



HAL
open science

Conception de matériaux architecturés exotiques en élasticité 2D

Guangjin Mou, Boris Desmorat, Nicolas Auffray

► **To cite this version:**

Guangjin Mou, Boris Desmorat, Nicolas Auffray. Conception de matériaux architecturés exotiques en élasticité 2D. 25ème congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04034282

HAL Id: hal-04034282

<https://hal.science/hal-04034282>

Submitted on 17 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conception de matériaux architecturés exotiques en élasticité 2D

G. MOU^a, B. DESMORAT^b, N. AUFRAY^c

a. Sorbonne Université, Institut d'Alembert, CNRS UMR 7190,
guangjin.mou@dalembert.upmc.fr

b. Sorbonne Université, Institut d'Alembert, CNRS UMR 7190,
boris.desmorat@sorbonne-universite.fr

c. MSME, Univ Gustave Eiffel, CNRS UMR 8208, F-77454 Marne-la-Vallée, France,
nicolas.auffray@univ-eiffel.fr

Résumé :

Les classes de symétrie d'une loi de comportement définissent les différents types d'anisotropie modélisable par celle-ci. Dans cas de l'élasticité 2D, il existe quatre classes distinctes caractérisées dans une base par un nombre donné de constantes indépendantes. Cependant, il existe des matériaux dont le comportement apparaît plus symétrique qu'attendu : ces matériaux seront qualifiés d'exotiques. L'objectif de ce travail est de se donner une définition opératoire de ce qu'est une anisotropie exotique. Il résulte de cette définition qu'il n'existe en 2D qu'une classe anisotrope exotique pour l'élasticité, mais que ce nombre croît vite pour d'autres comportements.

Abstract :

The symmetry classes of a constitutive law define the different types of anisotropy that can be modelled by it. In the case of 2D elasticity, there are four distinct classes characterised in a base by a given number of independent constants. However, there are materials whose behaviour appears to be more symmetrical than expected : these materials will be called exotic. The objective of this work is to give an operational definition of what is an exotic anisotropy. It follows from this definition that there is only one class of exotic anisotropy for elasticity in 2D, but that this number grows rapidly for other behaviours.

Mots clefs : matériau architecturé, matériau exotique, décomposition harmonique, classe de symétrie, invariant, homogénéisation

1 Introduction

L'anisotropie est la caractéristique selon laquelle une certaine propriété physique varie avec la direction. Un matériau élastique est défini par la collection de tous les tenseurs d'élasticité qui le représentent, tenseurs qui sont liés entre eux par des transformations orthogonales. Des études ont été réalisées afin de décrire les matériaux élastiques anisotropes à partir de quantités invariantes [5, 7].

Les tenseurs d'élasticités sont très divers et une première manière de les trier consiste à les regrouper en fonction de leur différentes propriétés d'invariance par rapport aux transformations orthogonales. On introduit pour cela la notion de strate anisotrope, ensemble qui regroupe tous les tenseurs ayant les mêmes propriétés d'anisotropie [8]. Le type d'anisotropie d'un matériau élastique est donné par sa classe de symétrie. Tous les tenseurs d'une même strate partagent, de fait, la même classe de symétrie.

Dans le cas de 2D, l'espace des tenseurs d'élasticité se divise en 4 strates : les tenseurs bicliniques de dimension 5, les tenseurs orthotropes de dimension 4, les tenseurs tétraogonaux de dimension 3 et, finalement, les tenseurs isotropes de dimension 2. Ainsi, le nombre de paramètres indépendants pour un tenseur décroît lorsque l'on impose des conditions de symétrie supplémentaires.

Au-delà de ces classes de symétries, des situations exotiques, semblant se situer à mi-chemin de plusieurs classes ont été identifiées dans la littérature [9, 11].

En élasticité 2D un seul cas est connu et correspond à ce que Paolo Vannucci appelle la R_0 -orthotropie. Il en dit à ce sujet

[...]l'existence d'un type particulier de matériau orthotrope planaire, [...] mais, [...], non liée à un type particulier de condition élastique de symétrie. Pour cette raison, l'existence de ce type de matériau ne peut être révélée uniquement par l'utilisation de certaines conditions de symétrie sur les composantes cartésiennes de \mathbb{E} .

Citation que l'on peut compléter avec un remarque de J. Rychlewski [9]

Le fait est que des matériaux d'anisotropie sensiblement différente peuvent se comporter, dans certaines situations et sous certains aspects, de manière tout à fait similaire ou tout simplement identique. En particulier, certains matériaux essentiellement anisotropes peuvent conserver certaines caractéristiques importantes des matériaux isotropes

Les caractéristiques de ces matériaux que nous appellerons *exotiques* sont les suivantes :

1. ils satisfont à des contraintes indépendantes de celles pouvant être imposées par des arguments de symétrie ;
2. ils produisent des comportements plus symétriques que celui imposé par les symétries matérielles.

Leur compréhension ouvre de multiples possibilités pour la conception optimale de matériaux architecturés qui peuvent s'accommoder de contraintes de conception apparemment incompatibles. Ceci est particulièrement vrai en 3D et concerne aussi bien les applications statiques que dynamiques.

Afin de fournir une définition tout en gardant un niveau de complexité raisonnable, nous travaillerons dans cet article dans un cadre 2D, tout en gardant à l'esprit la volonté de généraliser à la 3D ainsi qu'aux comportements 2D décrits par des tenseurs d'ordres supérieurs.

Les questions que nous nous posons et auxquelles cet article propose de répondre sont les suivantes :

1. quelle définition mathématique pour les matériaux exotiques ?
2. quelles sont les propriétés de ces matériaux ?
3. existe-t-il d'autres situations que celle de la R_0 -orthotropie ?

Nous allons montrer qu'à partir de la définition retenue, il n'existe en 2D qu'un type de symétrie exotique qui est celle identifiée par P. Vannucci [11]. Cela est dû à la structure harmonique extrêmement simple du tenseur d'élasticité. Toutefois, dès que la structure harmonique d'un tenseur de comportement est plus riche, ce nombre croît rapidement.

La [section 2](#) récapitule brièvement les outils géométriques permettant de décrire l'espace des matériaux élastiques. Dans la [section 3](#), nous regarderons comment se manifeste la seule classe exotique de l'élasticité 2D, nous en déduirons une formule permettant d'estimer, le nombre de classes exotiques pour d'autres lois de comportement 2D.

2 L'espace des matériaux élastiques

Espace des tenseurs d'élasticité

Le tenseur d'élasticité $\underset{\approx}{\mathbb{C}}$ décrit la relation linéaire entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales. L'espace des tenseurs d'élasticité $\mathbb{E}la(\mathbb{R}^d)$ est défini par :

$$\mathbb{E}la(\mathbb{R}^d) := \{ \underset{\approx}{\mathbb{C}} \in \otimes^4 \mathbb{R}^d \mid C_{\underset{\approx}{(ij)(kl)}} \}$$

avec $C_{\underset{\approx}{(ij)(kl)}}$ indiquant les symétrie indicielle mineures et majeure, d est la dimension de l'espace ambiant. Nous considérerons ici uniquement le cas $d = 2$.

Classe de symétrie

Considérons l'image d'un tenseur d'élasticité par une transformation orthogonale. Pour certaines transformations, le tenseur résultant est identique à celui d'origine. L'ensemble des transformations laissant $\underset{\approx}{\mathbb{C}}$ invariant constitue son groupe de symétrie :

$$G_{\underset{\approx}{\mathbb{C}}} := \{ \mathbf{g} \in O(2), \mid \underset{\approx}{\mathbb{C}} = \mathbf{g} \star \underset{\approx}{\mathbb{C}} \}.$$

avec \star l'action tensorielle standard. Deux tenseurs sont équivalents si leurs groupes de symétrie sont conjugués. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées strates. Plus précisément, dans ce qui suit, $\Sigma_{[G]}$ désignera la classe d'équivalence des tenseurs d'élasticité ayant leur groupe de symétrie conjugué à G . En d'autres termes, $[G]$ est la classe de symétrie des éléments de la strate $\Sigma_{[G]}$ [3, 4]. L'espace de tenseur d'élasticité $\mathbb{E}la$ est divisé en 4 strates [4, 10] :

$$\mathbb{E}la = \Sigma_{[Z_2]} \cup \Sigma_{[D_2]} \cup \Sigma_{[D_4]} \cup \Sigma_{[O(2)]}.$$

En termes mécaniques, $\Sigma_{[Z_2]}$ correspond à l'ensemble des matériaux bicliniques, $\Sigma_{[D_2]}$ à l'ensemble des matériaux orthotropes, $\Sigma_{[D_4]}$ à l'ensemble des matériaux tétraonaux et $\Sigma_{[O(2)]}$ aux matériaux isotropes.

Décomposition harmonique de $\mathbb{E}la$

L'analyse du comportement anisotrope d'un tenseur est facilitée par l'utilisation de la décomposition harmonique. La décomposition harmonique est un isomorphisme $O(2)$ -équivariant entre l'espace $\mathbb{E}la$ et une somme directe d'espaces irréductibles :

$$\mathbb{E}la \simeq \mathbb{K}^4 \oplus \mathbb{K}^2 \oplus 2\mathbb{K}^0$$

dans laquelle \mathbb{K}^n désigne l'espace des tenseurs d'ordre n complètement symétriques et trace nulle sur \mathbb{R}^2 , appelés *tenseurs harmoniques*.

Cette décomposition rend explicite la structure anisotrope des tenseurs d'élasticité. On considérera dans la suite la décomposition explicite suivante [6] :

$$\underset{\approx}{\mathbb{C}} = f(\alpha, \beta, \underset{\approx}{\mathbf{h}}, \underset{\approx}{\mathbb{H}}) = \alpha \underset{\approx}{\mathbb{J}} + \beta \underset{\approx}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} (\underset{\approx}{1} \otimes \underset{\approx}{\mathbf{h}} + \underset{\approx}{\mathbf{h}} \otimes \underset{\approx}{1}) + \underset{\approx}{\mathbb{H}} \quad (2.1)$$

Dans cette décomposition, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^0$ représente la partie isotrope de $\underset{\approx}{\mathbb{C}} \in \mathbb{E}1a$ et $\underset{\approx}{\mathbf{h}} \in \mathbb{K}^2$ et $\underset{\approx}{\mathbb{H}} \in \mathbb{K}^4$ ses composantes anisotropes. Nous introduisons l'interprétation suivante :

$$\begin{pmatrix} \underset{\approx}{\sigma}^d \\ \underset{\approx}{\sigma}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbb{H}} + \alpha \underset{\approx}{\mathbb{J}} & \frac{1}{2} \underset{\approx}{\mathbf{h}} \otimes \underset{\approx}{1} \\ \frac{1}{2} \underset{\approx}{1} \otimes \underset{\approx}{\mathbf{h}} & \beta \underset{\approx}{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\varepsilon}^d \\ \underset{\approx}{\varepsilon}^s \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} \underset{\approx}{\sigma}^d = \underset{\approx}{\mathbb{H}} : \underset{\approx}{\varepsilon}^d + \alpha \underset{\approx}{\varepsilon}^d + \frac{1}{2} \underset{\approx}{\varepsilon}^s \underset{\approx}{\mathbf{h}} \\ \underset{\approx}{\sigma}^s = \frac{1}{2} \left(\underset{\approx}{\mathbf{h}} : \underset{\approx}{\varepsilon}^d + \beta \underset{\approx}{\varepsilon}^s \right) \underset{\approx}{1} \end{cases} .$$

l'exposant d représente la partie déviatorique et s pour la partie sphérique.

Base d'intégrité des tenseurs d'élasticité

La décomposition harmonique permet de construire une base de polynômes $O(2)$ -invariants. Ces polynômes ont la double fonctions de

1. servir de coordonnées aux matériaux élastiques ;
2. permettre d'exprimer tout polynôme invariants à partir d'eux.

Un tel ensemble est généralement connu sous le nom de base d'intégrité. Nous avons le résultat suivant [6, 10] :

Theorem 2.1. Une base d'intégrité minimale pour l'action de $O(2)$ sur $\mathbb{E}1a$ est donnée par

$$\mathcal{IB} = (I_1, J_1, I_2, J_2, I_3) .$$

avec

$$I_1 = \alpha, \quad J_1 = \beta, \quad I_2 = \underset{\approx}{\mathbf{h}} : \underset{\approx}{\mathbf{h}}, \quad J_2 = \underset{\approx}{\mathbb{H}} :: \underset{\approx}{\mathbb{H}}, \quad I_3 = \underset{\approx}{\mathbf{h}} : \underset{\approx}{\mathbb{H}} : \underset{\approx}{\mathbf{h}} . \quad (2.2)$$

Un matériau élastique générique, c'est-à-dire de symétrie minimale, est donné par un 5-uplet $(I_1, J_1, I_2, J_2, I_3)$ dont les valeurs sont indépendantes. Elles satisfont néanmoins les contraintes :

$$I_2 \geq 0, \quad J_2 \geq 0, \quad I_2^2 J_2 - 2I_3^2 \geq 0. \quad (2.3)$$

La transition d'une classe de symétrie à une autre s'exprime en termes de relations polynomiales [6] :

	Représentation de tenseur	Classe de symétrie	Condition d'invariant	Dimension	Représentation dans la Figure 1
1	$\underset{\approx}{\mathbb{C}} = f(\alpha, \beta, \underset{\approx}{\mathbf{h}}, \underset{\approx}{\mathbb{H}})$	biclinique	-	5	A l'intérieur du volume défini par la surface
2	$\underset{\approx}{\mathbb{C}} = f(\alpha, \beta, \underset{\approx}{\mathbf{h}}, \underset{\approx}{\mathbb{H}})$	orthotrope	$I_2^2 J_2 - 2I_3^2 = 0$ et $I_2 \neq 0$	4	Sur la surface sans $\{O\} \cup]OA) \cup]OB)$
3	$\underset{\approx}{\mathbb{C}} = f(\alpha, \beta, 0, \underset{\approx}{\mathbb{H}})$	tetragonal	$I_2 = 0$	3	Ligne de rayon ouvert $]OA)$
4	$\underset{\approx}{\mathbb{C}} = f(\alpha, \beta, 0, 0)$	isotrope	$J_2 = 0$	2	Point O

On peut représenter l'espace des matériaux élastiques anisotropes visuellement de la manière suivante :

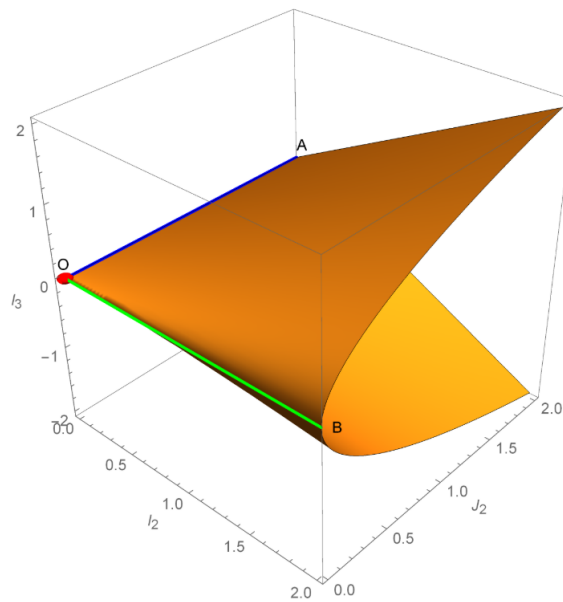


FIGURE 1 – Variété algébrique des matériaux élastiques par rapport à (I_2, J_2, I_3) .

Le cas de la demi droite OB tracé sur la Figure 1, et absente du tableau, sera détaillée un peu plus loin.

3 Caractérisation de matériaux exotiques

Cas de l'élasticité

On s'aperçoit que les classes de symétrie sont caractérisées par les zéros de polynômes invariants. Il peut être tentant de définir comme matériaux exotiques tout matériau défini ainsi et ne correspondant pas à une classe de symétrie. Toutefois cette approche n'est pas assez spécifique et ne correspond pas aux observations faites en introduction.

Revenons aux composantes harmoniques. Les classes de symétrie des composantes harmoniques sont

$$\mathfrak{J}(\mathbb{K}^2) = \{[D_2], [O(2)]\}, \quad \mathfrak{J}(\mathbb{K}^4) = \{[D_4], [O(2)]\}$$

c'est-à-dire soit la composante associée à \mathbb{K}^n n'est pas nulle et sa classe de symétrie est $[D_n]$ soit elle est nulle et alors elle est isotrope. On a ici un mécanisme d'annulation des composantes (*mécanisme de type I*).

La classe de symétrie de la paire (\tilde{h}, \tilde{H}) , et donc de \tilde{C} sera obtenue par les différentes intersections possibles (ou *clips* noté \odot) de ces possibilités. On obtient :

$\mathfrak{J}(\mathbb{K}_2) \odot \mathfrak{J}(\mathbb{K}_4)$	$[D_4]$	$[O(2)]$
$[D_2]$	$[Z_2], [D_2]$	$[D_2]$
$[O(2)]$	$[D_4]$	$[O(2)]$

On observe plusieurs choses :

1. on retrouve bien les 4 strates de l'élasticité :

$$\mathbb{E}la = \Sigma_{[Z_2]} \cup \Sigma_{[D_2]} \cup \Sigma_{[D_4]} \cup \Sigma_{[O(2)]};$$

2. les composantes $\underset{\sim}{h}$ et $\underset{\sim}{H}$ non-nulles engendrent 2 classes $[Z_2]$ et $[D_2]$. La première situation correspond à une orientation quelconque de la paire $(\underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{h})$, la deuxième à un *alignement* de cette même paire. On a ici un mécanisme d'*alignement* des composantes (*mécanisme de type II*)
3. la classe $[D_2]$ est générée de 2 manière différentes. On a

$$[D_2]_{(\underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{h})} = \{[D_4]_{\underset{\sim}{H}} \odot [D_2]_{\underset{\sim}{h}}, [O(2)]_{\underset{\sim}{H}} \odot [D_2]_{\underset{\sim}{h}}\}$$

Il en résulte que la strate $\Sigma_{[D_2]}$ peut être divisée en deux sous-strates :

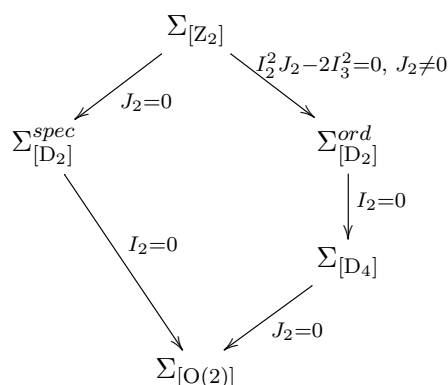
$$\Sigma_{[D_2]} = \Sigma_{[D_2]}^g \cup \Sigma_{[D_2]}^e$$

avec la paire $(\underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{h})$ du type $([D_4]_{\underset{\sim}{H}}, [D_2]_{\underset{\sim}{h}})$ dans $\Sigma_{[D_2]}^g$ et du type $([O(2)]_{\underset{\sim}{H}}, [D_2]_{\underset{\sim}{h}})$ dans $\Sigma_{[D_2]}^e$. La première sous-strate sera qualifiée de *générique* tandis que la deuxième sera dite *exotique*. Géométriquement, et en revenant à la figure 1, l'ensemble exotique correspond à la demi droite OB. On peut noter qu'il s'agit de l'intersection des plans de symétrie de la surface avec la strate des matériaux orthotropes.

La sous-strate $\Sigma_{[D_2]}^e \subset \Sigma_{[D_2]}$ correspond aux matériaux R_0 -orthotropes. On observe les 2 points suivants :

1. en tant que sous-strate de $\Sigma_{[D_2]}$, ces matériaux sont définis par des restrictions autres que celles liées à des propriétés d'invariances spatiales ;
2. l'annulation de la composante $\underset{\sim}{H}$ résulte en un matériau orthotrope dont le champ déviatorique se comporte en manière isotrope.

Au final, cela donne la structure complète suivante de transition entre les différentes strates :



que l'on peut détailler en termes de comportement de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} \mathbb{H} + \alpha \mathbb{J} & \frac{1}{2} \mathbb{h} \otimes \mathbb{1} \\ \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbb{h} & \beta \mathbb{K} \end{pmatrix} & \\
 & \swarrow_{J_2=0} & \searrow_{I_2^2 J_2 - 2I_3^2 = 0, J_2 \neq 0} \\
 \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{J} & \frac{1}{2} \mathbb{h} \otimes \mathbb{1} \\ \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbb{h} & \beta \mathbb{K} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \mathbb{H} + \alpha \mathbb{J} & \frac{1}{2} \mathbb{h} \otimes \mathbb{1} \\ \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbb{h} & \beta \mathbb{K} \end{pmatrix} \\
 & \searrow_{I_2=0} & \downarrow_{I_2=0} \\
 & & \begin{pmatrix} \mathbb{H} + \alpha \mathbb{J} & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{K} \end{pmatrix} \\
 & & \swarrow_{J_2=0} \\
 & & \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{J} & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{K} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Ceci donne au final pour un matériau R_0 -orthotrope la loi d'élasticité anisotrope suivante

$$\begin{cases} \sigma^d = \mathbb{H} : \varepsilon^d + \alpha \varepsilon^d + \frac{1}{2} \varepsilon^s \mathbb{h} \\ \sigma^s = \frac{1}{2} \left(\mathbb{h} : \varepsilon^d + \beta \varepsilon^s \right) \mathbb{1} \end{cases} .$$

On a bien obtenu une classe exotique selon la définition que l'on s'est donnée. Toutefois, la méthode utilisée montre également qu'il n'y en a qu'une en 2D. Ceci est dû au fait que la structure harmonique de $\mathbb{E}a$ ne contient que 2 composantes anisotropes, de fait les possibilités de singularités sont faibles. La situation change rapidement dès que le nombre de composantes harmoniques augmente.

Généralisation

Le raisonnement mis en place dans le cas de l'élasticité 2D peut être abstrait et généralisé à tout tenseur dans \mathbb{R}^2 .

Pour obtenir le nombre de strates exotiques il faut énumérer l'ensemble des configurations géométriques particulières pouvant se produire entre les composantes de la décomposition harmonique d'un tenseur donné. En pratique, il faut énumérer :

- le nombre d'annulations possibles de composantes harmoniques (*mécanisme de type I*);
- pour une configuration donnée, le nombre d'alignements possibles entre les composantes harmoniques non nulles (*mécanisme de type II*).

et retirer à ce nombre le nombre de classes de symétrie classique. Ce nombre de strates exotiques est donné par le résultat suivant :

Theorem 3.1. *Considérons \mathbb{T} un espace de tenseurs sur lequel agit $O(2)$. Soit respectivement n et h le nombre d'espaces harmoniques d'ordre > 0 et -1 dans la décomposition harmonique de \mathbb{T} . Le nombre*

de strates anisotropes exotiques de \mathbb{T} est

$$\# \mathcal{E} = \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (2^p - p) \right) 2^h - \# \mathcal{C}$$

avec $\# \mathcal{C}$ le nombre de classes de symétrie $O(2)$ de \mathbb{T} .

L'application de ce résultat aux espaces des tenseurs piézoélectriques $\mathbb{P}ie$ [12], flexoélectriques $\mathbb{F}le$ [1] et des tenseurs d'élasticité du second-gradient $\mathbb{S}tr$ [2] donne les résultats suivants :

\mathbb{T}	Tenseur	Dec. Harmonique	$\# \mathcal{S}$	$\# \mathcal{C}$	$\# \mathcal{E}$
$\mathbb{P}ie$	$P_{(ij)k}$	$2\mathbb{K}^1 \oplus \mathbb{K}^3$	15	4	11
$\mathbb{E}la$	$C_{(ij)(kl)}$	$2\mathbb{K}^0 \oplus \mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^4$	5	4	1
$\mathbb{F}le$	$F_{(ij)kl}$	$2\mathbb{K}^{-1} \oplus 2\mathbb{K}^0 \oplus 3\mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^4$	196	6	190
$\mathbb{S}tr$	$D_{(ij)k(lm)n}$	$\mathbb{K}^{-1} \oplus 4\mathbb{K}^0 \oplus 5\mathbb{K}^2 \oplus 2\mathbb{K}^4 \oplus \mathbb{K}^6$	11074	8	11066

Références

- [1] H. Abdoul-Anziz, N. Auffray, B. Desmorat, "Symmetry classes and matrix representations of the 2D flexoelectric law," *Symmetry*, vol. 12, pp. 674, 2020.
- [2] N. Auffray, J. Dirrenberger, G. Rosi, "A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 69, pp. 195-206, 2015.
- [3] N. Auffray, B. Kolev, M. Petitot, "On Anisotropic Polynomial Relations for the Elasticity Tensor," *Journal of Elasticity*, vol. 115, issue 1, pp. 77-103, 2014.
- [4] N. Auffray, B. Kolev, M. Olive, "Handbook of bidimensional tensors : Part I : Harmonic decomposition and symmetry classes," *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 22, issue 9, 2017.
- [5] J. P. Boehler, A. A. Kirillov Jr., E. T. Onat, "On the polynomial invariants of the elasticity tensor," *Journal of Elasticity*, vol. 34, pp. 97-110, 1994.
- [6] B. Desmorat, N. Auffray, "Space of 2D elastic materials : a geometric journey," *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 31, pp. 1205-1229, 2019.
- [7] S. Forte, M. Vianello, "A unified approach to invariants of plane elasticity tensors," *Meccanica*, vol. 49, issue 9, pp. 2001-2012, 2014.
- [8] S. Forte, M. Vianello, "Symmetry classes for elasticity tensors," *Journal of Elasticity*, vol. 43, issue 2, pp. 81-108, 1996.
- [9] J. Rychlewski, "Elastic waves under unusual anisotropy," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, issue 11, pp. 2651-2666, 2001.
- [10] M. Vianello, "An integrity basis for plane elasticity tensors," *Archives of Mechanics*, vol. 49, issue 1, pp. 197-208, 1997.
- [11] P. Vannucci, "A Special Planar Orthotropic Material," *Journal of Elasticity*, vol. 67, pp. 81-96, 2002.
- [12] P. Vannucci, "The polar analysis of a third order piezoelectricity-like plane tensor," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 7803-7815, 2007.