. A partir des exemples de productions d'étudiants, nous allons présenter la manière dont les trois critères ont été utilisés pour caractériser des formes de travail mathématique pratiquées.

* LDAR, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France

TRAVAIL MATHÉMATIQUE DANS LA THÉORIE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

1. Travail mathématique

La théorie des Espaces de Travail Mathématique se concentre principalement sur l'étude du travail mathématique dans le contexte scolaire dans lequel les élèves et les enseignants sont effectivement engagés. Le travail mathématique est considéré comme un travail intellectuel qui implique une activité cognitive significative dont l'orientation et le but sont définis et soutenus par les mathématiques. Dans ce cadre, les mathématiques sont envisagées comme un travail humain spécifique et, par conséquent, le travail mathématique est considéré selon deux aspects : cognitif et épistémologique.

Dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), le travail mathématique est conçu comme un ensemble d'actions organisées avec un but à atteindre, ce qui est permis de mettre l'accent sur la dualité entre les processus du travail et les résultats du travail (Kuzniak, & Nechache, 2021). Les résultats produits par le travail mathématique sont reliés aux contenus et les processus sont reliés aux structures et formes engendrées par ce travail (ibid., 2021).

2. La théorie des Espaces de Travail Mathématique

Un Espace de Travail Mathématique désigne une structure abstraite organisée de manière à favoriser le fonctionnement du travail mathématique dans un domaine spécifique (géométrie, probabilités, etc.) dans un contexte scolaire. Cet espace est basé sur l'articulation de deux plans fondamentaux :

Un **plan épistémologique** qui permet de structurer le contenu mathématique. Il est composé de trois pôles en interactions et organisé selon des critères mathématiques : un ensemble d'objets concrets et tangibles, appelé représentamen ; un ensemble d'artefacts - tels que des instruments de dessin ou des logiciels - ; un référentiel théorique basé sur des définitions, des propriétés et des théorèmes. Ce plan a pour fonction de décrire le travail mathématique dans sa dimension épistémologique.

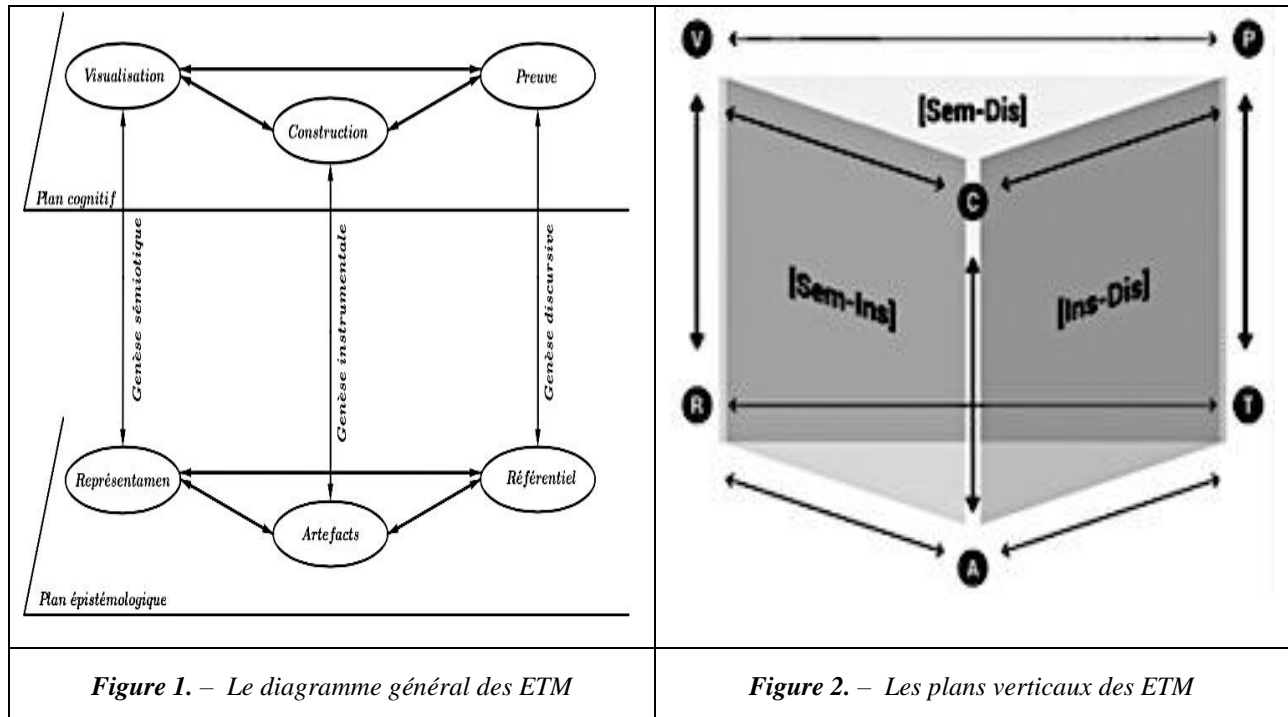
Un **plan cognitif** qui permet de rendre compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche. Il est composé de trois processus cognitifs qui sont en étroite relation avec les trois pôles du plan épistémologique. Ces processus sont : la visualisation qui concerne l'interprétation des signes ; la construction qui renvoie au mode de raisonnement et dépend des artefacts utilisés et des techniques associées ; et enfin le processus de preuve, qui passe par des processus de validation et repose sur les éléments du référentiel théorique.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles des deux plans :

- Une genèse sémiotique (Sem) qui met en relation les signes et les représentations avec les processus de visualisation. Elle est fondée sur les registres de représentation sémiotiques qui donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- Une genèse instrumentale (Ins) qui établit le lien entre les artefacts et les processus de construction. Elle a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- Une genèse discursive de la preuve (Dis) qui met en lien le référentiel théorique avec les processus de preuve. Elle permet de donner un sens aux propriétés (référentiel

théorique) pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique et les validations discursives.

L'élaboration du travail mathématique est perçue comme la mise en réseau de ces trois genèses. L'articulation entre les différentes composantes et genèses de l'ETM favorisent ainsi la circulation du travail mathématique entre le plan épistémologique et plan cognitif de l'ETM (Figure 1).



La circulation du travail mathématique est aussi visualisée à travers les interactions entre les différentes genèses. Ces interactions sont caractérisées par trois plans verticaux : sémiotique-instrumental (noté [Sem-Ins]), instrumental-discursif (noté [Ins-Dis]), et sémiotique-discursif (noté [Sem-Dis]) (Coutat & Richard, 2011).

La théorie des ETM fournit des outils méthodologiques permettant d'étudier le travail mathématique. Cette étude passe par la description, la caractérisation et la formation et/ou transformation du travail mathématique dans un contexte éducatif. La **description** du travail mathématique vise à rendre compte du travail effectué dans un contexte éducatif spécifique et poursuit un double objectif. Le premier est d'identifier le rôle de chacune des trois genèses de l'ETM dans le travail mathématique, et la circulation de ce travail au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques. Le second objectif porte sur l'identification des éventuels blocages et malentendus qui peuvent surgir au cours de la résolution des tâches. La **caractérisation** du travail mathématique a pour but d'identifier certains invariants à partir de la description du travail. La caractérisation permet alors de déduire des formes de travail mathématique lorsque cela est pertinent. La **(trans)formation** du travail mathématique vise à construire une nouvelle structure pour le plan épistémologique du travail ou à fournir une nouvelle structure pour le plan cognitif.

La description et la caractérisation du travail mathématique sont donc liées à son identification et, au-delà, à sa compréhension. La (trans) formation se réfère à la construction des connaissances et des compétences. Dans le cadre de cet article, nous allons nous centrer sur la description et la caractérisation du travail mathématique.

LA DESCRIPTION ET LA CARACTERISATION DU TRAVAIL MATHEMATIQUE

1. Critères de caractérisation

La caractérisation du travail mathématique est basée sur l'analyse des processus et des résultats qui émergent lors de la résolution des tâches et des problèmes. Pour ce faire, trois critères ont été définis dans le cadre de la théorie des ETM (Kuzniak & Nechache, 2021) qui sont : **conforme**, **correct** et **complet**. Ces critères prennent en compte le(s) paradigme(s) (Houdement & Kuzniak, 2006) qui guident le travail mathématique et les composantes de l'ETM mobilisées dans l'élaboration de ce travail. Ils servent aussi à évaluer respectivement le processus, le résultat et la circulation du travail mathématique dans l'ETM. Le travail mathématique est dit *conforme*, lorsque les processus du travail mathématique sont valides, i.e ils sont conformes aux règles qui chapotent le ou les paradigmes qui guide ce travail. Le travail est dit *correct*, lorsque les résultats produits sont mathématiquement exacts selon le point de vue mathématique retenu, i.e ils sont en accords avec le référentiel choisi dans le plan épistémologique. Enfin, le travail mathématique est qualifié de *complet*, lorsque sa circulation est assurée entre toutes composantes de l'ETM, autrement dit lorsque toutes les genèses de l'ETM sont mobilisées au cours de la résolution de la tâche mathématique. Dans le cas où seulement une genèse ou deux genèses sont mobilisés au cours de la réalisation de la tâche, on dit que le travail mathématique est confiné sur une genèse ou un plan défini par ces deux genèses.

L'usage de ces trois critères du travail effectivement produit repose sur une méthodologie d'analyse qui est présentée dans la section suivante.

2. Méthodologie pour décrire le travail mathématique

La description du travail mathématique porte sur l'analyse des activités cognitives de sujets qui réalisent effectivement une tâche (ou des tâches) mathématique (s). Selon Leplat (2004), les activités cognitives d'un sujet au travail ne sont pas directement observables. Mais elles sont déduites des actions visibles d'un sujet lorsqu'il est confronté à des tâches mathématiques. Or, dans la théorie des ETM, la description du travail d'un sujet passe par l'identification du contenu mathématique mis en jeu dans les tâches, mais aussi les processus cognitifs mobilisés. L'accès aux processus cognitifs du sujet est basé sur les actions mathématiques lorsque le sujet réalise une tâche mathématique (Nechache & Gomez Chacon, 2022). Ces actions sont les traces réelles et observables de l'activité du sujet. Dans le cadre de la théorie des ETM, Kuzniak et Nechache (2021) ont conçu une méthode d'analyse du travail inspirée de l'analyse cognitive des tâches (Darses, 2001). Telle qu'elle est conçue, la méthode d'analyse est basée sur un découpage du travail mathématique de l'individu en épisodes. Chacun de ces épisodes correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'individu pour réaliser la tâche mathématique qui lui a été prescrite. Chaque épisode comprend une séquence d'actions mathématiques utilisées pour résoudre la tâche. Les actions mathématiques sont, par la suite, décrites en termes des composantes et de processus cognitifs et épistémologiques des plans de l'ETM.

Cette méthode est constituée de trois étapes. La première étape consiste à effectuer une analyse descendante à partir des productions (orales ou écrites) du sujet. Elle vise à repérer les séquences d'actions et les épisodes planifiés par le sujet pour accomplir la tâche prescrite. Ces actions sont ensuite interprétées selon les composantes épistémologiques et les processus cognitifs de l'ETM.

La deuxième étape, est une analyse ascendante qui vise à produire un aperçu synthétique des épisodes planifiés par le sujet, et à déduire l'organisation logique de ses actions et son parcours cognitif.

La dernière étape, consiste, à partir des observations faites lors des deux premières analyses, à appliquer les trois critères pour évaluer le travail afin de mettre en évidence ses caractéristiques. Il s'agit ainsi, d'estimer si les processus de travail sont conformes à tout ou partie de l'un des paradigmes, si le travail est complet ou s'il est confiné à une genèse ou un plan particulier. Enfin, si les résultats produits par le sujet sont mathématiquement corrects ou non.

UN EXEMPLE D'UTILISATION DES CRITERES DE CARACTERISATION

Dans cette section, nous allons monter, dans le cadre d'une étude menée dans le domaine de la géométrie, la manière dont les critères, ainsi que la méthodologie d'analyse du travail, ont été utilisés pour caractériser le travail mathématique.

1. Contexte de l'étude

Les étudiants participant à l'étude (soit 85) sont inscrits en première année de master MEEF¹ et préparent en même temps un concours qui leur permettra, après l'obtention de leur diplôme, d'obtenir un poste de professeur des écoles. Les étudiants, ont pour la plupart, obtenu un diplôme d'études littéraires et n'ont suivi aucun cours de mathématiques après avoir terminé la première année de lycée (16 ans). De plus, ils rencontrent des difficultés en mathématiques, notamment en géométrie. Ils connaissent généralement les propriétés et les théorèmes géométriques, mais ils ne savent pas bien les utiliser car ils ne les maîtrisent pas suffisamment. Les étudiants de ce niveau de classe sont censés développer un travail géométrique leur permettant d'enseigner à leurs futurs élèves du primaire un contenu géométrique proche du paradigme-GI. Ils doivent aussi être capables de résoudre les problèmes liés au paradigme-GII (Houdement & Kuzniak, 1999, Kuzniak, 2018) pour réussir le concours. Cette étude s'est déroulée à la fin du deuxième semestre de la première année du master. Les cours ont été dispensés à quatre groupes d'étudiants par deux formateurs expérimentés (dont l'un est l'auteur de cet article), chacun ayant enseigné à deux groupes. Les étudiants ont réalisé la tâche individuellement et avaient pour consigne de ne pas discuter de leur travail entre eux et avec l'enseignant. Leurs productions écrites ont été recueillies et les discussions (entre enseignants et les étudiants) produites lors des mises en commun ont été enregistrées et filmées. Toutes ces discussions ont été transcrites dans leur intégralité.

2. Tâche géométrique prescrite aux étudiants

La tâche proposée a été choisie car elle est représentative du type de tâche que les étudiants doivent savoir exécuter en première année du master. Elle est énoncée de la manière suivante :

Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m et 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?

Une information complémentaire donnée ultérieurement

¹ Master destiné aux étudiants souhaitant devenir professeur des écoles.

Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

Pour réaliser cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances telles que l'échelle et les quadrilatères – *les conditions de construction, aire, propriétés* –. La résolution de cette tâche peut s'effectuer selon différentes procédures prenant en compte : les connaissances des étudiants, les attentes institutionnelles pour ce niveau classe, mais aussi l'usage possible de théorème en acte faux bien connu (Vergnaud, 2009) sur la relation entre le périmètre et l'aire formulé de telle sorte : les figures ayant le même périmètre ont la même aire. Quelques procédures possibles (cf. Kuzniak & Nechache (2021) pour connaître l'ensemble des procédures) peuvent être mises en œuvre. Une première (P1) consiste, après lecture de l'énoncé, à identifier immédiatement le manque de données pour fixer la forme du quadrilatère. Une deuxième procédure (P2), prend appui sur le théorème en acte faux cité précédemment, consiste à construire une figure à l'échelle avec les outils de construction géométrique. Puis prise de mesures de longueur directement sur la figure. Enfin, appliquer des formules de calcul d'aire de quadrilatères usuels. Dans ce cas, le travail géométrique ainsi produit est conforme au paradigme de la Géométrie-I. Une troisième procédure (P3), mobilise aussi le théorème en acte faux (cité précédemment). Elle consiste à construire - à main levée ou à l'aide des outils de construction géométrique - un quadrilatère particulier (un carré ou un rectangle) ayant le même périmètre que le quadrilatère évoqué dans l'énoncé de la tâche prescrite. Appliquer, par la suite, la formule de calcul de l'aire de ce quadrilatère. Cette procédure semble s'inscrire dans le paradigme de la Géométrie-II mais s'appuie sur un faux théorème.

3. La mise en œuvre de la tâche

La tâche a été mise en œuvre suivant trois phases. Dans le cadre de cette contribution, nous allons traiter uniquement les exemples de productions produites à l'issue de la première phase. La première phase s'est déroulée en trois temps. Tout d'abord, nous avons proposé aux étudiants de résoudre la tâche individuellement sans intervention de l'enseignant. L'énoncé de la tâche leur a été communiqué sans l'information complémentaire. En effet, l'objectif est de faire constater le manque de données pour fixer la forme du quadrilatère pour résoudre complètement la tâche. Ils ont eu 10 minutes pour réaliser la tâche et répondre par écrit sur une feuille sur laquelle l'énoncé de la tâche a été rappelé. Ensuite, ils ont répondu individuellement par écrit aux deux questions suivantes :

1. Si vous n'avez pas eu le temps de terminer cette partie. Pouvez-vous décrire rapidement ce que vous auriez continué à faire.
2. Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous avez rencontrées en résolvant cet exercice ?

Enfin, nous avons ramassé l'ensemble des productions des étudiants et nous avons procédé à une mise en commun.

4. Étude du travail géométrique de deux étudiants F et M

Cas de l'étudiant F

L'analyse descendante montre que l'étudiant a planifié le travail géométrique en trois épisodes. Dans le premier épisode, l'étudiant F cherche à construire une figure. Pour ce faire, l'étudiant F choisit une échelle (action 1) et utilise une règle graduée et un compas (artefacts matériels) pour construire un quadrilatère convexe (representamen). Il procède à des ajustements à l'aide des deux artefacts de manière à obtenir la forme d'un trapèze (action 2).

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

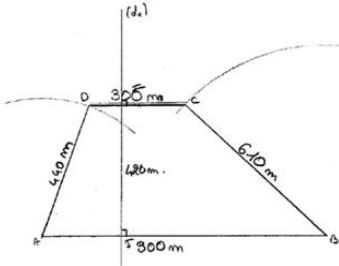
<p>Action 1. Choix d'une échelle</p> <p>ech : 1cm = 10m 100m.</p>	<p>Action 2. Construction d'un quadrilatère convexe</p> 
--	---

Tableau 1. – Analyse descendante-Épisode 1 du travail de l'étudiant F

Dans le deuxième épisode, (Tableau 2) l'étudiant F cherche à expliquer et à justifier la nature du quadrilatère. L'étudiant F se réfère à la définition du trapèze (référentiel théorique) pour expliquer la technique de construction employée afin d'obtenir le trapèze (action 3). En se référant à une propriété géométrique (référentiel théorique), il justifie que le quadrilatère ainsi construit est bien un trapèze (action 4).

<p>Action 3. Explication de la construction du quadrilatère Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base.</p>	<p>Action 4. Justification de la nature du quadrilatère Cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elle donc cela fait un trapèze.</p>
--	---

Tableau 2. – Analyse descendante-Épisode 2 du travail de l'étudiant F

Dans le dernier épisode (Tableau 3), il s'agit de calculer l'aire du quadrilatère. A l'aide d'une règle graduée (artefact), il mesure directement sur le quadrilatère (representamen), la longueur d'une des hauteurs du trapèze (action 5). Il applique par la suite la formule de calcul d'aire d'un trapèze (artefact) pour obtenir ainsi l'aire du quadrilatère (action 6).

<p>Action 5. Mesure de la longueur de la hauteur du quadrilatère Par mesure (IJ) = 420m. I ∈ [DC] et J ∈ [AB].</p>	<p>Action 6. Calcul de l'aire du quadrilatère</p> $A = \frac{300 + 900}{2} \times 420$ $A = \frac{1200}{2} \times 420$ $A = 600 \times 420.$
---	---

Tableau 3. – Analyse descendante-Épisode 3 du travail de l'étudiant F

L'analyse ascendante (Tableau 4.) de l'épisode 1 montre que les genèses instrumentale et sémiotique sont activées pour construire un quadrilatère particulier en choisissant une échelle (élément du référentiel théorique) et des artefacts matériels (compas, règle graduée). Dans l'épisode 2, la visualisation du quadrilatère (representamen) associée à l'usage des artefacts matériels (élément de la genèse instrumentale) permet de produire un discours pour expliquer la technique de construction. La genèse instrumentale est associée par la suite à la genèse discursive de preuve pour produire une justification de la nature du quadrilatère. Enfin, dans

le dernier épisode, la formule de calcul d'aire d'un trapèze (artefact symbolique) est utilisée pour produire le résultat attendu (ici l'aire du terrain).

En conclusion, la procédure mise en œuvre par l'étudiant F est proche de la procédure P2, et mobilise les trois genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Par conséquent, ce travail est qualifié de complet. De plus que le travail géométrique de l'étudiant F s'appuie sur un processus de construction qui favorise l'utilisation d'outils de construction géométrique et de formules avec mesure prélevées sur la figure. La figure construite est utilisée par l'étudiant F comme support privilégié pour raisonner et prouver. De ce fait, le travail est conforme aux exigences du paradigme Géométrie-I. Or, le processus du travail prend appui sur une figure particulière et l'usage d'un théorème en acte faux (deux figures ayant le même périmètre ont la même aire). De ce fait, le résultat du processus de ce travail est non correct du point de vue des mathématiques.

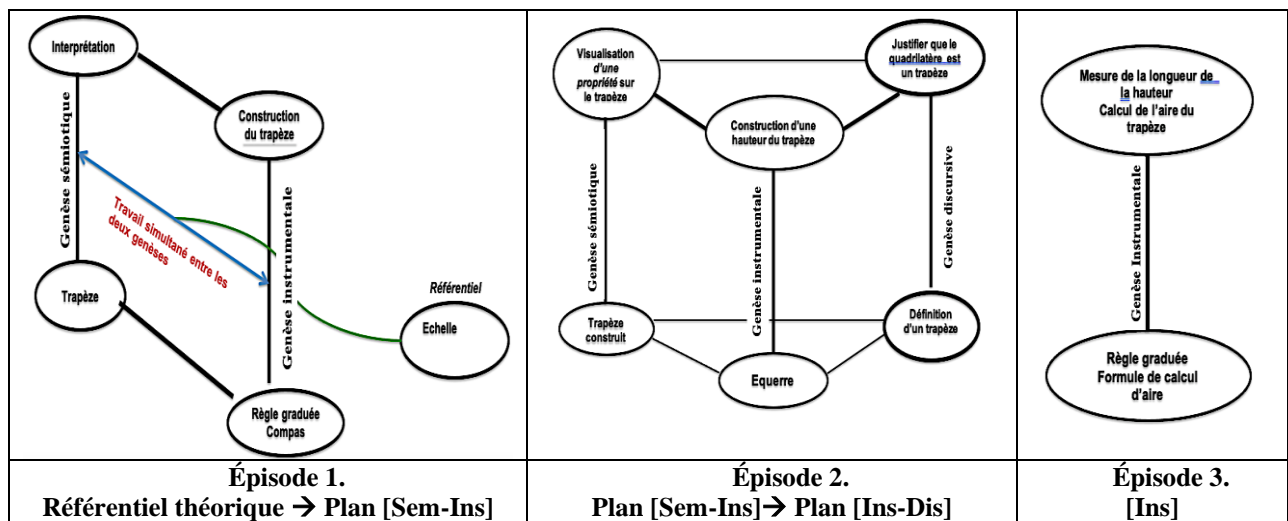


Tableau 4. – L'analyse ascendante des épisodes du travail de l'étudiant F

Cas de l'étudiant M

L'analyse descendante montre que l'étudiant M a planifié le travail en un seul épisode. Il a commencé par tracer à main levée un quadrilatère convexe (representamen) en reportant les dimensions de chacun des côtés sur le dessin (action 1). Il propose une transformation de la forme de ce quadrilatère de telle sorte que l'aire de la figure soit plus ou moins invariante. Pour cela, il calcul - à partir des dimensions initiales (900 m, 440 m, 610 m, 300 m) - la moyenne arithmétique (artefact symbolique) des longueurs des côtés opposés afin d'obtenir des longueurs de côtés permettant d'obtenir un rectangle (action 2).

<p>Action 1. Dessin à main levée d'un quadrilatère</p>	<p>Action 2. Calcul de la moyenne arithmétique des côtés opposés du quadrilatère</p> $\begin{aligned} 900 - 230 &= 670 \\ 440 + 230 &= 670 \\ 610 - 155 &= 455 \\ 300 + 155 &= 455 \end{aligned}$ <p><i>soit soustraire de 900 et additionner à 440 pour faire 2 côtés opposés égaux</i></p>	<p>Action 3. Dessin à main levée d'un nouveau quadrilatère</p>	<p>Action 4. Calcul de l'aire du quadrilatère</p> $\text{Aire} = 670 \times 455 = 304350 \text{ m}^2$
---	---	---	--

Tableau 5. – L'analyse descendante de l'unique épisode du travail de l'étudiant M

Il trace à main levée un rectangle (representamen) en reportant la dimension de chacun des côtés (action 3). Pour finir, il applique la formule de calcul d'aire d'un rectangle (artefact symbolique) pour en déduire la mesure de l'aire du quadrilatère (action 4).

L'analyse ascendante montre que le travail géométrique produit par l'étudiant M est orienté vers l'utilisation d'une formule de calcul d'aire (artefact symbolique) bien connue. Cela a conduit l'étudiant M à transformer le representamen initial (quadrilatère convexe quelconque de l'énoncé) en un autre representamen (un rectangle). Cette transformation de representamen a mobilisé la genèse sémiotique (Sem) associée à la genèse instrumentale (Ins). Le travail se poursuit ensuite dans la genèse instrumentale pour calculer l'aire du quadrilatère, le tout réalisé sans aucune justification théorique. Par conséquent, le travail géométrique de l'étudiant a été produit dans le plan [Sem - Ins].

En conclusion, l'étudiant M produit un travail géométrique en recourant à des formules applicables après une reconfiguration sémiotique de la figure. On peut aussi supposer que l'étudiant M a eu recours à un théorème en acte faux (deux figures ayant le même périmètre ont la même aire). Pour justifier sa démarche, l'étudiant M explique qu'il a construit cette figure pour surmonter son blocage (dû au manque d'une donnée pour fixer la forme du terrain) et réaliser la tâche. Par conséquent, le travail géométrique produit tend à être plus adéquat aux attentes « scolaires » - produire un résultat, attendre une validation externe par l'enseignant -. Mais, il est aussi possible de considérer que ce travail est confiné dans un plan [Sem - Ins] où la genèse instrumentale est totalement orientée vers un calcul sans aucune mesure ni utilisation de la construction à l'aide d'outils de dessin. Par conséquent, ce travail peut être **conforme** au paradigme Géométrie-II sans recours à un discours de preuve. De plus, ce travail géométrique prend appui sur une figure particulière et des données erronées, il est alors **non correct** du point de vue des mathématiques.

En général, les étudiants ayant participé à cette étude, ont produit un travail géométrique en utilisant diverses méthodes. Toutefois, ils ont introduit des règles et des pratiques qui ne font certainement pas partie d'un des paradigmes géométriques. Ces règles et pratiques renvoient davantage à des attentes résultant de la pratique « scolaire » de la géométrie de ces étudiants. La majorité des étudiants ont volontairement attribué des propriétés spécifiques au quadrilatère (angle droit, côtés parallèles, etc.) pour pouvoir résoudre la tâche. Par conséquent, leur travail ne peut être considéré comme valide. Cela suggère qu'il existe peut-être une sorte de paradigme géométrique « scolaire » qui interfère avec les paradigmes géométriques.

CONCLUSION

Dans le cadre de cette contribution, nous avons présenté les critères (conforme, correct, complet) pour évaluer le processus, le résultat et la circulation du travail mathématique dans la théorie des ETM. L'usage de ces critères pour évaluer le travail géométrique a permis d'identifier et de caractériser des formes de travail pratiquées par des étudiants (Kuzniak & Nechache, 2021). Ces dernières dépendent de la place des representamen, des artefacts, et le rôle des propriétés du référentiel théorique dans la réalisation de la tâche. L'évaluation du travail géométrique a également permis de mettre en évidence le manque de contrôle des étudiants sur leur travail qui les conduit à produire des résultats mathématiquement incorrects. Ils introduisent de faux théorèmes en acte (équivalence du périmètre et de l'aire dans les deux exemples dans la section précédente). Ils font un usage systématique de formules (parfois inventées) et enfin ils considèrent que les figures impliquées dans un problème de géométrie sont nécessairement des figures particulières.

De plus, l'évaluation du travail à l'aide de ces critères repose sur une méthodologie d'analyse divisée en trois étapes. L'étape d'analyse descendante vise à mettre en relief la

séquence d'épisodes et des actions mathématiques mises en œuvre par les sujets. Alors que l'analyse ascendante vise à donner, à l'aide du diagramme des ETM, un aperçu synthétique du travail mathématique au cours de la réalisation de la tâche. Tandis que la dernière étape, part des résultats des deux analyses précédentes pour caractériser le travail selon les trois critères d'évaluation du travail. Cette méthodologie est particulièrement basée sur l'identification et l'étude des actions mathématiques des sujets.

En perspective, il s'agit pour nous d'affiner la question des actions mathématiques du sujet afin de mieux les saisir et les comprendre, notamment en prenant en compte la grande diversité des processus impliqués. Au-delà du domaine de la géométrie, ces trois critères, articulés avec les outils de la théorie des ETM, ainsi que la méthodologie d'analyse du travail, seraient utiles pour caractériser des formes de travail mathématique dans d'autres domaines mathématiques. Ces formes reposent sur des invariants caractéristiques ou des idéaux-types (Bikner-Ahsbabs, 2015) qui peuvent être communs à des groupes d'individus et ne sont donc pas des attributs spécifiques ou fixes d'un individu.

RÉFÉRENCES

- BIKNER-AHSBAHS A. (2015). Empirically Grounded Building of Ideal Types. A Methodical Principle of Constructing Theory in the Interpretative Research in Mathematics Education. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.) *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 105–135). Dordrecht : Springer.
- COUTAT S., & RICHARD P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.
- DARSES F. (2001). Providing ergonomists with techniques for cognitive work analysis. *Theoretical Issues in Ergonomics Science*, 2, 268-277.
- HOUEMENT C., & KUZNIAK A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283-312.
- HOUEMENT C., & KUZNIAK A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- LEPLAT J. (2004). L'analyse psychologique du travail. *Revue Européenne de Psychologie Appliquée*, 54(2), 101-108.
- KUZNIAK A. (2018). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of Geometric Working Spaces. In P. Herbst et al. (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (pp. 5-21). New York: Springer.
- KUZNIAK A., & NECHACHE A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289.
- KUZNIAK A., & NECHACHE A. (2020). Développer un travail géométrique complet et conforme chez les étudiants de première année de master enseignement en France. *RMé*, 233, 93-104.
- NECHACHE A., & GOMEZ CHACON I.M. (2022). *Methodological aspects in the theory of mathematical working spaces*. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, P. (Eds.). *Mathematical Work in an Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 33-56). Switzerland: Springer.
- VERGNAUD G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83-94.

LA CONTEXTUALISATION PÉDAGOGIQUE EN MATHÉMATIQUES DE PROFESSEURS DES ÉCOLES DE POLYNÉSIE FRANÇAISE ET DE GUYANE FRANÇAISE : ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS

Eléda Robo*

RÉSUMÉ

La Polynésie française et la Guyane française sont deux territoires de l'Outre-Mer français présentant de nombreuses spécificités socio-culturelles, linguistiques et/ou institutionnelles. La Polynésie française bénéficie de compétences propres dans le domaine éducatif et la Guyane française a un système éducatif calqué sur celui de la France hexagonale. Les problématiques liées au plurilinguisme et à la diversité culturelle amènent ces territoires à définir des priorités en termes d'éducation. Quelles représentations ont les enseignants de la contextualisation de leur enseignement mathématique ? Peut-on identifier des représentations spécifiques aux territoires ? La classification, par domaines mathématiques, types et degrés de contextualisation, d'activités mathématiques adaptées à l'environnement des élèves fournies par les enseignants amène plusieurs constats. Les pratiques déclarées de contextualisation sont proches d'un territoire à l'autre et non spécifiques des territoires. Plus l'adaptation s'éloigne du micro-contexte de l'élève et plus la contextualisation est faible et en géométrie elle est presque toujours de degré plus fort.

Mots-clefs : contextualisation pédagogique – mathématiques – représentations – Polynésie française – Guyane française

ABSTRACT

French Polynesia and French Guiana are two French overseas territories with numerous socio-cultural, linguistic and/or institutional specificities. French Polynesia has its own competences in the field of education and French Guiana has an education system modelled on that of mainland France. The problems linked to multilingualism and cultural diversity lead these territories to define priorities in terms of education. What representations do teachers have of the contextualisation of their mathematics teaching? Can we identify representations specific to the territories? The classification, by mathematical domain, type and degree of contextualisation, of mathematical activities adapted to the pupils' environment provided by the teachers leads to several observations. The declared practices of contextualisation are similar from one territory to another and not specific to the territories. The further away the adaptation is from the pupil's micro-context, the weaker the contextualisation. The further the adaptation is from the student's micro-context, the weaker the contextualisation, and in geometry it is almost always of stronger degree.

Keywords: educational contextualization - mathematics - representations - French Polynesia - French Guiana

INTRODUCTION

Dans cette recherche nous interrogeons les représentations des professeurs des écoles de Polynésie française et de Guyane française sur d'une part l'importance qu'ils attribuent à la prise en compte de l'environnement des élèves dans les situations mathématiques qu'ils proposent et d'autre part sur ce que sont pour eux des exercices, des activités ou des situations mathématiques qui soient contextualisé(e)s. L'environnement, le contexte est compris ici au sens large du terme incluant les aspects socio-culturels et linguistique. Nous comparons les représentations d'un territoire à l'autre car étant donné la singularité des territoires nous nous interrogeons sur une adaptation qui pourrait être spécifique à chacun d'eux et sur la manière dont cela pourrait se traduire en situation didactique. Aussi, dans un premier temps nous présentons les deux contextes Polynésie française et Guyane française puis un cadre d'analyse prenant appui sur la transposition didactique (Chevallard, 1985) et la contextualisation didactique (Delcroix, Forissier, & Anciaux, 2013), notre méthodologie de recherche ainsi que les résultats et l'analyse qui en découle.

* Université des Antilles

CONTEXTES

La Polynésie française et la Guyane française sont deux territoires de l’Outre-Mer français, pour le premier insulaire qui s’étend sur une surface aussi totale vaste que l’Europe et pour le second, continental, aussi étendu que le Portugal. Selon le dernier recensement de 2017, les populations des deux territoires sont du même ordre, autour de 270 000 habitants, avec cependant un taux d’évolution moyen de +0,9 % pour le premier et de +2,6 % pour le second. Sur les deux territoires, certaines zones regroupent plus de 90% des populations alors que d’autres sont géographiquement isolées et peu peuplées. Cependant ces populations diffèrent dans leurs compositions puisque selon les chiffres de l’INSEE, en 2015 un tiers de la population est de nationalité étrangère en Guyane alors qu’en Polynésie française en 1988 près de 83% de la population en est originaire (Merceron, 2005).

La Polynésie française et la Guyane française ont en commun d’être des territoires où les peuples autochtones, Mā’ohi pour la Polynésie et Amérindiens pour la Guyane mais également d’autres communautés en Guyane, Noirs marrons (Businenge) et Créoles, ont laissé un héritage culturel important : tatouage, sculpture Tiki, art Tembé, maison créole... (figure 1). Ces éléments culturels sont autant de références qui pourraient être utilisées en situation didactique. Ces territoires sont plurilingues : on dénombre sept langues principales en Polynésie française (Charpentier & François, 2015) et en Guyane française plus de quarante langues cohabitent (Léglise, 2017). Sur le territoire guyanais, on estime que 40% des enfants d’une dizaine d’années parlent au moins trois langues (Léglise, 2020) dont 75% ne parlaient pas le français avant leur première année de scolarisation (Alby & Léglise, 2017).



Figure 1. – Analyse Tatouage polynésien, Sculpture Tiki (Polynésie française) – Tableau d’art Tembé, Maison créole (Guyane française)

Sur le plan institutionnel, contrairement à la Guyane française qui est une Collectivité territoriale, la Polynésie française, en tant que Collectivité d’Outre-mer autonome, a d’une part des professeurs des écoles faisant partie d’un corps spécifique¹ et d’autre part la responsabilité de l’enseignement primaire et, à cet égard, la possibilité de définir des programmes spécifiques d’enseignement. L’étude des programmes nationaux français pour l’enseignement primaire en mathématiques (MENJS, 2020) et des « programmes 2020 ajustés et adaptés à la Polynésie » (MEJS, 2020a, 2020b) relatifs à l’enseignement primaire en mathématiques montre que le choix est majoritairement fait d’appliquer les programmes nationaux français, avec cependant quelques adaptations. Nous avons repéré trois adaptations par rapport aux programmes nationaux. Deux se rapportent à l’utilisation des langues polynésiennes et l’autre à la monnaie « le franc pacifique ». Ces éléments sont en accord avec les orientations éducatives, définies par la Charte de l’éducation de Polynésie où il est question de la valorisation des langues polynésiennes et du plurilinguisme et d’adaptation pédagogique ancrée sur les réalités polynésiennes. En Guyane, le projet académique définit

¹ Corps d’État créé pour la Polynésie Française (CEPF)

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

des orientations éducatives du même ordre, une certaine adaptation aux réalités socio-culturelles et linguistiques, mais les programmes en cours sont ceux du territoire national. Concernant la formation des enseignants, aussi bien la Charte de Polynésie que le Projet académique de Guyane mentionne la nécessité de la prise en compte des réalités contextuelles des territoires. Compte tenu des contextes sociaux, culturels, linguistiques et des volontés institutionnelles sur le plan éducatif d'adaptation aux contextes des territoires, nous nous interrogeons sur les représentations des enseignants vis-à-vis de la contextualisation de leurs enseignements mathématiques. Quelle importance ces questions d'adaptations ont-elles pour les enseignants ? Que comprennent-ils véritablement dans ces « injonctions » à « contextualiser », à adapter « aux réalités sociales, culturelles et linguistiques » des territoires ? Comment cela pourrait-il se traduire en situation didactique en mathématiques ?

PROPOSITION D'UN CADRE D'ANALYSE

Notre cadre d'analyse s'appuie sur plusieurs points théoriques, en particulier pour les questions d'adaptation des enseignements aux contextes, nous définissons au préalable le contexte comme « l'ensemble des paramètres qui forment l'environnement dans lequel se déroule [une] situation [d'enseignement, d'apprentissage ou de formation] » (Delcroix & al., p. 3). À cet égard, nous abordons la contextualisation didactique comme un processus qui s'inscrit au sein d'un réseau de transposition (Forissier, 2003). Nous envisageons des degrés de contextualisation (Delcroix & al., 2013) et des types de contextualisation (Robo, 2021). Ce cadre nous conduit à définir un modèle tridimensionnel dans lequel nous nous inscrivons.

1. Réseau de transposition

En situation didactique, des processus d'adaptation aux contextes s'opèrent à différents niveaux du processus de transposition didactique et impliquent de nombreux acteurs selon qu'il est question de transposition didactique externe ou de transposition didactique interne (Chevallard, 1985). Delcroix et al. (2013) identifient trois niveaux de transposition au sein desquels s'opèrent des adaptations aux contextes, et qualifient les processus d'adaptation. En premier lieu au niveau de la transposition didactique externe, ils définissent la noo-contextualisation, lorsque l'adaptation aux contextes est opérée par l'institution scolaire sous l'influence d'acteurs civils, de professionnel, en somme par la noosphère. En deuxième lieu au niveau de la transposition didactique interne, Delcroix et al. (2013) définissent la contextualisation pédagogique, dans laquelle nous nous inscrivons, lorsque l'adaptation aux contextes est opérée par l'enseignant ou le formateur, sous l'influence de ses conceptions vues comme fonctions de connaissances (K), de valeurs (V) et de pratiques sociales (P) (Clément, 2003 ; Forissier, 2003). En dernier lieu, au niveau de la transposition didactique interne, ils définissent la contextualisation socio-cognitive qui correspond au processus mis en place par l'apprenant lorsqu'il contextualise « ce qu'il apprend au regard de ce qu'il connaît » (Delcroix & al., 2013, p. 8). La contextualisation didactique, noo-contextualisation, contextualisation pédagogique et contextualisation socio-cognitive, s'inscrivent alors au sein d'un réseau de transposition (figure 2).

2. Degrés de contextualisation

Les processus d'adaptation aux contextes sont variables. Delcroix et al. (2013) définissent des degrés de contextualisation, faible, intermédiaire et fort, repérables à travers les connaissances et croyances professionnelles des enseignants.

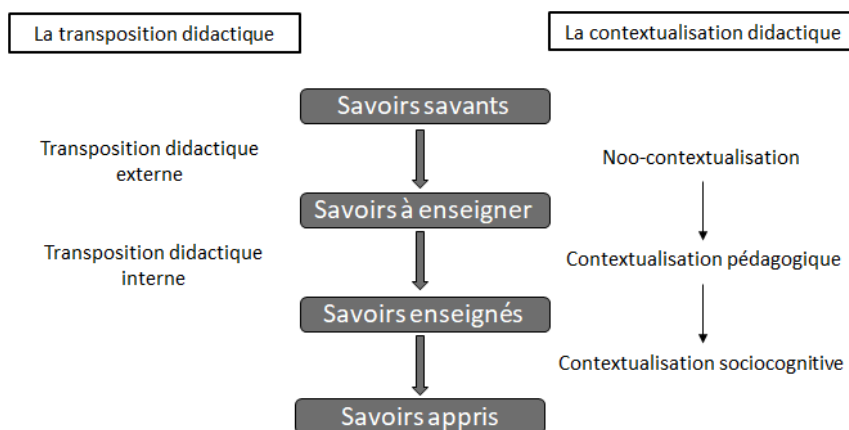


Figure 2. – Analyse La contextualisation didactique au sein d'un réseau de transposition (adaptée de Chevallard (1985) et Delcroix & al. (2013))

Dans une conception faible de la contextualisation, les enseignants ou les auteurs de manuels scolaires par exemple, « localisent » les exemples d'origine sans que les conceptions des apprenants dans leur contexte soient prises en compte. C'est le cas lorsque dans un énoncé de problème, la pomme est remplacée par un fruit issu du contexte, l'awara² en Guyane, ou lorsque « dans certains manuels de lecture [...] les enfants ont les cheveux crépus et dansent la biguine, sans pour autant aborder des aspects proprement didactiques » (Delcroix & al., 2013, p. 161) en lien avec le contexte socioculturel et/ou linguistique du public visé. Dans une conception forte, l'adaptation opérée dépasse le simple habillage « localisé ». Il s'agit alors de « repenser les curricula, les programmes, les manuels, les formations à travers l'ordre et la nature des notions enseignées en fonction des contextes didactiques concernés et de leurs caractéristiques générales » (Delcroix & al., 2013, p. 162). Une conception intermédiaire de la contextualisation consisterait à la « recherche d'habillages adaptés à l'environnement de l'élève mais aussi de l'ordre, de la nature et de l'articulation des connaissances et des compétences scolaires et de celles des élèves » (Delcroix & al., 2013, p. 165).

3. Types de contextualisation

Concernant la contextualisation pédagogique, nous définissons trois types de contextualisation à partir du macro-système des pratiques enseignantes dans leur contexte défini par Sauvage-Luntadi et Tupin (2012). Selon que l'adaptation faite par l'enseignant se réfère au micro, méso ou macro-contexte de l'élève, on parlera de contextualisations micro-situationnelle, micro-périphérique, méso/régionale ou macro/nationale (figure 3).

La contextualisation micro-situationnelle (noté Ms) est celle opérée par l'enseignant ou plus généralement le formateur lorsqu'il adapte sa pratique quotidienne de classe ou de formation, en fonction de ses apprenants et des événements qui peuvent survenir en situation. La contextualisation micro-périphérique (notée Mp) est celle qui s'opère parce que l'enseignement a lieu dans un cadre géographique, temporel et administratif. Elle est le fait de l'enseignant qui fait des adaptations en fonction de ces environnements. C'est à ce niveau que sont repérés des références aux contextes socioculturels. La contextualisation méso/régionale (noté R) est la contextualisation voulue par les institutions comme l'introduction des langues et cultures régionales dans les programmes. Elle est le fait de l'enseignant qui fait des adaptations en fonction du contexte médian et des macro-contextes (curricula, politiques linguistiques, politiques éducatives, famille...). En dernier lieu, on définit la contextualisation

² Fruit du palmier épineux *Astrocaryum vulgare* présent en Guyane française.

macro/nationale (notée N) comme étant celle voulue par les institutions nationales et qui s'opère sur l'ensemble du système (figure 3).

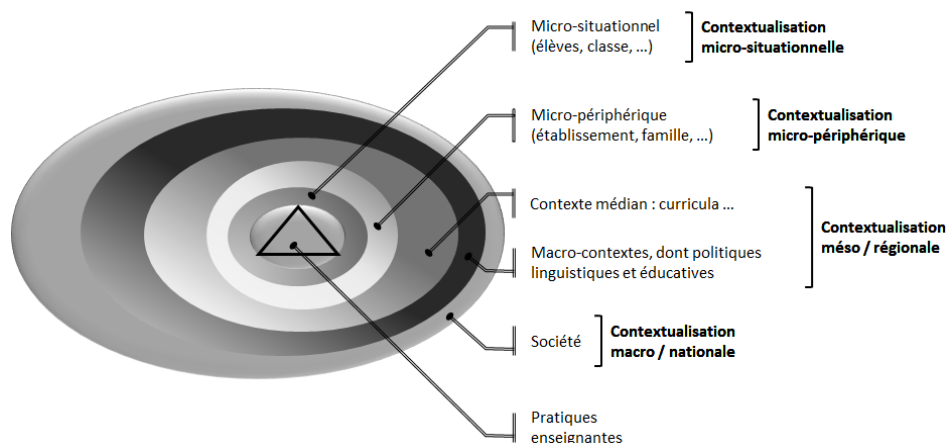


Figure 3. – Les différents types de contextualisation, adapté du macro-système des pratiques enseignantes dans leurs contextes de Sauvage-Luntadi et Tupin (2012).

4. Niveau de contextualisation pédagogique : types et degrés de contextualisation, domaines mathématiques

Les pratiques de contextualisation pédagogiques des enseignants inscrites au sein du réseau de transposition (RT) pourront être étudiées en fonction des types (TC) et des degrés de contextualisation (DC) en œuvre en situation didactique. Ainsi, au sein du modèle tri-dimensionnel RT-TC-DC³ (Robo, 2021), nous nous focalisons sur le niveau de la contextualisation pédagogique en croisant les types et les degrés de contextualisation (figure 3).

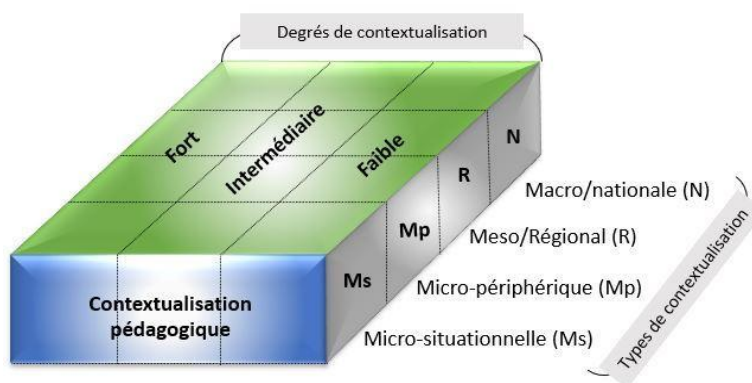


Figure 4. – Niveau de la contextualisation pédagogique : types de contextualisation-degrés contextualisation

Dans le cas particulier des mathématiques, nous étudions selon les différents domaines *nombre et calculs, grandeurs et mesures, espace et géométrie* et *croisements entre enseignements*, les types et les degrés de contextualisation mobilisés par les enseignants en situation didactique (figure 4).

³ Modèle tri-dimensionnel représenté par un pavé droit : dimension 1 : types de contextualisation (noo-contextualisation, contextualisation pédagogique, contextualisation socio-cognitive) ; dimension 2 : types de contextualisation (micro-situationnelle, micro-périphérique, méso/régionale, macro/nationale) ; dimension 3 : degrés de contextualisation (faible, intermédiaire, fort).

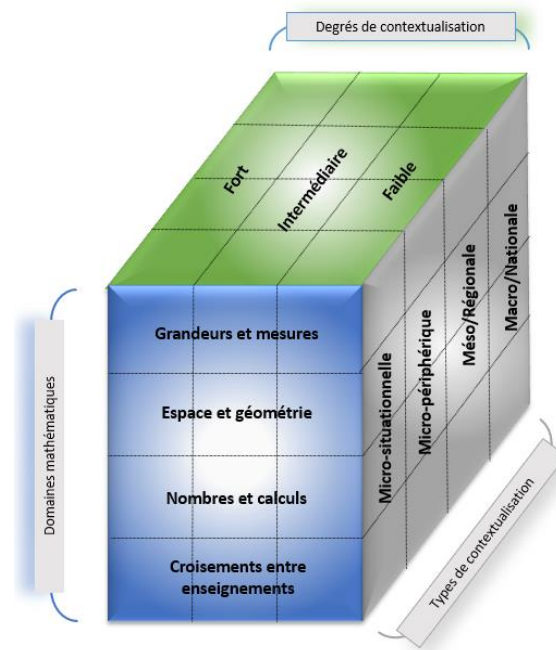


Figure 5. – Domaines mathématiques-Types de contextualisation-Degrés contextualisation

En premier lieu, l'étude comparative des deux territoires, Polynésie française et Guyane française, a mis en évidence certes des similitudes mais aussi des différences notamment dans le domaine de l'éducation. Ces deux territoires multiculturels et plurilingues doivent relever des défis similaires en termes de réussite scolaire. Au travers des Chartes de l'éducation en Polynésie française et des Projets éducatifs en Guyane française, il apparaît que les politiques éducatives des territoires mettent l'accent sur l'adaptation des enseignements aux réalités socio-culturelles et linguistiques des territoires, considérés alors comme des leviers en matière de réussite scolaire. En second lieu, le cadre théorique de la contextualisation didactique nous a permis d'identifier des types et des degrés de contextualisation en situation didactique. Nous nous interrogeons sur les représentations des enseignants quant aux adaptations de leurs enseignements mathématiques à l'environnement de leurs élèves. Quelles représentations ont les enseignants de la contextualisation des enseignements mathématiques ? Peut-on identifier dans leurs propos des pratiques déclarées de contextualisation mathématique spécifiques aux territoires ?

METHODOLOGIE

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre plus large d'une étude comparative des interactions à visée d'apprentissage lors de séances de géométrie au cycle 3 de l'école primaire en Polynésie française et en Guyane française (Robo, 2021). Aussi, nous n'exposons qu'une partie de l'enquête que nous avons réalisée auprès de professeurs des écoles des territoires. Nous présentons le contexte de cette enquête, les questions à l'étude et la méthodologie d'exploitation des données que nous avons choisies afin de répondre à notre questionnement : Quelles représentations ont les enseignants de la contextualisation de leurs enseignements mathématiques ?

1. Contextes de l'enquête

Nous avons choisi de faire une enquête par questionnaires en ligne (une par territoire) car cette recherche s'est faite lors de la crise sanitaire du COVID 19, entre mars et juillet 2020.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Nous sommes cependant conscients que ce mode de recueil de données peut en restreindre l'accessibilité. En effet sur les deux territoires certains enseignants sont affectés sur des zones géographiques où l'accès à internet n'est pas toujours possible. Cependant l'analyse des populations ayant répondu aux questionnaires montrent que l'ensemble des territoires est représenté, tous les archipels pour la Polynésie française et toutes les communautés de communes pour la Guyane française, dans des proportions représentatives. Nous avons également noté que des enseignants affectés sur des sites éloignés ou isolés ont durant la période d'ouverture du questionnaire, rejoint des zones leur permettant d'avoir un accès à internet et ont pu ainsi participer à l'enquête hors de leur lieu d'affectation.

En Polynésie française, 63 professeurs des écoles ont répondu au questionnaire et parmi eux, 86% sont nés sur le territoire polynésien, 12,7% en France hexagonale, un seul est d'un autre territoire français et aucun hors de France. En Guyane française, 154 professeurs des écoles ont répondu dont 43% sont nés sur le territoire guyanais, 37% en France hexagonale, 15% dans un autre territoire ou département d'outre-mer et 5% hors de France. Un facteur explicatif de ces différences pourrait être la différence de statut des professeurs des écoles et la position géographique des territoires.

2. Questions de l'enquête

Nous avons élaboré deux questionnaires « jumeaux » en ligne à destination des professeurs des écoles en exercice quel que soit le cycle d'enseignement. Nous nous intéressons à quatre questions en particulier. Trois se présentent sous forme de questions à choix multiples (QCM) et la quatrième est ouverte (tableau 1).

Questions	Réponses
Question 1 : Selon vous, tenir compte de l'environnement de l'élève pour enseigner est :	Inutile - Peu important - Moyennement Important - Indispensable
Question 2 : Proposez-vous des activités mathématiques en lien avec le contexte des élèves ?	Jamais – Parfois – Souvent - Toujours
Question 3 : Dans quel(s) domaine(s) mathématiques vous arrive-t-il de contextualiser les activités ?	Aucun - Nombres et calculs - Grandeurs et mesures - Espace et géométrie
Question 4 : Pouvez-vous donner un exemple succinct d'exercice ou d'activité ou de situation mathématique qui soit contextualisé(e).	

Tableau 1. – Quatre questions de l'enquête en ligne

3. Traitement des données

Nous avons opéré un traitement quantitatif des données pour trois des quatre questions, les trois premières, que nous abordons dans cet article. Concernant la quatrième question, nous avons recueilli des exemples de ce que pouvaient être pour les enseignants des « exercices ou exemples ou situations mathématiques qui soit contextualisés ». Les termes utilisés dans la formulation des questions, environnement de l'élève, contexte de l'élève, contextualiser...n'ont pas été défini au préalable. En effet, nous souhaitions avoir les représentations des enseignants sur ce que ces termes signifiaient pour eux. Quel est le sens donner par les enseignants à ces termes ? Comment les comprennent-ils, lorsque l'institution leur parle d'adaptations aux contextes des élèves ou encore d'adaptations à l'environnement de ces derniers ? Dans un premier temps, nous avons réalisé une première classification qui laissait apparaître trop d'éléments hors catégorie. Une seconde classification a alors été opérée et a subi une validation par deux relecteurs, montrant la stabilité de la catégorisation effectuée. Les réponses ont finalement été classées suivant trois catégories : les domaines

mathématiques (nombres et calculs, grandeurs et mesures, espace et géométrie, croisement entre enseignements), les types de contextualisation (micro-situationnelle, micro-périphérique, méso/régionale, macro/nationale) et les degrés de contextualisation (faible, intermédiaire, fort). Dans un deuxième temps, nous avons réalisé des classifications et analyses par combinaisons des catégories précédentes. Ces classifications nous permettent d'avoir un portrait détaillé des représentations des enseignants des deux territoires sur leurs représentations quant à la contextualisation de leur enseignement mathématique.

RESULTATS ET ANALYSE

Nous présentons et analysons nos principaux résultats d'une part sur l'importance de la prise en compte de l'environnement des élèves lors des séances d'enseignement-apprentissages et d'autre part sur la diversité des représentations des enseignants.

1. Sur l'importance de la prise en compte de l'environnement des élèves

Les réponses aux trois premières questions de l'enquête montrent des résultats concordant sur les deux territoires. Il apparaît que pour plus de 70% des enquêtés (73% en Polynésie et 80% en Guyane), il est indispensable de tenir compte de l'environnement des élèves pour enseigner et aucun ne juge cette démarche comme inutile. Nous pensons que les enseignants sont sensibilisés aux volontés d'adaptation aux réalités socioculturelles et linguistiques des territoires, exprimées dans les programmes et au travers des chartes éducatives pour la Polynésie et des projets éducatifs pour la Guyane. De plus sur les deux territoires, dans les écoles primaires, il existe une habitude de compétition en mathématique où les références contextuelles sont présentes. C'est notamment le concours de calcul mental en langue polynésienne, Tatau'u Upo'o, ou le Heïva des sciences⁴, en Polynésie française et le Rallye mathématique en Guyane française. Toutefois, comme le souligne Bichara (2003, 2004), concernant le Rallye mathématique, il s'agit très souvent de contextualisation faible.

Quant à savoir si les enseignants proposent des activités mathématiques en lien avec le contexte des élèves, 70% en Polynésie et 49% en Guyane déclarent en proposer souvent ou toujours. Peu parmi eux, 2% et 3%, déclarent ne jamais en proposer. Nous corrélons ces réponses avec le profil des populations enseignantes enquêtées. En effet, en Polynésie française 86% des enquêtés sont nés sur le territoire alors qu'en Guyane française ce taux est de 43% qui s'élève à 58% si nous intégrons d'autres territoires d'Outre-Mer, vu la proximité relative de la Martinique et de la Guadeloupe. Nous faisons l'hypothèse par cette corrélation que le lieu de naissance entraîne une connaissance du territoire qui permet une certaine adaptation des enseignements en fonction des contextes mais ce seul argument suffit-il à lui seul à expliquer ces résultats ? Nous constatons également que les enseignants déclarent contextualiser leur enseignement dans les trois domaines mathématiques, *nombres et calculs*, *grandeurs et mesures* et *espace et géométrie*.

2. Quelques exemples et leur classification

Les réponses à la question 4 du questionnaire nous permettent de recueillir 229 exemples (75 en Polynésie et 154 en Guyane) d'exercices, d'activités ou de situations mathématiques contextualisés selon les enseignants qui sont tous répertoriés dans le volume 2 de Robo (2021). Les réponses sont de natures variées. Il peut s'agir par exemple d'énoncés de problèmes comme l'exemple 1P, de témoignages comme l'exemple 2P ou encore de dispositifs mis en place, illustrés par l'exemple 5G (tableau 2). Concernant la classification,

⁴ Fête de la science

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

nous avons parfois dû faire des choix en fonction de ce que nous avons considéré comme implicite et avons créé des catégories *exemples indéterminés* pour les exemples qui ne peuvent être classés selon le domaine mathématique, le type de contextualisation ou le degré de contextualisation.

Nous avons identifié de nombreux exemples autour de la monnaie, comme le jeu de la marchande, le jeu du banquier... que nous avons classés en *grandeurs et mesures*. Nous avons constaté que l'expression *résolution de problème* a souvent été citée sans que l'on puisse véritablement définir ce à quoi ce terme renvoie. Nous les avons classés dans la catégorie *exemples indéterminés*. L'exemple 1P du tableau 2, est dans le domaine *nombres et calculs*, de type *micro-périphérique* car il se rapporte au contexte polynésien d'exploitation des perles et de degré faible car les données, perles, colliers, Poe (prénom tahitien) donnent une « couleur locale [...] il n'est pas vraiment tenu compte du contexte didactique » (Delcroix & al., 2013, 12).

A contrario l'exemple 2P, sous forme de témoignage, est de degré intermédiaire car une véritable adaptation est proposée par l'enseignant qui ne consiste pas en un simple habillage d'un problème plus classique sur la monnaie. La contextualisation dans cet exemple est micro-périphérique, puisqu'il est question du vécu extra-scolaire des élèves, se référant au contexte socio-culturel. Dans l'exemple 2P, deux aspects sur la monnaie en Polynésie française sont évoqués. Tout d'abord, le franc pacifique se prête entièrement à une utilisation des grands nombres très tôt dans la scolarité des élèves polynésiens, dès le début du cycle 2. Les enfants de ce territoire sont familiarisés avec les nombres 100, 200, 500 et 1000. En effet, la pièce de 100 francs pacifiques (XPF) correspond à environ 80 centimes d'euros et il n'est pas rare que les enfants polynésiens disposent pour leurs petits achats d'écoliers de 500 XPF ou de 1000 XPF. Aussi la possibilité qui est donnée au territoire polynésien d'adaptation aux réalités contextuelles pourrait se traduire par la connaissance des grands nombres au-delà de 100 par exemple au début du cycle 2 de l'école primaire. Cela constituerait dans ce cas, à une adaptation des programmes de Polynésie française dans ce domaine qui dépasserait la simple substitution du mot « euros » à « francs pacifiques » dans les « programmes adaptés et ajustés à la Polynésie française » tel que cela est le cas actuellement. L'autre aspect concernant la monnaie que cet exemple 2P met en lumière est la possibilité de travailler avec d'autres bases de numération fondée sur le sac de coprah. Ce changement de base pourrait permettre dans ce type de situation de donner du sens aux systèmes de numérations et également la possibilité de travailler une notion telle que la proportionnalité par exemple.

Concernant, l'exemple 3P le calcul mental dans une langue polynésienne, est une recommandation inscrite dans les programmes polynésiens : il s'agit d'un cas de contextualisation méso/régionale. La question que nous pouvons ici nous poser est la plus-value que peut revêtir l'utilisation de la numération en langue polynésienne Reo. Cadousteau (2022) dans une communication à venir précise que « La numération en langue tahitienne et en langue marquisienne permettent une meilleure appréhension des numérations orale et écrite en français standard dans le contexte spécifique de la Polynésie française ».

Exemples	Domaines ⁵	Contextualisation	
		Types ⁶	Degrés
Exemple 1P : Poe a 18 perles, elle vend des colliers. Elle utilise 6 perles pour réaliser 1 collier. Combien de collier pourra-t-elle réaliser ?	N. et C.	Mp	Faible
Exemple 2P : Aux Tuamotu, à Taenga, les nombres n'avaient pas de sens pour les enfants, au-delà de 100. Quand on parlait d'argent, les	G. et M.	Mp	Interm

⁵ On note : Nombres et calculs : N. et C ; Grandeurs et mesures : G. et M. ; Espace et géométrie : E. et G. ; C. E. : croisement entre enseignements

⁶ On note : Indéterminés : Indéterm. ; Intermédiaire ; Interm.

enfants ne comprenaient pas trop. Pour eux, l'argent se matérialise par les sacs de coprah ! Au lieu de leur dire 100 000 francs par exemple, il faut leur dire que c'est l'équivalent de 90 sacs de coprah ! Et là, ils voyaient enfin ce que ça représentait ! Ils savent aussi combien de choses on peut acheter avec 90 sacs de coprah (nourriture, fut d'essence et huile moteur). Ils savent que pour un billet d'avion aller-retour pour Tahiti, il faut 18 sacs de coprah (le sac de coprah valant autour de 3 000 francs et le billet d'avion autour de 50 000 francs).			
Exemple 3P : Calcul mental en reo Tahiti	N. et C. C. E	R	Interm.
Exemple 4G : Relations entre les formes géométriques et une habitation businenge ...	E. et G.	Mp	Interm.
Exemple 5G : Compter les élèves présents/absents	N. et C.	Ms	Indéterm.

Tableau 2. – Classification de quelques exemples donnés par les enseignants de Polynésie française et de Guyane française.

Des exemples ont également été donnés dans le domaine de *l'espace et de la géométrie*. L'habitation businenge est souvent ornée de dessins d'art Tembe constitués d'entrelacs. L'évocation qui est ainsi faite dans l'exemple 4G témoigne de la reconnaissance de formes géométriques dans les figures d'art Tembe qui peuvent être mobilisées en situation didactique.

3. Sur la classification des exemples donnés

Bien que les enseignants déclarent contextualiser dans les différents domaines mathématiques, la classification des exemples donnés montre que sur les deux territoires près de 50% des exemples sont dans le domaine *grandeurs et mesures*. Le domaine *espace et géométrie* est le moins présent (13% en Polynésie et 12% en Guyane). Parmi les exemples donnés qui peuvent être rattachés à plusieurs domaines, 13% en Polynésie française et 5% en Guyane française, relèvent du *croisement entre enseignements*.

Concernant les types et les degrés de contextualisation, sur les deux territoires, la contextualisation pédagogique en mathématiques est majoritairement micro-périphérique et majoritairement de degré faible (figure 6).

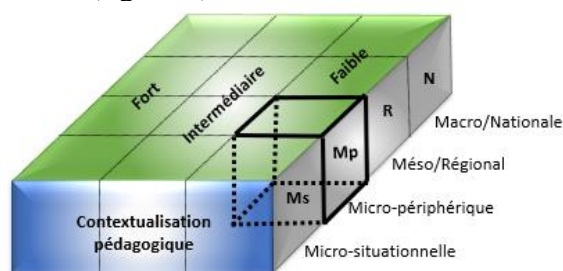


Figure 6. – Représentations communes des professeurs des écoles de Polynésie française et de Guyane françaises selon les types et degrés de contextualisation

La contextualisation méso/régionale est majoritairement de degré faible, peu présente et uniquement en Polynésie française. Cela pourrait s'expliquer par leur citation explicite dans les programmes d'enseignement en Polynésie française et leur absence des programmes en Guyane française puisqu'il s'agit des programmes nationaux. La contextualisation macro/nationale de même que la contextualisation forte sont absentes.

Si nous étudions en particulier chaque type de contextualisation, nous constatons que la contextualisation micro-situationnelle est majoritairement intermédiaire alors que la contextualisation micro-périphérique est majoritairement faible. La contextualisation méso/régionale est majoritairement faible et peu présente. Il apparaît que les types et les degrés de

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

contextualisation opèrent de manière antisymétrique. À savoir que, plus l'adaptation qui est faite s'éloigne du micro-contexte de l'élève et plus le degré de contextualisation sera faible.

Nous constatons que les représentations ne sont pas les mêmes suivant les domaines mathématiques mais sont également majoritairement communes aux deux territoires. Dans le domaine *nombres et calculs*, la contextualisation est majoritairement faible sur les deux territoires mais plus micro-périphérique en Polynésie française et micro-situationnelle en Guyane française sans être majoritaire. Sur les deux territoires en *grandeurs et mesures* la contextualisation est majoritairement micro-périphérique et de degré faible. En *espace et géométrie*, la contextualisation est majoritairement micro-situationnelle et de degré presque exclusivement intermédiaire. En *croisements entre enseignements*, la contextualisation est majoritairement micro-situationnelle et de degré intermédiaire (figure 7).

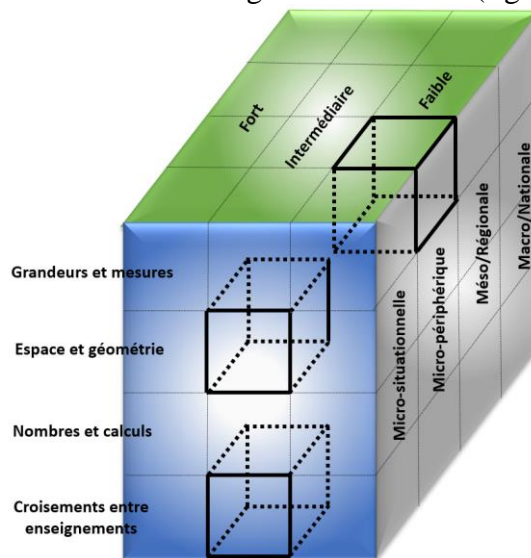


Figure 7. – Représentations communes des professeurs des écoles de Polynésie française et de Guyane françaises selon les domaines mathématiques

Ces derniers résultats nous interpellent. Nous pensons que la contextualisation micro-périphérique, et donc en référence au contexte socio-culturel, dans le domaine de *l'espace et de la géométrie* ainsi que pour le *croisement entre enseignements*, demande une connaissance plus approfondie des territoires. Aussi il semble plus « facile » d'opérer une contextualisation micro-situationnelle. Mais ces deux domaines nous semblent plus exigeants en termes de degré contextualisation que les autres domaines mathématiques et la contextualisation y est majoritairement intermédiaire voir presque exclusivement en *espace et géométrie*.

CONCLUSION

Nous avons dressé un portrait des représentations de la contextualisation pédagogique en mathématiques en Polynésie française et en Guyane française et avons observé des représentations diverses, aussi bien termes de types de contextualisation que de degrés ou de domaines mathématiques mobilisés. Nous constatons que les représentations des enseignants sur la contextualisation des enseignements mathématiques sont pratiquement les mêmes. En effet, nous sommes parvenus à identifier des représentations communes en *grandeurs et mesures*, *espace et géométrie* et *croisements entre enseignements* (figure 6). Nous n'avons pas repéré de représentations de la contextualisation pédagogique en mathématique vraiment spécifique aux territoires sinon la contextualisation en référence au contexte linguistique qui serait un élément de différenciation présente uniquement en Polynésie française. S'il semble manifeste que les enseignants pensent qu'il est important voir indispensable d'adapter leur

enseignement à l'environnement des élèves, l'adaptation aux contextes socio-culturels et linguistiques se traduit majoritairement par un « habillage localisé » sauf en *espace et géométrie* où la connaissance des contextes socio-culturelles ainsi que des savoirs disciplinaires est essentielle. L'adaptation est majoritairement en référence à l'environnement immédiat de l'élève au sein de la classe. Plus l'adaptation qui est faite s'éloigne du micro-contexte de l'élève et plus l'adaptation relève de « l'habillage ». La contextualisation des enseignements mathématiques pourrait constituer un levier en matière de réussite scolaire dans cette discipline, à laquelle les futurs enseignants pourraient être initiés en formation à l'heure où les contextes sont explicitement dans les programmes de formation des enseignants. Il nous semble également essentiel de confronter nos résultats sur les représentations aux pratiques effectives comme nous l'avons déjà amorcé en géométrie (Robo, 2021). Par ailleurs, nous supposons, comme d'autres chercheurs, que la contextualisation des situations d'enseignement-apprentissages favorise les apprentissages puisqu'elle permet à minima de maintenir l'attention des élèves (Anciaux, 2013) mais au-delà de ces aspects « motivationnels », il nous semble essentiel de s'interroger sur les effets didactiques induits par la contextualisation. C'est là une perspective de recherche sur laquelle nous souhaitons envisager nos recherches futures.

RÉFÉRENCES

- ALBY, S., & LÉGLISE, I. (2017). Plurilinguisme et éducation en Guyane. *Langues de Guyane*, 10-11. Récupéré sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01674473>
- BICHARA, J. (2003). *Les mathématiques dans le grand public et dans l'enseignement : Comparaison, analyse didactique*. Thèse de doctorat non publiée, Université Paul Sabatier, France.
- BICHARA, J. (2004, juillet). Rallye mathématique de l'IREM des Antilles et de la Guyane - Présentation, observations, réflexions. *Repère – IREM*, 56, 59-76.
- CADOUSTEAU, M. (2022). Liens entre la numération indo-arabique et des numérations orales en contexte bilingue polynésien : intérêt dans les formations initiales des enseignants du premier degré en Polynésie française. *Colloque JRE Riiclas 2022*. Papeete : communication à venir.
- CHARPENTIER, J.-M., & FRANÇOIS, A. (2015). *Atlas linguistique de la Polynésie française*. De Gruyter Mouton Université de la Polynésie française.
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.
- CLEMENT, P. (2003). Didactique de la Biologie : les obstacles aux apprentissages. Dans G. Simoes de Carvalho, & Al, *Saberes e practicas na formação de professores e educadores* (pp. 139-154). Portugal: FCT Min. da Ciancia e do Ensino Superior.
- DELCROIX, A., FORISSIER, T., & ANCIAUX, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Contextualisations didactiques : approches théoriques. Dans F. Anciaux, T. Forissier, & L.-F. Prudent, *Contextualisations didactiques : approches théoriques* (pp. 141-185). L'Harmattan.
- FORISSIER, T. (2003). *Les valeurs implicites dans l'éducation à l'environnement*. Thèse de Doctorat non publiée. Lyon : Université Claude Bernard.
- LEGLISE, I. (2017). Les langues parlées en Guyane : une extraordinaire diversité, uncasse-tête pour les institutions. (D. Langues et cité, Éd.) *Les langues de Guyane*, 2-5. Récupéré sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01674470>
- LEGLISE, I. (2020, février 14). Dans une Guyane multilingue, de senfants plurilingues. *Boukan le courrier ultramarin* (3). Récupéré sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02943132>
- MEJS (2020a). Programmes 2020 ajustés et adaptés à la Polynésie française Cycle 2. Récupéré sur www.education.pf
- MEJS (2020b). Programmes 2020 ajustés et adaptés à la Polynésie française Cycle 3. Récupéré sur www.education.pf
- MENJS. (2020). Programmes d'enseignement pour le primaire et le secondaire. Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports (31). Récupéré sur ~ 513 ~ <https://www.education.gouv.fr/au-bo-du-30-juillet-2020-programmes-denseignement-pour-le-primaire-et-le-secondaire-305398>
- MERCERON, F. (2005, Avril-Juin). Dynamiques démographiques contemporaines de la Polynésie française : héritage colonial, pluriethnisme et macrocéphalie urbaine. (P. u. Bordeaux, Éd.) *Les Cahiers d'Outre-Mer* (230), 233-240. doi:10.4000/com.246
- MERLO-LEURETTE, S., & FORISSIER, T. (2009). La contextualisation dans l'enseignement des sciences et techniques en Guadeloupe. (I. d. Grenoble, Éd.) *Grand N* (83). Récupéré sur <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-83-grand-n/>
- ROBO, E. (2021). *Étude comparée des interactions à visée d'apprentissage lors de séances de géométrie au cycle 3 de l'école primaire : le cas de la Polynésie française et de la Guyane française*. Thèse de doctorat. Université des Antilles, Pointe à Pitre. Récupéré sur <https://www.theses.fr>

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

SAUVAGE LUNTADI, L., & TUPIN, F. (2012, janvier). La compétence de contextualisation au coeur de la situation d'enseignement-apprentissage. (I. d. éducatives, Éd.) *Phroneis*, 1(1), 102-117. doi:<https://doi.org/10.7202/1006488ar>

PRATIQUES LINGUISTIQUES ET LANGAGES INTERMEDIAIRES DANS LA FORMATION DES FUTURS ENSEIGNANTS

Cristina Roshani*

RÉSUMÉ

Dans ce texte, je présente un travail de recherche dans lequel le langage est pris comme un objet d'étude dans le contexte de la formation pédagogique des futurs enseignants de mathématiques en Uruguay. Les caractéristiques du langage des mathématiques et la diversité linguistique inhérente aux cours de mathématiques, m'a permis d'élaborer un dispositif didactique centré sur la définition de la propriété de symétrie (réciproque) de la relation R dans un ensemble A . Le but a été d'offrir aux étudiants la possibilité de détecter la diversité des langages avec lesquels une même définition peut être énoncée, en faisant une première approche à l'étude méthodologique du langage à travers l'analyse de la présence des variables, des quantificateurs et des relations logiques de manière implicite ou explicite. Pour réaliser l'analyse du langage il m'a fallu établir six catégories de langage mathématique intermédiaire entre deux langages pôles, d'une part le langage naturel et d'autre part, le langage formel.

Mots-clefs : langage mathématique, langages intermédiaires, communication mathématique, formation pédagogique.

ABSTRACT

This work presents research into language as an object of study in the context of pedagogical training of future teachers of Mathematics in Uruguay. The characteristics of the language of Mathematics and the linguistic diversity inherent to a Mathematics classroom, allow for the development of a didactic device centered on the definition of the symmetric (reciprocal) property of a relation R on a set A . The aim was to make students aware of the diversity of languages with which the same definition can be stated, making a first approach to the methodological study of the language through the analysis of the presence of variables, quantifiers and logical relations in an implicit or explicit way. In order to carry out the analysis of language, six intermediate categories of mathematical language were established out of two farthestmost ones, natural language on the one hand and formal language on the other.

Keywords: mathematical language, intermediate languages, mathematic communication, pedagogical formation.

INTRODUCTION

Le langage mathématique peut-être considéré comme un moyen pour l'apprentissage, et voici que lors du parcours de l'apprentissage, ce langage mathématique commence à faire partie de l'acquis personnel des étudiants en leur fournissant des outils pour continuer à faire des progrès en mathématiques. L'apprentissage du langage mathématique ne se fait pas spontanément, il s'acquiert dans le processus systématique d'abstraction qui implique l'apprentissage des mathématiques. En conséquence, il est important que les futurs enseignants connaissent les caractéristiques du langage mathématique et la diversité linguistique que l'on trouve dans la classe de mathématique, pour parvenir à améliorer leurs pratiques.

Je commence par exposer quelques éléments théoriques sur le langage et la communication mathématique que j'en ai pris en compte pour établir les catégories de langages intermédiaires et pour concevoir l'instrument didactique. Ensuite je présenterai les catégories des langages intermédiaires et je montrerai les diverses manières, du point de vue du langage mathématique, dont la définition de la propriété de symétrie de la relation R sur un ensemble A est formulée dans différents ouvrages, manuels et sites web. Puis, je ferai référence à l'instrument didactique qui a permis aux futurs enseignants d'analyser le langage en classe de mathématiques et d'en faire une analyse plus systématique. Je conclurai par montrer que les catégories des langages mathématiques intermédiaires sont un outil qui a permis d'analyser

* Institut de Formation Pédagogique de Rocha, Uruguay

les pratiques des futurs enseignants, et qui peut également être utilisé par eux pour faire leurs classes.

LANGAGE MATHÉMATIQUE, LANGAGE NATUREL ET COMMUNICATION DANS L'ENSEIGNEMENT

La communication des mathématiques demande d'être précis, c'est-à-dire qu'il faut éviter les ambiguïtés pour pouvoir transmettre les concepts mathématiques en jeu. C'est ainsi que l'action de communiquer des idées mathématiques conduit à leur systématisation, donc une œuvre mathématique est créée (Barton, 2008). Pour être précis et rigoureux, il faut que le langage mathématique permette d'abstraire l'essence des relations mathématiques impliquées dans n'importe quelle situation (Gómez, 1989). Voilà pourquoi ce langage se caractérise par le fait d'avoir des règles, des symboles et des éléments dont l'objectif est celui de communiquer les notions mathématiques d'une manière précise, sans ambiguïtés, à différence du langage naturel ou courant (Radillo, Nesterova, Ulloa & Pantoja, 2005). Alors, on peut distinguer deux types de langages, le mathématique ou formel, et le naturel ou courant.

L'apprentissage des mathématiques et de leur langage se fait simultanément, systématiquement et progressivement. C'est un processus dans lequel les étudiants acquièrent la maîtrise d'un contenu mathématique qui implique des notions de plus en plus abstraites et complexes et d'un langage de plus en plus formel. De ce fait, il est important de comprendre comment le langage et, en particulier, la structure du langage mathématique, influencent la formation des concepts et de l'apprentissage des mathématiques.

Toutefois, pour apprendre des notions complexes, il n'est pas suffisant d'utiliser un langage précis et rigoureux. Une communication claire est nécessaire pour permettre la compréhension. Ce qui est important est de transmettre la signification, et pour cela, il est nécessaire de choisir les symboles avec le soin nécessaire pour parvenir à une communication réussie (Skemp, 1999). Selon Sfard (2000, 2001), la pensée est une forme de communication et l'apprentissage des mathématiques est une initiation au discours mathématique, c'est-à-dire, l'initiation à une manière particulière de communication connue sous le nom de mathématiques. Le discours mathématique implique plus que le langage, c'est une manière acceptée d'utiliser le langage, les expressions symboliques, les sentiments et les croyances, agissant de telle manière que chacun s'identifie en tant que membre d'un groupe social (Moschkovich, 2007).

Les discours mathématiques varient donc d'une communauté à l'autre, par exemple : entre les mathématiciens et les enseignants, parmi ceux qui se produisent à l'école primaire ou à la secondaire. Les étudiants sont censés de commencer par participer à des discours scolaires simples et, ils doivent progresser dans leur maîtrise jusqu'à réussir à posséder un discours académique, avec des notions plus complexes et abstraites au fur et à mesure que le temps d'apprentissage a lieu. Le langage utilisé dans chaque discours n'est pas le même. Evidemment, il faut considérer des langages intermédiaires entre le langage naturel et le langage mathématique symbolique qui permettent la transition entre les deux.

LANGAGES INTERMÉDIAIRES

Les langages intermédiaires permettent la transition entre le langage naturel et le langage mathématique symbolique. Ils sont composés par six catégories, lesquelles j'ai établies en fonction des complexités des notions mathématiques et de leurs symboles associés, des activités qu'elles permettent de faire et du niveau d'abstraction nécessaire. Les catégories sont graduelles et les énoncés qu'on formule avec elles sont rigoureux. Les moins formels ont une prédominance du langage naturel, ils sont associés à des propositions simples dont la valeur

de vérité n'exige toujours pas de justifications intra-mathématiques, tandis que, les plus formels ont un langage plutôt symbolique, les connecteurs et les quantificateurs sont explicites et ils sont liés à des notions plus abstraites et plus complexes. Les six catégories sont les suivantes :

Langage naturel mathématique : les énoncés et les formulations sont exprimés en termes de langage naturel. Il n'y a pas de présence explicite des variables, ni des quantificateurs, ni des connecteurs. Les symboles mathématiques qui apparaissent sont ceux qui peuvent être utilisés dans la vie quotidienne des personnes (nombres, signes des opérations de calcul, notation d'unités de mesure, etc.). Les signes ou symboles mathématiques qui apparaissent sont ceux que les personnes utilisent dans la vie quotidienne.

Langage intermédiaire élémentaire : le langage prédominant est le naturel. Les variables son explicites et comportent des symboles mathématiques utilisés à l'école ou dans des contextes mathématiques ($\in, N, <, \neq, \pi, \perp, //, \equiv, \subset, C_{O,r}$). Ce langage est caractérisé par l'utilisation des symboles pour désigner des objets ou pour exprimer des faits équivalents aux verbes utilisés dans le langage courant.

Langage intermédiaire moyen : les énoncés et les formulations sont plus éloignés du langage courant. Les variables et quelques connecteurs et quantificateurs sont explicites. Aux symboles utilisés dans les catégories précédentes on ajoute des notions qui n'appartiennent qu'au domaine mathématique et qui sont liées aux notions d'ordre supérieur (Skemp, 1999) ($\ln, \sin, \lim, dx, \Sigma$).

Langage intermédiaire avancé : les énoncés et les formulations sont exprimés dans un langage plus formel. Les variables, les quantificateurs et les connecteurs son explicites en langage naturel ou mathématique.

Langage formel appliqué : les énoncés et les formulations sont exprimés dans un langage formel. Les variables, les quantificateurs et les connecteurs son explicites en langage mathématique.

Langage formel logique : les propositions et les énoncés sont exprimés formellement en faisant apparaître des variables, des symboles, des quantificateurs et des connecteurs. Les symboles sont utilisés en laissant une place minimale aux mots. Le langage naturel n'apparaît pas.

INSTRUMENT DIDACTIQUE

Premièrement, je commence par présenter la manière dans laquelle cet instrument didactique a été conçu. Après je ferai référence aux étudiants qui ont réalisé les activités en faisant mention de leur formation académique. Ensuite je montrerai une analyse de la propriété de symétrie R sur un ensemble A , et finalement les activités proposées.

1. Conception

Dans les cours de mathématiques, les enseignants travaillent avec de différentes notions, proposent des activités diverses et, ils peuvent travailler de plusieurs manières. Pourtant, il y a un élément qui est inhérent aux cours de mathématiques : c'est la définition.

La relation d'équivalence et les définitions par abstraction sont des sujets dans les cours de formation des futurs instituteurs et des futurs professeurs de mathématiques. En considérant les propriétés d'une relation d'équivalence, j'ai choisi la propriété de symétrie de la relation R dans un ensemble A , parce que dans la pratique j'avais pu identifier quelques difficultés associées aux propriétés des relations sur un ensemble A (symétrique, antisymétrique, asymétrique, réflexive) chez les étudiants. En outre, le fait que les différences entre les définitions de la propriété de symétrie sur de différents ouvrages, manuels et pages web sont

le langage utilisé par les différents auteurs, m'a fait penser que les difficultés des étudiants étaient dues au langage mathématique utilisé.

2. Contexte expérimental

L'instrument didactique a été appliqué en 2018 et il a été destiné aux étudiants de l'Institut Pédagogique de Rocha, en Uruguay. Dans cet institut se forment les futurs instituteurs et les futurs professeurs, c'est-à-dire les enseignants qui vont travailler à l'école primaire et à l'école secondaire respectivement. Les deux carrières ont une durée de quatre ans, et à partir de la deuxième année les étudiants ont des cours pratiques en didactique. Les deux activités de l'instrument didactique ont été réalisées par 25 étudiants de la deuxième année de la carrière pour devenir instituteur, et par 6 étudiants de la première année de la carrière pour devenir professeur de mathématique.

La formation mathématique et les discours des cours de chaque carrière sont différents puisque la formation des futurs professeurs est plus spécifique et formelle que celle des futurs instituteurs. Mais, ces derniers ont déjà commencé à faire les cours pratiques en didactique. Pour ces motifs, j'ai considéré que proposer les activités de l'instrument didactique aux étudiants des deux carrières, montrerait un aperçu différent de l'étude du langage mathématique.

ANALYSE DE LA PROPRIÉTÉ DE SYMÉTRIE

Une manière d'analyser le langage mathématique est considérer les variables (x, y, a, b), les symboles mathématiques et les éléments logiques comme les quantificateurs et les connecteurs (Romo-Vázquez & Hache, 2019). C'est-à-dire qu'il faut analyser la structure logique du langage.

Je ferai l'analyse de quatre des douze définitions que les étudiants ont choisies pour montrer la diversité de manières dont la définition de la propriété symétrique de la relation R dans un ensemble A peut être énoncée, en utilisant les six catégories de langages intermédiaires.

Définition (1) : "Soit un ensemble A dans lequel une relation R a été définie, c'est-à-dire que R est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$. Une relation R dans A est dite d'équivalence si elle répond aux propriétés suivantes :

Réflexive ou identique : $a R a$

Symétrique : $a R b \Rightarrow b R a$

Transitive : $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$ " (Fernandez, 2007, p. 40)

Dans la définition 1 la propriété de symétrie fait partie de la définition de la relation d'équivalence dans un ensemble A . Elle est énoncée en langage intermédiaire moyen parce qu'il y a des symboles qui appartiennent au domaine mathématique comme R , \wedge et $A \times A$, les variables et le connecteur \Rightarrow apparaissent de manière explicite, mais le quantificateur universel et le connecteur biconditionnel \Leftrightarrow , sont implicites.

Définition (2) : "Une relation R dans un ensemble A est dite de symétrie si $\forall (a, b) \in R$ implique que $(b, a) \in R$. C'est-à-dire, R est de symétrie $\equiv \forall a, \forall b, (a R b \Rightarrow b R a)$ " (Villalpando, 2018, p. 9).

La propriété de symétrie de la relation R dans un ensemble A est énoncée deux fois dans la définition 2, l'auteur sépare les deux énoncés de la définition avec les mots « C'est-à-dire ». Dans les deux cas il y a des variables, des connecteurs et des quantificateurs formulés de manière explicite. Dans le premier cas, l'auteur utilise langage naturel pour exprimer l'implication \Rightarrow , langage mathématique pour le quantificateur universel \forall , et le connecteur biconditionnel \Leftrightarrow est implicite (le mot « si » est à sa place). Par conséquent, cet énoncé de la

définition est formulé en langage intermédiaire moyen. Dans le deuxième énoncé de la définition, le langage utilisé est le langage formel appliqué parce que tous les connecteurs et le quantificateur sont de manière explicite et ils sont exprimés avec leurs symboles. Dans la première partie de la définition l’auteur écrit $(a, b) \in R$, et dans la deuxième partie il écrit $a R b$.

Définition (3) : “Une relation R sur un ensemble A est de symétrie si pour tout $x \in A, y \in A$, si $(x, y) \in R$ alors $(y, x) \in R$. Exprimé d’une autre façon : $\forall x, y \in A$ il est vrai que si $(x, y) \in R$ alors $(y, x) \in R$. Exemple : $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)\}$ ” (Ferrari, y Tenembaun, 2010, p.1)

Comme dans le cas précédent, dans la définition 3 la propriété de symétrie est énoncée deux fois. Les auteurs ajoutent un exemple. Même si le quantificateur universel est exprimé en langage naturel dans le premier énoncé de la définition et avec son symbole dans le deuxième, dans les deux cas elle est exprimée en langage intermédiaire moyen parce que le connecteur biconditionnel est implicite.

Définition (4) : “Une relation R dans un ensemble A est de symétrie si un élément est mis en rapport avec un autre à travers R , alors l’autre élément est mis en rapport avec le premier à travers de la même R . C’est le même avoir (a, b) que avoir (b, a) . C’est-à-dire, $\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y R x$ ” (“Relación simétrica”, 2021)

Dans la définition 4, il y a trois types de langages : du langage naturel mathématique pour formuler la première phrase. Comme sur la deuxième phrase apparaissent des variables de manière explicite, elle est exprimée en langage intermédiaire élémentaire. Finalement, la troisième phrase est formulée en langage intermédiaire moyen, parce que les variables, le quantificateur et l’implication sont explicites, mais le connecteur biconditionnel est implicite.

PREMIERE ACTIVITE ET ANALYSE DES TRAVAUX DES ETUDIANTS

Les buts de cette activité sont : 1) Reconnaître le langage comme objet de recherche. 2) Sensibiliser les futurs professeurs de mathématiques à l’existence de différents langages qui participent de l’activité mathématique.

La consigne de l’activité 1 est la suivante : a) Cherche sur quatre livres (au moins) et dans deux sources fiables sur internet la définition de la propriété de symétrie (réciproque) de la relation R dans un ensemble A . b) Observes-tu des différences ? Penses-tu que l’une d’entre elles est la plus rigoureuse ? Pourquoi ? c) Si tu devais enseigner cette définition, laquelle tu choisirais pour présenter en classe et pourquoi ? d) Cela suffirait-il à tes élèves de le lire ou penses-tu qu’il faudrait l’expliquer ? Pourquoi ? e) Si tu penses qu’il est nécessaire de l’expliquer, écris l’explication que tu donnerais aux étudiants. f) Quelles différences il y a t’il entre la définition que tu as choisie et l’explication associée ? g) Quelles sont les caractéristiques du langage utilisé dans la définition et quelles sont les caractéristiques du langage utilisé pour l’explication ?

L’analyse des travaux des étudiants a révélé que travailler avec une même définition leur a permis d’observer la diversité linguistique. Ils ont reconnu que la même proposition est formulée de deux façons différentes dans une même définition, et que les notions peuvent être énoncées en langage courant ou en langage mathématique symbolique, qu’il y a des définitions avec plus de symboles mathématiques que d’autres, et que d’ailleurs, les auteurs écrivent $(a, b) \in R$ ou $a R b$ et finalement que, dans quelques définitions, on trouve des exemples ou la négation de la propriété.

1. Définitions choisies comme les plus formelles

Dans la réponse Matías (Figure 1), il est possible d’observer que pour des futurs enseignants les définitions formulées dans un langage symbolique sont envisagées comme les plus

formelles, car ils considèrent que le langage naturel avec des mots du langage courant peut être ambigu.

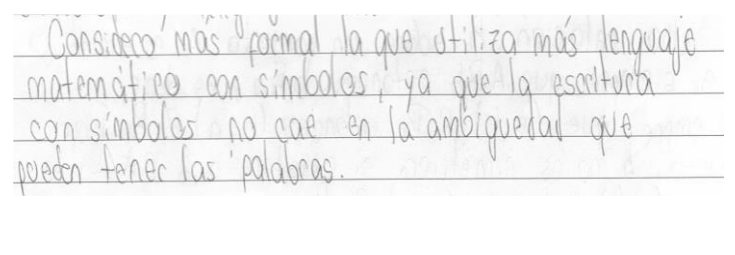
	<p>Je considère la plus formelle celle qui utilise le plus du langage mathématique avec des symboles, car la structure avec des symboles ne tombe pas dans l’ambiguïté qui peuvent avoir les mots.</p>
---	--

Figure 1. – Réponse de Matías, futur enseignant dans le primaire, qui pense que le langage mathématique avec des symboles est plus formel que le langage de la langue courante.

Plusieurs étudiants ont exprimé que les définitions qui ajoutent des exemples, qui ajoutent la négation ou bien présentent la définition de plusieurs façons du point de vue linguistique, étaient plus faciles à comprendre et complètes. Par contre, ils choisissaient pour enseigner des définitions qui n’avaient pas ces caractéristiques, comme par exemple celle de Franco, Olave y Vitabar¹ (2015). La réponse de Bruno (Figure 2), explique la raison d’avoir fait ce choix. Il trouve plus formelle la définition de Franco, Olave y Vitabar (2015) parce que le quantificateur universel est exprimé par les mots « pour tous », tandis que dans celle de Fernandez (2007), le quantificateur universel n’apparaît pas, il est de manière implicite.

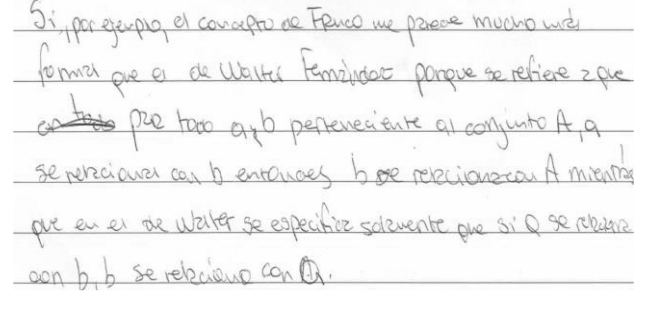
	<p>Oui, par exemple, la notion de Franco me semble beaucoup plus formelle que celle de Walter Fernandez parce qu’elle réfère que pour tout a et b qui appartient à un ensemble A, a est en relation avec b alors b est en relation avec A, tandis que dans celui de Walter est précisé seulement que si a est en relation avec b, b est en relation avec a.</p>
--	---

Figure 2. – Réponse de Bruno, futur instituteur, qui compare la définition de Fernandez (2007) (définition (1)) et celle de Franco, Olave y Vitabar (2015)

2. Définitions choisies pour être enseignées

La plupart des étudiants ont choisi une définition plus formelle du point de vue du langage pour la classe. 52% des étudiants ont choisi une qui été énoncée en langage formel appliqué et 39% d’entre eux, une qui été formulée en langage intermédiaire moyen et langage intermédiaire avancé. On peut distinguer quelques nuances parmi les futurs instituteurs et les futurs professeurs de mathématiques étant donné que 83% des futurs professeurs de mathématiques ont choisi pour travailler en classe la même définition qu’ils avaient choisie comme la plus rigoureuse. Tandis que 60% des futurs instituteurs ont choisi une définition en langage formel appliqué ou formel logique et le 40% restants ont choisi une définition formulée en langage intermédiaire moyen ou naturel mathématique.

Les étudiants qui ont choisi une définition énoncée surtout en langage naturel, pensent que c’est plus facile à comprendre. Ceux qui ont choisi un énoncé principalement en langage

¹ “Consideramos un conjunto A no vacío y una relación R definida en A. R cumple la propiedad simétrica o recíproca $\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a R b \Rightarrow b R a$.” (Franco, Olave, Vitabar, 2015, p. 70). Cette définition est formulée en langage intermédiaire avancé.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

mathématique considèrent qu'un langage plus formel est un but pédagogique. Les futurs enseignants considèrent que l'apprentissage des notions part du concret vers l'abstrait. C'est ainsi que pour apprendre il est nécessaire de commencer par un langage naturel mathématique pour atteindre un langage plus formel. La réponse de Maxi (Figure 3) est claire à ce sujet.

De même que Maxi, plusieurs étudiants ont signalé qu'il était nécessaire d'énoncer deux définitions. Les étudiants qui ont choisi une définition en langage plus formel ont dit qu'il serait nécessaire d'expliquer les symboles mathématiques en utilisant le langage courant.

En ce qui concerne les explications, les étudiants sont de l'avis qu'elles doivent être exprimées en langage naturel, pourtant les définitions doivent être énoncées en langage plutôt mathématique.

<p>c) Como resultado final elegiría la de Fernando Val, ya que es a la que se aspira como resultado final de la construcción del concepto.</p> <p>Por otro lado, para el proceso de construcción del mismo, elegiría en este caso la de Wikipedia, por el hecho de que está adaptada a un lenguaje más coloquial que facilita la comprensión del estudiante.</p>	<p>Comme résultat final je choisirais celle de Fernandez Val, car c'est à ce qu'on aspire comme résultat final de la construction d'une notion. Par contre, pour le processus de construction, je choisirais dans ce cas celle de Wikipédia, du fait qu'il est adapté à un langage naturel que facilite la compréhension pour les étudiants.</p>
--	--

Figure 3. – Réponse de Maxi, futur enseignant dans le primaire

Les futurs enseignants reconnaissent qu'il y a deux types de langages qui coexistent dans la classe de maths et qu'il est nécessaire d'apprendre un langage plus formel, mais ils ne sont pas conscients des langages intermédiaires. Voilà pourquoi je leur ai proposés une deuxième activité.

DEUXIEME ACTIVITE ET ANALYSE DES TRAVAUX DES ETUDIANTS

Le but de cette activité est de rendre possible aux futurs enseignants une première expérience d'étude systématique du langage en employant des langages intermédiaires.

Les étudiants doivent compléter le tableau 1 d'après les indications suivantes : a) Observe les définitions de la propriété de symétrie de la relation R sur un ensemble A dont tu as fait la liste sur l'activité précédente et place-les dans la deuxième colonne selon le langage employé, c'est-à-dire que tu dois considérer les catégories énumérées dans la première colonne. Tu peux considérer plus d'une définition dans la même catégorie. b) Dans la troisième colonne place un analyse de l'usage des variables (a, b, x, y, \dots), des quantificateurs (\forall, \exists), des signes mathématiques, (\in, R, \dots), des connecteurs logiques ($\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \dots$), utilisés dans les différentes définitions de la propriété symétrique. C'est à dire que tu devras répondre successivement aux questions telles que les questions ici mentionnées : les quantificateurs sont implicites ou explicites ? Quels sont ceux qui sont exprimés de manière implicite ? Les variables utilisées représentent la généralité ? Est-ce qu'il y a quelque implication explicite ? Est-ce qu'il apparaît quelque implication implicite ? Laquelle ? Si les signes n'apparaissent pas, quels sont les mots du langage courant qui ont été employés à leur place ? Les quantificateurs et les signes mathématiques apparaissent dans le même ordre dans les définitions ? Des signes et des notations sont utilisés dans les définitions pouvant être considérées comme équivalentes quant au langage ? Si oui, lesquels ?

Langages intermédiaires	Définition de la propriété symétrique	Analyse des variables et des formulations logiques
-------------------------	---------------------------------------	--

Définition exprimée en langage naturel. Il n'y a pas de présence des signes et/ou des symboles mathématiques		
Définition exprimée dans les termes d'un langage naturel, pourtant des variables et des signes mathématiques apparaissent de forme explicite (\in , \mathbb{R} , \emptyset , \cup , etc.). Les connecteurs et les quantificateurs sont implicites		
Définition exprimée en termes qui s'éloignent d'un langage courant, les variables sont en forme explicite et quelques connecteurs ou quantificateurs apparaissent de forme explicite mais exprimés en langage naturel, et d'autres qui sont implicites		
Définition exprimée en termes plus formels, les variables, les symboles, les quantificateurs et les connecteurs apparaissent en forme explicite exprimés en langage rigoureux ou naturel		
Définition exprimée en termes formels en utilisant des variables, des quantificateurs et des connecteurs de forme explicite et avec leurs respectifs signes mathématique		
Définition utilisant des fonctions propositionnelles en langage formel		

Tableau 1. – Tableau à compléter par les étudiants

1. Diversité linguistique et difficulté de classification

Les étudiants devaient classer six définitions. Aucun d'entre eux n'a classé les six définitions correctes, 4% ont bien classé cinq, 12% ont bien classé quatre, et le reste a bien classé trois ou moins. Ces résultats peuvent s'expliquer du fait de la nature de l'activité proposée (elle était nouvelle pour eux et par la diversité linguistique des définitions). Sur les douze définitions retenues au total, il n'y a pas deux définitions énoncées de la même manière du point de vue linguistique. En outre, dans diverses définitions, il est possible de constater que la même proposition est énoncée de deux façons différentes. Cela a causé des difficultés au moment de la classification, car quelques étudiants ont classifié chaque proposition dans une catégorie différente, mais d'autres non. Aussi, les étudiants ont l'idée qu'un langage rigoureux est un langage sans vocabulaire de la langue courante. Cette idée les a fait mal classer les définitions.

2. Étude systématique du langage

Même s'ils ont fait des erreurs dans la classification, il est possible d'affirmer que les futurs enseignants savent quelles sont les éléments qui caractérisent les langages les plus rigoureux, et qu'ils reconnaissent les variables, les symboles et les éléments logiques comme les quantificateurs et les connecteurs.

Sur le travail d'Estefanie (Figure 4) il est possible d'observer qu'elle a indiqué pour chaque catégorie le caractère implicite ou explicite des variables, du quantificateur universel et de l'implication. Estefanie a reconnu que les définitions étaient énoncées de deux manières distinctes et elle a classé chacune d'entre elles dans une catégorie différente. Cependant, elle a commis trois erreurs dans la classification parce qu'elle n'a pas considéré que la double implication se trouve implicite.

Les étudiants savent que toutes les définitions se caractérisent par la possession d'une double implication, néanmoins, dans plusieurs définitions ce connecteur n'apparaît pas, et ils ne se rendent pas compte de cela. Les auteurs des manuels supposent que les personnes qui

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

lisent une définition connaissent qu'une définition est une formulation logique avec une double implication. Cela peut être attribué aux caractéristiques des pratiques langagières des mathématiciens.

L'analyse des travaux des étudiants a permis d'observer que les futurs professeurs de mathématiques ont fait une meilleure analyse du langage que les futurs instituteurs. La formation des étudiants du professorat de maths est plus formelle que celle des futurs instituteurs, et les pratiques langagières de leur cours sont plus rigoureuses. On peut supposer que l'analyse qu'ils ont faite en est la conséquence.

Definición expresada en términos que se alejan del lenguaje coloquial, las variables están de forma explícita y se reconocen algunos conectores o cuantificadores de forma explícita pero expresados en lenguaje coloquial, y otros están implícitos.	1) ✓	1- Los cuantificadores están implícitos. 2- 4. 3- si las variables representan generalidad 4- si 5- no
Definición en términos más formales reconociendo variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita utilizando lenguaje formal o coloquial.	2) 3) 4) 5) 6) ✓ X ✓ X X	Definición 3) 1) Están explícitos 2) ninguno 3) si 4) si 5) no. Definición 4) 1) Están explícitos 2) si 3) si 4) si 5) no
Definición expresada en términos formales utilizando variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita y con sus respectivos signos matemáticos	2) ✓	1) Están explícitos. 2) ninguno 3) si 4) si 5) no

Figure 4. – Extrait du travail d'Estefanie, futur professeure de Mathématique

CONCLUSIONS

Les futurs enseignants reconnaissent qu'en classe de mathématiques coexistent deux types de langages : d'une part, le mathématique symbolique qui est associé aux définitions mathématiques, et d'autre part le naturel, qui est associé aux explications. Cependant, une analyse plus approfondie du langage, pour ce qui est de la classification des définitions en utilisant les catégories du langage mathématique intermédiaire et en considérant les variables, les symboles mathématiques et les éléments logiques, leur a permis de reconnaître la diversité linguistique et d'apprécier le langage comme un objet d'étude en lui même.

Les discours mathématiques associés aux cours des futurs instituteurs et à celui des futurs professeurs de mathématique ont influencé l'analyse que chacun d'entre eux a faite. Ces derniers ont effectué une analyse plus rigoureuse et ont, en outre, privilégié des définitions plus formelles du point de vue du langage, pour travailler en classe. Cependant, il existe une perception répandue entre les futurs enseignants selon laquelle les définitions doivent être formulées en langage plutôt mathématique.

Le fait qu'une définition soit formulée en langage mathématique ne la rend pas plus compréhensible. Divers éléments influencent la compréhension et la formations de concepts mathématiques, tels que les conceptions de formateurs, le discours et les pratiques linguistiques de chaque cours de mathématiques. Les futurs enseignants ne sont pas toujours conscients de cela, il est important de proposer des activités qui permettent aux futurs enseignants de prendre conscience des pratiques linguistiques qui ont lieu dans une classe de mathématiques, en concevant le langage mathématique comme un objet d'étude. C'est ce qui peut permettre aux futurs enseignants d'améliorer leurs pratiques, d'anticiper les erreurs et d'éviter des difficultés chez leurs élèves.

Enfin, les catégories du langage mathématique intermédiaire sont l’outil qui a fait partie des activités proposées et qui a permis aux étudiants de réaliser une analyse tantôt du langage, tantôt des pratiques linguistiques associées aux cours de mathématiques. En outre, le fait de savoir qu’il existe différentes catégories de langage mathématique intermédiaire et de les connaître, devrait permettre aux futurs enseignants de choisir celle ou celles qui seront les plus appropriées pour planifier leurs cours et pour faire leurs classes.

RÉFÉRENCES

- BARTON, B. (2008). *The Language of Mathematics: Telling Mathematical Tales*. Auckland: Springer.
- FERNÁNDEZ, W. (2007). *Fundamentos de análisis matemático*. Montevideo: Kapelusz.
- FERRARI, G. Y TENEMBAUN, S. (2010). *Resumen de relaciones y funciones*. Recuperado de Instituto Normal de Enseñanza Técnica. Review : http://www.x.edu.uy/inet/RELACIONES_FUNCIONES.pdf
- FRANCO, G., OLAVE, M. Y VITABAR, F. (2015). *Texto para la asignatura Fundamentos de la Matemática de la formación de profesores*. Parte 1. Montevideo : Palíndromo.
- GÓMEZ, C. (1989). *La adquisición del lenguaje matemático : un difícil equilibrio entre el rigor y el significado*. Comunicación, Lenguaje y Educación. 3(4), 5-15.
- MOSCHKOVICH, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 24-30.
- RADILLO, M., NESTEROVA, E., ULLOA, R. Y PANTOJA, R. (2005). *Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa*. Trabajo presentado en el V Congreso Internacional Virtual de Educación. Guadalajara, México. RELACION SIMÉTRICA. (21 mars 2021). Dans Wikipedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Relaci%C3%B3n_sim%C3%A9trica&direction=prev&oldid=134418845
- ROMO-VÁZQUEZ, A., Y HACHE, C. (2019). Prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas. Una experiencia de profesionalización online para profesores de matemáticas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 8(2), 112–138.
- ROSHANI, C. (2019). *Análisis de prácticas lingüísticas asociadas a la actividad matemática en la formación de futuros profesores*. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN. <https://repositorio.cfe.edu.uy/bitstream/handle/123456789/691/Roshani%2CC.Analisis.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- SFARD, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157-189.
- SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13–57.
- SKEMP, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata S.L.
- VILLALPANDO, J. (2018, abril 19). *Apuntes para la materia de matemáticas discretas*. Recuperado de Universidad de Guadalajara, Departamento de Matemática. Review: <http://mate.cucei.udg.mx/matdis/>

LA MATHEMATISATION HORIZONTALE : QUELS APPORTS POUR UNE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA MODELISATION MATHEMATIQUE ?

Sonia Yvain-Prébiski*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous nous intéressons à la modélisation mathématique à partir de situations extra-mathématiques. Partir de telles situations nécessite dans un premier temps de les rendre accessibles à un traitement mathématique. Nous montrons comment nous avons pris en compte le travail de mathématisation horizontale et ses rapports dialectiques avec la mathématisation verticale, dans un processus de modélisation, pour mener une étude sur la dévolution aux élèves du secondaire du travail de mathématisation horizontale. L'objectif est d'une part, de montrer comment nous avons pris en compte le travail de mathématisation horizontale tout au long de notre recherche, d'autre part de mettre en évidence les apports de cette prise en compte dans nos analyses didactiques.

Mots-clefs : mathématisation horizontale ; mathématisation verticale ; modélisation mathématique ; situation extra-mathématique, pratiques de chercheurs

ABSTRACT

In this article, we are interested in mathematical modelling based on extra-mathematical situations. Starting from such situations requires first to make them accessible to a mathematical treatment. We show how we have considered the work of horizontal mathematization and its dialectical relationship with vertical mathematization, in a modelling process, in order to carry out a study on the devolution of horizontal mathematization to secondary school pupils. The objective is, on the one hand, to show how we have taken into account the work of horizontal mathematization throughout our research, and on the other hand, to highlight the contributions of this consideration in our didactic analyses.

Keywords: horizontal mathematization, vertical mathematization, mathematical modelling, extra-mathematical situation, researcher's practices

INTRODUCTION

Dans les prescriptions curriculaires à tous les niveaux, en France comme à l'international, le développement de compétences liées à la modélisation de situations extra-mathématiques est mis en avant, par exemple dans le document d'accompagnement sur la compétence Modéliser au cycle 4 :

« La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée. » (Eduscol, 2016, p.4)

Partir de telles situations nécessite alors dans un premier temps de les rendre accessibles à un traitement mathématique.

« Il faut prendre en compte le fait qu'une question de vie quotidienne est rarement directement une question mathématique. Elle le devient à travers un processus de mathématisation ou modélisation mathématique qui simplifie et interprète la réalité. Il est important de rendre visible cette étape, les choix qui y sont faits et la façon dont ils conditionnent l'appréhension du réel, en y associant activement les élèves. » (Artigue dans Masselin, 2020, p.13).

Nous avons focalisé notre recherche sur cette étape qui conduit à passer d'une situation extra-mathématique à un problème mathématique. En suivant Treffers repris par Freudenthal (1991), le travail nécessaire pour cette étape relève d'un travail de mathématisation horizontale (MH). Dans notre travail de thèse, nous avons interrogé les conditions pour faire

* LDAR, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France

vivre cette étape en classe de mathématiques dans le secondaire et en particulier sur les conditions pour favoriser la dévolution de ce travail aux élèves. Il s'agissait de notre première question de recherche *Q1-Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la MH aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation ?*

Pour nourrir ce questionnement didactique, nous avons mené une étude épistémologique des pratiques contemporaines de chercheurs qui utilisent la modélisation mathématique dans leurs travaux dans le but d'apporter des éléments de réponse à la seconde question de recherche : *Q2-Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique ?*

Dans cet article, il ne s'agit pas de répondre directement à ces deux questions de recherche mais de montrer en quoi la prise en compte de la MH dans le processus de modélisation a nourri notre recherche en didactique.

Après avoir présenté l'ancrage théorique et la structure de notre recherche, nous détaillerons les apports de la prise en de la mathématisation horizontale dans notre recherche, d'abord relative à Q2 (étude d'épistémologie contemporaine) puis celle relative à Q1 (analyses didactiques).

ANCRAGE THEORIQUE ET STRUCTURE DE LA RECHERCHE

1. Ancrage théorique

Nous suivons Treffers (1978) qui distingue deux types de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation en mathématique : la mathématisation horizontale qui « part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles » et la mathématisation verticale qui « se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles ». Dans le cadre de la Realistics Mathematics Education (RME), Freudenthal (1991) reprend cette distinction :

« Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. » (Freudenthal, 1991, p.40)

Par exemple, dans ce cadre, « schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes manières » relève de la mathématisation horizontale et « représenter une relation dans une formule » relève de la mathématisation verticale.

Pour mieux cerner le rôle de la mathématisation dans un processus de modélisation, nous nous sommes également appuyée sur l'ouvrage « La mathématisation du réel » d'Israël (1996). Nous présentons ici seulement ce que nous en avons retenu (voir Yvain, 2017 pour plus de détails) :

- Un modèle mathématique est « *un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité, [...] non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents.* » (Israël, 1996, p.11).
- La modélisation mathématique est une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité avec la question à étudier.
- « Pour traduire en langage mathématique un phénomène, il faut déterminer une ou plusieurs variables décrivant l'état du phénomène à un instant donné [...] il faut faire des hypothèses concernant la loi selon laquelle ces variables changent pour aboutir à une loi mathématique donnant l'allure du phénomène. » (Op.cit., p.24)

Ainsi en croisant les travaux d'Israël et ceux de Freudenthal, nous avons défini des formes de la MH et MV pour notre étude dans le tableau 2 (Yvain-Prébiski, 2018) :

Mathématisation horizontale	Mathématisation verticale
<ul style="list-style-type: none"> - Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée - Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique - Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique - Associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure¹ 	<ul style="list-style-type: none"> - La traduction mathématique de la mise en relation des aspects pertinents choisis - Le traitement mathématique à partir de cette traduction

Tableau 1. – Formes de la MH et MV dans notre recherche

En appui sur ces formes, nous avons étudié dans la littérature en éducation mathématique la diversité des schémas du processus de modélisation et leurs prises en compte du travail de mathématisation au cours de l'activité de modélisation (voir (Yvain-Prébiski, 2018) pour plus de détails). Nous avons fait le constat d'une faible prise en compte de la mathématisation horizontale. Nous avons alors fait le choix d'élaborer un nouveau schéma afin de mettre davantage en évidence les étapes nécessaires pour passer du monde réel au monde mathématique (figure 1).

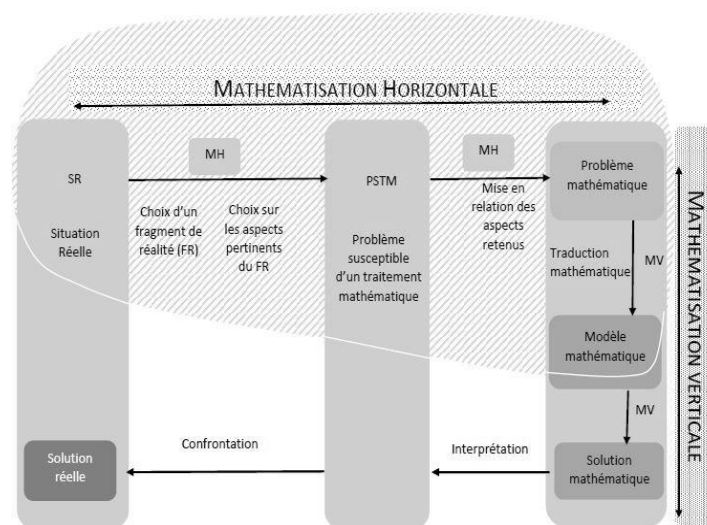


Figure 1. – Le cycle de modélisation élaboré au début de notre étude

Le cycle élaboré (figure 1) vise des apprentissages associés à la modélisation mathématique en tant qu'objet d'enseignement en mettant en évidence les deux aspects de la mathématisation en jeu. Il peut être vu comme un enrichissement du cycle de Blum & Leiss (2007) (figure 2) dans le sens qu'il explicite la phase « simplifying /structuring » et « mathematizing » (Yvain-Prébiski, 2021).

¹ Il s'agit de la « quantification » au sens de Chabot & Roux (2011), c'est-à-dire la manière dont certaines propriétés sont associées à des quantités.

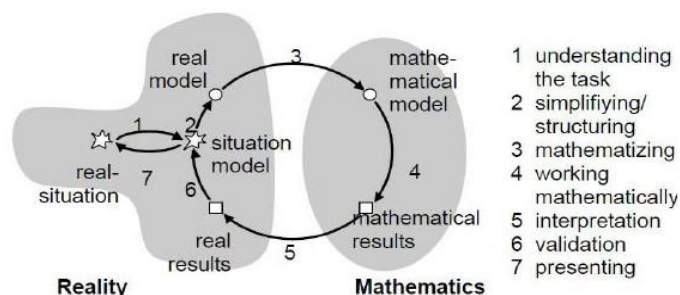


Figure 2. – Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007)

Comme le souligne Maaß (2006), la diversité des propositions de schémas visant à illustrer le processus de modélisation dans la littérature est essentiellement corrélée aux objectifs d'apprentissage et au choix des compétences à développer visées par les auteurs. Ainsi, dans notre étude, le choix de la situation à proposer et le dispositif de mise en œuvre associé doivent permettre de faire émerger le travail spécifique relatif à la mathématisation horizontale et ses rapports dialectiques avec la mathématisation verticale. Pour conduire l'étude relative à la question de recherche Q1², et dans l'objectif de faire vivre en classe le schéma représenté dans la figure 1, nous avons réalisé une pré-expérimentation au sein du dispositif ResCo ((Résolution Collaborative De Problèmes) de l'IREM de Montpellier qui nous a permis de retenir la pertinence d'une phase de questions-réponses sous la responsabilité des élèves (ResCo 2014). Cette phase de questions-réponses vise à faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de faire des choix et que selon les choix faits, plusieurs modèles mathématiques sont envisageables et ainsi entrer dans un travail de mathématisation horizontale interconnecté avec l'aspect vertical de la mathématisation.

2. Structure de la recherche

Pour conduire l'étude relative à la question de recherche Q1, nous avons choisi de nous placer dans le contexte des sciences de la vie pour des raisons essentiellement pragmatiques : nécessité de circonscrire un domaine et contacts préexistants avec des chercheurs du domaine. Une spécificité de notre méthodologie est de nourrir ce questionnement didactique par une première étude épistémologique des pratiques contemporaines de chercheurs utilisant la modélisation mathématique dans ce contexte. Cette étude est axée sur les pratiques des chercheurs associées à un travail relevant de la MH et vise à répondre à la question de recherche Q2. L'objectif est de s'appuyer sur les résultats de cette étude pour :

- Enrichir le schéma du processus de modélisation choisi (figure 1),
- Caractériser des situations posées dans un contexte non mathématique *a priori*, favorisant la dévolution de la MH aux élèves dans l'activité de modélisation,
- Élaborer des indicateurs pour nos analyses didactiques associées à Q1.

Le lecteur trouvera l'architecture globale de la recherche en annexe 3, qui met en évidence la place centrale de la MH dans notre recherche.

Dans la suite, nous allons décrire comment nous avons pris en compte la MH dans notre recherche en mettant en évidence les apports de cette prise en compte, tout d'abord dans l'étude épistémologique des pratiques contemporaines de chercheurs, puis dans nos analyses didactiques.

² Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la MH aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation ?

LA MATHEMATISATION HORIZONTALE DANS L'ETUDE D'EPISTEMOLOGIE CONTEMPORAINE

Pour mener cette étude, nous avons d'abord étudié dans la littérature les relations entre mathématisation et modélisation dans l'activité de modélisation dans le contexte des sciences de la vie (Delattre, 1979 ; Legay, 1997 ; Schmid, 2009 ; Varenne, 2008 ; Hubert, 2016 ; entre autres). Pour ce faire, nous avons identifié les formes de mathématisation qui émergent en nous appuyant sur le tableau 2. Il est ressorti de ce travail l'importance du choix des variables pertinentes sur l'interprétation d'un phénomène dans une activité de modélisation, la nécessité d'écrire des relations entre les variables pour rendre compte des phénomènes. Nous avons pointé que les chercheurs dans ce domaine sont amenés à faire des choix à propos du fragment de réalité qu'ils vont modéliser tout en anticipant sur le traitement mathématique qu'induisent ces choix.

Nous avons fait le choix de mener des entretiens auprès de chercheurs utilisant la modélisation mathématique afin de mieux comprendre et de mieux caractériser l'activité de modélisation dans ce domaine. Nous nous sommes focalisée sur le travail de mathématisation horizontale en cohérence avec nos questions de recherche Q1 et Q2. Nous ne détaillons pas ici l'élaboration de la grille d'entretien (Yvain, 2017). Pour analyser nos entretiens, nous avons utilisé les formes de la MH pour identifier si des pratiques des chercheurs interviewés en relèvent. Nous avons relevé trois éléments invariants dans leurs pratiques relevant de la MH :

- **P₁₁** Le chercheur fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.
- **P₁₂** Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème, quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P₁₁**.
- **P₁₃** La « *quantification* », c'est-à-dire associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure, est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur pour légitimer le choix du modèle utilisé, dans le sens où elle permet de confronter les résultats obtenus avec le modèle, avec les données réelles.

Il ressort que les chercheurs interviewés sont amenés à faire des hypothèses simplificatrices pour choisir le fragment de réalité à modéliser. Le chercheur commence par choisir un modèle existant en cohérence avec l'identification préalable des variables pertinentes et de leur mise en relation. Cette phase relève d'un travail de MH. Nous considérons que, le chercheur réfléchit dès cette phase au modèle mathématique qui pourrait être utilisé à partir de ce choix et il choisit un modèle qui doit lui permettre un traitement mathématique (MV) afin de recueillir des observables. On peut souligner les rapports dialectiques entre les deux aspects de mathématisation, la MH prenant en compte les possibles au niveau du travail de la MV qu'elle va induire. Pour valider le choix de modèle, les chercheurs confrontent les résultats obtenus (souvent via une simulation informatique) au sein du modèle mathématique à ceux obtenus expérimentalement. Cette phase matérialise des allers retours entre la MH et la MV. De cette confrontation, les chercheurs sont amenés à revoir soit le choix du fragment de réalité, soit les grandeurs pertinentes retenues pour le modèle ou leur mise en relation, soit les conditions et/ou le protocole de l'expérience réalisée. Il ressort de plus que la quantification de l'objet d'étude semble un incontournable des pratiques de ces chercheurs. Pour mettre en évidence l'interconnexion entre la MH et MV dans une activité de modélisation mathématique, nous avons complété notre schéma du cycle de modélisation (figure 1) en

ajoutant des doubles flèches à partir de modèle mathématique vers « la situation réelle » et vers « le problème susceptible d'un traitement mathématique » (figure 3).

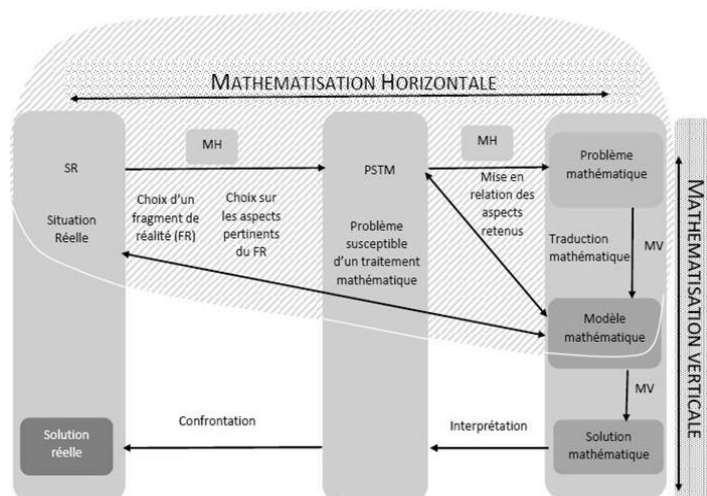


Figure 3. – Le cycle de modélisation mathématique pour notre étude

Cette étude nous a également permis de caractériser des situations favorisant le travail de MH et d'élaborer une situation dans le contexte des sciences de la vie que nous avons expérimentée dans une soixante de classes du secondaire en France (voir énoncé en annexe 1). Nous invitons le lecteur à retrouver en détail cette caractérisation et cette élaboration ici : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02052892/document> (Yvain-Prébiski, 2018bis).

LA MATHEMATISATION HORIZONTALE DANS NOS ANALYSES DIDACTIQUES

Nous nous sommes appuyée sur les résultats de l'étude précédente pour élaborer et analyser une ingénierie didactique permettant, de favoriser la dévolution aux élèves de la MH dans les travaux d'élèves et, d'étudier des traces de transposition éventuelles dans les classes des pratiques invariantes identifiées relevant de la MH. Nous rendons compte ici uniquement de comment nous avons élaboré nos indicateurs pour nos analyses des travaux d'élèves lors de la phase de questions-réponses de notre ingénierie.

1. La phase de questions-réponses

Notre expérimentation se déroule au sein du groupe ResCo (Résolution Collaborative De Problèmes) de l'IREM de Montpellier. Ce groupe propose chaque année un dispositif pour les enseignants volontaires du secondaire qui amène les élèves à s'engager dans une activité de modélisation. Les classes sont regroupées par groupe de 3. Chaque groupe travaille collaborativement par le biais d'une plateforme en ligne (pour plus de détails voir Modeste & Yvain-Prébiski, 2018). La première phase de ce dispositif est une phase de questions-réponses qui s'étend sur deux séances. La première séance vise à faire découvrir la situation extra-mathématique par les élèves et à leur faire formuler les questions qu'ils se posent lors de leurs premières recherches. Il s'agit de faire émerger par les élèves un questionnement sur les différents choix possibles permettant un traitement mathématique du problème. Les questions élaborées par les élèves sont adressées aux deux classes avec lesquelles leur classe est associée, par l'enseignant, via une plateforme en ligne. Lors de la deuxième séance, les élèves reçoivent des questions émanant des autres classes de leur groupe. C'est dans la phase de l'élaboration des réponses par les élèves que, d'une part, les questions pertinentes pour la résolution du problème vont se dégager et que, d'autre part, vont apparaître des différents

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

choix possibles de modélisation. Lors de cette séance, les questions reçues amènent des discussions qui permettent aux élèves de prendre conscience de la nécessité de faire des choix pour traiter mathématiquement le problème, notamment autour de l'identification des grandeurs pertinentes. Nous avons élaboré des indicateurs pour analyser le travail des élèves lors de cette phase de questions-réponses (Yvain-Prébiski, 2018). Ces indicateurs sont depuis utilisés par le groupe ResCo pour mener leurs propres analyses. Nous explicitons dans la suite ces indicateurs.

2. Indicateurs pour l'analyse de la phase de questions

Nous avons défini les trois indicateurs de la dévolution aux élèves de la MH selon que la question montre la recherche d'un modèle mathématique permettant de traiter la situation proposée ($Q_{\text{modèle}}$), que la question porte sur l'identification de grandeurs pertinentes pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique ($Q_{\text{grandeurs}}$) ou qu'elle porte sur le choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique (Q_{contexte}).

L'indicateur Q_{contexte} relève du questionnement sur la pertinence du fragment de réalité choisi par rapport aux choix d'éléments de contexte à prendre en compte. L'indicateur $Q_{\text{grandeurs}}$ porte sur l'identification de grandeurs pertinentes et sur la mise en relation des grandeurs choisies. L'indicateur $Q_{\text{modèle}}$ met en évidence un travail de MH dans la mesure où la recherche du modèle induit au préalable des choix par l'élève, d'un ou de fragment(s) de réalité et de certains de leur(s) aspects, sur lesquels il se questionne pour construire un modèle mathématique en vue de répondre à la question posée. Cette pratique relève essentiellement de P_{12} : le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ici l'élève) d'envisager un travail de MV en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique P_{11} . L'indicateur $Q_{\text{modèle}}$ traduit essentiellement l'interconnexion entre la MH et la MV lors du passage de la situation extra-mathématique au modèle mathématique, représentée par les doubles flèches sur notre schéma du processus de modélisation. La figure 3 résume les indicateurs de dévolution aux élèves de la MH retenus pour la phase de l'élaboration des questions.

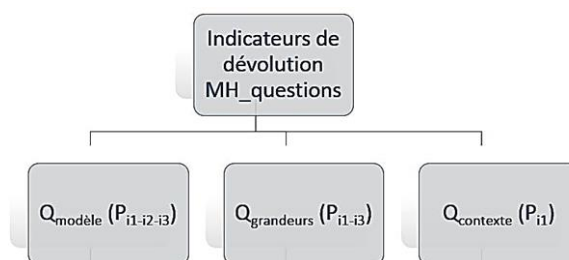


Figure 4. – Indicateurs de dévolution de MH pour l'élaboration des questions

Nous donnons en annexe 2 des exemples de questions classées selon ces indicateurs, produites par des élèves résolvant le problème de l'arbre dont l'énoncé est en annexe 1.

3. Indicateurs pour l'analyse de la phase de réponses

Nous utilisons quatre indicateurs de la dévolution aux élèves de la MH suivants selon que la réponse produite par les élèves, porte sur la recherche d'un modèle permettant de traiter la situation proposée ($R_{\text{modèle}}$), sur des choix de grandeurs pertinentes pour permettre un traitement mathématique ($R_{\text{grandeurs}}$), sur des choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour l'élaboration d'un modèle (R_{contexte}), sur l'analyse par les élèves de la pertinence de la question reçue au regard de la question à traiter dans le problème ($R_{\text{pertinence}}$).

Le travail de MH visant à passer du monde réel au monde mathématique, nous avons introduit des sous-indicateurs permettant de percevoir si le travail de l'élève lors de l'élaboration des réponses se situe dans « le monde du problème proposé » ou « dans le monde mathématique » ce qui se réfère à notre premier axe horizontal de notre schéma (figure 3). Il nous semble important de montrer comment les élèves lors de la phase des réponses font des choix pour élaborer un modèle mathématique : ils peuvent opérer des choix soit à partir du réel (P_{11}), soit à partir d'un traitement mathématique associé à une prise de mesures (P_{13}) ou bien à partir de leurs connaissances de modèles existants qu'ils envisagent de mettre à l'épreuve (P_{12}). Par conséquent, nous ajoutons trois sous-indicateurs pour les indicateurs $R_{grandeurs}$, $R_{modèle}$ et $R_{pertinence}$ selon si le choix d'un modèle ou de grandeurs pertinentes est basé sur des considérations ancrées dans le contexte réel de la fiction réaliste ($R_{choix-réel}$), si le choix est basé sur un modèle connu par l'élève en vue de le mettre à l'épreuve ou le choix d'une grandeur est acté sans considérer le contexte réel et sans autre justification ($R_{choix-a priori}$) ou si le choix d'un modèle ou de grandeurs pertinentes est constitutif d'un travail relevant de la mathématisation verticale ou peut relever de considérations basées sur les schémas de l'énoncé ($R_{choix-maths}$).

En appui sur l'étude épistémologique mettant en évidence les allers retours entre la MH et la MV, des réponses relevant de $R_{choix-maths}$ montreraient que, dès le travail de MH (production de la question), les élèves peuvent mobiliser des cadres mathématiques en entrant dans un travail de MV. Autrement dit, une réponse de ce type est porteuse de traces de la transposition de la pratique P_{12} dans la mesure où elle peut mettre en évidence que, soit le travail de MH déclenche un travail de MV, soit le travail de MH est interconnecté à celui de MV au sens que les choix sont pensés en anticipant la faisabilité ou la complexité du traitement mathématique qui en découlerait. La figure 5 résume les indicateurs de dévolution aux élèves de la MH retenus pour la phase de l'élaboration des réponses.

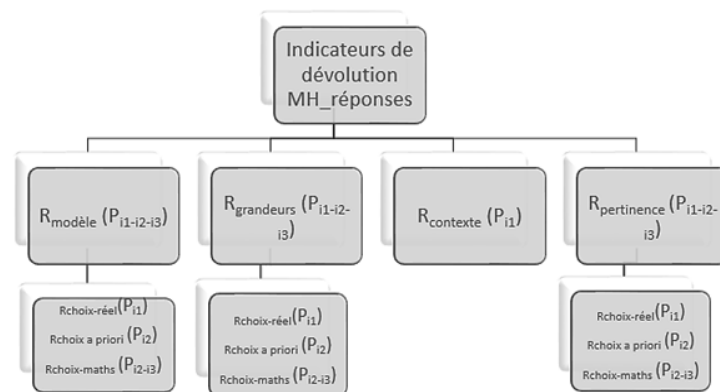


Figure 5. – Indicateurs de dévolution de MH pour l'élaboration des réponses

Nous illustrons en annexe 2 comment pour une même question posée, les réponses produites par des élèves ont été classées selon nos indicateurs.

ELEMENTS DE CONCLUSION

Nous avons montré comment nous avons pris en compte le travail de mathématisation horizontale dans un processus de modélisation mathématique pour mener une étude sur la dévolution de ce travail aux élèves du secondaire en prenant en compte sa relation dialectique avec la mathématisation verticale. Cette prise en compte nous a permis d'élaborer des indicateurs permettant des analyses fines de la démarche de modélisation mathématique des élèves. Il est à noter que pour les utiliser la situation de départ est extra-mathématique et en Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

cela nécessite de faire des choix pour la rendre accessible par un traitement mathématique. En outre, une phase de questions-réponses dans la mise en œuvre de l'activité est également nécessaire. Ces indicateurs sont par exemple utilisés, depuis 2017, par le groupe ResCo d'une part en formation continue sur l'enseignement de la modélisation pour des enseignants du secondaire, d'autre part pour analyser le travail des élèves engagés dans leur dispositif. Nous n'avons pas abordé l'impact de cette prise en compte du côté des pratiques enseignantes. Nous faisons l'hypothèse qu'identifier un travail de mathématisation horizontale peut constituer un levier pour surmonter certains obstacles liés à l'enseignement de la modélisation mathématique pointés dans la littérature internationale, comme mieux comprendre ce qu'est la modélisation mathématique et en cerner davantage les enjeux d'apprentissage (Yvain-Prébiski & Chesnais, 2019).

RÉFÉRENCES

- BLUM, W., & LEISS, D. (2007). How the students and teacher deal with mathematical modelling problems? In C. Haines, G. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing
- CHABOT, H. & ROUX, S. (2011). *La mathématisation comme problème*, Archives contemporaines.
- DELATTRE, P. (1979). Le problème de la justification des modèles dans le cadre du formalisme des systèmes de transformations. In P. Delattre et M. Thellier (Ed) *Actes du colloque "Elaboration et Justification des Modèles: Applications en Biologie (Vol. 1, p. 97-128)*.
- EDUSCOL. (2016)
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/17/7/RA16_C4_MATH_modeliser_N.D_566177.pdf
- FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic
- HUBERT, C. (2016). Modélisation : Complexifier ou simplifier ? Dans Alain Pavé (dir.), *Modélisation : succès et limites*, CNRS & Académie des Technologies, Paris, ISTE Éditions (p. 81-88)
- ISRAËL, G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. Paris, Seuil Eds.
- LEGAY, J. M. (1997). *L'expérience et le modèle Paris*, Inra Editions
- MAAB, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.
- MASSELIN, B. (2020). *Ingénieries de formation en mathématiques de l'école au lycée. Des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Presses Universitaires de Rouen et du Havre
- MODESTE, S. & YVAIN-PREBISKI, S. (2018). Design of situations fostering horizontal mathematization: benefits from epistemological analysis of experts' practices, In *Proceedings CIEAEM 71- Braga, Portugal Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)* pp.139-150
- RESCO (2014). La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. *Repères IREM*, 96, 73-96.
- RODRIGUEZ, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- SCHMID, A. (2009). Sciences, philosophies, modélisations : pour un nouvel usage de l'épistémologie. Dans Hervé D., Laloë F. (coord), *Modélisation de l'environnement : entre natures et sociétés Paris coll. « Indisciplines », coédition Quæ/NSS-Dialogues* (p. 181-190)
- TREFFERS, A. (1978). Wiskobas Doelgericht. Utrecht: IOWO
- VARENNE, F. (2008). Epistémologie des modèles et des simulations. HAL Id: hal-00674144 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144>
- YVAIN, S. (2017). Etude de la transposition du processus mathématisation aux élèves. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Epistémologie et Didactique* (p. 235-248). Presses universitaires de Franche-Comté.
- YVAIN-PREBISKI, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: a case study. In Leung F.K.S., Stillman G.A., Kaiser G., Wong K.L. (eds) *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (p. 305-319). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26
- YVAIN-PREBISKI, S. & CHESNAIS, A. (2019). Horizontal mathematization: a potential lever to overcome obstacles to the teaching of modelling. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409063>
- YVAIN-PREBISKI, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Thèse de doctorat, Université Montpellier, Montpellier. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1/document>
- YVAIN-PREBISKI, S. (2018BIS). Favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves engagés dans une activité de modélisation in *Proceedings of the CIEAEM 69 "Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 27, Supplemento n.2, 2017* (p.123-128)

ANNEXES

Annexe 1

L'arbre

Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.

Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ?

Annexe 2

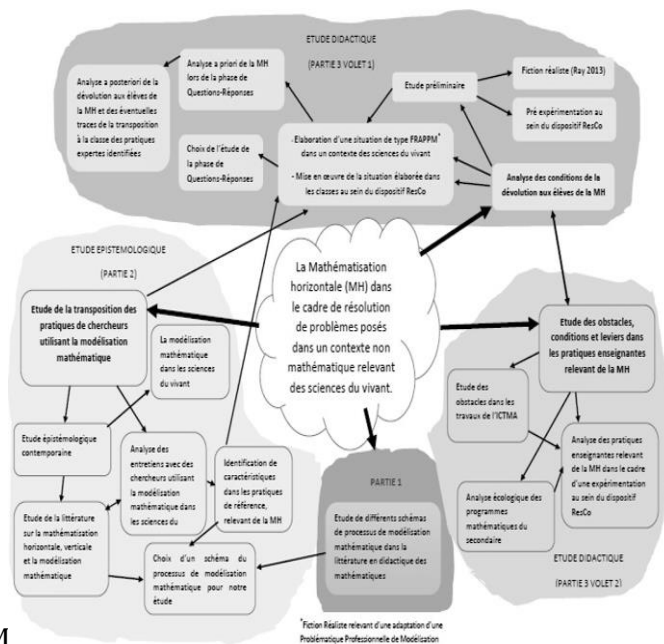
Q _{modèle}	Q _{grandeurs}	Q _{contexte}
Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ? Les branches se multiplient- elles seulement par 2 ou par 3 ?	Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ? Combien de centimètres prennent les branches chaque année ?	L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ? L'arbre est-il un arbre fruitier ?

Pour la question « *La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ?* », les trois réponses suivantes relèvent de la catégorie R_{modèle} mais les choix faits ne sont pas de même nature :

- R_{choix-réel} : La croissance n'est pas proportionnelle car elle dépend de plusieurs facteurs : notre manière de l'entretenir, la température, l'ensoleillement, l'arrosage.
- R_{choix-a priori} : Nous pensons que l'arbre croît de manière linéaire.
- R_{choix-maths} : Non, l'arbre ne grandit pas proportionnellement car nous avons fait des mesures :

Années Hauteur max. de l'arbre (en cm, sur le schéma) 2013 4,7 2014 7,1 2015 8,6
De 2013 à 2014, il a grandi de 2,4 cm (sur le schéma) et seulement de 1,5 ensuite de 2014 à 2015.

Annexe 3 – Architecture de la recherche



POSTERS

UNE RECHERCHE COLLABORATIVE FINALISEE PAR UNE AMÉLIORATION DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES EN SITUATION DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Karine Bernad*, Michèle Artaud**, Cécile Redondo**, Vincent Bonniol**

RÉSUMÉ

Cette communication concerne le développement d'un travail conjoint entre enseignants et chercheurs initié par la mise en place d'un dispositif d'accompagnement d'un collectif de professeurs par des chercheurs, dans le cadre d'une collaboration entre la structure fédérative de recherche SFERE-Provence (FED 4238) et le rectorat de l'académie d'Aix-Marseille. Nous avons cherché à identifier comment des processus nourrissant cette recherche collaborative (Desgagné, 1997), motivée initialement par une demande institutionnelle d'amélioration des apprentissages mathématiques en situation de résolution de problèmes, ont permis d'interroger collectivement les fonctions des traces écrites produites au sein des classes des professeurs concernés. Le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 2003) est mobilisé afin d'étudier les pratiques des professeurs et des élèves concernés en situation de résolution de problèmes. Nous sollicitons également le modèle d'« objet biface » (Marlot, Toullec-Théry et Daguzon, 2017), afin d'étudier l'usage de ressources participant à la co-construction du milieu d'étude de la recherche collaborative.

Mots-clefs : Rapports des élèves et des professeurs à la résolution de problèmes ; recherche collaborative ; objet biface.

ABSTRACT

This communication concerns the development of a joint work between teachers and researchers initiated by the implementation of an accompanying device for teachers by researchers, within the framework of a collaboration between the federative structure of research SFERE-Provence (FED 4238) and the rectorate in the Academy of Aix-Marseille. We sought to identify how the processes supporting this collaborative research (Desgagné, 1997), initially motivated by an institutional demand to improve mathematical learning in problem-solving situations, allowed us to collectively question the functions of the written traces produced within the concerned teachers' classes. We use the anthropological theory of didactics (Chevallard, 1999, 2003) to study the practices of the teachers and students involved in a problem solving. We also make use of the bifacial object's model (Marlot, Toullec-Théry and Daguzon, 2017) in order to study the co-construction of the collaborative research study environment.

Keywords: Students and teachers' relations to problem solving; collaborative research; bifacial object.

INTRODUCTION

Ce texte présente une étude exploratoire s'inscrivant dans le domaine d'étude de conditions favorisant le développement d'une recherche collaborative impliquant des enseignants et des chercheurs, finalisée par une amélioration des apprentissages des élèves. Nous nous appuyons ici sur l'analyse d'un dispositif d'accompagnement d'un collectif de professeurs par des chercheurs mis en place dans le cadre d'une collaboration entre la structure fédérative de recherche SFERE-Provence (FED 4238) et le rectorat de l'académie d'Aix-Marseille, qui organise l'intervention d'équipes de chercheurs pour répondre à des attentes institutionnelles issues d'établissements scolaires de l'éducation prioritaire. En effet, s'est développée, de septembre 2019 à juin 2021, une recherche collaborative réunissant 4 chercheurs et 14 professeurs, exerçant soit dans les classes de 6^e et 5^e d'un collège, soit dans celles de CM1 et CM2 des deux écoles du même secteur. Ce collectif s'est constitué suite à une demande formulée par le principal de cet établissement et deux inspecteurs de l'éducation nationale, motivée par l'amélioration des résultats des élèves du collège en résolution de problèmes

* Université de Montpellier, LIRDEF

** Aix-Marseille Université, ADEF

mathématiques (RPM), aux évaluations nationales à l'entrée de sixième, qui se sont avérés, deux années de suite, significativement inférieurs à la moyenne, tant nationale qu'académique, obtenus par les établissements des réseaux d'éducation prioritaire. Ce dispositif a engagé un travail conjoint entre enseignants et chercheurs autour d'objets d'étude communs reconnus comme problématiques, *les pratiques des élèves et les pratiques des enseignants en situation de RPM* ; ce qui a suscité l'action et la collaboration des personnes impliquées pour résoudre ce problème. Ce travail collectif s'étant donné comme objectifs, celui de produire des connaissances sur les pratiques des élèves concernés et celui de permettre le développement professionnel des praticiens impliqués dans la recherche, a relevé d'une « recherche collaborative » (Desgagné, 1997).

Notre étude vise à analyser des conditions facilitant l'émergence d'objets au sein de cette recherche pour provoquer, dans le cas étudié, une évolution des rapports des enseignants pour créer des conditions favorables à l'amélioration des résultats des élèves du collège et des deux écoles concernées.

CADRE THÉORIQUE

Le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 2003, 2007) est mobilisé. Nous sollicitons quatre notions fondamentales sur lesquelles repose une modélisation du cognitif : les notions d'institution, d'objet, de rapport et de personne. Chevallard (2003, p. 82) propose de définir une institution I comme « un dispositif social “total”, qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des “micro-institutions”), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I , la mise en jeu de manières de faire et de penser propres ». Chevallard (Ibid., p. 81) définit ensuite un objet o comme « toute entité, matérielle ou immatérielle, *qui existe pour au moins un individu*. Tout est donc objet, y compris les personnes ». Ainsi sont objets, par exemple, la relation de proportionnalité entre deux grandeurs, la notion de grandeur, la RPM. Le *rapport personnel* d'un individu x à un objet o « désigne le système, noté $R(x, o)$, de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o ». Les notions d'*institution* et de *rapports à un objet* participent à ce que les comportements des individus puissent se comprendre du fait de leurs assujettissements aux diverses institutions qu'ils ont traversées. Le rapport personnel à un objet d'un individu émerge ainsi de la pluralité des rapports institutionnels auxquels il a été assujetti.

Nous considérons que l'enjeu du dispositif étudié ici est de faire évoluer les pratiques des élèves et des professeurs en situation de RPM pour les rendre conformes à celles qui seront attendues par l'institution de la recherche collaborative, portée par un collectif de recherche constitué de personnes ayant quatre positions institutionnelles : chercheur en éducation, chercheur en didactique des mathématiques, professeur d'école, professeur de collège. Ces personnes soutiennent le fonctionnement de cette institution, moyennant le développement et l'évolution des praxéologies (Chevallard, 1999, 2007) qu'elles activent pour l'étude de questions, comme par exemple, celle des conditions ou des contraintes créées par le rapport des professeurs concernant la construction du rapport des élèves à l'objet RPM.

ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES

La méthodologie utilisée articule des prises d'information et de l'analyse des données recueillies par les chercheurs comme des productions écrites des élèves concernés, des réponses des enseignants impliqués à un questionnaire que nous avons élaboré, des documents de préparation qu'ils ont acceptés de rendre publics, des notes prises lors de

l'observation de séances en classe et de réunions. Les réponses des enseignants à un questionnaire proposé en ligne, en septembre 2019, a permis d'obtenir des informations sur leurs préoccupations, leurs difficultés, et de recueillir des discours sur leurs pratiques actuelles. Une analyse statistique des résultats des élèves des établissements concernés aux évaluations nationales 2017 et 2018 a conduit les enseignants à interroger les élèves de sixième, en septembre 2019, sur la difficulté qu'ils attribuent à des problèmes issus de l'évaluation nationale de rentrée que le collectif a sélectionnés, portant sur trois thèmes principaux y étant abordés : la relation de proportionnalité entre deux grandeurs, le traitement et la gestion de données, le calcul de durées et d'horaires. Jusqu'en mars 2020, ont été organisées deux séances de travail collectif visant à cibler des préoccupations communes, à questionner les pratiques en cours au regard des attentes institutionnelles. En septembre 2020, les élèves des classes de CM2, sixième et cinquième des professeurs impliqués ont passé une évaluation comportant trois problèmes du type de ceux cités plus haut. D'octobre à décembre 2020, les chercheurs ont observé des séances de classe et ont organisé des entretiens individuels auprès des enseignants. En décembre 2020, s'est déroulée une réunion pour rendre compte des éléments d'analyse des évaluations nationales passées en 2020 et des productions des élèves relatives aux trois problèmes posés en amont de ces évaluations. Le groupe s'est ensuite subdivisé, en février 2021, en deux sous-groupes, l'un avec les enseignants de l'école primaire et l'autre avec ceux du collège, et le travail des deux groupes s'est orienté vers la conception de situations de RPM sur le thème de la proportionnalité. Ce dispositif d'accompagnement a conduit les membres de l'institution de la recherche collaborative à étudier un thème mathématique spécifique et à co-élaborer des éléments de praxéologies pour l'enseignement (Cirade, 2006) ; ce que nous allons développer dans la suite du texte.

DES CONDITIONS FACILITANT UN PROCESSUS DE CO-CONSTRUCTION DE PRAXÉOLOGIES POUR L'ENSEIGNEMENT

Nos analyses poursuivent l'objectif de contribuer à une meilleure compréhension de l'usage, par les enseignants et les chercheurs, de ressources qui participent de la co-construction du milieu d'étude de la recherche collaborative : quels objets sont partagés pour nourrir, susciter la collaboration ? Comment tel objet devient un moyen de se comprendre entre enseignant et chercheur ? Ces questions s'inscrivent dans l'étude de celle formulée par Marlot, Toullec-Théry et Daguzon (2017, p. 32) : comment une « conversion d'un rapport personnel (à ces objets hétérogènes) à un rapport plus institutionnel (à ces mêmes objets) contribue ou pas à l'action des enseignants et permet ou pas la constitution de ressources mobilisables pour l'action future » ? Nous nous centrons sur le temps de co-analyse des problèmes proposés en septembre 2020 autour des questions : En quoi ces problèmes permettent-ils de travailler, de surmonter, les difficultés qui ont été signalées dans l'analyse des évaluations des élèves ? Qu'est-ce qui devrait être institutionnalisé à l'issue de l'étude de ces problèmes, du point de vue des types de tâches, des techniques et de leur justification ? L'analyse des productions écrites des élèves et des pratiques des professeurs, notamment à travers l'étude des documents de préparation des enseignants et de leurs discours sur les enjeux qu'ils donnent à la résolution de problèmes, a mis en évidence que les difficultés des élèves sont davantage reliées aux techniques mathématiques pour traiter les types de problèmes proposés et à leur justification, qu'à des aspects très transversaux que des enseignants déclarent viser dans ce type d'activité, comme « chercher une donnée intermédiaire pour répondre à une question ». La question de la gestion d'une temporalité pour organiser l'étude de types de problème a émergé. Cela a conduit à poser conjointement la question de l'organisation didactique pour l'émergence de plusieurs techniques et la question des traces écrites des élèves, individuelles (dans leurs cahiers) et collectives (affiches dans la salle de classe). Ce sont deux questions qui

nous semblent avoir enrichi le milieu d'étude de la recherche collaborative, dont leur explicitation a engagé le collectif de recherche à étudier une nouvelle question : comment organiser le processus d'institutionnalisation relatif à la résolution de problèmes relevant du modèle de la proportionnalité ? Nous faisons l'hypothèse qu'un objet biface est né à partir de l'articulation de 2 faces, l'une qui fait écho pour le professeur à la situation de classe, consistant à la production d'une *affiche* et l'autre qui fait écho pour le chercheur, au *processus d'institutionnalisation*.

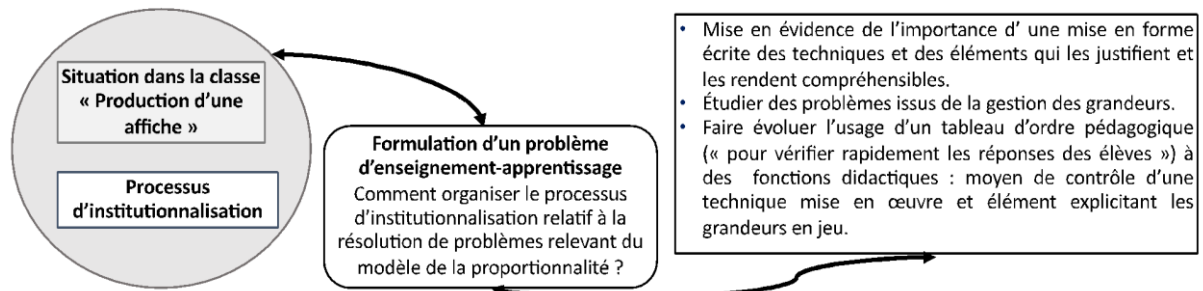


Figure 1. – Émergence d'un objet biface

En effet, le modèle d'objet biface en tant qu'outil théorique mobilisé par les chercheurs permet d'analyser les objets co-construits en termes de savoirs et d'étudier comment certains de ces objets participent à la formulation d'un problème d'enseignement. Nous faisons également l'hypothèse que l'émergence de cet objet a contribué à mettre en évidence l'importance d'une mise en forme écrite des techniques et des éléments qui les justifient et les rendent compréhensibles et a facilité l'étude collective de difficultés des enseignants relatives à la gestion des grandeurs. Par exemple, le collectif de recherche s'est questionné sur l'usage d'un tableau dans la résolution de problèmes relevant du modèle de la proportionnalité ; ce qui a conduit à faire évoluer sa fonction initiale, attribuée par les enseignants, d'ordre pédagogique _ « pour vérifier rapidement les réponses des élèves » _ vers des fonctions didactiques. De plus, le collectif de recherche a décidé que la technique reposant sur le calcul d'un coefficient de proportionnalité serait développée dans le cas où les grandeurs sont de même espèce.

Le modèle d'objet biface nous semble pouvoir éclairer des dimensions de praxéologies que mettent en œuvre chercheurs et enseignants, en tant qu'élément au sein d'une *praxis* pour faciliter le développement de la collaboration et résultat de celle-ci ; comme favoriser, dans le cas étudié, l'évolution du rapport des enseignants à certains objets mathématiques et didactiques, comme la *notion de grandeur*, la *relation de proportionnalité* et l'*institutionnalisation*.

RÉFÉRENCES

- CHEVALLARD, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In *Actes de l'université d'été de La Rochelle, 4-11 juillet 1998* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand, France : IREM.
- CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury S. & M. Caillot (Éds), *Rapport au savoir et didactiques*, (p 81-104). Paris : Éditions Fabert.
- CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds), *Sociedad, Escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)*, (p. 705-746). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- CIRADE, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, Marseille.
- DESGAGNÉ, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

MARLOT, C., TOULLEC-THÉRY, M. & DAGUZON, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, 6(1), 21-34.

LA CONSTRUCTION D'UN ESCAPE GAME COMME UN MOYEN POUR DEVELOPPER LES COMPETENCES DES ENSEIGNANTS DE PRIMAIRE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE

Charlotte Bertin*

RÉSUMÉ

La modélisation est décrite comme une « compétence » dans les programmes français et fait l'objet de nombreuses recherches. Pourtant sa compréhension et la conception d'activités permettant de la travailler est un sujet riche qui mérite d'être encore approfondi. La modélisation est principalement abordée à partir du secondaire car les élèves ont suffisamment de connaissances en mathématiques pour mieux appréhender ce processus. À l'école primaire, on peut néanmoins proposer des approches et commencer à sensibiliser les élèves même si peu de pistes ont été explorées. L'enjeu de formation n'est donc pas à minimiser pour les enseignants de primaire. La modélisation a pour objectif de répondre à un problème issu du « réel » à l'aide des mathématiques et pour amener cette situation, il est alors possible d'utiliser les escape games où la mission est justement de résoudre un certain nombre d'énigmes pour réussir. La conception d'escape games sur la modélisation pourrait alors se révéler propice à former les enseignants à cette compétence en permettant une réflexion autour du jeu.

Mots-clefs : Modélisation, Formation, Escape Game, École primaire

DU CONTEXTE...

La modélisation a été étudiée sous différents angles depuis plusieurs décennies, et son enseignement est également devenu un sujet de préoccupation dans la recherche en didactique des mathématiques. Le groupe international pour la modélisation et les applications mathématiques (ICTMA) s'est notamment attelé à proposer différentes manières de la définir, mais aussi développe des pistes et discute des possibilités de formations des enseignants sur le sujet et des manières de structurer son apprentissage chez les élèves. Une synthèse autour de l'activité, l'apprentissage et l'enseignement de la modélisation est présentée dans la thèse de Yvain (2018). Elle montre la diversité mais aussi les points communs entre les approches, permettant ainsi de conclure qu'il existe un lien étroit entre le choix du processus de modélisation et les objectifs d'apprentissages visés (Yvain, 2018). Les définitions de la modélisation reprennent généralement l'idée de résoudre un problème issu du monde « réel » en utilisant le monde des mathématiques à l'aide d'un modèle mathématique.

Dans les recherches et également dans les classes, l'enseignement de la modélisation est prépondérant à partir du secondaire notamment grâce au développement des connaissances mathématiques qui permettent aux élèves d'avoir plus d'outils à leur disposition pour construire ou comprendre certains modèles. Pourtant, la modélisation est présente dans les programmes dès l'école primaire comme l'une des six compétences mathématiques majeures à acquérir, mais sous une autre forme. Dans le bulletin officiel du cycle 3, la compétence « modéliser » met l'accent sur quatre apprentissages :

- « Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité
- Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie)

* Doctorante à l'Université Claude Bernard Lyon 1, en partenariat avec la HEP Fribourg (Suisse)

- Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets. » (BO, p. 91)

Les textes officiels ne proposent pas une définition stable de la modélisation, la définissant ainsi à la fois comme un processus et comme une étape au sein de la résolution de problèmes qui consiste à construire un modèle mathématique (par exemple, La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen, p.42-50) .

Les recherches sur l'approche de la modélisation à l'école primaire sont également minimales alors que c'est pourtant le point de départ avant de proposer des problèmes plus complexes. La construction d'outils pour enseigner la modélisation au primaire semble essentiel, tout comme une formation à destination des enseignants pour leur permettre de mieux appréhender cette compétence et de trouver des moyens pour l'enseigner.

En parallèle, dans les années 2012-2013, un nouveau phénomène fait son apparition en Europe : les escape games. Ils sont créés initialement en 2007 au Japon et consistent à résoudre des énigmes afin d'atteindre un objectif (le plus souvent, s'échapper d'une salle) en un temps limité (Nicholson, 2015).

Ces jeux qui n'étaient au départ que des divertissements, vont s'introduire peu à peu au sein du milieu scolaire. Dès 2015, l'entreprise Breakout EDU aux États-Unis, commercialise des kits permettant de construire des escape games destinés aux élèves de tout âge.

Dans le même temps, des formations se mettent en place dans des institutions référentes (Canopé, Éduscol, HEP FR...) sur cette nouvelle pratique.

Du point de vue de la recherche, une dizaine de publications étudient l'usage des escape games dans l'éducation (LaSSáková, 2019 ; Clarke, et al., 2017 ; Wiemker, Elumir & Clare, 2015 ; Nicholson, 2016 et 2018, Fenaert, Nadam & Petit, 2019) ou se concentrent sur des aspects précis : le débriefing après une séance de jeu (Sanchez & Plumettaz-Sieber, 2018) ou la présentation d'un modèle permettant de structurer les énigmes (Guigon & Vermeulen, 2018).

Les études soulignent l'engagement et l'engouement des participants pour ce dispositif mais s'interrogent peu sur ses apports didactiques. L'ensemble des escape games ressemblent à une série d'exercices avec un scénario plus ou moins intégré, alors qu'ils pourraient représenter une situation plus riche au niveau des apprentissages. Il serait possible d'imaginer une intégration plus forte du scénario, qui ne serait plus uniquement un prétexte mais bien un élément pour vérifier l'adéquation d'une solution dans un contexte particulier par exemple. Certains éléments de la mécanique du jeu, comme le tri des données, pourrait également être mis plus en avant et repris dans une phase de mise en commun à la suite de l'escape game pour comprendre les choix qui ont justifié l'utilisation de certaines informations plutôt que d'autres...

VERS UNE PROBLEMATIQUE

La modélisation mathématique représente un enjeu de formation pour les enseignants de primaire à la fois pour comprendre ce qui relève de la modélisation et les manières de l'enseigner à l'école primaire. Ces dernières années, les escape games ont suscité un intérêt fort dans la communauté éducative. L'idée de proposer une formation qui consisterait à créer un escape game ayant pour objectif de mobiliser la modélisation est alors apparue même si plusieurs questions se posent : en quoi la construction d'escape games augmenterait les compétences des enseignants en modélisation mathématique ? La création d'escape game est-elle adaptée en tant que dispositif de formation ?

Les escape games sont des jeux particuliers où le concepteur doit élaborer une analyse a priori fine et précise car le « maître du jeu », qui sera l'enseignant dans ce contexte, a des interventions très limitées. La notion de « milieu » (Brousseau, 1998) est centrale à étudier afin de produire un milieu suffisamment riche pour les élèves, qui n'est pas seulement

motivant mais qui doit aussi être inspirant et permettre de donner des pistes et de rétroagir de manière adéquate pour avancer dans le jeu de manière autonome tout en étant un levier pour l'apprentissage. Des concepts didactiques seront alors « naturellement » présents et amèneront des questionnements quant au bon déroulement du jeu. Les objectifs ne devront pas être perdus de vue et chaque situation sera étudiée en conséquence.

Cette formation ne serait pas une formation classique où le formateur communique le savoir mais bien une intégration du chercheur dans l'équipe enseignante pour cocréer ensemble un jeu cohérent et pertinent du point de vue des apprentissages. L'enjeu est donc double : former mais aussi créer une ressource à destination des élèves. Le chercheur prend alors plusieurs postures pour accompagner les enseignants tout en se mettant soi-même dans la posture d'apprenant. La formation reprend en partie les éléments d'une recherche collaborative (Desgagné, 1997) où trois étapes se distinguent : la cosituation (construction de l'objet de recherche), la coopération (les savoirs sont en jeu) et la coproduction (connaissance pour la recherche et la formation). Elle est également associée à une ingénierie didactique coopérative (Joffredo, et al., 2018) tout en reprenant la méthodologie de Design Based Research (Anderson & Shattuck, 2012) pour construire un artefact.

L'étude de l'évolution des compétences des enseignants en modélisation mathématique est la question principale associée à ce projet de thèse et le cadre des Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames & Phelps, 2008) est un outil intéressant pour connaître l'ensemble des éléments liés à la modélisation du point de vue des enseignants. De plus, la conception d'un escape game pouvant être considéré comme une genèse documentaire collective (Gueudet & Trouche, 2010), une méthodologie inspirée de l'investigation réflexive, appuyée par un journal de bord, pourra contribuer à étudier cette évolution en dehors des séances dédiées à la formation.

RÉFÉRENCES

- ANDERSON, T., & SHATTUCK, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research. *Educational Researcher*, 16-25.
- BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389-407.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- CLARKE, S., PEEL, D. J., ARNAB, S., MORINI, L., KEEGAN, H., & WOOD, O. (2017). escapED: A Framework for Creating Educational Escape Rooms and Interactive Games For Higher/Further Education. *International Journal of Serious Games*, 73-86.
- DESAGNE, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants, *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- FENAERT, M., NADAM, P., & PETIT, A. (2019). *S'capade pédagogique avec les jeux d'évasion*. Ellipses.
- JOFFREDO LE BRUN, S. J.-L., MORELLATO M., SENSEVY, G., & QUILIO, S. (2018). Cooperative engineering as a joint action. *European Educational Research Journal*, 17(1), 187-208.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. France. Presses Universitaires de Rennes / INRP, Paideia.
- GUIGON, G., & VERMEULEN, M. (2018). A model to Design Learning Escape Games: SEGAM. *10th International Conference on Computer Supported Education*, (pp. 191-197). Madeira.
- LASSAKOVÁ, V. (2019). Escape Game as an Innovative Tool in Education of Future Mathematics. *APLIMAT*. Bratislava.
- Nicholson, S. (2015). *Peeking Behind the Locked Door: A Survey of Escape Room Facilities*. Récupéré sur <http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf>
- NICHOLSON, S. (2016). Ask Why: Creating a Better Player Experience through Environmental Storytelling and Consistency in Escape Room Design. *Meaningful Play 2016*. Lansing. Récupéré sur <http://scottnicholson.com/pubs/askwhy.pdf>
- NICHOLSON, S. (2018). Creating Engaging Escape Games for the Classroom. *Childhood Education*, 44-49.
- SANCHEZ, E., & Plumettaz-Sieber, M. (2018). Teaching and Learning with Escape Games From Debirefing to Institutionalization of knowledge. *7th International Conference*, 242-253.
- Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. (Thèse de doctorat, Université de Montpellier)

L'ALGÈBRE ABSTRAITE EST-ELLE DIFFICILE PARCE QU'ELLE EST ABSTRAITE ?

Renaud Chorlay*, Nicolas Grenier-Boley**

RÉSUMÉ

Nous présentons les premiers résultats d'une étude exploratoire visant à problématiser la question de l'enseignement-apprentissage de l'algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur dans le cadre de l'apprentissage de l'algèbre abstraite (voire de l'abstraction en algèbre).

Mots-clefs : abstraction, algèbre linéaire

ABSTRACT

We present the first results of an exploratory study aiming at problematizing the question of teaching-learning linear algebra in higher education in the context of learning abstract algebra (or even abstraction in algebra).

Keywords: abstraction, linear algebra

INTRODUCTION

Ce travail de recherche provient d'une réaction de ses deux auteurs – à la fois comme didacticiens et comme enseignants du supérieur – à la lecture d'un numéro récent de *ZDM – Mathematics Education* (Stewart, Andrews-Larson & Zandieh, 2019), qui ne fait pas à la question de l'abstraction la place qu'elle nous semble mériter.

D'une part, ce numéro porte sur un modèle d'enseignement étasunien (Strang, 2006) de nature exclusivement procédurale et extrinsèque, sans problématiser la question de l'abstraction comme paramètre, obstacle ou levier.

D'autre part, il suggère que les réflexions et résultats des nombreux travaux des années 1990 synthétisés par Dorier, (2000) ont largement été oubliés, en particulier les analyses épistémologiques et didactiques (théoriques et empiriques) des enjeux liés à l'abstraction dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.

À titre heuristique, nous avons souhaité montrer dans ce poster que des exercices « abstraits » – dans différents sens du terme précisés ci-dessous – peuvent être beaucoup mieux réussis par des étudiants en Master que des exercices moins « abstraits ».

L'ABSTRACTION : UNE NOTION POLYSÉMIQUE

Les étudiants interrogés dans les études menées par Dorier, Robert, Robinet et Rogalski dans les années 90 attribuaient majoritairement leurs difficultés en algèbre linéaire à son caractère « abstrait » (Dorier, 2000, p.94).

Dans cette étude préliminaire, notre objectif n'est pas de proposer une caractérisation épistémologique ou didactique d'une notion de « théorie abstraite » ou d'« exercice abstrait » (ou d'exercice « plus ou moins abstrait » qu'un autre). Nous avons mené une étude empirique sur un petit corpus de textes relatifs à l'enseignement supérieur (de l'algèbre linéaire ou au-

* Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

** Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France

delà), au sein duquel les usages des termes « abstrait » et « abstraction » ont été relevés. Les résultats de cette étude sémantique montrent que ces termes servent à désigner l'un des deux pôles dans une série de *polarités*. Ces polarités vont du très général au très spécifique à l'algèbre linéaire. Elles ne sont pas toutes indépendantes.

1. Corpus étudié

Le corpus que nous avons étudié est constitué des documents suivants :

- Des travaux de didactique sur l'algèbre linéaire : Dorier (2000), le numéro spécial récent de *ZDM - Mathematics Education* (2019).
- Des travaux de didactique sur l'algèbre abstraite et la place de l'abstraction comme enjeu didactique dans ce contexte, en particulier ceux de Hazzan (1999).
- Les rapports du jury de l'agrégation de mathématiques sur la période 2004-2020¹.
- Un manuel d'algèbre linéaire considéré comme représentatif de l'enseignement étasunien et qui évoque de temps à autre une approche plus « abstraite » que celle qu'il utilise : Strang (2006).

2. Sens d'usage des termes « abstraits » et « abstraction » dans ce corpus :

Des lectures des documents du corpus, il se dégage différents invariants ou polarités pour le caractère « abstrait » :

- « Abstrait » s'oppose à « intuitif », dans plusieurs sens du terme « intuitif » :
 - Abstrait *vs* intuitif au sens de « familier »,
 - Abstrait *vs* intuitif au sens de susceptible de représentation visuelle.
- Un travail de démonstration est considéré comme plus « abstrait » qu'un travail procédural, en particulier qu'un travail passant par du « calcul ».
- Un objet est considéré comme plus abstrait lorsqu'il est caractérisé par des propriétés, moins abstrait lorsqu'il est donné par un procédé de construction, une figure, une formule.
- L'étude d'objets généraux est considérée comme plus « abstraite » que celle d'instances spécifiques (par exemple l'étude d'un groupe ou d'un espace vectoriel particulier).
- Plus spécifiquement, en algèbre linéaire :
 - Un travail en petite dimension (2 ou 3) est considéré comme moins abstrait qu'un travail en plus grande dimension, ou en dimension infinie, ou dans des espaces de dimensions indéterminées.
 - Un travail « en coordonnées » ou « extrinsèque » est considéré comme moins abstrait qu'un travail « sans coordonnées » ou « intrinsèque ».

ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI*

Les énoncés des exercices qui ont été proposés aux étudiants de Master (9 étudiants en M1 MEEF, 8 étudiants en M2 agrégation) figurent au sein du poster. Nous y renvoyons pour la bonne compréhension de leurs analyses *a priori*.

1. Exercice 1

Cet exercice est peu « abstrait » en différents sens du terme (familier, procédural, en petite dimension, en coordonnées). Les difficultés prévisibles sont les suivantes :

¹ Consultables sur <https://agreg.org/index.php?id=archives>

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- L'exercice demande de coordonner les représentations cartésiennes et paramétriques dans \mathbb{R}^3 (Dias, 1998). Par exemple dans la question 1, dans le système caractérisant le noyau, on peut regarder une inconnue comme un paramètre pour obtenir une description du noyau comme droite vectorielle.
- Dans la question 2, l'image étant de dimension 2, un contrôle doit s'exercer pour isoler une base parmi une famille génératrice de l'image.
- Dans la question 3, le noyau étant de dimension 1, il est caractérisé par des systèmes de deux équations de plans vectoriels non confondus. Une infinité de tels systèmes existe.

2. Exercice 2

- Les questions 1a et 2 sont « abstraites » dans tous les sens du terme relevés dans l'étude sémantique préliminaire.

Les questions 1a et 2 relèvent de l'algèbre « abstraite » et non spécifiquement de l'algèbre linéaire. Par exemple, l'énoncé et la réponse auraient été les mêmes pour la structure « groupe ».

- La question 1b est spécifique à l'algèbre linéaire puisqu'elle demande la production d'un exemple d'application linéaire vérifiant certaines propriétés.
- Exemples de solution : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (0, x)$ ou encore une composée de rotation et de projection.

L'exercice laisse cependant beaucoup de marges de manœuvre (question ouverte, pas d'indication sur la manière de choisir ou construire les espaces et l'application concernée).

3. Exercice 3

Cet exercice est un grand classique, étudié en particulier par Dorier (2000, p.101 et suiv.). L'item n°1 fait l'objet de plusieurs études (Stewart, Andrews-Larson, & Zandieh, 2019).

PISTES DE RÉFLEXION OUVERTES PAR CE PREMIER TRAVAIL

Nous renvoyons au poster pour une synthèse des résultats des deux cohortes d'étudiants interrogés sur ces exercices. Nous décrivons ci-dessous quelques éléments de réflexion que ceux-ci nous inspirent.

1. Sur l'« abstraction »

En premier lieu, il semble que ce n'est pas l'« abstraction » *en soi* qui est source de difficulté, puisque l'exercice le plus abstrait est loin d'être le moins réussi. Par conséquent :

- Il importe de mieux caractériser ce qui dans les tâches ou contextes « abstraits » est source de difficultés, et ce qui ne l'est pas.
- En particulier, on peut chercher à caractériser la question 2 de l'exercice 2 – qui s'avère ne pas être source de difficultés – comme relevant de ce que Bourbaki appelait « l'âne qui trotte ». Cette expression, attribuée à Pierre Samuel, désignait un argument qui se déroule « automatiquement ». Elle a donné son nom à deux « congrès » Bourbaki : *Congrès de la motorisation de l'âne qui trotte* (juin-juillet 1952) et *Congrès de l'incarnation de l'âne qui trotte* (oct. 1952). Des outils pour une caractérisation didactique de telles démonstrations sont donnés, par exemple, dans Selden et Selden (2009).

2. Sur les difficultés résistantes en algèbre linéaire

- Certaines difficultés semblent relever de conceptions erronées héritées du début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (exercice 3).
- Les tâches de *production d'objet sous contrainte* (exemples ou contre-exemples) sont particulièrement sources de difficultés (exercice 2, question 1b) ; sont-elles source de difficultés *spécifiques* ? Plusieurs hypothèses se présentent pour expliquer la présence de difficultés :
 1. caractère inhabituel de ces tâches pour les étudiants,
 2. pauvreté de l'*exemple space* mobilisable (Fukawa-Conelly & Newton, 2014)
 3. faiblesse des *contrôles* mis en œuvre par les étudiants dans ces tâches de production (Balacheff, 2013).

3. Sur l'interaction entre ces deux thèmes

Plusieurs auteurs (Dorier, Robert, & Rogalski, 2002 ; Sierpiska, 2000) ont avancé l'idée selon laquelle un passage explicite par l'abstraction, loin d'aggraver la difficulté de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, constituait un levier utile voire un passage nécessaire pour cet apprentissage. Les arguments épistémologico-didactiques (notion de concept FUG, levier méta) ou épistémologico-mathématiques (l'algèbre linéaire comprenant la théorie de la représentation de ses objets) mis en avant par Dorier-Robert et Sierpiska (resp.) se voient mis en perspective par les résultats de cette étude empirique préliminaire.

Ces résultats empiriques recourent aussi ceux de Dorier (2000, chap.4) : les difficultés observées en algèbre linéaire relèvent moins de difficultés transversales (logique, formalisme) que de difficultés spécifiquement liées aux concepts d'algèbre linéaire. Cette étude invite à caractériser plus finement cette spécificité, en la comprenant dans le cadre de l'algèbre abstraite, dont l'exercice 2 constitue un échantillon.

RÉFÉRENCES

- BALACHEFF N. (2013). *cK ϕ* , a model to reason on learners' conceptions. In M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.), Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.
- DIAS M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- DORIER J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer.
- DORIER J. L., ROBERT A., & ROGALSKI M. (2002). Some comments on 'the role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 185–191.
- FUKAWA-CONNELLY T., & NEWTON C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 323–349.
- HAZZAN O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71–90.
- SELDEN A., & SELDEN J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In *Teaching and learning proof across all the grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). Reston (VA): NCTM.
- SIERPINSKA A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorier, op.cit., 209–231.
- STEWART N. ANDREWS-LARSON C. & ZANDIEH M. (EDS). (2019). Research on teaching and learning in linear algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 51(7).
- STRANG G. (2006). *Linear algebra and its applications* (4th edition). Thomson Brooks / Cole.

UNE RECHERCHE-ACTION COLLABORATIVE : INTRODUCTION DE L'INFORMATIQUE AU PRIMAIRE

Michèle Couderette*, Antoine Meyer**

RÉSUMÉ

Le poster présente une recherche collaborative en début de développement. Celle-ci a pour visée de mettre à jour le devenir de contenus d'enseignement co-construits par un collectif {chercheur - praticiens}. Inscrite dans le cadre des recherches collaboratives (faire de la recherche *avec* plutôt que *sur* les praticiens), l'objet de savoir, inscrit dans le champ de la didactique de l'informatique, est défini *in situ* par le collectif de recherche. Dans un premier temps, il s'agit de définir collectivement les contenus d'enseignement, de co-construire une séquence d'enseignement, de la mettre en œuvre dans les classes.

Dans un second temps, il s'agit d'opérer une démarche réflexive en analysant cette mise en œuvre et en s'interrogeant sur les usages et transformations d'une ressource. L'action conjointe enseignant / élèves est analysée selon le modèle de l'action conjointe en didactique. Dans les deux temps, des cadres théoriques propres à la construction des matériaux didactiques ainsi qu'à l'analyse des pratiques enseignantes sont convoqués : théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), l'action didactique conjointe (Sensevy et al., 2007), approche instrumentale (Rabardel, 1995 ; Bruillard, 1997)

Mots-clefs : algorithmique – école primaire - recherche collaborative – expérimentation – analyse de pratiques

ABSTRACT

The poster presents a collaborative research project that is in the early stages of development. It aims at updating the future of teaching contents co-constructed by a collective {researcher - practitioners}. Inscribed in the framework of collaborative research (doing research *with* rather than *on* practitioners), the object of knowledge, inscribed in the field of computer science didactics, is defined *in situ* by the research collective. The first step is to collectively define the teaching content, to co-construct a teaching sequence and to implement it in the classroom.

Secondly, it is a matter of taking a reflective approach by analysing this implementation and by asking questions about the uses and transformations of a resource. The joint teacher/pupil action is analysed according to the model of joint action in didactics. In both phases, theoretical frameworks specific to the construction of didactic materials as well as to the analysis of teaching practices are used: anthropological theory of didactics (Chevallard, 1999), theory of didactic situations (Brousseau, 1998), joint didactic action (Sensevy et al., 2007), instrumental approach (Rabardel, 1995; Bruillard, 1997).

Keywords: algorithmic - primary school - collaborative research - experimentation - analysis of practices

PROBLEMATIQUE ET VISEE DE LA RECHERCHE COLLABORATIVE

Depuis la rentrée 2016, une initiation à la programmation informatique est inscrite dans les programmes d'école primaire : « Dès le CE1, les élèves peuvent coder des déplacements à l'aide d'un logiciel de programmation adapté, ce qui les amènera au CE2 à la compréhension, et la production d'algorithmes simples. [...] En mathématiques, ils apprennent à utiliser des logiciels de calculs et d'initiation à la programmation. Des activités géométriques peuvent être l'occasion d'amener les élèves à utiliser différents supports de travail : papier et crayon, mais aussi logiciels d'initiation à la programmation. [...] Les activités spatiales et géométriques constituent des moments privilégiés pour une première initiation à la programmation notamment à travers la programmation de déplacements ou de constructions de figures [...] Une initiation à la programmation est faite à l'occasion notamment d'activités de repérage ou de déplacement (programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran), ou d'activités géométriques (construction de figures simples ou de figures composées de figures simples). » (MEN Bo spécial 26-11-2015).

* Université Paris-Est Créteil, INSPE, Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR)

** Université Gustave Eiffel, Laboratoire Informatique Gaspard Monge (LIGM)

Confrontés à l'enseignement d'une discipline pour laquelle ils n'ont pas eu de formation, les professeurs d'école se tournent souvent vers des ressources « clés en main », sans être en mesure d'identifier clairement les enjeux de savoirs (Vandeveldt & Fluckiger, 2020 ; Spach, 2017). Villemonteix (2018) montre dans ses recherches que les situations pédagogiques sont incomplètes d'un point de vue épistémique et didactique, mais témoignent d'une « intention à produire chez les élèves un rapport à la découverte ». Par ailleurs, lorsque les enseignants sont interrogés sur l'acceptabilité de cet enseignement, leurs déclarations témoignent d'une recherche de « compatibilité avec des enseignements légitimes » (Villemonteix, 2018), percevant cet enseignement comme « contribuant au développement d'une pensée logique, plutôt qu'une pensée informatique » (Drot-Delange, 2018). Si les textes institutionnels introduisent l'initiation à la programmation informatique dans les programmes de l'école primaire, celle-ci ne devient objet d'étude à part entière qu'au cycle 4 (collège). Au primaire, algorithmique et programmation sont inscrites dans le champ des mathématiques ou de sciences et technologie, au travers d'activités de codage, de repérage, déplacements dans l'espace. Or plusieurs recherches (Couderette, 2016 ; Devos et Grandaty, 2011 ; Schubauer-Léoni et al., 2007) montrent combien des objets d'enseignement déclarés à l'interface de deux disciplines sont difficiles à transférer dans leur double référence. Briant (2013) et Couderette (2016) pointent la nécessité d'un équipement praxéologique de la profession, équipement comprenant à la fois des savoirs savants et des savoirs pour enseigner.

Nous nous interrogeons sur les contenus réellement enseignés par des professeurs d'école lors de la mise en œuvre d'un projet relevant de deux disciplines dont l'une est l'informatique. Plus précisément, la visée de cette recherche est de mettre au jour le devenir de contenus co-construits par un collectif {chercheurs, praticiens}. Pour ce faire, nous nous proposons de co-construire un appareillage praxéologique visant des concepts informatiques et engageant un autre champ disciplinaire (mathématiques, sciences, langage ...). Nous nous appuyons sur le modèle de l'action didactique conjointe (Sensevy, 2007), qui stipule que les contenus d'enseignement sont co-construits dans l'action professeur/élèves, ainsi que sur les ingénieries coopératives développées par Go (2009) et Schubauer-Leoni et al. (2007), qui tracent la voie de la collaboration entre praticiens et chercheurs en tentant de délimiter les frontières entre les deux types de protagonistes de ce système didactique particulier. La problématique est comparative : le collectif {chercheurs, praticiens} se doit de penser, non seulement la progression des enjeux internes à une discipline scolaire ou champ de savoirs, mais aussi les questions inhérentes à la « compossibilité » et à la « complémentarité des enjeux didactiques » qui évoluent en parallèle dans des disciplines distinctes (ici, l'informatique, les mathématiques, les sciences) comme discuté par Leutenegger (2008).

Notre hypothèse est que les dispositifs didactiques construits par le collectif seront, au fil du temps didactique, adaptés, aménagés, voire modifiés par les enseignants et ce, bien qu'ayant eux-mêmes participé à la construction des contenus et dispositifs. L'analyse des données (enregistrement des séances de constructions des contenus et dispositifs, des entretiens avec les enseignants, des séances en classe) nous permettra alors de mettre en évidence l'évolution du rapport au savoir informatique des enseignants en lien avec leur épistémologie pratique (Amade-Escot, 2014).

CADRES THEORIQUES

Pour conduire cette recherche, nous mobilisons plusieurs cadres théoriques.

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) développe des outils d'analyse que nous utiliserons pour construire les situations didactiques. Nous utiliserons principalement le concept de praxéologie qui permet de mieux déterminer l'objet de savoir étudié et de rendre explicite le modèle épistémologique de référence. L'analyse des situations

didactiques en termes de « tâches /techniques/ technologie/ théorie » contribuera ainsi à l'analyse *a priori* / *a posteriori* des situations construites par le collectif.

L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) est pertinente pour étudier et comprendre les apports des instruments dans les processus d'enseignement/apprentissage. La manière dont l'utilisateur (élève ou enseignant) s'empare des artefacts tels que robots de planchers, logiciels d'initiation à la programmation (Scratch, Scratch junior) ou autres objets techniques, ainsi que les structures cognitives qu'il va développer pour réaliser les tâches influent sur les savoirs en construction.

Le modèle de l'action didactique conjointe (Schubauer-Leoni et al., 2007) permet d'analyser l'action conjointe enseignant-élève au sein d'un système didactique. Il s'agit de rendre compte de la co-construction du savoir lors des expérimentations dans des classes ordinaires. Nous adossons notre recherche aux études qui considèrent que les apprentissages en classe sont le produit de l'action didactique conjointe professeur/élèves (Sensevy, Schubauer-Leoni et al., 2007) et qu'ils émergent lors des interactions en classe. Nous utilisons le triplet des genèses {mesogenèse, topogenèse, chronogenèse} qui rend compte de la dynamique évolutive du système didactique. L'agir professoral est analysé au travers des descripteurs « définir », « dévoluer », « réguler » et « institutionnaliser ».

METHODOLOGIE

1. Une recherche collaborative

Le cadre collaboratif de la recherche vise à créer les conditions du partage des expériences des enseignants associés à la recherche sur la base d'une part de la construction des situations didactiques, d'autre part des mises en œuvre opérées dans leurs classes. Les recherches collaboratives favorisent un travail entre praticiens et chercheurs, posant « un regard complice et réflexif sur la pratique » (*Ibid.*). Elles ont pour visée la « co-construction d'un objet de connaissance entre un chercheur et des praticiens » (Desgagné, 1997 ; Desgagné et Bednarz, 2005). Cet objet de connaissance porte tant sur des savoirs à enseigner (i.e. informatiques) que des savoirs pour enseigner (i.e. didactiques). Il s'agit dans notre recherche (i) d'identifier les concepts informatiques enseignables au primaire, (ii) de rechercher les conditions d'enseignabilité de ces concepts, (iii) de construire des situations d'enseignement/apprentissages, (iv) de les expérimenter dans des classes, (v) d'analyser les expérimentations.

Desgagné et Bednarz soulignent que faire de la recherche *avec* les praticiens et non *sur* les praticiens nécessite d'établir une « certaine dialectique entre les préoccupations du monde de la recherche et celles du monde de la pratique ». Aussi ces recherches contribuent-elles tant à la production de connaissances scientifiques en didactique de l'informatique qu'au développement professionnel des acteurs engagés dans la recherche.

2. Une démarche clinique expérimentale

La méthodologie s'appuie sur l'approche « clinique expérimentale » de Schubauer-Leoni et Leutenegger (2002) : d'une part la co-construction de contenus d'enseignement denses en savoirs informatiques, d'autre part la co-analyse (analyse *a priori* et analyse *a posteriori*) de situations didactiques.

La figure 1 décrit l'architecture du dispositif au fil du temps de la recherche collaborative.

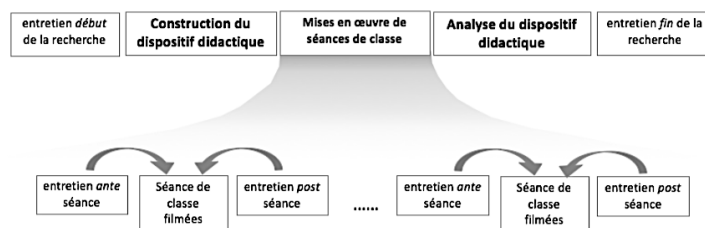


Figure 1. – Architecture du dispositif de recherche au fil du temps de celle-ci.

QUELQUES PREMIERS RESULTATS

Bien que la recherche n'en soit qu'à ses débuts, nous avons pu faire quelques constats :

1) Les premières réunions de travail collaboratif montrent des enseignants pilotés par l'activité, avec un *prima* donné à l'aspect ludique : « jouer au déménageur », « jouer au robot », etc. L'étude de quelques situations a permis d'évaluer leur potentiel en termes de situations d'enseignement/apprentissage de concepts informatiques.

2) Le scénario didactique s'adosse à une ou plusieurs disciplines institutionnelles. Si les enseignants attribuent cet aspect à de l'interdisciplinarité, les chercheurs le relient à la mésogénèse en tant qu'élément constitutif du milieu didactique primitif¹. La recherche montrera l'influence de cette « manière de voir », en particulier lors de l'expérimentation.

3) Soucieux de tenir des enjeux de savoirs d'ordre informatique, les enseignants font preuve d'ingéniosité (au sens de Schneider, 2001, « Le génie didactique ») pour introduire des concepts informatiques : par exemple, l'utilisation de barres de LEGO pour simuler un programme informatique dans une classe de maternelle (*cf.* poster ci-après).

RÉFÉRENCES

- AMADE-ESCOL, C. (2014). De la nécessité d'une observation didactique pour accéder à l'épistémologie pratique des professeurs. *Recherches en éducation*, 19, 18-29.
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265
- BRIANT, N. (2013), *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.
- BRUILLARD, E., (1997). "L'ordinateur à l'école : de l'outil à l'instrument", In Pochon, L.-O., Blanchet, A. (eds.), *L'ordinateur à l'école : de l'introduction à l'intégration* (pp.99-118). Neuchâtel : IRDP
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.
- COUDERETTE, M. (2016) Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde : une introduction curriculaire problématique, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 21, 267-296
- DESAGNE, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- DESAGNE, S., & BEDNARZ, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche "avec" plutôt que "sur" les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), 245-258
- DEVOS, O., GRANDATY, M. (2011). Les retombées de la formation continue : étude comparée des contenus enseignés en EPS et en ML chez un PEMF et un PE. In 2^e Colloque international de l'ARCD " Les contenus disciplinaires", Lille 3.
- DROT-DELANGE, B. (2018). Reconfiguration de l'enseignement de l'informatique à l'école primaire : quelle conscience disciplinaire chez les professeurs des écoles stagiaires ? *Recherches en Didactiques*, 1(25), 27-40.
- GO H.-L. (2009). Des ingénieries didactiques de l'œuvre, *Éducation & didactique*, 3(2), 7-45.
- LEUTENEGGER F. (2008), L'entrée dans une code écrit à l'école enfantine et l'articulation entre le collectif et l'individuel : comparaison de deux études de cas. *Éducation & Didactique*, 2(2), 7-42.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin
- SCHUBAUER-LEONI, M.L., & LEUTENEGGER, F. (2002). *Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire*. De Boeck Supérieur.

¹ Primitif : « Ce qui est la source, le point de départ d'un enchaînement logique ou causal de choses de même nature » (Dictionnaire CNRTL).

- SCHUBAUER-LEONI, M.L., LEUTENEGGER, F., & FORGET, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues aux commencements de la forme scolaire : interrogations théoriques et épistémologiques. *Éducation & didactique*, 1(2), 7-35
- SCHUBAUER-LEONI M.L., LEUTENEGGER F., LIGOZAT F., & FLUCKIGER A. (2007), « Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter ». In G. Sensevy & A. Mercier (ed.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, (pp.51-91). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- SCHNEIDER, M. (2001). Un exemple d'ingénierie didactique relative à l'analyse mathématique, passée au crible de concepts de la didactique. In A. Rouchier éd., *Le génie didactique : Usages et mésusages des théories de l'enseignement* (pp. 179-208). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.
- SENSEVY, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.) *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*, (pp. 13-49). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- SPACH M. (2017). *Activités robotiques à l'école primaire et apprentissage de concepts informatiques : quelle place du scénario pédagogique ? Les limites du co-apprentissage*. Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité.
- VANDEVELDE I., & FLUCKIGER C. (2020) L'informatique prescrite à l'école primaire. Analyse de programmes, ouvrages d'enseignement et discours institutionnels. Colloque Didapro-Didactic 8, Lille.
- VILLEMONTAIX F. (2018). Entre savoir-faire et devoir-faire, quelle légitimation des pratiques pédagogiques de l'informatique à l'école primaire ? 5e colloque international en éducation. Symposium « Enseignement et apprentissage de l'informatique à l'école primaire », Montréal, Canada.

LES PRATIQUES DES FORMATEURS A L'UTILISATION DES TECHNOLOGIES NUMERIQUES EN MATHÉMATIQUES AU CYCLE 3 DE L'ÉCOLE PRIMAIRE

Corinne Gau*

RÉSUMÉ

Notre recherche doctorale en cours porte sur l'étude des pratiques de formateurs en matière de technologies numériques en mathématiques chez les enseignants français de l'école primaire. Nous avons constaté un faible usage de ces technologies en mathématiques dans l'école primaire en France. Dans un premier temps, nous étudions le profil des formateurs et les formations proposées de manière exploratoire. Nous avons remarqué la faible présence de recherches précédentes sur ce sujet et la rareté de ces formations, qui sont peu efficaces lorsqu'elles existent. Dans un second temps, nous nous penchons sur la question de l'amélioration de la qualité de la formation des enseignants français en mathématiques avec l'aide de technologies numériques. Nous proposons un dispositif de formation pour les formateurs d'enseignants qui repose sur des modalités collaboratives de type Lesson Study. Nos questions de recherche portent sur l'impact de ce dispositif sur le développement professionnel des formateurs et sur le développement professionnel des enseignants en formation. Nous nous appuyons sur plusieurs cadres théoriques, notamment la Théorie de l'activité, l'approche instrumentale et l'ingénierie didactique, dans le but de développer des outils théoriques et méthodologiques adaptés à l'étude des formations du premier degré avec les technologies numériques.

Mots-clefs : technologies numériques, formation continue, Lesson Study, ingénierie didactique, pratiques enseignantes

ABSTRACT

Our current doctoral research focuses on the study of trainers' practices in the use of digital technologies in mathematics among French elementary school teachers. We have observed a low use of these technologies in mathematics in elementary school in France. First, we study the profile of the trainers and the proposed trainings in an exploratory way. We have noticed that there is little previous research on this subject and that these trainings are rare and not very effective when they exist. In a second step, we address the issue of improving the quality of French teachers' training in mathematics with the help of digital technologies. We propose a training device for teacher trainers based on collaborative modalities such as Lesson Study. Our research questions concern the impact of this device on the professional development of trainers and on the professional development of teachers in training. We draw on several theoretical frameworks, including Activity Theory, the Instrumental Approach, and Didactic Engineering, in order to develop theoretical and methodological tools adapted to the study of first-level training with digital technologies.

Keywords: digital technologies, teachers education, Lesson Study, didactic engineering, teaching practices

INTRODUCTION

Notre recherche doctorale actuelle porte sur l'étude de la formation des formateurs en technologies numériques en mathématiques pour les enseignants de l'école primaire en France, où l'utilisation de ces technologies est peu développée demeure et régie par une complexité étudiée par de nombreux chercheurs (Abboud-Blanchard, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, 2013) (Clark-Wilson, Robbuti, & Sinclair, 2014). Nous étudions le profil et les formations proposées par ces formateurs de manière exploratoire. Nos tous premiers résultats montrent qu'ils sont principalement des enseignants référents pour les usages du numérique, des animateurs de l'enseignement des mathématiques, ou des conseillers pédagogiques en mathématiques ou en technologies numériques. Nous observons également une faible présence de recherches précédentes sur ce sujet et une rareté de ces formations, qui sont peu efficaces lorsqu'elles existent. Nous nous intéressons également à l'amélioration de la qualité de la formation des enseignants français en mathématiques avec l'aide de technologies numériques en utilisant une approche d'ingénierie didactique.

* Doctorante Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR)

CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE DE LA RECHERCHE

Les travaux de la recherche sur la formation des professeurs des écoles mais aussi, sur la formation des formateurs du premier degré à l'usage des technologies numériques en mathématiques à l'école primaire apparaissent rares. En effet, la majeure partie des travaux existants concernent le second degré (Abboud ; 2013). Concernant les formateurs des professeurs de mathématiques, Abboud, Robert et Rogalski (2019) font part de la nécessité de les former. Elles remarquent, toutefois, le caractère plutôt récent de la mise en œuvre de ce type de formation. Le premier objectif, inscrit dans le cadre de notre recherche exploratoire, est de caractériser le profil des formateurs des professeurs des écoles ainsi que les formations qu'ils mettent en œuvre en mathématiques avec les technologies numériques, singulièrement au cycle trois de l'école primaire. Le second objectif est d'élaborer une ingénierie didactique de formation de formateurs afin d'observer et d'analyser le développement professionnel de ces formateurs.

LE CHOIX DE LA LESSON STUDY POUR NOTRE INGENIERIE DIDACTIQUE DE FORMATION

Dans le cadre de notre recherche, nous avons mené une étude sur les profils de formateurs de professeurs des écoles pour les formations en mathématiques avec les technologies numériques. Nous avons constaté que ces profils étaient "incomplets", c'est-à-dire que les formateurs ne se considéraient pas légitimes pour former les professeurs des écoles sur cette thématique. En conséquence, nous avons fait l'hypothèse que la formation de formateurs aux technologies numériques en mathématiques pourrait améliorer leur légitimité et leurs compétences de formation. Pour cela, nous avons mis en place une ingénierie didactique de formation de formateurs. Dans ce contexte, ces formateurs ont créé et mis en œuvre un scénario de formation aux technologies numériques en mathématiques destiné aux professeurs des écoles, selon une approche collaborative de type Lesson Study (Clivaz, 2015). Selon Clivaz (2015), la Lesson Study (LS) consiste à "partir d'une difficulté liée à un sujet d'enseignement, identifiée par un groupe d'enseignants. Les enseignants analysent l'apprentissage visé, étudient la notion mathématique, consultent les différents moyens d'enseignement, étudient des articles de revues professionnelles... Cette étude leur permet de planifier ensemble une leçon".

QUESTIONS DE RECHERCHE

Les principales questions qui orientent notre recherche doctorale sont les suivantes : Quelles sont, en France, les caractéristiques de la formation des enseignants du premier degré aux technologies numériques en mathématiques ? Quelles sont les caractéristiques du profil des formateurs impliqués dans ces formations ? En quoi une formation de formateurs de professeurs des écoles aux technologies numériques en mathématiques peut-elle contribuer à améliorer la dimension qualitative des formations ?

LES ADAPTATIONS DE LA LESSON STUDY

En étudiant les travaux de Abboud-Blanchard & Emprin (2009), de Abboud (2013) et de Clivaz (2015), nous avons adapté les modalités de sélection du sujet d'étude pour la formation de type Lesson Study que nous avons développée avec les formateurs. Nous avons souhaité prendre en compte un double mouvement : un mouvement ascendant qui permet aux formateurs de partager leurs expériences, pratiques, visions et connaissances concernant l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques, et un mouvement

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

descendant qui favorise l'accès des formateurs aux résultats de la recherche sur ce domaine, en lien avec leurs propres expériences.

Ce double mouvement nous a conduit à orienter les formateurs vers une thématique de formation qui a été suffisamment explorée par la recherche. Nous avons également dû tenir compte des besoins exprimés par les formateurs ou repérés chez eux, ainsi que du niveau d'enseignement des enseignants à former, qui est ici le cycle 3 de l'école primaire. C'est ainsi que nous avons choisi de travailler sur la géométrie au cycle 3 de l'école primaire dans un environnement numérique. Nous nous intéressons en particulier à la genèse instrumentale du déplacement, considéré comme un outil fondamental de la géométrie dynamique (Soury-Lavergne, *Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures.*, 2007). Les travaux de Athias (2014) et de Restrepo (2008) ont également nourri notre choix de la tâche mathématique utilisée comme objet de formation.

LE DISPOSITIF DE FORMATION DE FORMATEURS

Dans la première étape, nous formons des formateurs volontaires issus de notre panel de l'étude exploratoire. Nous adaptons la formation aux besoins des participants en prenant en compte leur expérience et leur familiarité avec les technologies numériques en mathématiques, ainsi que les modalités de formation de type Lesson study. Nous nous appuyons également sur des recherches sur la formation avec les technologies numériques. Les formateurs travaillent sur une tâche mathématique choisie en utilisant des outils tangibles et numériques, et s'approprient les éléments curriculaires pertinents (Athias, 2014). Ils étudient le relief de cette tâche et s'approprient les éléments curriculaires afférents. Ils choisissent et se familiarisent progressivement un logiciel de géométrie dynamique (LGD), Geogebra, et élaborent un scénario de formation de type Lesson Study (LS) destiné aux enseignants volontaires exerçant au cycle 3 de l'école primaire. Dans la seconde étape, le groupe de formateurs forme les enseignants en utilisant le scénario 1. Ces enseignants mettent en œuvre une leçon de recherche issue de la séquence d'enseignement qu'ils ont élaborée, basée sur la tâche mathématique proposée en formation, dans leur classe. La leçon de recherche est observée en direct par les autres enseignants et formateurs, qui analysent son impact sur les apprentissages des élèves et des enseignants. Le groupe de formateurs se réunit régulièrement pour discuter de la formation en utilisant ses notes et ses observations. Ils peuvent alors élaborer une version améliorée du scénario de formation des enseignants (scénario 2) et mettre en place une boucle d'itération de la formation. Le chercheur joue le rôle d'observateur ou de facilitateur lors des débriefings entre formateurs et apporte des éclairages si nécessaire.

CADRE THEORIQUE GENERAL

Notre recherche s'inscrit au sein du cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002, 2005), en tenant compte des adaptations mises en place par Abboud-Blanchard (2013, 2015, 2018) pour étudier l'activité de l'enseignant, lors du recours aux technologies numériques. Le cadre théorique de la double approche adaptée aux technologies (DAaT) (cf. cours de Abboud dans ces Actes) prend en plus en compte l'approche instrumentale développée par Rabardel (2002). Les pratiques, analysées selon cinq composantes, sont recomposées selon trois axes - un axe cognitif, un axe pragmatique et un axe temporel- soutenus par des déterminants personnels, institutionnels et sociaux (Abboud-Blanchard, 2013). L'axe cognitif fait référence à l'enseignement des mathématiques avec l'intégration des technologies ; l'axe pragmatique est lié à la gestion de l'enseignement des mathématiques dans des environnements technologiques ; enfin, l'axe temporel se réfère à

l'intégration des technologies et à la gestion du temps de l'enseignement et de l'apprentissage (Abboud, 2013). Les notions de tensions et de perturbations sont introduites (Abboud & Rogalski, 2018). Le cadre de la double approche didactique et ergonomique (DADE), initialement conçu pour les situations d'enseignement, est adapté à la formation professionnelle des enseignants par Emprin (2007).

DONNEES ET METHODES

En amont de l'ingénierie didactique de formation, nous analysons l'efficacité de formations données par des formateurs du premier degré. Nous étudions la mise en œuvre de ces formations et l'activité de ces formateurs entre 2017 et 2018. Ces formateurs comprennent des enseignants référents en technologies numériques, des animateurs en mathématiques et des conseillers pédagogiques en mathématiques ou en TICE. Pour recueillir les données nécessaires à notre étude, nous utilisons des questionnaires, des scénarios de formation, des vidéos, des verbatims d'entretiens et le plan académique de formation en vigueur. Ensuite, dans le cadre de l'ingénierie didactique de formation, nous étudions également l'évolution de trois formateurs dans la formation en mathématiques avec les technologies numériques entre 2019 et 2022, dans le cadre de notre deuxième objectif. Pour ce faire, nous utilisons des questionnaires, de deux scénarios de formation élaborés par les formateurs (scénario 1, scénario 2), d'une séquence d'enseignement, des leçons de recherche, des verbatims de séances de formation et des débriefings.

PREMIERS RESULTATS

Notre recherche exploratoire a mis en évidence plusieurs facteurs qui peuvent affecter l'efficacité de la formation aux technologies numériques en mathématiques à l'école primaire. Nous les avons regroupés en trois catégories : cognitif, temporel et pragmatique. Pour ce qui est de l'aspect cognitif, nous avons observé l'absence de formateur expert en technologies numériques en mathématiques, la focalisation des formateurs sur les artefacts et une identification et un investissement limités en matière de savoirs (didactiques, pédagogiques, disciplinaires). Nous avons également remarqué que les formateurs du premier degré ont une moins grande expérience des usages des technologies numériques en classe, la plupart d'entre eux n'enseignant plus. En particulier, leur connaissance des pratiques de classe est principalement déclarative, car ils n'ont pas toujours eu l'occasion de mettre en pratique ces connaissances en classe. Pour ce qui est de l'aspect temporel, nous avons constaté que les formations proposées sont de courte durée et que l'accompagnement des enseignants formés est variable voire inexistant. En ce qui concerne l'aspect pragmatique, nous avons observé que la formation est principalement basée sur l'homologie ou l'ostension et que l'enseignant et l'élève sont souvent confondus en termes de genèse instrumentale. Nous avons également constaté que les difficultés techniques sont fréquentes lors de ces formations, ce qui peut compromettre le l'itinéraire cognitif prévu. Après la formation des formateurs dans le cadre de l'ingénierie didactique de formation, nous avons constaté que ces formateurs sont mieux à même d'identifier les savoirs de formation liés aux mathématiques et aux technologies numériques. Par exemple, sur l'axe cognitif, ils ont commencé à investir la dimension épistémique du déplacement avec un LGD, et non plus seulement la dimension pragmatique. Ils accordent également une plus grande attention à la façon de relier le papier/crayon et le numérique, comme en témoigne le choix de la tâche 2 par les formateurs dans le scénario 2 ou encore la proposition par l'une des formatrices d'une formation en direction de ses pairs sur les artefacts tangibles et numériques, en lien avec les travaux de Soury-Lavergne (2017). Sur l'axe pragmatique et cognitif, ils apprécient l'utilisation de modalités de formation

collaborative entre pairs-formateurs et entre enseignants et formateurs, ce qui permet de favoriser l'articulation formation de formateurs/formation d'enseignants/enseignement sur le long terme et de répondre de manière ciblée aux besoins et aux contextes.

CONCLUSION

En conclusion, les premiers résultats permettent d'identifier un développement professionnel des formateurs observés. Celui-ci se structure autour d'une meilleure appréhension des enjeux associés aux tensions d'ordre cognitif, temporel ou pragmatique et aux perturbations inhérentes aux environnements dynamiques ouverts que sont les séquences d'enseignement ou les scénarios de formation d'enseignants en mathématiques avec les technologies numériques. Il nous restera à affiner les résultats obtenus quant au développement professionnel des formateurs par l'étude plus complète des données collectées.

RÉFÉRENCES

- ABBOUD, M., & ROGALSKI, J. (2018). Cadres théoriques pour analyser l'activité instrumentée de l'enseignant de mathématiques. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*.
- ABBOUD, M., ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2020). Educating mathematics teacher educators. The transposition of didactical research and the development of researchers and teacher educators. *The International Handbook of Mathematics Teacher Education (2nd ed., 4, pp. 2020)*. Springer.
- ABBOUD-BLANCHARD, M. (2013). Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives*. France: Université Paris Diderot.
- ABBOUD-BLANCHARD, M., & EMPRIN, F. (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations. pp. 125-140.
- ATHIAS, F. (2014). La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire. *Education*. Université d'Aix Marseille. .
- CLARK-WILSON, A., ROBBUTI, O., & SINCLAIR, N. (2014). The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development. Londres: Springer.
- CLIVAZ, S. (2015). Les Lesson Study: Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Formation et Pratiques d'Enseignement en Questions -Revue des HEP de Suisse romande et du Tessin, 19, 99-105*.
- EMPRIN, F. (2007). Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique. *Thèse*. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- RESTREPO, M. (2008). Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème. *Mathématiques*. Université Joseph-Fourier- Grenoble I.
- ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, pp. 59-68. (F. Vandebrouck, Éd.) Toulouse: Octares.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2007). Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2017). Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques. Ecole Normale Supérieure de Lyon - ENS LYON; Institut Français de l'Education.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2020). *La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques*. Paris: CNE.

TROUBLES DES APPRENTISSAGES ET DIFFICULTÉS SÉVÈRES EN EARLY ALGEBRA

Francesca Gregorio*

RÉSUMÉ

Le but de cette recherche est d'étudier le comportement des élèves avec MLD (*Mathematical Learning Disability*, acronyme désignant des troubles des apprentissages en mathématiques ou des difficultés sévères en mathématiques) face à des tâches d'*early algebra*. Dans ce texte, nous visons à donner de premières pistes de réponses à la question de recherche suivante : quel est le rôle des exemples dans la preuve pour des élèves avec MLD ? En utilisant la typologie des preuves de Balacheff (1987), différents types d'exemples sont identifiés : empirisme naïf, expérience cruciale, exemple pour détecter une régularité et exemple générique. Ces exemples peuvent permettre l'observation de la pensée algébrique chez les élèves avec MLD et soutenir la présence de la pensée algébrique dans cette population.

Mots-clefs : pensée algébrique, *early algebra*, troubles des apprentissages, difficultés sévères, MLD.

ABSTRACT

Recent years have seen a growing interest in research on students with learning difficulties in mathematics (MLD, *Mathematical Learning Disability*) in early algebra tasks. In this paper, we aim to provide some initial answers to the following research question: what is the role of examples in proof for students with MLD? Using Balacheff's (1987) typology of proofs, different types of examples are identified: naive empiricism, crucial experience, example to detect a regularity and generic example. These examples may allow the observation of algebraic thinking of students with MLD and support the presence of algebraic thinking in this population.

Keywords: algebraic thinking, early algebra, mathematical learning disorders, learning difficulties, MLD.

Les dernières années sont marquées par un intérêt croissant de la recherche vers ce qu'on appelle les troubles des apprentissages. Ce sujet de recherche a été abordé surtout avec un point de vue des sciences cognitives et une entrée par les objets mathématiques semble être absente pour l'instant : la didactique peut enrichir la recherche dans ce champ, avec un apport orthogonal aux recherches existantes.

Nous nous intéressons aux élèves avec des troubles des apprentissages en mathématiques (MLD, *Mathematical Learning Disability*), des difficultés sévères et/ou persistantes en mathématiques. L'acronyme MLD est défini en didactique des mathématiques (Deruaz et al., 2020) comme incluant trois catégories d'élèves. Il peut faire référence à des élèves chez qui un trouble de l'apprentissage spécifique aux mathématiques a été diagnostiqué au moyen d'un test standardisé (qui dans les pays européens est généralement effectué par un professionnel de la santé). Le même terme peut être utilisé pour désigner les élèves chez qui l'on a diagnostiqué un autre trouble de l'apprentissage, non spécifique aux mathématiques, mais qui peut avoir un impact sur leur apprentissage des mathématiques (par exemple, la dyslexie ou la dyspraxie). MLD est également utilisé pour désigner les élèves qui ont des difficultés sévères et persistantes en mathématiques sans jamais avoir été diagnostiqués. Cette dernière catégorie est désignée par des tests non standardisés ou par l'évaluation des enseignants. Cette entrée par les élèves en difficulté permet non seulement d'étudier cette population particulière, mais aussi d'avoir un effet loupe sur les difficultés rencontrées par les élèves sans MLD, en s'avérant être un sujet de recherche riche.

Mis à part quelques exceptions, par exemple en géométrie pour des élèves dyspraxiques (Petitfour, 2018), les études existantes à ce sujet concernent quasi exclusivement

* Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France & HEP Vaud, Lausanne, Switzerland

l'arithmétique de base (Lewis & Fisher, 2016). Avec l'objectif d'approfondir les premières recherches à propos de l'algèbre (Watt et al., 2016), nous nous sommes intéressées aux élèves avec MLD, au sens de Deruaz et al. (2020) décrit dans le paragraphe précédent, en *early algebra*, une métadiscipline qui peut utiliser des tâches arithmétiques pour mettre en évidence des processus algébriques et qui permet de faire le pont avec les recherches existantes sur les MLD (Malara & Navarra, 2018).

CADRE THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

L'objectif de cette recherche est donc de comprendre quelles compétences et quelles difficultés ont les élèves avec MLD en *early algebra*. En particulier, nous voulons répondre à la question de recherche suivante :

QR Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique des élèves en grande difficulté en mathématiques ?

Nous faisons l'hypothèse de recherche que les élèves avec MLD peuvent développer des compétences en *early algebra*. De surcroît, nous faisons une deuxième hypothèse : la nature des difficultés est la même pour les élèves avec MLD et sans MLD. Ce qui différencie les deux populations est la persistance des difficultés qui caractérise les élèves avec MLD.

Pour répondre à notre question de recherche, nous nous sommes servies des outils théoriques venant de plusieurs cadres : les types de généralisation de Radford (2012), les types de preuve de Balacheff (1987) et les *language constructs* de Malara et Navarra (2018). Ces différents cadres nous permettent de mieux articuler la question de recherche en trois sous-questions :

QR1 Quelle est la place de la généralisation dans la pensée algébrique des élèves avec MLD ?

QR2 Quel est le rôle des exemples dans la preuve pour des élèves avec MLD ?

QR3 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique des élèves avec MLD ?

Les trois cadres théoriques utilisés sont complémentaires et s'avèrent être nécessaires pour étudier des aspects différents de la pensée algébrique des élèves. Le cadre de Radford offre des outils idéaux pour explorer la généralisation, qui est un des éléments principaux de la pensée algébrique¹. La typologie de preuve de Balacheff se prête bien à étudier des tâches où les élèves peuvent prouver leur point de vue selon différents types de justifications². En effet, l'argumentation et la preuve sont des aspects centraux pour la pensée algébrique. Dans le troisième cadre, Malara et Navarra identifient des structures langagières qui témoignent de la présence de la pensée algébrique. Cela fournit des instruments d'analyse adaptés à un large panel de tâches et permet d'identifier la pensée algébrique outre la généralisation et la preuve.

Faute d'espace, nous choisissons pour ce texte de nous concentrer sur la question de recherche QR2 en ne présentant ainsi que le cadre de Balacheff (1987). Le chercheur identifie une typologie des preuves (définie comme une explication acceptée à un moment donné par une certaine communauté) :

1. *L'empirisme naïf* se produit lorsque la validité d'une affirmation est prouvée à partir d'un ou d'un petit nombre de cas.
2. *L'expérience cruciale* prouve une proposition en présentant un exemple que l'élève reconnaît comme étant aussi peu spécifique que possible. Si la proposition est vraie dans ce cas, alors elle doit nécessairement être toujours vraie.

¹ En figure 1, un exemple de tâche qui travaille la généralisation.

² En figure 2, un exemple de tâche qui travaille la preuve.

3. *L'exemple générique* consiste à prouver la validité d'une proposition en opérant sur un cas particulier, mais s'appuyant sur des propriétés et la structure qui caractérisent la famille que ce cas particulier représente.
4. *L'expérience cruciale* permet de prouver en internalisant l'action et en la détachant de sa concrétisation sur un cas particulier. En restant liée à la temporalité anecdotique, elle abandonne le traitement d'un cas particulier, comme c'était le cas pour l'exemple générique.

Cette typologie n'est pas un ensemble d'étapes successives que les élèves doivent atteindre dans un ordre donné ou un outil permettant d'attribuer à chaque élève un niveau cognitif. Il s'agit simplement d'un outil permettant de décrire les actions des élèves dans un certain contexte dans une certaine tâche mathématique.

Nous avons ainsi construit une batterie de tâches pour favoriser l'émergence de la pensée algébrique des élèves. Les figures 1 et 2 montrent deux exemples de tâches proposées pendant notre expérimentation. Ensuite, nous les avons fait passer à 19 élèves entre 12 et 15 ans avec ou sans MLD lors de quatre entretiens cliniques. Les entretiens ont été transcrits et analysés grâce aux outils théoriques présentés ci-dessus.

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

- a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés ? Et de 5 carrés ?
- b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?
- c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?
- d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles Si oui, comment ?
- e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

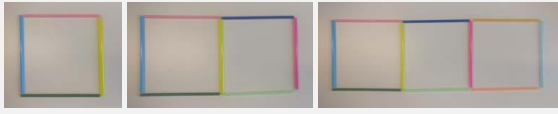


Figure 1. – *La suite de carrés : exemple de tâche proposée pendant les entretiens cliniques aux élèves.*

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

Figure 2. – *Nombres pairs et impairs : exemple de tâche proposée pendant les entretiens cliniques aux élèves.*

ANALYSE ET RÉSULTATS

Les entretiens ont été analysés en choisissant comme unité d'analyse les interventions orales et écrites des élèves lors de la résolution des tâches proposées. Pour ce texte, nous présentons l'analyse de la tâche « Nombres pairs et impairs » (figure 2) effectuée sur la base de la typologie des preuves (Balacheff, 1987) décrite dans la section précédente. Nous nous sommes particulièrement concentrées sur l'utilisation des exemples dans la pensée algébrique, avec le but de répondre à QR2.

Nous avons pu identifier différents types d'exemples créés par les élèves et utilisés pour résoudre la tâche. Les élèves peuvent recourir à l'empirisme naïf pour leurs exemples quand ils les produisent juste après avoir commencé à travailler sur la tâche. Il s'agit du premier exemple donné et permet de commencer à aborder le problème qui, autrement, resterait inaccessible. Par exemple, un élève interviewé a commencé la tâche en figure 2 en disant : « Oui... pair... On peut... Si on fait 3 plus 3 ça fait 6. »

Après le premier exemple, les élèves donnent d'autres exemples, puis d'autres exemples, jusqu'à ce que la généralité soit prise en considération et évoquée explicitement. Les élèves font dans ce cas recours à l'expérience cruciale. Par exemple, un des élèves a ainsi poursuivi son raisonnement après l'empirisme naïf³ : « Ba, si on met 12 plus 12 ça fait 24 et si on met 14 plus 14 ça fait 28 et c'est tout le temps pair, sinon 4 plus 4 ça fait 8, 6 plus 6 ça fait 12, 8 plus 8 ça fait 16, c'est tout le temps pair. » Cette liste d'exemples garantit la prise en compte de la généralité de l'affirmation par l'élève.

Cette itération d'exemples amène l'étudiant à repérer la régularité de la situation et à comprendre que cette régularité a une motivation qui peut être identifiée, comprise et généralisée : « Par exemple 3 plus 3 ça fait 6. 3 plus 7 ça fait 10. 3 plus 11 ça fait 14. En soi oui, je pense que ça sera toujours comme ça, c'est qu'il y a quelque chose de logique derrière. »

Les exemples peuvent également être utilisés pour généraliser la régularité par moyen d'un exemple générique (figure 3) : « 7 plus 7, 14, qui se divise aussi par 2. Ba, oui, parce que du coup, à chaque fois qu'on fait un nombre impair plus un autre nombre impair, le même (en indiquant 7 sur son exemple), ça donne ce chiffre (en indiquant 14) et ce chiffre, il est pair parce que du coup, à chaque fois, on peut le diviser par 2 pour que ça donne 7... Fin, pour que ça donne le... (en indiquant 7). » Dans ce cas, l'exemple $(7+7=14)$ n'est pas traité dans sa particularité, mais comme représentatif d'une certaine famille d'objets (en additionnant deux fois le même nombre impair, on obtient un nombre pair).

The image shows a handwritten mathematical expression in blue ink. It consists of two parts: the first part is $7+7=14$ and the second part is $14:2=7$. The numbers are written in a slightly slanted, cursive style.

Figure 3. – L'écriture qui accompagne l'exemple générique.

Les extraits d'entretiens présentés ci-dessus montrent que les élèves avec MLD peuvent manifester une pensée algébrique. Il s'agit d'un premier résultat important, car l'algèbre est retenue, dans certains contextes, un domaine mathématique difficile et n'est pas toujours proposée aux élèves avec MLD. Les exemples permettent aux élèves avec MLD d'exprimer cette pensée algébrique et de la déclencher.

RÉFÉRENCES

- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147–176. <https://doi.org/10.1007/bf00314724>
- DERUAZ, M., DIAS, T., GARDES, M.-L., GREGORIO, F., OUVRIER-BUFFET, C., PETEERS, F., & ROBOTTI, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807>
- LEWIS, K. E., & FISHER, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338–371. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.4.0338>
- MALARA, N. A., & NAVARRA, G. (2018). New Words and Concepts for Early Algebra Teaching: Sharing with Teachers Epistemological Issues in Early Algebra to Develop Students' Early Algebraic Thinking. In C. Kieran (Eds.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (p. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3
- PETITFOUR, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N*, 101, 45-70. <https://doi.org/10.4000/ree.6794>
- RADFORD, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In S. J. Cho (Ed.), *ICME-12 Regular Lecture* (pp. 675–694). Seoul, South Korea: Seoul National University.
- WATT, S. J., WATKINS, J. R., & ABBITT, J. (2016). Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities: Where Have We Come and Where Should We Go? *Journal of Learning Disabilities*, 49(4), 437–447. <https://doi.org/10.1177/0022219414564220>

³ L'élève est ici en train de répondre à la relance de la chercheuse « et en additionnant deux nombres pairs ? » Cette relance et d'autres similaires étaient proposées si les élèves étaient bloqués dans leur raisonnement.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

CONCEPTIONS SUR LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES CHEZ LES ÉTUDIANTS EN FORMATION INITIALE

Matias Pavez-Bravo*

RÉSUMÉ

Dans cette contribution, nous avons l'intention de présenter les grandes lignes qui guident la réalisation de notre thèse, ainsi que les principaux éléments théoriques permettant de répondre à notre problématique, qui est liée à la formation initiale des enseignants et à leurs conceptions de la preuve en mathématiques. En ce sens, nous considérons qu'il est nécessaire d'ajouter à l'équation une composante appelée "perspective émique" qui nous permet d'accéder à des fragments de l'histoire mathématique personnelle de chaque individu, et de cette manière d'accroître notre compréhension sur la façon dont ces conceptions font partie des individus. 28 étudiants chiliens en deuxième et quatrième année d'université ont participé à notre expérimentation.

Mots-clefs : preuve mathématique, formation initiale, étudiants-enseignants, Chili

ABSTRACT

In this contribution we propose to present the general guidelines of our thesis, as well as the main theoretical elements to address our problem that links the initial training of teachers with their conceptions about proof in mathematics. In this sense, we believe it is necessary to add to the equation a component called "emic perspective" that allows us to access fragments of the mathematical history of each individual, and in this way be able to increase our understanding of how such conceptions inhabit individuals. The participants were 28 Chilean students in their second and fourth year of university.

Keywords: mathematical proof, pre-service training, pre-service teacher, Chile

UNE PROBLÉMATIQUE À ABORDER DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Au cours des dernières années, les pratiques de preuves ont pris un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques comme un moyen pour développer, établir et communiquer des connaissances (Stylianides, 2007). Plusieurs recherches montrent les avantages et difficultés associées à ces pratiques dans l'apprentissage des mathématiques (e.g., Balacheff, 1987, 1991 ; Boero et al., 2010; Mariotti & Pedemonte, 2019; Stylianides, 2007). Dans ce contexte, le défi pour l'enseignant est de donner aux élèves les opportunités de s'engager dans ces pratiques, pour développer pleinement leurs compétences mathématiques.

Par rapport à l'enseignant, deux points de conflit se croisent ; d'une part, certaines recherches font état de difficultés rencontrées par les enseignants-mêmes en matière des pratiques de preuves, par rapport à la méthode de preuve utilisée ou la validation/acceptation d'une certaine preuve présentée (e.g., Dickerson & Doerr, 2014; Sowder & Harel, 1998; Stylianides et al., 2007, 2013). D'autre part, les pratiques enseignantes sont difficilement modifiables dû à leur complexité, cohérence et stabilité constatée surtout dans le cas des enseignants plus expérimentés (Robert, 2001, 2005, 2007). Ainsi, nous croyons que la mise en œuvre effective des pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques dépend, dans une large mesure, tant des conceptions sur la preuve chez l'enseignant que de la façon dont il se positionne par rapport à cette notion par rapport à sa propre activité mathématique, sachant a priori, qu'il semble difficile d'agir et de modifier les pratiques enseignantes.

C'est pour ces raisons que nous prenons comme point de départ la formation initiale des futurs enseignants, où les étudiants n'exercent pas encore leur métier et où nous avons accès à leur histoire personnelle par rapport aux pratiques de preuves : cela nous permettra d'avoir

* Doctorant LDAR, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

quelques pistes tant pour la formation initiale que pour la projection des pratiques enseignantes sur les pratiques de preuves dans la classe.

Nous devons préciser que cette contribution est en lien avec une thèse en cours dans le contexte des futurs enseignants chiliens. Ce que nous présentons correspond aux éléments principaux de notre thèse. L'analyse de données est également en cours.

Contexte de la recherche

Les nouvelles exigences des programmes curriculaires du niveau secondaire au Chili (MINEDUC, 2015, 2019) et les nouveaux standards pour la formation initiale des enseignants (MINEDUC, 2021) mettent en évidence le besoin d'intégrer les pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques comme une manière de contribuer progressivement au développement de la macro-compétence « argumenter et communiquer », en faisant de la démonstration l'objet principal de cette compétence :

« [Les élèves devront être capables de] établir la différence entre une argumentation intuitive et une argumentation mathématique, d'interpréter et comprendre des enchaînements d'implications logique [...], de cette façon, ils seront capables de faire des démonstrations mathématiques de propositions » (MINEDUC, 2015, p.98)

« Argumenter des idées mathématiques devant leurs pairs par le biais d'assertions, de propositions, de justifications, de réfutations, de démonstrations, d'exemples et de contre-exemples » (MINEDUC, 2021, p. 99)

Ces demandes convergent dans un domaine de recherche qui n'a pas encore été pleinement exploré dans le cas du Chili. Les données encore rares (à voir Pavez-Bravo, 2019; Varas et al., 2008) sur les pratiques de preuve des futurs enseignants motivent notre recherche à développer une analyse clinique à la fois de leurs expériences et de leur activité mathématique dans le cadre de la production de preuves.

Notre hypothèse de départ soutient que les difficultés rencontrées par les étudiants-enseignants trouvent essentiellement leur origine dans une double rupture ; d'une part, le changement dans la nature de la preuve en tant qu'objet au lycée vers celui d'outil privilégié de l'activité mathématique à l'université, et, d'autre part, le manque d'une formation didactique permettant une réflexion sur la mise en œuvre des pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques, ce qui perpétue la reproduction des pratiques enseignantes de l'enseignant qui lui a appris à « faire des maths » à l'école. Nous inscrivons cette hypothèse dans le cadre de la Double Discontinuité de Klein (Klein, 1924) par rapport aux pratiques de preuve. Ainsi, quelles conceptions les étudiants-enseignants ont-ils sur la preuve en mathématiques d'après leurs expériences et leurs histoires personnelles ? Quelles conceptions mobilisent-ils dans leur activité mathématique pour proposer des conjectures, construire et valider des preuves ? Et, comment leurs expériences et leurs histoires personnelles influencent-elles leur activité mathématique pour s'engager dans les pratiques de preuves ?

VOCABULAIRE ET CADRE THÉORIQUE

Les concepts principaux que nous utilisons sont définis pour affiner nos questions de recherche. D'une part, il faut préciser les éléments théoriques principaux pour comprendre les pratiques de preuves, ainsi que la manière selon laquelle nous regardons les expériences et l'histoire personnelle des étudiants. Ainsi, nous entendons par *conception* :

« L'instanciation d'une connaissance dans une situation spécifique précisée par les propriétés du milieu en jeu et les contraintes sur les relations (action/feedback) entre ce milieu et le sujet » (Balacheff, 2010. p. 125)

Pour comprendre l'activité mathématique des individus en termes des pratiques de preuve, nous prenons comme point de départ les travaux de Lakatos (1963) en distinguant trois activités :

(1) *l'activité d'exploration* : se rapporte à tout ce que l'individu fait pour construire une conjecture.

(2) *l'activité de preuve* : se rapporte à l'organisation cohérente des arguments mathématiques pour produire une preuve cherchant à être validée au sein d'une communauté donnée. Pour *preuve* nous prenons la définition suivante :

« Une explication acceptée par un communauté donnée à un moment donnée » (Balacheff, 1987, p. 2)

(3) *l'activité de validation* : se rapporte à la mobilisation de critères pour décider sur l'acceptation ou non d'une preuve donnée au sein d'une communauté donnée.

Ainsi, les conceptions sur la preuve chez les étudiants pourraient être identifiées à partir de leur activité mathématique.

Cependant, nous considérons que les conceptions et l'activité mathématique sont influencées par l'histoire personnelle de chaque individu ; les expériences vécues tout au long de leur vie (académique et non-académique), leurs croyances, leurs comportements. Nous souhaitons alors accéder à la *perspective émique* (Pike, 1988) des individus, c'est-à-dire accéder partiellement, en tant qu'observateur externe, à des fragments de l'histoire mathématique des individus afin de mieux comprendre leurs conceptions et leur l'activité mathématique. Cette perspective émique prend pour source d'inspiration les composantes institutionnelle, sociale et personnelle de la Double Approche Didactique et Ergonomique (Robert & Rogalski, 2002).

SITUATIONS, CONTEXTE ET MÉTHODOLOGIE

Pour répondre aux questions de recherche, nous proposons quatre tâches inscrites dans différents domaines : arithmétique, théorie de nombres, géométrie, combinatoire. Chacune des situations (présentées dans notre poster) a une consigne comprenant : la demande d'une conjecture, d'une production de preuve de la conjecture proposée et l'entrée dans un débat pour décider si la preuve présentée est valide ou non. Cette consigne répond ainsi à chacune des activités décrites dans notre cadre théorique. Chaque situation a été implémentée dans une séance de classe de 2 heures, sans intervention. Par exemple, notre tâche géométrique, nommée « Nature d'un quadrilatère », est la suivante :

« Soit ABC un triangle et M et N les milieux respectifs de [AB] et de [AC]. On choisit un point I intérieur à ce triangle. On désigne par E et F les milieux de [IB] et de [IC]. Le quadrilatère MNFE peut-il être un rectangle ? »

Les séances se sont déroulées à distance, via Zoom, d'où nous avons enregistré le travail des 28 étudiants : 16 en 2^{ème} année et 12 en 4^{ème} année universitaire. Les participants se sont divisés en 7 groupes de 4 étudiants en respectant la condition de travailler avec leurs camarades de la même année. Pour avoir les réponses des étudiants, nous avons utilisé la méthodologie des Narrations de Recherche (Chevalier & Sauter, 1992) sur un document nommé « Cahier de réflexion » en format Word, étant donné les conditions de travail à distance. Dans ce cahier et en suivant cette méthodologie, les étudiants peuvent exprimer ce qu'ils éprouvent lors de la réalisation de chaque tâche. En particulier, nous leur avons proposé de nous raconter en quelques lignes : (1) des commentaires personnels par rapport à leur expérience en résolvant la tâche proposée (ainsi nous aurons plus d'informations qui peuvent ne pas être présentes dans les enregistrements) ; (2) répondre à la question sur comment ont-ils abordé le problème, de façon de leur permettre de réfléchir sur les arguments trouvés lors de la réalisation de la tâche ; et finalement (3) la production de la preuve en considérant la

prise de photos de toutes les traces de l'activité développée par les étudiants. Nous avons prévu une vingtaine de minutes pour la mise en commun : un ou deux groupes ont présenté leurs résultats face aux étudiants restants pour donner la place à un débat afin de décider de la validité des preuves présentées. Finalement, après les quatre séances, nous avons demandé aux étudiants de remplir un questionnaire avec sept questions ouvertes pour récolter les expériences vécues par les étudiants tout au long de leur parcours académique, afin d'accéder à la perspective émique des étudiants. Il ressort de l'analyse de leurs discours que les étudiants entrent difficilement dans la pratique de la preuve mathématique : ils reconnaissent ne pas avoir encore engagé une réflexion sur la production de preuves. La diversité des preuves produites témoigne d'une formation nécessaire des futurs enseignants sur la dimension sociale et « communication » d'une preuve au sein d'une communauté. Les analyses sont en cours.

RÉFÉRENCES

- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- BALACHEFF, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction : The Case of Mathematical Proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Éds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 173-192). Springer Netherlands.
- BALACHEFF, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Éds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Springer US.
- BOERO, P., DOUEK, N., MORSELLI, F., & PEDEMONTE, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of PME 34 the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 179-209.
- CHEVALIER, A., & SAUTER, M. (1992). *Narration de Recherche* (Brochure). IREM de Montpellier.
- DICKERSON, D. S., & DOERR, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.
- KLEIN, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Vol. 14). Springer.
- LAKATOS, I. (1963). *Proofs and refutations*. Nelson.
- MARIOTTI, M. A., & PEDEMONTE, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. *ZDM*, 51(5), 759-777.
- MINEDUC. (2021). Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- MINEDUC. (2015). Nuevas Bases Curriculares y Programas de Estudio; 7° y 8° año de Educación Básica/ 1° y 2° año de Educación Media. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- MINEDUC. (2019). Bases Curriculares 3o y 4o medio. Ministerio de Educación, República de Chile. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- PAVEZ-BRAVO, M. (2019). *Compétences des enseignants stagiaires autour d'une petite tâche de modélisation dans le domaine de géométrie* [Mémoire Master]. Université Paris Diderot.
- PIKE, K. L. (1988). Cultural relativism in relation to constraints on world view—An emic perspective. *Bulletin of the Institute of History and Philology*, 59(2), 385-399.
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1), 57-80.
- ROBERT, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : Un point de vue didactique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 10, 209-249
- ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : Une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(81), 271.
- ROBERT, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- SOWDER, L., & HAREL, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- STYLIANIDES, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., & PHILIPPOU, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166.
- STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., & SHILLING-TRAINA, L. N. (2013). Prospective teachers' challenge in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463-1490.
- VARAS, L., CUBILLOS, L., & JIMENEZ, D. (2008). *Análisis de la calidad de clases de Matemática : Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático* (Proyecto FONIDE N°: 209-2006; p. 1-61). FONIDE – Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación, Chile.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

COMMENT AMENER LES ELEVES A S'INTERROGER SUR LA VALIDITE DE LEUR DEMARCHE A L'ECOLE ELEMENTAIRE ?

Karine Vieque*

RÉSUMÉ

Notre étude porte sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane au cycle 2. Nous étudions un type de problème spécifique élaboré par Perrin-Glorian & Godin (2014) : les problèmes de restauration de figures. Dans ce texte, nous présentons une partie du cadre théorique de notre recherche doctorale. Notre problématique porte sur la question de la validation à l'école élémentaire. Les éléments théoriques que nous retenons nous permettent d'identifier certaines caractéristiques d'un ensemble de situations à usage didactique que nous allons expérimenter pour engager les élèves dans un processus de validation en géométrie. Parmi ces caractéristiques, nous avons tout d'abord mis en relation connaître et prouver dans un processus d'apprentissage et mobilisé une des fonctions de la preuve (la preuve pour décider) pour engager les élèves dans un processus de validation. Nous avons également prévu la gestion par l'enseignant d'un moment de mise à l'épreuve des démarches des élèves qui favorise la prise de conscience de contradictions et la construction de raisons sur lesquelles faire reposer la validité des actions.

Mots-clefs : validation – preuve pour décider – construction de connaissances - géométrie - école élémentaire

ABSTRACT

Our study focuses on the teaching and learning of plane geometry in 3rd grader. We study a specific type of problem developed by Perrin-Glorian & Godin (2014): figure restoration problems. In this paper, we present a part of the theoretical framework of our doctoral research. Our problematic concerns the question of validation in geometry in elementary classrooms. The theoretical elements that we have retained allow us to identify features of a set of didactical situations designed in order to engage pupils in a validation process in geometry. These characteristics include the relationship between knowing and proving in a learning process and the mobilization of one of the functions of proof (the proof to decide) to engage pupils in a validation process. We also planned for the teacher to manage a moment of testing the pupils' approaches in order to deal with the awareness of contradictions and the construction of reasons involving the validity of actions.

Keywords: validation - evidence to decide - knowledge building - geometry - elementary school

OBJET D'ETUDE ET QUESTIONNEMENT

Notre étude porte sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane au cycle 2 (élèves de 7-8 ans). Nous étudions un type de problème de reproduction de figure spécifique élaboré par Perrin-Glorian & Godin (2014) : les problèmes de restauration de figures. Dans ce cadre, nous posons la question de la validation. A l'école élémentaire où l'action des élèves prédomine, notre objectif est de déterminer comment amener les élèves à s'interroger sur la validité des actions instrumentées réalisées pour restaurer une figure.

Dans ce texte, nous présentons les cadres théoriques que nous utilisons pour étudier la relation entre l'usage des instruments et la validation à l'école élémentaire. Nous commençons en prenant appui sur les apports théoriques de Vergnaud (2001/2). En effet, son approche pragmatique de l'élaboration des connaissances nous permet d'étudier comment agir sur le développement des schèmes associés au type de problème que nous étudions. Nous poursuivons alors sur la question de la validation en utilisant les apports théoriques de Balacheff (1987). Ses travaux, qui s'appuient sur ceux de Vergnaud, nous permettent d'identifier comment aborder la question de la validation des actions en relation avec la construction de connaissances dans un processus d'apprentissage. Nous terminons alors par l'identification des caractéristiques de les situations à concevoir en prenant appui sur les apports théoriques de Brousseau et Balacheff.

* Doctorant LDAR, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

ABORDER LA QUESTION DE LA VALIDATION A L'ECOLE ELEMENTAIRE

1. Prendre appui sur le contenu des schèmes impliqués dans le type de problème étudié.

A l'école élémentaire, l'action des élèves prédomine : leurs connaissances mathématiques se développent d'abord en réponse à des problèmes pratiques. Afin d'étudier comment faire évoluer les actions instrumentées des élèves, nous avons donc besoin de porter notre attention sur les formes prises par les connaissances dans l'action des élèves. Pour cela, le principe d'élaboration pragmatique des connaissances sur lequel reposent les travaux de Vergnaud nous permet d'analyser le fonctionnement cognitif des élèves en situation de résolution de problème.

Vergnaud (2001/2) donne une place centrale à la notion de schème, qu'il définit comme « organisation invariante de la conduite dans une situation donnée » (ibid, p.110). Si nos savoir-faire et nos savoirs se développent dans le processus d'adaptation au réel, il souligne le fait que ce sont les schèmes qui s'adaptent, et ils s'adaptent aux valeurs des variables didactiques des situations auxquelles ils s'adressent. La définition d'un schème en termes de composantes proposée par Vergnaud permet de comprendre de quelle manière il s'adapte. Un schème se compose notamment de règles d'action. Ces dernières permettent de mettre en relation les actions à des conditions (prises d'informations pertinentes, relations, propriétés-en-acte) et des circonstances (buts à atteindre, effets à obtenir). Un schème se compose également d'invariants opératoires : des concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. Ces deux expressions désignent les connaissances contenues dans les schèmes. Vergnaud précise que les invariants opératoires constituent la composante épistémique du schème et qu'ils permettent de comprendre la relation entre l'action et la conceptualisation.

Ainsi, nous faisons le choix d'utiliser les apports théoriques de Vergnaud car ils nous permettent d'analyser le contenu des schèmes impliqués dans les problèmes en termes de règles d'action et d'invariants opératoires. En effet, la mise en relation de ces composantes va nous permettre de créer un lien entre le développement des actions instrumentées avec celui de la conceptualisation en géométrie. Nous poursuivons sur la manière poser la question de la validation des actions dans les problèmes.

2. Poser la question de la validation sur le contrôle des conditions de l'action réalisée

Nous avons vu que l'élève de l'école élémentaire est un praticien. L'action des élèves est tout d'abord orientée vers la maîtrise de savoir-faire. Ainsi, la validation d'une action est avant tout éprouvée dans les faits : elle repose sur son efficacité, son adéquation à résoudre un problème. Nous en déduisons que la validation, dans ce contexte, est de nature pragmatique. Pour approfondir la question de la validation des actions, nous commençons par utiliser les apports théoriques de Balacheff pour ensuite les mettre en relation avec ceux de Vergnaud.

Concernant la validation, Balacheff la définit de la manière suivante :

« Validation refers to constructing reasons to accept a specific statement, within an accepted framework shaped by accepted rules and other previously accepted statements. From this perspective, mathematical validation searches for an absolute proof in an explicit context; it can thus claim certainty as a foundational principle ». (Balacheff, 2014, p.5)

Nous prélevons de cette définition un élément qui nous semble important : dans un processus de validation, les élèves sont amenés à produire des raisons pour faire accepter un énoncé au sein de leur classe. Nous avons donc besoin d'identifier comment amener les élèves à mobiliser ces raisons dans le cas d'une validation pragmatique. Concernant ces raisons, Vergnaud souligne l'existence de deux niveaux de conscience :

« celui qui permet de faire et de réussir (la conscience avant), et celui qui permet de revenir sur les

raisons de la réussite ou de l'échec, et qui conditionne la stabilisation et l'explicitation des connaissances (conscience après) » (Vergnaud, 2001/2, p.121).

Nous notons que le retour sur les raisons de la réussite ou de l'échec permet l'explicitation des connaissances. Ainsi, la construction de raisons sur lesquelles faire reposer la validation est à mettre en relation avec la construction de connaissances :

« no one can claim to know without a commitment to and a responsibility for the validity of the claimed knowledge. In return, this knowledge functions as a means to establish the validity of a decision in the course of performing a task and even in the process of building new knowledge - especially in the learning process. In this sense, knowing and proving are tightly related. » (Balacheff, 2014, p19).

Nous en déduisons que les règles d'action et les différentes connaissances contenues dans les invariants opératoires peuvent être des points d'appui pour aborder la question de la validation dans un processus d'apprentissage.

Ainsi, pour notre travail, nous prenons appui sur la définition de la validation proposée par Balacheff : nous allons faire référer la validation à la construction de raisons pour accepter qu'une action est adéquate, dans le cadre de la classe. Nous cherchons alors à agir sur le développement conjoint des règles d'action et des invariants opératoires. Pour cela, nous avons maintenant besoin de déterminer comment élaborer des situations susceptibles d'amener les élèves à s'interroger sur les conditions sur lesquelles reposent la validité et l'adéquation des règles d'action mobilisées.

3. Mobiliser une des fonctions de la preuve et l'enjeu de certitude dans les situations

Pour étudier comment élaborer des situations qui intègrent la question de la validation, nous commençons par utiliser le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). En effet, ce cadre nous donne les outils nécessaires pour élaborer une dialectique entre des situations d'action, de formulation et de validation. Nous poursuivons alors avec les apports théoriques de Balacheff pour identifier les caractéristiques des situations à élaborer. Notre but est de chercher comment développer chez les élèves des règles d'action et des invariants opératoires pour agir sur la conceptualisation et qu'à terme, ils soient mobilisés de manière conscientes.

Pour élaborer une dialectique entre les situations d'action, de formulation et de validation, nous retenons tout d'abord que les situations d'action peuvent être des situations où

« les questions d'action ou de décisions mathématiques sont celles où le seul critère est l'adéquation de la décision » (Brousseau, 1998, p.128).

Nous pouvons percevoir ici un lien avec les apports de Vergnaud : la notion de décision est en relation avec celle de règle d'action. Le critère est posé sur l'effet attendu, sur l'adéquation de l'action. Balacheff (1987, pp.10-11) indique alors la possibilité de créer des situations qui appellent un processus de validation en posant l'enjeu de certitude et en utilisant la preuve dans sa fonction de décider. Il définit une preuve comme « une explication acceptée par une communauté à un moment donné » (ibid, p.2). Il souligne alors que la preuve pour décider est particulièrement adaptée à l'école élémentaire car elle s'insère dans l'action, dans le fonctionnement de praticien.

Ainsi, la preuve pour décider est une preuve pragmatique. Ce type de preuve se fonde « sur des théorèmes-en-acte qui n'ont pas été prouvés mais éprouvés dans la pratique » (ibid, p.13). Par ailleurs, Balacheff ajoute que décider « peut être la source d'un savoir nouveau » (ibid, p.10-11). Les apports de Balacheff entrent en résonance avec ceux de Vergnaud : nous identifions ici le moyen d'agir conjointement sur le développement des règles d'action et l'émergence des connaissances contenues dans les invariants opératoires. En effet, les apports de Vergnaud nous ont montré qu'après le moment de l'action, où l'élève a fait et réussi, il est important d'organiser un moment permettant un retour sur les raisons de la réussite ou de

l'échec pour faire expliciter des connaissances en jeu. Pour cela, Balacheff propose de se saisir des contradictions comme levier pour expliciter des connaissances contenues dans les invariants opératoires :

« Lorsque la prise de conscience de cet échec survient, le premier progrès décisif sera de poser le problème des conditions de validité de l'action ou de son adéquation. C'est cet événement qui initiera la genèse du théorème-en-acte en engageant la construction du prédicat associé à l'action » (ibid, p.18).

Nous relevons ici la relation existante entre la prise de conscience d'une contradiction concernant une décision d'action prise et l'émergence du théorème-en-acte implicitement mobilisé. Cette relation avec les théorèmes-en-acte nous semble importante à considérer car ils font partie des invariants opératoires. De fait, nous notons qu'agir sur la prise de conscience des contradictions permet de développer les règles d'action qui reposent sur les théorèmes-en-acte en jeu dans les problèmes.

Ainsi, pour notre travail, nous retenons de Brousseau et Balacheff la proposition de créer des situations d'apprentissage qui posent des questions de décisions en y intégrant un enjeu de certitude. Pour cela, nous utilisons la preuve dans sa fonction de décider de l'adéquation des actions. Dans notre travail, la preuve sera avant tout travaillée sous la forme d'une preuve pragmatique de la validité d'une décision. Pour autant, nous retenons l'importance d'organiser une mise à l'épreuve des prises de décisions pour permettre l'explicitation des raisons, c'est-à-dire des connaissances, sur lesquelles reposent la validité des actions réalisées.

PROJET D'EXPERIMENTATION

Les éléments théoriques que nous venons d'exposer nous ont permis d'identifier certaines caractéristiques d'une dialectique de situations que nous allons expérimenter pour engager les élèves dans un processus de validation. Notre intention est de développer les schèmes associés aux problèmes de restauration en mettant en relation connaître et prouver dans un processus d'apprentissage. Nos situations d'action et de formulation intègrent l'enjeu de certitude et mobilisent la preuve dans sa fonction de décider de l'adéquation et de la validité des actions. Nous prévoyons la gestion par l'enseignant d'un moment de mise à l'épreuve des démarches des élèves qui favorise la prise de conscience de contradictions et la discussion sur les raisons sur lesquelles faire reposer la validité de leurs actions. La situation de validation permettra d'organiser la validation de ces raisons afin qu'elles deviennent des énoncés acceptés au sein de la classe. Enfin, la situation de décision vise la production de raisons par les élèves pour justifier de la validité ou non de certaines actions réalisées pour restaurer une figure.

RÉFÉRENCES

- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Springer Verlag, pp.147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- BALACHEFF, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: an essay from a didactical perspective. In Hann G., Jahnke H.N. (eds) *Explanation and proof in mathematics*, pp.115-135, Heifelfberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_9
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- PERRIN-GLORIAN, M. J., & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-École, Numéro spécial Enseignement de la géométrie*, 222, 26-36.
- VERGNAUD, G. (2002). Piaget visité par la didactique. *Intellectica-La revue de l'Association pour la Recherche sur les sciences de la Cognition (ARCo)*, 33, 107-123.

PROBLEMATISATION ET DEMONSTRATION : ÉTUDE DES CONDITIONS FAVORISANT L'APPROPRIATION DU PROCESSUS DE DEMONSTRATION ALGEBRIQUE EN CYCLE 4 CAS DES PROPRIETES ARITHMETIQUES.

Nadia Zebiche*

RÉSUMÉ

Le cycle 4 (12-14 ans) marque l'entrée dans le calcul algébrique. La recherche entreprise s'est orientée vers l'apprentissage de la démonstration. Nous nous intéressons plus particulièrement à des propriétés sur les entiers qui se démontrent algébriquement. La recherche engagée vise ainsi à proposer une ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; Perrin-Glorian, 2011) favorisant l'appropriation du processus de démonstration algébrique dans le cas particulier des propriétés arithmétiques. L'ingénierie didactique, qui constitue également une méthodologie de recherche, nous amènera à procéder à une analyse préalable. Cette première étape nous permet d'identifier des conditions à l'entrée dans un tel processus. Dans un premier temps nous donnerons les premiers éléments de cette première étape puis nous montrerons comment le cadre de l'apprentissage par problématisation (Fabre & Orange, 1997) peut contribuer à la construction et à l'analyse d'une telle ingénierie.

Mots clés : Ingénierie-Démonstration- Problématisation-Nécessité- Calcul algébrique

ABSTRACT

Cycle 4 (12-14 years old) marks the entry into algebraic calculus. The research undertaken is oriented towards learning how to prove. We are particularly interested in properties of integers that can be proved algebraically. The research undertaken thus aims at proposing a didactic engineering (Artigue, 1988; Perrin-Glorian, 2011) favoring the appropriation of the algebraic proving process in the particular case of arithmetic properties. The didactic engineering, which is also a research methodology, will lead us to proceed to a preliminary analysis. This first step will allow us to identify the conditions for entering into such a process. We will first give the first elements of this first step and then show how the framework of learning by problematization (Fabre & Orange, 1997) can contribute to the construction and analysis of such an engineering

Keywords: Engineering-Mathematical proof- Problematization-Necessity- Algebraic calculus

L'ANALYSE PREALABLE PREMIERE PHASE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE

L'ingénierie didactique se distingue par la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. Mais c'est son mode de validation interne qui la caractérise fondamentalement (Artigue, 1988). Celle que nous visons s'apparente à une ingénierie de recherche (Perrin-Glorian, 2011), car elle vise à faire apparaître des phénomènes didactiques, à les étudier, à produire des savoirs. Nous nous placerons donc dans une telle perspective. Nous nous appuyons sur les quatre phases identifiées par Artigue (1988). Nous nous situons ainsi dans la première phase, celle de l'analyse préalable. Celle-ci devrait nous permettre d'identifier des conditions permettant à des élèves d'entrer dans un processus de démonstration algébrique.

1. Premiers éclairages didactiques.

De multiples directions ont été choisies dans des recherches pour éclairer les difficultés des élèves à entrer dans l'algèbre élémentaire ; l'étude de la transition de l'arithmétique vers l'algèbre (Chevallard, 1999) ou celle des curricula en algèbre (Squalli, 2000) en constituent une infime partie. Le Hors-série de l'ARDM 2012 recense un état des lieux des dernières

* Université de Nantes, CREN (centre de recherche en éducation de Nantes)

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et des posters.

recherches existantes. L'observatoire de la pensée algébrique, créée en 2013, regroupement international de chercheurs, oriente également sa réflexion sur l'enseignement de la pensée algébrique et le courant Early Algebra. Et pourtant, les enquêtes récentes nationales PRAESCO 2019** et internationales TIMSS*¹ en 2019 attestent de difficultés persistantes. Cet état de fait invite à poursuivre les recherches dans ce domaine. De la même manière, les recherches didactiques sur l'enseignement de la démonstration font également l'objet d'une littérature abondante. Nous nous attardons sur certaines.

La preuve par l'exemple générique : l'examen de la nécessité et de la généralité (Arsac, 2009)

Le recours à l'étude d'un élément générique, à savoir un élément présent non pour lui-même mais comme représentant d'une classe d'objets, permet de mener la démonstration d'énoncés universels (Arsac, 2009). Dans ce type de démarche, Arsac(2009) distingue la généralité et la nécessité. Dans le cas algébrique, le caractère de nécessité, c'est ainsi et il ne peut pas en être autrement, est assuré par l'usage de règles de calcul comme la commutativité, l'associativité ou la distributivité ; le caractère de généralité est lui, assuré par le recours à la notation littérale.

Pendant, dans les faits, nécessité et généralité sont souvent absentes des démonstrations algébriques. D'une part pour la nécessité car l'explicitation des règles mobilisées n'est pas systématique (clarté, règles supposées acquises), d'autre part pour la généralité car la notation littérale dispense de toute argumentation d'universalité. Comme nous le verrons à plusieurs reprises, les implicites véhiculés dans l'exercice de la démonstration algébrique peuvent expliquer les difficultés et les malentendus des élèves.

Les calculateurs aveugles et l'expérience de la nécessité épistémique :

Les travaux du groupe CESAME (Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées) (Sackhur et al, 2005) apporte un angle de vue éclairant pour notre recherche. En particulier, leurs recherches ont permis d'identifier un type d'élèves appelé calculateurs aveugles pour lesquels :

« [...] le travail mathématique se réduit à l'application de règles, vraies ou fausses, dépourvues de cohérence globale, dont l'origine leur est inconnue et qu'ils ne cherchent pas à contrôler par leurs connaissances personnelles préalables » (Sackhur et al, 2005, p. 59).

Pour ces élèves-là, l'étude des difficultés et des erreurs n'est pas seulement dû à un manque de connaissances des énoncés. Un autre type de connaissances entre en jeu. Leurs travaux ont abouti à proposer des connaissances de trois ordres. Les connaissances d'ordre I sont les règles, les définitions, les axiomes, les énoncés ...

Les connaissances d'ordre II sont les règles du jeu et sont inhérentes aux mathématiques : ces connaissances sont garantes du bon fonctionnement des mathématiques. Elles relèvent de la sémiotique (Duval, 1995), de la validité et de la logique. Elles permettent de qualifier ou non l'activité mathématique. Ces connaissances ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions et les théorèmes : on ne peut faire un cours sur la nécessité. Si quelques élèves les acquièrent "chemin faisant", beaucoup n'en ont qu'une connaissance superficielle et peu opérationnelle : c'est le cas du caractère nécessaire des énoncés ou nécessité épistémique. Ainsi, le fait pour un énoncé mathématique d'être nécessaire donc apodictique, ne serait pas une propriété de l'énoncé mais serait inhérent, essentiel à l'énoncé lui-même ; c'est-à-dire qu'un énoncé dont le caractère nécessaire n'est pas perçu, n'est plus un énoncé mathématique.

¹ <https://www.education.gouv.fr/timss-evaluer-les-competences-des-eleves-de-cm1-et-de-4e-en-mathematiques-et-en-science-308600>

Les connaissances d'ordre III participent, indirectement, à la définition des mathématiques. Il s'agit des connaissances sur les mathématiques qui fondent les règles sur leur apprentissage. Qu'entend-t-on par faire des mathématiques ?

« Est-ce qu'apprendre les mathématiques c'est apprendre par cœur les connaissances de niveau I et des méthodes... Alors, que doit institutionnaliser sur les mathématiques le professeur de mathématiques qui souhaite que ses élèves fassent vraiment des mathématiques ? » (Sackhur et al, 2005, p.71).

Ainsi ces premières lectures soulèvent plusieurs pistes pouvant être explorées pour permettre à des élèves d'entrer dans un processus de démonstration algébrique. Elles révèlent aussi des liens tangibles entre l'expérience de la nécessité épistémique (Sackhur, 2005), les travaux sur l'exemple générique de Arzac (2005) et les nécessités du cadre de la problématisation (Fabre & Orange, 1997), liens qu'il conviendra d'affiner.

2. Prescriptions institutionnelles

Considéré comme une transposition didactique de l'algèbre élémentaire, le calcul littéral apparaît dans les programmes du cycle 4. Les injonctions institutionnelles (BO cycle 4, 2020) ciblent la dimension objet à travers le travail sur le statut de la lettre, le statut du signe égal, les règles sur les manipulations d'écritures, en particulier la règle de la distributivité, et à travers la résolution d'équations de degré 1 ou s'y ramenant. Elles ciblent aussi la dimension outil (au sens de Douady, 1984) à travers quatre grands types de tâches : la traduction d'une propriété générale, la démonstration d'un résultat général, la validation ou la réfutation d'une conjecture, la modélisation d'une situation dont la mise en équation.

Si l'on se restreint aux tâches de démonstration, le calcul littéral doit être mobilisé pour établir un résultat général ou pour valider/réfuter une conjecture ; ce qui questionne sur ce qui peut prendre le statut de résultat général. Et par ailleurs, une seule mise en œuvre est proposée, celle de la situation des trois nombres qui se suivent. Cela questionne sur le statut de cet exemple. Constitue-t-il à lui seul un représentant d'une classe de problèmes à proposer en classe ? Ainsi par la suite, comme annoncé dans l'introduction, afin de circonscrire notre étude nous axerons notre recherche sur les démonstrations algébriques des propriétés sur les nombres entiers.

3. Du côté des manuels

Nous faisons l'hypothèse que les manuels offrent un aperçu des tâches proposées aux élèves.

Nous exposons seulement quelques résultats obtenus à partir de 4 manuels de cycle 4 (Indigo, Transmath, Math Monde, Myriade). En appui sur les éléments de la Théorie Anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous identifions les praxéologies mis à l'œuvre à travers des différents types de tâches proposées. Nous constatons ainsi une proposition très réduite voire inexistante d'exercices de démonstration algébrique de propriétés arithmétiques dans certains manuels. Par ailleurs, l'accent est mis sur la dimension objet du calcul littéral. L'aspect procédural prédomine sur l'aspect sémantique. Les séquences sur l'arithmétique et celles sur le calcul algébrique sont menées sans aucun lien. Enfin les technologies (Chevallard, 1985) mises en œuvre ne sont que trop rarement explicitées.

Ces premiers résultats rendent compte d'un vide didactique et conforte l'urgence de réfléchir à des alternatives.

LE CADRE DE LA PROBLEMATISATION POUR PENSER L'ENSEIGNEMENT DE LA DEMONSTRATION ET RENDRE COMPTE DE SON APPROPRIATION

Dans le cadre de la problématisation la construction d'un problème prime sur sa résolution (Orange, 2012). Cadre développé au sein du Centre de recherche en éducation de Nantes

(CREN) avec un fort ancrage bachelardien il questionne la nature même des savoirs d'un point de vue épistémologique, didactique et idéologique.

Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. (Bachelard, 1938, p 14)

Fabre et Orange (1997) éclairent les savoirs scientifiques sous trois aspects. Les savoirs scientifiques sont des compétences pour maîtriser des problèmes, pas seulement les résoudre. Les savoirs scientifiques sont raisonnés. Les savoirs scientifiques sont partagés, soumis à la critique.

Un savoir scientifique n'est pas une simple connaissance privée, aussi pertinente soit-elle (mais qui pourrait alors en juger ?). Il doit être soumis à la discussion publique et pouvoir être remis en question. (Fabre & Orange, 1997, p 41).

Ainsi en engageant des élèves dans un processus de problématisation, on vise à supplanter des savoirs assertoriques par des savoirs apodictiques : on vise la construction de nécessités, c'est-à-dire de savoirs scientifiques : c'est vrai et il ne peut pas en être autrement.

Nous œuvrons donc à l'élaboration de dispositifs didactiques qui permettent la construction de tels problèmes, et non pas seulement à leur résolution. En particulier, un travail sur le caractère nécessaire ou nécessité épistémique sur les expressions algébriques pourrait permettre aux élèves d'appréhender le sens porté par les expressions et donc favoriser le processus de démonstration

PERSPECTIVES – IDENTIFICATION DES CONDITIONS

Ces premiers éléments nous permettent d'établir des conditions favorables à l'entrée dans un processus de démonstration. En effet, l'analyse des manuels et des programmes nous permet d'identifier les savoirs cachés pour lesquels l'institution n'organise aucun système didactique (Castela, 2008), savoirs par ailleurs convoqués dans certains exercices du diplôme du brevet des collèges.

La question du sens porté par les expressions algébriques apparaît également comme une condition favorable voire incontournable. Le cadre de l'apprentissage par problématisation fournit ainsi des éléments permettant de penser et d'analyser des situations, celles-ci visant la construction de nécessités (Hersant, 2020).

Enfin la question de l'institutionnalisation de connaissances de différents ordres (Sackhur et al, 2005) nous semble également être incontournable dans la construction de cette ingénierie et constituerait l'une des hypothèses de notre travail.

RÉFÉRENCES

- ADAM, J., AGACHE, A., BARRET, O., CHABRIER, C., CHARPENTIER, R., LEVEE, M., LOISEAU, J., REY, S., SIMONET, M. (2016). Maths Monde. Cycle 4. Edition Didier.
- ARSAC, G. (2009). La démonstration une logique en situation ? Colloquium CFEM-ARDM
- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3),281-308.
- BACHELARD, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris, Vrin (1986).
- BERGER, H., BILLA, N., DEMOULIN, P., FLOUS, A., LAFARGUE, B., LARRIEU, M., LAULHERE, A., LAYAN, M-C., POLLET, S., ROBERTOU, M., RUDELLE, F., VILLATTES, A. (2016). Maths cycle 4. Collection Mission Indigo. Edition Hachette.
- CARLOT, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAU, P-A., JACQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, JM., MAHE, A., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F., VERDIER, F. (2016). Cycle 4. Collection Transmath. Edition Hachette.
- BOULLIS, M., CAMBON, M., DANARD, Y., GALLIEN, V., HERRMANN, E., MEYER, I., MONKA, Y., PERCOT, S. (2016). Maths. Manuel de cycle 4. Collection Myriade. Edition Bordas.
- CASTELA, C (2008). Travailler avec sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 28(2),135-182.
- CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221--266
- DOUADY, R. (1984). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. THESE D'ETAT, PARIS VII.
- Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- FABRE, M., & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- HERSANT, M (2020). L'usage du cadre de la problématisation en didactique des mathématiques : quels apports possibles ? *Séminaire national de didactiques de mathématiques*.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS. (2020). Programme du cycle 4. <https://eduscol.education.fr/document/621/download>
- ORANGE, C. (2012). *Enseigner les sciences. Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck
- PERRIN-GLORIAN, M-J (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. (p. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.
- SACKUR, C., ASSUDE, T., MAUREL, M., DROUHARD, J.-P., & PAQUELIER, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 57-90.
- SQUALLI, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat. Québec : Université Laval.

TITRE :

Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques - Textes des séminaires et posters

COORDINATION :

Fabrice Vandebrouck & Marie Line Gardes

RÉSUMÉ :

Cette brochure constitue le volume des actes des séminaires et posters de la 21ème école d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue du 18 au 24 octobre 2021 à Sainte Marie de Ré. L'école d'été est un lieu important de constitution de la communauté des didacticiens des mathématiques et de la définition de son activité. Elle offre aux participants une possibilité d'intervenir à différents niveaux (TD, séminaires, posters). Dans ce volume sont regroupés les textes des 19 séminaires et 9 posters qui ont été présentés à l'école 2021.

Le document est destiné aux chercheurs en didactique des mathématiques, pour lesquels il constitue un outil de travail. Il permet d'étudier (ou du moins de commencer l'étude) de travaux innovants produits par des collègues. Cela peut également contribuer à l'ouverture de nouveaux terrains ou de nouvelles questions de recherche.

MOTS- CLÉS :

Didactique des Mathématiques

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: C.Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université Paris Cité

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2023

ISBN : 978-2-86612-404-5