



HAL
open science

Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques : État de la recherche et questions ouvertes. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2024, Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques (Numéro spécial), pp.15-59. 10.46298/rdm.12905 . hal-04028314v2

HAL Id: hal-04028314

<https://hal.science/hal-04028314v2>

Submitted on 15 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques

État de la recherche et questions ouvertes

Nicolas Balacheff

Université Grenoble-Alpes, CNRS, LIG

Les recherches sur la complexité épistémique, logique et discursive de l'apprentissage de la preuve ont suscité une abondante littérature au cours des deux dernières décades. Leurs résultats contribuent à une compréhension plus précise des difficultés rencontrées par les élèves et de celles du travail des professeurs. Ils confortent la conception de situations, notamment les situations de validation au sens de la Théorie des situations didactiques (TSD – Brousseau, 1998), dans lesquelles la preuve fonctionne comme outil de résolution de problèmes. Cependant, subsiste la difficulté de saisir la preuve comme objet, pour en reconnaître les spécificités mathématiques et l'institutionnaliser en tant que telle. C'est sur ce problème que porte ce texte. Ce texte complète ceux des exposés faits au Séminaire national de didactique des mathématiques en 2017 et au CORFEM en 2019. Ces trois exposés avaient pour objet commun l'apprentissage et l'enseignement de la preuve en amont de l'introduction de la démonstration comme forme canonique de preuve en mathématique. Après une introduction rappelant le contexte institutionnel et scientifique, une première partie (sections 2 à 4) est consacrée à un état de la recherche en reprenant les comptes-rendus de travaux marquants relevant de différentes approches, une deuxième partie (section 5) avance des propositions pour constituer une base pour les recherches à venir. La conclusion porte sur les questions ouvertes par le besoin d'ingénieries spécifiques des situations pour susciter et accompagner la genèse et la reconnaissance des normes de la preuve dans la classe de mathématique avant l'enseignement explicite de la démonstration.

Mots-clés : didactique des mathématiques ; théorie des situations didactiques ; preuve ; démonstration ; argumentation

Situations for the learning of proof in mathematics: A review of research and open questions

Research on the epistemic, logical, and discursive complexity of proof learning has generated a wealth of literature over the past two decades. The results contribute to a more precise understanding of the difficulties encountered by students and those encountered by teachers. They support the design of situations, especially validation situations in the sense of the Theory of Didactical Situations (TDS—Brousseau, 1998), in which proof is a problem-solving tool. However,

there remains the difficulty of grasping proof as an object, recognizing its mathematical specificities and institutionalizing it as such. This is the topic of this text. This text complements those given at the *Séminaire national de didactique des mathématiques* in 2017 and at CORFEM in 2019. The common theme of these three presentations was the learning and the teaching of proof before the introduction of mathematical proof as the canonical form of proof in mathematics. After an introduction recalling the institutional and scientific context, the first part (sections 2 to 4) is devoted to a review of the state of research, taking into account the reports of outstanding work from different approaches. In the second part (section 5), proposals are made to provide a basis for future research. The conclusion considers the issues raised by the need for situation-specific engineering to encourage and support the genesis and recognition of proof norms in the mathematics classroom, prior to the explicit teaching of the introduction of mathematical proof.

Keywords: didactics of mathematics; theory of didactic situations; proof; mathematical proof; argumentation

Situaciones para el aprendizaje de la prueba en matemática: Estado de la investigación y cuestiones abiertas

La investigación sobre la complejidad epistémica, lógica y discursiva del aprendizaje de la demostración ha generado abundante literatura en las dos últimas décadas. Los resultados contribuyen a una comprensión más precisa de las dificultades a que se enfrentan los alumnos y a cuáles se enfrentan los profesores. Estos resultados, refuerzan la utilidad de la noción de situación; en particular de situación de validación en el sentido de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD – Brousseau, 1998), en las cuales la prueba funciona como una herramienta de resolución de problemas. Sin embargo, sigue existiendo una dificultad de entender la demostración como objeto, reconocer sus especificidades matemáticas e institucionalizarla como tal. Es en este problema en que se centra este texto, que desarrolla los elementos presentados en la 21ª Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas. Este texto completa las comunicaciones presentadas en el *Séminaire national de didactique des mathématiques* (2017) y en el CORFEM (2019). El tema común de estas tres presentaciones fue el aprendizaje y la enseñanza de la prueba antes de la introducción de la demostración como forma canónica de prueba en matemáticas. Tras una introducción en la que se recuerda el contexto institucional y científico, la primera parte (secciones 2 a 4) está dedicada a una revisión del estado de la cuestión retomando los relatos de trabajos destacados desde distintos enfoques. La segunda parte (sección 5) presenta propuestas para sentar las bases de futuras investigaciones. La conclusión aborda las cuestiones abiertas por la necesidad de una ingeniería de situaciones específica para fomentar y apoyar la génesis y el reconocimiento de las normas de la prueba en el aula de matemáticas antes de la enseñanza explícita de la demostración.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas; teoría de las situaciones didácticas; prueba; demostración; argumentación

Note : j'appose le symbole ° aux mots masculins pour marquer le caractère neutre (non genré) de leur usage, par ailleurs j'utilise le pronom neutre *iel* (rentré récemment dans le dictionnaire). L'écriture inclusive, que je n'ignore pas, m'a paru rendre la lecture trop difficile.

I. Introduction

L'apprentissage de la preuve¹ ou de la démonstration, ou encore celui du raisonnement déductif ou du raisonnement mathématique, est inscrit dans le projet d'enseignement à tous les niveaux de scolarité dans tous les pays. En témoignent les études d'évaluation PISA (OECD, 2019, p. 79 et 81; *PISA Mathematics Framework*, 2022), et TIMSS (2021, p. 16-17 et 42). Les évaluations de PISA portent sur les performances des élèves de 15 ans, celles de TIMSS portent sur les élèves du CM1 et de quatrième². J'utilise cette dernière étude pour illustrer la tendance institutionnelle.

Les évaluations TIMSS distinguent les domaines de contenu et les domaines cognitifs. Les domaines de contenu définissent les thèmes mathématique couverts par l'évaluation, les domaines cognitifs définissent les ensembles de comportements attendus des élèves lorsqu'ils s'engagent dans une activité mathématique (TIMSS 2003 / O'Connor *et al.*, 2003, p. 9). Les questions liées à la validation sont abordées dans le domaine cognitif intitulé « raisonnement », en voici la description la plus récente :

Reasoning mathematically involves logical, systematic thinking. It includes intuitive and inductive reasoning based on patterns and regularities that can be used to arrive at solutions to problems. Evidence of reasoning processes can be found in the explaining or justifying of a solution method, or the making of valid inferences on the basis of information and evidence. Reasoning is required in analyzing or generalizing mathematical relationships. Even though many of the cognitive skills listed in the reasoning domain may be drawn on when thinking about and solving complex problems, each by itself represents a valuable outcome of mathematics education, with the potential to influence learners' thinking more generally. For example, reasoning involves the ability to observe and make conjectures. It also involves making *logical deductions based on specific assumptions and rules, and justifying results*. (TIMSS 2023 / Mullis *et al.*, 2021, p. 16-17 - mes italiques).

Les objectifs d'apprentissage du domaine cognitif sont exprimés en termes de comportements : Analyser, Généraliser, Synthétiser/Intégrer, Justifier. Ce dernier a été étiqueté Justifier/Prouver (*Justify/Prove*) en 2003, mais seul Justifier (*Justify*) est resté pour les campagnes d'évaluation suivantes.

En France, en 2017, Cédric Villani et Charles Torrossian ont conduit une mission sur l'enseignement des mathématiques à la demande du ministère de l'Éducation nationale. La lettre de mission demande notamment « de formuler des recommandations sur les différents paliers annuels d'acquisition tant à l'école élémentaire, au collège ou au lycée » (2018, p. 94). Une section de ce rapport est consacrée à *La preuve*, les auteurs y affirment que « la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université) » (*ibid.*, §3.1.2)³. Une telle recommandation est un défi nouveau au regard de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en France. Jusqu'ici, quel que soit le vocabulaire choisi, ces apprentissages n'étaient pas véritablement considérés possibles avant le cycle 4, plus précisément et classiquement, la classe de quatrième (Balacheff, 2023).

¹ Il est important, pour relier éventuellement ce texte à ceux de la littérature anglophone contemporaine, de signaler que preuve se traduit par *proof* et démonstration par *mathematical proof* (ou *proof* lorsque le contexte est sans ambiguïtés). Le mot anglais *demonstration* a été utilisé en mathématique jusqu'au début du XX^e siècle.

² Respectivement « grade 4 » et « grade 8 » dans la nomenclature internationale.

³ Le *National Council of Teachers of Mathematics*, au début des années 2000, recommande : "Reasoning and proof should be a consistent part of students' mathematical experiences in pre-kindergarten through grade 12." (NCTM, 2000, p. 56, cité par Hanna et de Villiers, 2012, p. 207).

Tableau 1. – Évolution de la définition des termes justifier (*Justify*) et prouver (*Prove*) utilisée par les documents de cadrage TIMSS (*assessment frameworks*) de 2003 à 2023 pour le niveau CM1 (*grade 4*)

2003	Justify/Prove	Provide evidence for the validity of an action or the truth of a statement by reference to mathematical results or properties; develop mathematical arguments to prove or disprove statements, given relevant information. (TIMSS 2003 / O'Connor <i>et al.</i> , 2003, p. 33)
2007 2008	Justify	Provide a justification for the truth or the falsity of a statement by reference to mathematical results or properties. (TIMSS 2008 / Garden <i>et al.</i> , 2008, p. 22; TIMSS 2007 / Mullis <i>et al.</i> , 2007, p. 38)
2011	Justify	Provide a justification by reference to known mathematical results or properties. (TIMSS 2011 / Mullis <i>et al.</i> , 2009, p. 46)
2015 2019 2023	Justify	Provide mathematical arguments to support a strategy or solution. (TIMSS 2019 / Mullis <i>et al.</i> , 2017, p. 24, TIMSS 2023 / 2021, p. 17; TIMSS 2015 / Mullis et Martin, 2014, p. 27)

Effectivement, la preuve, ou la question de la validité d'un résultat ou d'un raisonnement, apparaît dans les programmes récents. Elle est l'objet d'un commentaire détaillé (EDUSCOL, 2016). La réponse au défi ainsi lancé peut trouver des éléments dans des recherches conduites depuis plusieurs décennies sur le thème de la preuve avec des approches notamment cognitives, logiques, épistémologiques et didactiques. Les premières, qui portent essentiellement sur l'élève ou l'objet d'enseignement, ont des résultats assez clairement affirmés, c'est rarement le cas pour les recherches qui portent sur la *modélisation didactique des situations* dont l'objectif est l'enseignement de la preuve. La raison en est la difficulté à déterminer les conditions du passage de la preuve comme outil⁴ de résolution de problèmes, à la preuve objet dont l'explicitation des caractéristiques permettrait la reconnaissance comme telle et l'institutionnalisation (Balacheff, 1988, p. 580-581, 2019b ; Brousseau et Gibel, 2002, p. 217 ; Grenier et Payan, 2002, p. 201 ; Stylianides, 2007, p. 15).

L'outil clé de la création de situations dans lesquelles la question de la validité d'un énoncé est problématisée et traitée par les élèves est le *schéma de validation explicite* tel que le définit la Théorie des situations didactiques (TSD – Brousseau, 1986/1998, p. 109-112). Les situations correspondantes sont les *situations de validation*⁵. Ce type de situation a les caractéristiques d'une *situation adidactique* (*ibid.*, p. 58-59) avec une composante épistémique que régule le *milieu* référent, et une composante sociale qui permet de susciter une *dialectique des preuves et réfutations*. Dans ces situations, la question qui anime les élèves est celle de la preuve de la validité d'un énoncé, et non celle des caractéristiques qui font que cette preuve soit acceptable. Certes, nombre de ces caractéristiques sont sous-jacentes aux éventuels conflits mais elles ne sont pas formulées (par exemple le tiers exclu). Or, le problème que nous nous posons porte sur ces critères d'acceptabilité, leur reconnaissance et leur appropriation par les élèves aux différents niveaux de la scolarité. La situation de validation doit pour cela susciter le passage du questionnement sur la validité de l'énoncé lui-même à celui sur la légitimité et la nature de sa preuve.

⁴ Définition – « nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. » (Douady, 1986, p. 6)

⁵ Définition – « Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs sont alternativement un "proposant" et un "opposant" ; ils échangent des assertions, des preuves et démonstrations à propos de ce couple "milieu/message". » (Brousseau, 1986/1998, p. 108)

Sans caractéristiques spécifiques, *les situations de validation du point de vue de la solution d'un problème sont des situations d'action du point de vue de la preuve.*

Le postulat fondateur de la TSD énonce qu'il est nécessaire que la connaissance dont l'apprentissage est visé « ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans les discussions entre élèves » (Brousseau, 1981/1998, p. 218-220). Il ne s'agit plus de la mise en situation d'un proposant et d'un opposant, fut-ce de petites équipes en compétition, décrit par le schéma de la validation explicite, mais de celle d'une communauté d'une trentaine d'élèves et d'un enseignant^o au sein de laquelle la régulation des interactions sociales que désignent les expressions « débat scientifique » et « discussion » est complexe. Elle l'est particulièrement lorsque l'enjeu est de parvenir à un *accord mathématicien* sur la solution d'un problème car la frontière est toujours fragile entre la dialectique et la polémique. Elle l'est plus encore lorsque l'enjeu est celui d'un consensus à un autre niveau, le « niveau méta » (Robert et Robinet, 1996), celui des règles qui sous-tendent l'accord. Il demande leur reconnaissance, puis leur formulation et enfin *leur institutionnalisation*.

La relation entre les deux niveaux d'accord, celui de la preuve-outil et celui de la preuve-objet, est étroite et systémique : tout désaccord à un niveau potentialise le désaccord sur l'autre. Mais il y a une dissymétrie : l'accord sur les règles est très généralement implicite quand l'accord sur la preuve elle-même est explicite. Dès que ce dernier est trouvé, l'explicitation du premier ne paraît plus nécessaire. La force de ce consensus relève d'un principe d'économie naturel qui fait obstacle à la constitution de la preuve en objet. Les résultats des travaux sur l'enseignement de la preuve se heurtent à cet obstacle : ils témoignent de la possibilité de « débats scientifiques » *mais* aussi de l'échec à les achever au point de pouvoir partager la reconnaissance de ce qui rend légitime leurs conclusions.

Ce problème était, à la fin des années 1980, un problème ouvert (Balacheff, 1988, p. 580 sqq). Il l'est encore. Le document qui définit l'étude ICMI *Proof and proving in mathematics education* (2007–2012) posait la question : “What arguments can teachers use in school and university to foster students' appreciation of the meaning of proof and to motivate students to prove theorems?” (Hanna *et al.*, 2012, p. 450). Cette question est restée sans réponse, elle a en revanche été reformulée en avançant sur le terrain de l'action et de la situation : “what *teacher actions* and what *classroom atmosphere* might support or hinder achievement, and how all of these factors may vary with the age or level of the student, the type of mathematics, and the specificities of type of proof being used.” (Dreyfus *et al.*, 2012, p. 207 – mes italiques). En 2018, le groupe thématique *Reasoning and proof in mathematics education* du congrès ICME-13, traite à nouveau ce thème mais sans avancée notable. La conclusion de la section consacrée aux problèmes de *la preuve dans la classe* suggère simplement que le lecteur intéressé trouvera dans ce rapport des informations, des perspectives ou des idées utiles (Even, 2018, p. 149).

Le présent texte a pour objectif de reprendre ces questions dans la problématique de la TSD, c'est-à-dire en recherchant les conditions que devrait satisfaire une situation d'enseignement pour rendre optimale⁶

⁶ Je choisis cette formulation pour prendre en compte et souligner le non déterminisme inhérent à la situation effective d'enseignement – souvent évoquée par le mot « terrain » ou l'expression « conditions écologiques ». Dans la pratique les connaissances issues de la recherche en didactique des mathématiques sont des éléments pour élaborer un projet d'enseignement dans un système complexe au sens donné à cette notion par Edgard Morin et Jean Louis Le Moigne. Cette complexité demande la prise en compte de dimensions psychologiques, pédagogiques, sociologiques, économiques, voire politique et culturelle qui interagissent avec celles mathématiques et didactiques. La didactique des mathématiques ne peut

la possibilité d'émergence de la preuve non seulement comme outil, ce qui est nécessaire, mais comme objet. La reprise par Andreas Stylianides de la recherche princeps de Deborah Ball (1993) est l'occasion d'une observation qui dit très concrètement la complexité de la tâche :

Finally, students' engagement with the conjectures ended without the students reaching an agreement on a proof and without the teacher ratifying a purported proof or explaining why other arguments could not count as proofs. Thus, the episode ended without a situation for institutionalization (Brousseau, 1981), that is, a situation that would aim at pointing out, and giving an official status to, some piece of knowledge that has been constructed during the classroom activity. (Stylianides, 2007, p. 15).

Deborah Ball a engagé son programme scientifique "with an eye on the mathematical horizon". Elle pose la question, parmi d'autres, de savoir quelles sont les conceptions des élèves de 8 ans sur la preuve, et plus largement sur ce qui leur permet d'assurer la vérité de « quelque chose » (1993, p. 383). Son approche est expérimentale et empirique, elle consiste à concevoir, mettre en œuvre et observer *une orchestration du rôle de l'enseignant*^o. Nous reconnaissons dans cette problématique les questions retenues par ICMI. Les principes qui guident la conception, les succès et les échecs sont rapportés précisément. Le résultat prend la forme d'un *exemple analysé* qui peut être une ressource pour l'enseignement ou, plutôt, une source d'inspiration.

Je propose dans la suite un état de la recherche suivi d'une réflexion sur les questions évoquées en prenant le point de vue des situations au sens de la TSD. La littérature est abondante et de qualité inégale. J'ai fait le choix de retenir⁷...

1. Des travaux qui sont dans le paradigme de *l'inquiry based learning* (IBL, en français : apprentissage par investigation, Artigue, 2018). Ils ont pour projet commun de créer des situations d'enseignement qui suscitent l'entrée des élèves dans la problématique de la preuve (Lampert, 1990 ; Ball, 1993 ; Maher et Martino, 1996). Ces travaux répondaient aux recommandations des « standards » étatsuniens de la fin des années 1980. Ils ont un caractère pionnier. Leurs articles princeps sont des références reconnues dans la littérature internationale, ils ont fortement influencé les recherches dans le monde anglo-saxon. Les travaux de Paul Cobb ont une place particulière, je les prends en compte en introduisant le concept de norme sociomathématique qu'ils ont permis de forger. Enfin, Patricio Herbst a proposé des analyses qui permettent de dessiner les lignes d'une synthèse, ils sont pris en compte plus particulièrement dans la dernière partie de ce cours.
2. Des travaux dans le paradigme de *la didactique des mathématiques* qui abordent explicitement *la situation d'enseignement pour l'apprentissage de la preuve aux niveaux élémentaires* de la scolarité comme un objet complexe (Mantes et Arsac, 2007 ; Legrand, 1993 ; Boero et Douek, 2008 ; Grenier, 2009). Ces travaux sont le plus souvent conduits à l'interface de la recherche académique et de la pratique de l'enseignement. Ils ont une diffusion significative et, d'une certaine façon, ils font école.

seule résoudre les problèmes de l'enseignement des mathématiques, elle y contribue de façon *fondamentale* parce que c'est de mathématiques qu'il s'agit.

⁷ J'admets le caractère relativement arbitraire de ces choix.

2. La preuve comme norme sociomathématique dans la classe

Le but des recherches, dont je présente les principaux aspects dans cette section, est de mettre à l'épreuve des conditions de la pratique effective des enseignants^o des modèles construits sur différentes théories, et d'en examiner la portée en gardant à l'esprit la différence de nature entre la connaissance fondée sur des études empiriques ou analytiques, et celle forgée dans la pratique effective de l'enseignement (Lampert, 1990, p. 37). Ces travaux répondent aux demandes institutionnelles de la fin des années 80 aux États-Unis d'Amérique⁸ qui recommandent que les élèves, plutôt que d'apprendre du vocabulaire et des techniques élémentaires, apprennent à faire des mathématiques, c'est-à-dire à *conjecturer, expliquer, valider, discuter et questionner* au sein d'une *communauté mathématique*.

Les cadres théoriques en amont sont multiples, ils apportent des principes pour concevoir et mettre en œuvre un enseignement de la preuve. Les projets portent sur une période longue, une année voire plus. La méthodologie (cf. Herbst et Chazan, 2009) est celle des études de cas conduites avec une même personne dans le rôle d'enseignant^o et de chercheur^o (*first person studies*) selon la formule : "Using myself as the object and tool of my inquiry" (Ball, 1993, p. 375). Les données sont recueillies par divers moyens (enregistrements vidéo, notes, carnet de route, productions des élèves, introspection), leurs analyses recourent à des méthodes de l'ethnométhodologie et de la sociolinguistique.

La question du sens de la connaissance est première, en cela la problématique de ces recherches est épistémologique et a des liens avec celle de la didactique des mathématiques en s'attachant aux *fondements affectifs et sociaux de la preuve mathématique* – j'emprunte ici, pour caractériser cette approche, des mots de Guy Brousseau (1981/1998, p. 240 sqq). La TSD inclut cette dimension car « *le maître doit gérer l'investissement affectif, le désir de ses élèves* » (*ibid.*), mais elle cherche dans les spécificités des savoirs les moyens de répondre à cette exigence. Les travaux présentés dans cette section cherchent à préciser ces moyens en analysant les interactions entre l'enseignant^o et les élèves. C'est le rôle de l'enseignant^o qui est l'objet d'étude (Jones et Herbst, 2012).

Les trois sections qui suivent présentent les travaux de Deborah Ball et Magdalene Lampert pour leur caractère d'exemplarité et leur influence sur les recherches sur *l'apprentissage de la preuve dans la communauté de la classe*. Leur principal objet est le rôle et le travail de l'enseignant^o. Les travaux de Ball et Lampert sont proches par leur problématique et leurs méthodes⁹. Les travaux de Carolyn Maher s'inscrivent dans le même cadre, mais avec l'originalité de conduire une étude longitudinale sur 5 ans. Le terrain des recherches est le cycle 2 et la fin du cycle 3. Une synthèse sur le cadre de ces travaux et leurs apports est proposée dans la section 3.

2.1. Connaître les mathématiques

Magalene Lampert (1990) présente son article comme un essai. L'enseignante et chercheuse partage un récit sur l'apprentissage de ce que signifie connaître les mathématiques dans le contexte social de la

⁸ Voir par exemple : Ball, 1991, p. 16 ; Lampert, 1990, p. 32-33.

⁹ Proximité aussi géographique, Deborah Ball et Magdalene Lampert conduisent leurs recherches à l'université de Michigan à Ann Arbor, Carolyn Maher conduit sa recherche à l'université Rutgers.

classe, et témoigne de la façon dont l'enseignant^o peut agir pour créer et maintenir une structure de participation intellectuellement ouverte (ML 34)¹⁰ :

I assumed that changing student's ideas about what it means to know and do mathematics was in part a matter of creating a social situation that worked according to rules different from those that ordinarily pertain in classrooms, and in part respectfully challenging their assumption about what knowing mathematics entails. (ML 58).

Lampert qualifie son approche de *preuve de concept*, sans renoncer cependant à la valeur générique de ce qu'elle rapporte, ni à sa valeur d'exemple pour les enseignants^o – bien que rien ne soit assuré (ML 37). Son ambition est de développer de nouvelles formes d'interaction entre les élèves et l'enseignant^o, et d'expérimenter de nouvelles formes de contenus. Le cadre épistémologique est construit sur une lecture d'Imre Lakatos (1976) et George Polya (1945) qui retient de ces auteurs la mise en avant de valeurs éthiques et morales :

- Les qualités de *courage intellectuel* et de *modestie intellectuelle* nécessaires à la pratique des mathématiques (Lakatos, 1976, p. 3 ; Polya, 1945, p. 7-8). Ces qualités sont nécessaires à l'activité parce que la vérité est toujours « provisoire » (“truth remains tentative” – ML 31). Cette position trouve sa justification dans le modèle épistémologique de Lakatos : l'avancée des mathématiques doit moins à la logique qu'au « zig-zag » de la conjecture à la preuve, et au retour sur les axiomes ou les définitions qu'il faut être prêt à réviser.
- Cependant, cette disposition à la révision doit être tempérée par *une sage retenue* (Polya, 1945, p. 8) : il ne faut pas changer d'avis sans avoir de bonnes raisons.

Remarquons que ces valeurs sont, de fait, sous-jacentes à la modélisation des situations dans la TSD, mais elles n'y sont pas l'objet d'une prise en charge explicite. Nous les retrouverons dans les recherches sur les situations de « débat scientifique » (§ 4.3) ou celles sur le « problème ouvert » (§ 4.4) dans lesquelles il faut assurer la viabilité des débats publics en en définissant les règles.

Le cadre théorique est celui de l'anthropologie éducative selon laquelle l'enseignant peut construire une structure participative pour redéfinir ses rôles et responsabilités, et ceux des élèves (ML 34) ; c'est-à-dire un contrat didactique. C'est de la structuration et de la régulation de ces interactions que les élèves acquièrent le sens de la légitimité de leurs activités et de ce qui vaut pour connaissance dans la classe. L'autorité sociale et intellectuelle de l'enseignant^o pourrait-être a priori un obstacle, le postulat est qu'il s'agit en fait du produit d'une négociation : au fil des interactions, en étant membre de la « communauté de discours » de la classe, l'enseignante et chercheuse introduit au besoin les conventions nécessaires ou les « réinvente » avec les élèves (ML 35). Cette autorité vient du rôle qu'elle se donne en suivant et en s'engageant sur les propositions avec les élèves. Pour cela, témoigne Lampert, il faut savoir comment donner une preuve aux élèves, sans trahir les mathématiques, et être capable d'évaluer les leurs dans leurs référentiels (ML 41).

Les symboles et les conventions sont introduits dans le cours de ces interactions. Il s'agit pour l'enseignant^o d'être à la fois explicite sur les connaissances engagées, sur la légitimité et l'utilité des stratégies, et de suivre les arguments des élèves.

¹⁰ Pour une lecture plus fluide, les renvois à cet article seront sous la forme (ML n° de la page).

La première décision de l'enseignant^o est celle du choix d'un « problème structuré »¹¹, fréquemment appelé situation-problème, qui demande une réflexion productive d'idées (ML 39) et suscite des conjectures et des discussions. Ce problème doit être accessible à tous les élèves, quel que soit leur niveau, et mobiliser des conceptions en lien avec les notions mathématiques visées.

L'ingénierie de la situation d'enseignement s'appuie sur les traditions de la recherche-action et des méthodes interprétatives en sciences sociales (ML 36). Les élèves sont incités à rendre publique la façon dont ils comprennent le problème et ce qu'ils peuvent faire. Leurs propositions sont écrites au tableau, marquées d'un point d'interrogation. Selon l'analyse de Claire Margolinas (1992, p. 139-140), l'écrit rendu public concrétise et actualise la présence d'un milieu social de référence. Tous les commentaires, toutes les affirmations sur ces propositions doivent être justifiés. La règle, explicite, est sous le contrôle de l'enseignant^o pour que les remises en question des propositions ne soient pas réduites à un jugement (ML 40).

Le contexte mathématique, en classe de sixième, est l'étude de propriétés arithmétiques de la puissance d'un nombre entier naturel dans le but de prouver la « légitimité » de la formule $a^n \times a^m = a^{m+n}$ (ML 51-52). La référence à la « légitimité » est un point important, elle souligne que la défense des propositions s'appuie sur les mathématiques et non sur la parole de l'enseignante.

Ce qui suit rapporte les grandes lignes de la chronique de la situation :

La séquence débute par le problème de la décision sur le chiffre des unités de la puissance d'un nombre donné sans calculer sa valeur. Ce premier problème est un moyen d'ouvrir une problématique mathématique du nombre entier non réduite aux manipulations techniques des écritures décimales de l'arithmétique élémentaire. Le projet est de faire naître une communauté de discours mathématique. Des sous-problèmes organisent l'exploration : le cas de 54, 64, 74. L'enseignante circule dans la classe. Elle observe ce que font les élèves. Quand ils semblent tous engagés et que la plupart a avancé des idées, elle lance la discussion (ML 46). Cette discussion dure environ une demi-heure et engage presque tous les élèves. L'enseignante commence par une question : « who is ready with a theory about this one [54] ? » (ML 47). Dans le cours des échanges se construit un socle commun de connaissance, un vocabulaire et une clarification des significations – par ex. distinguer multiplication ($2 \times a$) et exponentiation (a^2). Une conjecture est formulée : les puissances de 5 se terminent par 25. Elle en amène une autre : les puissances de 6 se terminent par 36. La généralisation est réfutée par le cas de 7 qui introduit la question de la valeur des terminaisons pour différentes valeurs de l'exposant. Les propositions sont suivies de la question de la preuve (« proof », ici au sens commun). L'enseignante orchestre les échanges auxquels elle participe en prenant part à l'argumentation ou en réfutant une assertion.

L'enseignante agit sur le mode de l'animation et de la modération des interactions entre les élèves. Elle s'attache au ton de certaines oppositions, ou demande de considérer une proposition particulière. Cependant elle peut au besoin, en se mettant à hauteur des élèves, contribuer à une argumentation ou réfuter une proposition. Pivot de échanges, elle fait circuler la parole dans la classe. Les propositions sont écrites au tableau, l'écriture est l'élément structurant des échanges. Elle permet d'ancrer ce qui est en jeu dans les discussions et de gérer une mémoire commune.

L'analyse prend pour indicateurs le vocabulaire utilisé et son évolution qui accompagne le mouvement de décentration des élèves et leur entrée dans des normes sociales de la communauté mathématique. Les verbes « to know, to think, to revise, to explain » et les mots « problem », « answer » sont utilisés pour

¹¹ Expression notamment introduite par Jeremy Kilpatrick à qui renvoie Lampert.

redéfinir les activités et signifier les nouveaux rôles et responsabilités, et signifier les comportements acceptables (ML 35 et 38). Le passage de l'expression des élèves de « je fais » à « on fait » et leurs efforts de justification sont compris comme les signes de leur entrée dans “the realm of mathematical truths that were legitimated by the community of discourse” (ML 49).

Si l'analyse montre que les objectifs premiers du projet sont atteints, Lampert ne manque pas de souligner les difficultés et les limites (ML 55-57). La communauté créée n'est pas monolithique. En particulier, les « smart in math » ont un rôle de référence, mais les élèves qui ont résolu le problème ne voient pas l'intérêt de participer à une discussion qui valorise ceux qui ont des difficultés. Ils contrarient les efforts de l'enseignante, comme le font le silence, l'impossibilité ou le refus de s'expliquer, l'absence de courage ou la gêne à partager, l'enfermement dans le déni (stubbornness – ML 57) ou encore la crainte de perdre la face. Certes la norme se construit et certains l'acceptent, ils jouent le jeu et constituent la communauté de discours de la classe de mathématique, mais d'autres restent à l'écart, comme cela est le cas dans tout groupe social, note Magdalene Lampert.

2.2. La responsabilité de l'enseignant source de dilemmes

Deborah Ball (1993) a pour objectif d'amener les élèves à une activité *mathématique*, c'est-à-dire une activité congruente d'une part aux exigences de la discipline et, d'autre part, à l'éthique de la pratique scientifique. Elle recherche les principes qui permettront de *créer les conditions d'une expérience* qui engage les connaissances des élèves et les fasse évoluer, avec le souci de reconnaître et de valoriser ce qu'ils font. Ces conditions portent sur le choix du problème et le comportement de l'enseignant^o, en résumé :

- Le problème doit être une source d'idées, riche en possibilités et opportunités mathématiques.
- La pratique de l'enseignant^o doit être respectueuse de l'intégrité à la fois des mathématiques comme discipline et des enfants comme mathématiciens (« mathematical thinkers »¹²). Cette condition exprime le principe d'honnêteté intellectuelle repris de Bruner : “any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development.” (citation in DB 374).

La première condition est commune aux recherches dans le domaine, elle a notamment été précisée par les travaux sur le problème ouvert (Mantes et Arzac, 2007). L'insistance sur la seconde est en revanche plus particulière aux travaux étatsuniens du fait de l'attention portée à l'explicitation des principes éthiques sous-jacents (cf. Stylianides, 2007).

Plus qu'un cadre théorique, c'est l'idée de *reproduire l'activité du mathématicien* dans la classe qui guide le projet, en prenant cependant des distances avec la revendication fréquente d'authenticité qui paraît impossible à satisfaire – voire irresponsable – en raison de la nature et des fonctionnements de la communauté mathématique marquée par l'individualisme et l'élitisme (DB 377). Sa transposition dans la classe modélise une *communauté de discours* : les échanges et les débats sur les idées doivent être raisonnés et reposer sur des « arguments mathématiques », non sur l'autorité de l'enseignant, et être soutenus par un *effort collectif* (DB 388). Le concept de communauté renvoie ici à la *création d'un commun*

¹² “Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view-valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure-mathematical sense-making.” (Schoenfeld 1989, citation DB 376).

fait de contenu (vocabulaire, définitions, conventions) et de règles partagées de collaboration et de débat (gestion des conflits, nature des arguments, preuves et réfutations) (DB 388).

Le renoncement local et temporaire de l'enseignant^o à l'autorité scientifique ne signifie pas le renoncement à la responsabilité attachée à son rôle qui est socialement irrévocable. Il en résulte une tension entre autorité et responsabilité, source de dilemmes. Ball retient de ses observations introspectives trois dilemmes : celui du *choix de la situation*¹³, celui du *respect les élèves comme « mathématiciens »*, celui enfin de la décision *d'accepter le commun* qui émerge dans la classe.

Ball inscrit son étude princeps dans le cadre de l'enseignement dans une classe de niveau CE2. Les dilemmes qu'elle identifie sont illustrés par trois séquences qui utilisent des problèmes arithmétiques ouverts pour les élèves de ce niveau. Le scénario commun est celui classique d'un engagement des élèves dans un travail personnel d'une dizaine de minutes, puis des échanges en petits groupes, enfin une période d'environ une demi-heure pendant laquelle les élèves – ou les groupes d'élèves – présentent leurs solutions et discutent leurs idées. L'enseignante et chercheuse est tour à tour orchestrateur, modératrice et un pivot des échanges, comme dans le cas de Lampert. Chaque dilemme est illustré par trois études de cas dont j'évoque l'essentiel, ci-dessous.

1) Le dilemme du *choix de la situation* se manifeste lors de l'introduction des nombres relatifs en s'appuyant sur la connaissance à la fois scolaire et familière des nombres entiers. Les élèves sont invités à explorer ce que deviennent les manipulations numériques qu'ils connaissent (comparaison, addition, soustraction) dans un contexte familier dans lequel est introduit le codage d'un nombre par un signe « - » pour indiquer une position ou une valeur relative :

- a. La numérotation des étages sur le clavier d'un ascenseur (0 pour le rez-de-chaussée, entier naturel pour les étages supérieurs, entier naturel précédé du signe « - » pour les étages inférieurs) (DB 378-381). Plusieurs problèmes sont abordés et plus ou moins facilement résolus au cours des échanges dans la classe jusqu'à celui de donner une signification à l'écriture $6+(-6)$. "Finally, we hit a crisis" (DB 381). L'enseignante ne sait comment trancher sans être arbitraire entre les solutions pour dépasser ce que des élèves considèrent une absurdité ; de fait, ils ne considèrent pas -6 comme un nombre mais comme le nom codé du 6^{ème} sous-sol.
- b. Le codage de quantités de monnaie lors de bilans comptables (gain, perte, avoir, dette) (DB 381-384). Il n'y a, cette fois, pas de crise mais un constat d'échec. Les élèves maintiennent l'univers des quantités et celui des nombres séparés : *les dollars en dessous de zéro n'existent pas* !¹⁴ Ils proposent des solutions sans avoir à utiliser les nombres négatifs.

Dans les deux cas, les élèves n'entrent pas dans le cadre mathématique attendu. Ils mettent en œuvre une technologie symbolique sous le contrôle de son interprétation dans la situation concrète référente (Balacheff, 2001). Nombre de recherches et innovations adossées à une situation concrète pour invoquer le recours au codage relatif (signe -, couleur, cerclage, etc.) rapportent cette difficulté. Ce problème est ouvert, on ne connaît pas de situation fondamentale au sens de la TSD. Le dilemme du choix de la situation n'a, jusqu'ici, pas de solution (cf. analyse et proposition dans Mercier, 2012).

2) Le dilemme du *respect des élèves comme « mathématiciens »* est observé dans une situation dans laquelle des élèves émettent l'hypothèse qu'il y a plus de nombres pairs que de nombres impairs qui sont des carrés. Les échanges se poursuivent sur la parité au cours desquels un élève, Sean, déclare que 6 est à la fois pair et impair (DB 385 et suivante) parce qu'il peut être représenté

¹³ "Representing the content".

¹⁴ "There is no such thing as below zero dollars!" (DB 82).

par le triplet OO|OO|OO, et 3 est impair, ou par OOO|OOO, c'est-à-dire 2 paquets égaux ce qui satisfait la définition de la parité. Il est légitime de vouloir généraliser cette observation, caractériser ces nombres et rechercher leurs propriétés (par ex. la conservation pour l'addition ou la multiplication)¹⁵. L'intérêt des élèves et le principe d'autonomie auquel s'astreint l'enseignante invite à laisser se poursuivre le travail sur cette invention qui prend désormais le nom de « nombres de Sean ».

L'enseignante et chercheuse lit dans l'activité des élèves une forte ressemblance avec l'activité mathématique. Le dilemme est de reconnaître cette légitimité et, de ce fait, institutionnaliser un objet qui n'a pas de place dans le savoir mathématique. La décision pour sortir de ce dilemme emmène l'enseignante sur un territoire inconnu et incertain (DB 388).

La source de ce dilemme est dans l'adoption du principe radical de la recherche de Ball : l'autonomie de la communauté des élèves dans la classe dont le corollaire est la mise en retrait de l'enseignant comme autorité. C'est cette communauté qui doit faire avancer la connaissance de chacun et chacune qui en retour contribue à l'avancée du commun. Pour autant l'enseignant^o reste comptable de ses décisions, soumis à une responsabilité irrévocable.

Le dilemme a son origine dans cette tension :

Of course, teacherly authority plays a role in my classroom as it does in any classroom. I aim, however, to use my authority to encourage a set of intellectual and social norms to support a kind of work unusual in students' prior experience in school. *Rather than establishing myself as the final arbiter of truth, I strive to develop and distribute in the group a set of shared notions about what makes something true or reasonable.* (DB 388).

3) Le dilemme de l'acceptation du commun tient à ce que le consensus des élèves et leur évolution individuelle aillent dans une direction non acceptable dans une classe de mathématique. Ainsi, la quête d'un sens pour l'expression $6+(-6)$ dans le contexte des ascenseurs produit nombre de récits et d'arguments qui s'accumulent sans résoudre le problème posé. Lorsque, en fin de session, une élève propose que le résultat soit 0, son récit n'attribue pas à -6 le nom d'un étage mais l'orientation d'un déplacement d'amplitude 6. Ce récit, relève l'enseignante, rendra difficile l'interprétation de l'expression $6-(-6)$. Elle perçoit son intervention éventuelle avec un sentiment de malaise et de malhonnêteté (DB 391). Elle décide de clore la session en demandant aux élèves d'écrire ce qu'ils retiennent et pourquoi ; sur les 17 élèves, 10 retiennent que 0 est le résultat correct. Une semaine plus tard, alors que le thème des nombres relatifs se termine, elle note que *la plupart* des élèves réussissent correctement les calculs qu'elle propose bien que le débat sur la bonne réponse n'ait pas été clos explicitement. Un débriefing de la façon dont les débats sont perçus, le rôle du collectif et les jugements individuels font apparaître une variété de points de vue qui témoigne difficilement de l'émergence d'une communauté.

Dans les termes choisis par Ball, l'enseignant^o se trouve pris entre le devoir de gérer la « confusion » que peuvent susciter certains désaccords, et l'engagement de laisser aux élèves une autonomie qui peut passer pour de la « complaisance » (DB 393).

S'il y a bien une assemblée des élèves dans laquelle sont exprimées et défendues les idées, cela ne suffit pas à garantir de création d'un commun. Certes, l'activité, les prises de position et les arguments des élèves peuvent avoir localement les caractéristiques d'une activité mathématique que souligne Deborah

¹⁵ Cet exemple a été publié avec un compte-rendu détaillé de l'épisode sous le titre "Making mathematics work in school" (Ball et al., 2008).

Ball, mais l'absence d'émergence naturelle d'un consensus qui fasse loi sur les modes de validation et de régulation du discours empêche celle d'une communauté. Cette observation rejoint celle de Magdalene Lampert : les élèves peuvent avoir de multiples raisons de ne pas rentrer dans le jeu à moins que, simplement, ils ne comprennent qu'il y a un jeu et lequel.

2.3. Le développement de l'idée de preuve mathématique

L'enseignant^o est le maître du temps et le garant de la recevabilité des connaissances construites dans le cours de l'enseignement dont il est comptable au regard de la société (Arsac, Balacheff, *et al.*, 1992 ; Herbst et Chazan, 2011). Cette responsabilité pèse sur les approches plus incertaines telles celles qui sont construites sur le renoncement à instruire au profit du guidage. Est-il possible de s'affranchir de ces contraintes et qu'apprendrait-on alors ? C'est la voie dans laquelle s'est engagée Carolyn Maher en conduisant un projet sur le développement de l'idée de preuve à l'école élémentaire (Maher et Martino, 1996).

Cette recherche longitudinale suit l'évolution de l'activité de quelques élèves depuis le CP jusqu'au CM2 dans le but d'obtenir des données sur le développement du *raisonnement mathématique de l'enfant* (MetM 198). Plus précisément, l'étude porte sur l'évolution des moyens de validation mobilisés dans le contexte de l'exploration d'un domaine d'emblée accessible et riche en activités mathématiques dès le CP. Toutes les approches et explorations sont possibles, il n'y a pas d'objectif formalisé d'apprentissage ni de projet a priori d'enseignement. Si une question reste sans réponse dans le cours d'une session, elle peut être reprise au cours des semaines, des mois, voire les années qui suivent. Le temps, dans le couloir de cette étude au sein du cursus primaire, est ouvert. Il s'agit d'une recherche exploratoire.

Le domaine choisi est celui de la combinatoire élémentaire propice à l'invention de méthodes, de représentations, et à la création d'un espace d'expérience autonome sur lequel les programmes ne pèsent pas. Ce domaine est accessible très tôt dans le cours du développement de l'enfant, sollicitant des stratégies, des représentations et des opérations allant de la manipulation d'objets matériels à celle de représentations symboliques.

Le rapport de recherche publié est dédié au suivi d'une élève, Stéphanie, remarquée dès le CP pour sa capacité à communiquer, à partager ses idées et à engager la discussion sur les idées des autres. Des données multiples (vidéo, observations, productions de l'élève, interviews) et nombreuses, les chercheurs sélectionnent une suite de 11 événements « critiques »¹⁶ survenus de mai 1990 (fin du CE1) à octobre 1992 (début du CM2).

Le problème posé est celui du dénombrement des n -uples de cubes de deux couleurs, des tours, pour n donné. Le besoin d'un contrôle, dès les premières explorations, amorce une problématique de la validation qui reste une exigence privée, interne à l'activité, jusqu'à ce que l'enseignante invite les élèves à *lui* proposer une preuve de leur solution ; c'est le 11^e événement. Certes l'enseignante demande d'être convaincue, mais la tâche prescrite est de *rédiger une lettre destinée à des élèves absents* dans laquelle doivent être décrites les différentes tours construites pour $n=3$ en expliquant pourquoi toutes les possibilités sont présentes, qu'aucune n'est oubliée (MetM 195).

¹⁶ Utilisation spontanée d'une heuristique, développement d'une argumentation pour soutenir un élément de solution (organisation locale), extension d'un argument pour construire une solution complète (organisation globale).

Dear Laura,
 Today we made towers 3 high and with 2 colors.
 We have to be sure to make every possible pattern.
 There are 8 patterns total. I know because
 all you have to do is multiply 2 x the number
 you would get for towers of two. so it's
 2 x 4. I will prove it. If I put the
 towers in color order the colors are red & white.
 R stands for red & W stands for white.

1 Red	1 Red 1 White	1 Red 2 White	2 Red 1 White	2 Red 2 White	3 Red
W	R W	W W	R R	W R	R R
W	W	R	W	R	W
W	W	W	R	W	R

If this doesn't convince you tell
 you more → over →

For W 2 can't add any more white because

W
W
W

I'd be breaking the rules. For R I can't add another
 on or I'll be breaking the rules, this goes
 for every one. You can even check.
 Also when you multiply 2x4 it
 does equal 8. That they works
 for every one. Just multiply the
 answer for the last tower problem x
 2.

Your friend
 STEFFIE

Les jalons des 11 événements montrent l'évolution des moyens de représentation qu'élabore Stéphanie depuis la manipulation d'objets physiques (des cubes) au codage (tableau) en passant par des représentations iconique (dessin des tours). Le besoin de contrôler le dénombrement est le moteur de cette évolution et de celle des stratégies qui passent de l'essai-erreur au raisonnement par cas. Stéphanie joue le jeu de la communication en s'adressant à une autre élève, Laura. Elle expose ses raisons¹⁷, description du processus de production systématique, pour assurer qu'exactement 8 tours sont constructibles. Elle utilise un codage des couleurs – leur initiale – et un tableau à double entrée¹⁸.

Le résultat mis en avant est « l'invention » par Stéphanie d'une preuve élégante : "No one 'taught' her how to make a proof" (MetM 196). Il amène à un autre résultat

qui prend la forme d'une question : si personne ne lui a appris alors quelles sont les conditions qui ont contribué à « l'invention » de cette preuve ? Les choix a priori paraissent de facto validés, ils s'imposent comme partie de la réponse : la création d'un couloir sans contraintes institutionnelles qui traverse toute la scolarité du CP au CM2. Ce couloir a assuré l'ouverture du temps et le retrait des contraintes des programmes, et donc une décharge de la responsabilité qui limitait la possibilité d'accompagner les élèves selon leurs besoins propres avec pour seule préoccupation le maintien de la légitimité mathématique de leurs activités. La performance de Stéphanie dispense de dire ce qu'elle a appris. La levée des contraintes institutionnelles désamorce le caractère critique des dilemmes éventuels.

Le cas de Stéphanie ne permet cependant pas de répondre aux questions portant sur l'enseignement de la preuve aux niveaux élémentaires. L'étude fournit en quelque sorte une preuve d'existence : de jeunes élèves sont capables de raisonnements est d'une expression que le mathématicien^o ne rejeterait pas. Mais la problématique est celle du développement cognitif de la preuve (Tall et al., 2012), elle n'est pas à proprement parler celle de son apprentissage ou de son enseignement. C'est à ce titre que cette recherche est restée comme exemple paradigmatique (ibid., section 4.2.).

On peut retenir de cette étude la corrélation de l'évolution des moyens de représentation et des contrôles, et la confirmation du rôle de la situation de communication mise en scène par la consigne de rédaction d'une lettre pour une autre élève. La demande de la rédaction de cette lettre est le seul

¹⁷ Le lecteur peut se reporter pour le détail à (Maher et Martino, 1996, p. 194-196) ou à un résumé en français (Balacheff, 2019a, sect. 3.4)

¹⁸ En fait, ce tableau garde une valeur iconique : chaque colonne peut être lue comme la représentation d'une tour.

moment où les raisons d'agir des élèves sont prises en compte, sans que cependant cela soit analysé. La question de la validation, quant à elle, ne tient pas à la situation en soi mais au contenu explicite de la consigne qui l'initie.

3. Approche IBL de la preuve : éléments du cadre théorique

Le courant de recherche, dont les travaux retenus pour ce cours sont des représentants, porte sur la question de savoir comment la reconnaissance d'une preuve en tant qu'explication acceptée par une communauté à un moment donné peut être le résultat de l'interaction et de la négociation entre les élèves dans la recherche d'un consensus en respectant les valeurs et les pratiques des mathématiques en tant que discipline dont l'enseignant^o est le garant.

L'approche est celle des *Classroom-based research* (Jones et Herbst, 2012). Le cadre théorique est construit sur un ensemble de principes issus du constructivisme et du socio-culturalisme (cf. en français : Cobb *et al.*, 1994), associé à une méthodologie de type *Designed-based research* (T. Anderson et Shattuck, 2012), pour utiliser une référence contemporaine. Le cadre et les concepts de ces recherches ont été structurés par les travaux de Paul Cobb et Erna Yackel (1994 ; 1996) qui ont forgé le concept de *norme sociomathématique*.

La conception et la conduite des situations de classe de ces recherches ont pour principes partagés : l'apprentissage par investigation, l'autonomie des élèves et la promotion du « raisonnement mathématique », l'enseignant pivot et modérateur de l'activité, l'objectif de créer une norme sociomathématique. Ces travaux relient de façon étroite « preuve » et « raisonnement mathématique ».

3.1. Raisonnement mathématique

L'expression « raisonnement mathématique » désigne un ensemble de pratiques et de normes collectives enracinées dans la discipline (Ball et Bass, 2003, p. 29). Cette acception est instrumentale pour la problématique dans laquelle l'objectif est de *créer les conditions d'émergence d'une communauté de pratique et de discours spécifiques des mathématiques* comme domaine de connaissance constitué (discipline) *et* comme activité. Elle associe étroitement le raisonnement à la preuve et à la construction d'un corpus de connaissances partagé et public. La volonté, déjà soulignée, est de développer des pratiques qui respectent les mathématiques comme discipline et les élèves comme « penseurs mathématicien ».

When students are at work in a mathematics class, for example, we see them as constructing mathematical knowledge. Looking at the development of students' knowledge in this way highlights the fundamentally mathematical nature of their—and hence, their teachers'—work. The ways in which students seek to justify claims, convince their classmates and teacher, and participate in the collective development of publicly accepted mathematical knowledge have powerful resonances with mathematicians' work. (*ibid.*)¹⁹

Une contrepartie de la volonté de fidélité au travail du mathématicien^o rend difficile la prise en compte de la diversité des raisonnements et de la variété de leurs niveaux dans le courant de l'apprentissage-développement des élèves. Elle est source de *dilemmes*. Les chercheurs n'ignorent pas que « raisonner

¹⁹ Cette déclaration s'appuie sur les travaux de Deborah Ball et de Magdalene Lampert.

mathématiquement » doit être appris, notamment « la différence entre illustration et preuve » (Ball, 1993, p. 376). Mais la problématique socioculturelle prévaut sur la problématique épistémologique :

Finally, the teaching in which we are interested aims to create a classroom community in which differences are valued; in which students learn to care about and respect one another; and in which commitments to a just, democratic, and rational society are embodied and learned. (Ball et Bass, 2003, p. 30).

Deux types de raisonnements, en tant que processus, sont distingués : « reasoning of inquiry » et « reasoning of justification » (Ball et Bass, 2003, p. 30). Nous pourrions rapprocher cette distinction de celle faite par Raymond Duval (1992, p. 51) entre *argumentation heuristique* et *argumentation rhétorique*. Il y a cependant une différence entre les deux problématiques qu'il ne faut pas perdre de vue. Dans la première, la forte intégration des dimensions sociales, culturelles et disciplinaires dans la définition du raisonnement suggère une assimilation de raisonnement à argumentation. Dans la seconde, Raymond Duval renvoie au travail sur des énoncés²⁰, objets linguistiques modélisés au sein de registres sémiotiques, sans inclure les dimensions sociale et culturelle, en mettant en évidence la congruence aux mathématiques.

Le raisonnement de justification s'appuie sur deux piliers²¹ (Ball et Bass, 2003, p. 30) :

- *un corps de connaissances partagé et public* qui détermine le niveau de granularité des justifications dans un contexte donné et pour une communauté donnée ;
- *la langue* (symboles, vocabulaire, et autres représentations et leurs définitions), sa syntaxe, les règles de la logique.

Le langage inclut, de plus, la nature et le rôle des définitions, et la « compression conceptuelle » (*ibid.*, p. 33) c'est-à-dire la création de règles et d'automatismes²².

3.2. Apprentissage par investigation

L'apprentissage par investigation²³ (IBL) en mathématiques a pour objectifs de créer les conditions d'une activité des élèves à l'image de celle des mathématiciens^o, et les conditions d'une pratique des connaissances mathématiques qui leur donne du sens (Artigue et Blomhøj, 2013, p. 797 et 799)²⁴. L'hypothèse est que cette activité personnelle et collective, aussi indépendante de l'enseignant^o que possible, contribuera à l'acquisition de connaissances et de compétences, et facilitera la compréhension de la nature des mathématiques.

La tâche par laquelle l'enseignant^o amorce l'activité doit *susciter la curiosité, être accessible à tous* d'une façon ou d'une autre, *être ouverte* à l'exploration, susciter une *diversité de propositions* et donc être d'une *complexité significative* sans être hors de portée.

²⁰ « [le raisonnement est l'] organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies » (Duval, 1992, p. 52).

²¹ Pour traduire « foundations ».

²² « conceptual compression » dans le texte, est proche de l'idée de la création de routines (Saada-Robert et Brun, 1996), ou compilation (J. R. Anderson *et al.*, 1995).

²³ Traduction retenue de *inquiry-based learning* (ou *inquiry-based education*), je conserverai le sigle IBL (Ernst *et al.*, 2017).

²⁴ L'exposé de Michèle Artigue est disponible en ligne : <https://youtu.be/A1PNXDCJmTo>.

L'orchestration de l'activité dans le paradigme de l'IBL dispose de deux registres d'action : d'une part l'organisation sociale du travail (individuel, en petits groupes, en classe entière), d'autre part, les interventions de l'enseignant^o pour accompagner, guider, modérer les contributions individuelles ou collectives. Après des tentatives individuelles, éventuellement au sein de petits groupes, l'accent est mis sur le partage et la discussion des différentes propositions pour découvrir et discuter les approches, les idées et une diversité de compréhensions et de positions sur la situation vécue collectivement.

L'enseignant^o est le pivot et le modérateur des échanges en reformulant des propositions, en relançant les élèves par des questions ou des commentaires, en facilitant des prises de paroles ou mettant en avant des propositions particulières. Ses interventions s'apparentent à celles d'une *stratégie d'étayage* de l'activité de l'ensemble de la classe pour faire émerger une communauté que régiront des règles collectivement acceptées – celles des mathématiques (logique) et celles de l'activité mathématique (dialectique des preuves et réfutations, valeurs scientifiques).

L'approche IBL propose une organisation et des activités qui ne prend pas a priori en compte une discipline, bien qu'elle soit née de la pédagogie des sciences expérimentales. Elle met en œuvre des principes intellectuels généraux qui sont ceux des pédagogies actives. La validation en est une pierre angulaire parce qu'elle conditionne la légitimité des connaissances et des compétences construites ; elle est une problématique mais pas un objet d'apprentissage défini. Ce que sera la validation dans l'approche IBL dépend de la tâche retenue et du consensus auquel parviendront les élèves, autonomes et responsables (cf. infra § 3.4.), et l'enseignant^o dans une dynamique collective.

Le postulat de ces recherches est que parce qu'il s'agit d'une classe de mathématique, une partie significative de ce consensus sera de nature mathématique.

3.3. Norme sociomathématique

La *communauté* des élèves et de l'enseignant^o est le produit d'une *activité sociale* qui, comme telle, crée des usages, des modes de collaboration ou de coopération qui assurent sa viabilité et permettent son fonctionnement. Des *normes sociales*, tacites ou explicites, prennent forme. Elles sont mises en évidence par une analyse à un niveau de granularité très fin, celui du fil des prises de paroles et des actions individuelles des élèves et de l'enseignant^o, qui repère les régularités dans la dynamique des interactions (Voigt, 1985). Erna Yackel et Paul Cobb (1996) observent parmi elles des normes spécifiques du contenu enseigné, les mathématiques. Ils forgent le concept de *norme sociomathématique* pour en rendre compte (*ibid.*, p. 460).

Les normes sociomathématiques doivent être décrites et nommées, c'est-à-dire formalisées dans l'espace et le temps scolaire mais, parce que c'est un principe de l'IBL, ce ne peut être le fait de l'enseignant^o. En revanche, iel peut solliciter l'appréciation et la comparaison de solutions différentes à un problème :

As part of the process of guiding the development of a classroom atmosphere in which children are obliged to try to develop personally meaningful solutions that they can explain and justify, the teachers with whom we have worked regularly asked if anyone had solved a problem in a different way. [...] We noted earlier that additional learning opportunities arise when children attempt to make sense of explanations given by others, to compare others' solutions to their own, and to make judgments about similarities and differences (Yackel et Cobb, 1996, p. 462 et 466 – mes italiques).

Passer de la résolution d'un problème au jugement sur les solutions repose sur la disponibilité de diverses solutions et l'intérêt qu'il y a à les discuter. Cette motivation est alimentée par des questions de l'enseignant^o qui invite les élèves à formuler les raisons de leurs jugements sur les différences, l'efficacité, l'élégance et la recevabilité de la preuve²⁵. Outre la construction de normes, ces interventions sont pensées pour favoriser « le développement de l'autonomie intellectuelle » :

The link between the growth of intellectual autonomy and the development of an inquiry mathematics tradition becomes apparent when we note that, in such a classroom, the teacher guides *the development of a community of validators* and thus encourages the devolution of responsibility. (*ibid.*, p. 473 – mes italiques).

3.4. Autonomie et authenticité

Le concept d'autonomie occupe une place centrale dans l'approche IBL²⁶. L'autonomie de l'élève est une condition de la construction d'une signification appropriée aux spécificités des connaissances mathématiques, et émancipée de l'autorité de l'enseignant. Erna Yackel et Paul Cobb tiennent explicitement à rejeter toute idée d'une acception individualiste de l'autonomie²⁷ (1996, p. 473). Il s'agit, dans la problématique de l'IBL, de l'autonomie intellectuelle émancipatrice des usages péremptaires de l'autorité et créatrice d'une participation responsable. Être *élève* n'est pas être assigné à un rôle dual de celui, institutionnel, de l'enseignant mais prendre place dans un système que la classe inscrit dans l'espace et dans le temps :

if individual students learn in school, they do so not just from their individual study and not only when they have the individualized attention of their classroom teacher. They learn from being a part of a system of people, constraints, and resources—the class—whose total, systemic activity reframes individual actions as contributions to collective work, one of whose products is opportunity to learn. (Herbst *et al.*, 2009, p. 41)

Nous pouvons prendre ces lignes pour postulat de la nature systémique de la communauté de discours et de pratiques dont l'approche IBL cherche la création. L'expression « opportunité d'apprendre » retenue par Patricio Herbst peut paraître assez vague, en fait elle traduit l'idée d'une indétermination intrinsèque de l'approche IBL. Cette opportunité existe mais il n'est pas assuré qu'elle soit saisie par la classe en tant que système apprenant. Ainsi, Magdalene Lampert (1990) affirme-t-elle que le nouveau type d'enseignement qu'elle adopte – qui suit de fait les principes de l'IBL – engage les participants dans une *activité mathématique authentique*, mais elle relève l'incertitude sur ce qui est appris (*ibid.*, p. 59).

L'authenticité est une caractéristique recherchée par les projets IBL. La signification de ce concept peut avoir diverses facettes²⁸. Il s'agit, dans le cas de ces projets, d'un jugement porté sur l'activité non sur son produit : la situation de recherche est comprise comme un instrument pédagogique pour susciter *la reproduction dans la classe d'une activité qui soit à l'image de l'activité du mathématicien*^o. Cette formulation

²⁵ « justification » dans le texte.

²⁶ Voir Artigue et Blomhøj, 2013, p. 809 pour une liste de caractéristiques des situations IBL.

²⁷ Myrriam-Webster, Autonomy: “self-directing freedom and especially moral independence” / “the state of existing or acting separately from others: independence” (e.g. “a teacher who encourages individual autonomy”).

²⁸ L'authenticité n'a pas ici la même signification que celle dans la liste de Michèle Artigue et Morten Blomhøj où elle renvoie à la nature des questions posées et aux liens que les élèves font entre la situation proposée et leur expérience personnelle ou leur connaissance de la vie « réelle ».

renvoie à la fois au travail mathématique et à l'activité professionnelle dans son ensemble. Elle suscite des objections et des prises de distance (Ball, 1993, p. 377), notamment parce que :

- les mathématiciens^o se centrent sur un petit nombre de problèmes et travaillent en grande partie seuls,
- certains aspects professionnels sont peu intéressants à reproduire (par exemple les rivalités, la compétition).

Alors que l'enseignant^o doit permettre à tous les élèves d'apprendre avec la même unité de lieu et de temps, tenu par l'horloge institutionnelle, iel ne peut les laisser passer des mois à développer une idée ou à apprendre à résoudre certains types problèmes. Même en limitant l'exigence d'authenticité à celle du travail mathématique, l'imprévisibilité des chemins que pourraient suivre les élèves et le caractère non standard des connaissances qu'ils construiraient confrontent l'enseignant^o à des *dilemmes* qu'iel doit trancher.

Tous les travaux rapportés témoignent du rôle clé de l'enseignant^o et de sa complexité. Ils offrent l'exemple de l'enseignant^o-chercheur^o comme source d'inspiration pour celles et ceux qui s'engageraient dans cette direction, en insistant sur la compétence mathématique nécessaire.

The analysis of sociomathematical norms indicates that the teacher plays a central role in establishing the mathematical quality of the classroom environment and in establishing norms for mathematical aspects of students' activity. It further highlights the significance of the teacher's own personal mathematical beliefs and values and their own mathematical knowledge and understanding. In this way, the critical and central role of the teacher as a representative of the mathematical community is underscored. (Yackel et Cobb, 1996, p. 475)

3.5. Bénéfices et limites de l'approche IBL

Les travaux rapportés sont emblématiques d'une recherche sur la possibilité d'acculturation des élèves aux mathématiques comme discipline *et* comme pratique dans laquelle la question de la validation structure les échanges et légitime les productions. Ces travaux apportent à l'institution qui les a suscités *une preuve de concept* dans la mesure où :

- d'une part, ils témoignent de ce que les élèves des cycles qui précèdent l'enseignement explicite de la démonstration sont capable d'explorer un domaine, de faire des conjectures et de produire des preuves qui peuvent être raisonnablement considérées à l'aune d'un jugement mathématique ;
- d'autre part, ils sont conduits dans un contexte de pratiques (« classroom-based ») avec les mêmes contraintes et les mêmes responsabilités que celles des enseignants^o de toute autre classe.

Il y a cependant loin de la preuve de concept à l'adoption d'IBL par les enseignants^o de mathématiques.

L'activité de l'enseignant^o constitue le principal élément de fragilité de l'approche IBL et de la réalisation de l'objectif recherché, l'autonomie des élèves. Son rôle est critique parce qu'il s'agit un contexte dans lequel n'y a pas *le garde-fou du texte du savoir* ; en quelque sorte, ce qu'il y a à apprendre est le produit de ce qui est vécu dans le cours de la situation²⁹. Rien ne détermine a priori l'évolution de la situation. L'enseignant^o doit assurer en temps réel des ajustements, par des questions ou des incitations

²⁹ Pour mémoire, une situation n'est pas une séance de classe, ou un moment dans une séance, elle peut s'étendre sur plusieurs jours, plusieurs mois, voire des années comme dans le cas de l'étude de Carolyn Maher.

(Ball et Bass, 2003, p. 42), pour maintenir le cap souhaité alors que les élèves gardent à chaque instant la capacité d'engager des initiatives non anticipées et divergentes.

Un autre élément critique, peu discuté, est la tâche proposée aux élèves. Son choix répond à des critères généraux d'accessibilité et de potentiel de créativité. Elle se présente sous la forme ouverte d'une question à laquelle il n'y a pas de réponse immédiate qui se trouverait, par exemple, dans le répertoire de connaissances et de procédures réputées disponibles pour la classe. Il est attendu que la tâche suffise à *susciter par elle-même* l'amorçage du processus de recherche et son maintien. La séquence des événements qui accompagnent sa réalisation n'est pas déterminée. La réception de la tâche dépend, outre son énoncé, de plusieurs facteurs dont la manière avec laquelle l'enseignant assure la dévolution, et la signification que les élèves lui attribuent. La question de la validation a pour origine le contexte social de la classe, son « atmosphère », qui induit la confrontation des solutions et des arguments, ou des positions et significations. Si cette question n'apparaît pas naturellement, elle est suscitée par des relances de l'enseignant^o (e.g. Comment prouverais-tu que la réponse est juste ? – *ibid.*, p. 41).

Les observations sont prometteuses, elles mettent cependant en évidence un échec du projet initial. Poser des problèmes ouverts, demander aux élèves d'expliquer leurs idées ou de s'expliquer sur leurs raisons ne suffisent pas à assurer la construction d'une *base de connaissances commune* et la production d'une *norme sociomathématique*, les deux piliers de l'approche IBL de la validation (Ball et Bass, 2003, p. 42-43).

En recherchant la rupture avec les normes de l'enseignement magistral, l'approche IBL met en évidence un ensemble d'obligations qui sont autant de contraintes sur l'acte d'enseignement (Arsac, Balacheff, *et al.*, 1992 ; Ball, 1993 ; Herbst et Balacheff, 2009 ; Herbst, 2003). L'enseignant^o doit prendre rapidement des décisions pour réguler les interactions avec les élèves et entre les élèves dans le contexte de forte incertitude d'une situation sous déterminée. Les travaux de Patricio Herbst et Daniel Chazan (2011) sur la rationalité pratique de l'enseignant^o – ses raisons d'agir – dans le contexte ouvert de l'approche IBL, retiennent quatre *obligations professionnelles* : disciplinaire, personnelle, interpersonnelle, institutionnelle.

- *L'obligation disciplinaire* est celle de la *vigilance épistémologique*. Elle est la contrainte sur laquelle les recherches IBL pour la preuve affichent un résultat : la maîtrise des mathématiques par les enseignants^o est une condition nécessaire. Elles prennent position : la formation mathématique des enseignants^o doit être une priorité et être adaptée pour être un instrument de résolution des problèmes professionnels. Cette position est à l'origine des recherches sur le « Teacher Content Knowledge » (Loewenberg Ball *et al.*, 2008).
- *Les obligations personnelles et interpersonnelles* concernent des *principes éthiques et déontologiques* (respect, attention à l'élève comme personne). Elles prennent en compte le fait que ce qui peut convaincre un élève peut ne pas convaincre un autre, que certains peuvent être réticents à débattre, que la temporalité des apprentissages peut varier d'un élève à l'autre, que le débat de preuve peut engager des processus complexes de pouvoir, de relation à l'autre. Les échanges et les désaccords sur la preuve, entre les élèves ou entre les élèves et l'enseignant^o affectent la construction de la classe comme communauté apprenante (*knowing organisation*) et l'image que cette communauté a d'elle-même (Herbst et Balacheff, 2009, p. 42-44).
- *L'obligation institutionnelle* est celle que l'enseignant^o a vis-à-vis de *l'organisation scolaire* et, plus généralement, vis-à-vis de *la société*. Cette obligation contient aussi une part de responsabilité mathématique à l'égard des programmes et curricula, et elle a donc une interaction potentielle avec l'obligation disciplinaire.

La recherche dans le cadre théorique de l'IBL et celle dans celui de la TSD ont à la fois une proximité et une distance fondamentale.

- *La proximité* : la reconnaissance de ce que le sens de la connaissance construite par les élèves dépend de la capacité des situations à les amener à reconsidérer eux-mêmes, et à mettre en question, leurs conceptions et à problématiser les nouvelles connaissances.
- La distance :
 - *Le cadre de l'IBL* prend pour référence l'activité du mathématicien et postule de fait que la conjonction d'une situation-problème bien choisie et d'une liberté de principe donnée aux élèves suffisent à susciter un processus collectif propre à faire naître une problématique de la validation mathématique. En d'autres termes, parce que les élèves ont un comportement analogue à celui des mathématiciens^o, les procédures et connaissances qu'ils construisent seraient mathématiques.
 - *Le cadre de la TSD* a pour référence la connaissance mathématique, ses caractéristiques épistémologiques et sa raison d'être. Il postule l'existence de situations dont les propriétés problématisent la connaissance mathématique et dont la finalité favorise son appropriation.

Dans les deux cas l'enseignant^o a une fonction de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation. Il agit dans les limites de ses *obligations professionnelles* au risque d'être confronté à des dilemmes. Les différences que l'on peut observer sont la conséquence de la nature et des propriétés des situations mises en œuvre.

4. Épistémologie expérimentale de la preuve / Didactique

La conceptualisation de l'IBL est récente bien que ses racines historiques et philosophiques soient très anciennes. Elle dérive, dans les années 1990, de celle de l'apprentissage par problèmes en approfondissant la rupture avec l'enseignement magistral. L'IBL donne une orientation générale qui ne prend pas en charge la particularité des connaissances ou des compétences en jeu. En particulier, elle laisse ouverte pour l'enseignant la question de savoir *comment prendre en compte la spécificité disciplinaire et pratique de la recherche dans la discipline enseignée*. Pour cela, l'IBL pour les mathématiques doit inclure des principes et des outils spécifiques de la recherche en mathématiques (*mathematic enquiry* – Artigue et Blomhøj, 2013, p. 808).

Des projets commencés dans les années 1990³⁰, en France et en Italie, vont dans cette direction. Ils ne s'inscrivent pas dans le courant de l'IBL mais de fait ils en partagent les caractéristiques essentielles : autonomie de l'élève, interactions sociales, problèmes ouverts, débat de preuve. Leur problématique commune est *la recherche des conditions de la construction d'un rapport à la preuve en mathématique conforme aux règles de la discipline qui donnera, le moment venu, du sens à la démonstration*. Elle ne s'agit pas seulement de créer les conditions d'une activité mathématique, mais d'assurer la prise en charge de la question de la validation, c'est-à-dire la question de la preuve dans ce qu'elle a de spécifique des mathématiques comme discipline non comme activité. L'activité du mathématicien^o ne peut constituer une référence de celle de l'élève ; elles ne peuvent pas être de même nature, comme le souligne Deborah Ball (cf. § 2.2.). En revanche, les élèves comme les mathématiciens^o sont confrontés aux contraintes ontologiques et

³⁰ Voir aussi les synthèses de : Arsac, 1988 ; Georget, 2009.

épistémiques des mathématiques. Gilbert Arsac a témoigné d'une façon très simple et très claire de la nécessaire prise de conscience de la distinction entre activité mathématique et discipline mathématique ; c'est-à-dire le respect des règles de raisonnement, au sens de Duval, en mathématique.

Ayant un peu fréquenté l'histoire grecque, j'avais retenu que la démonstration est en somme une forme du débat démocratique dans la société grecque, et je m'attendais à voir la démonstration surgir spontanément du débat des élèves ! Il y a longtemps que je souris de cette naïveté, mais il vaut la peine de souligner aujourd'hui le fait suivant : si les règles de la démonstration mathématique ont commencé à être fixées par les Grecs, ceux-ci ont remarqué un phénomène extraordinaire : il existait un domaine et un seul où l'on pouvait conclure sans appel à la vérité d'un énoncé. Autrement dit, les règles du raisonnement mathématique sont bien propres aux mathématiques. (Arsac, 2018)³¹

Il vaut effectivement la peine de réfléchir aux implications de cette remarque. La réflexion de Deborah Ball et Hyman Bass (2003) sur les déceptions de ces espoirs « naïfs » a conduit à une recommandation pour la formation mathématique des enseignants. La remarque de Gilbert Arsac conduit à reconsidérer les situations ; c'est ce qu'il fait à la fin des années 1980 (cf. et 4.4.).

Les situations IBL sont conçues pour que les élèves travaillent sur un problème de façon indépendante de l'enseignant^o. Mais, dans les faits, ce principe d'autonomie est contredit par son action constante. Constante et nécessaire. Cette contradiction est indépendante de sa compétence, elle est inscrite dans ses obligations professionnelles. Pour la lever, il faut revenir sur la situation, la place et le rôle de chacun dans la classe, et les raisons mathématiques de l'action.

Les travaux ci-dessous relèvent de cette problématique. Ils ont en commun de rechercher les conditions de l'apprentissage de la preuve *et* de travailler le concept de preuve en mathématiques dans cette perspective. Ils s'inscrivent ainsi une *épistémologie expérimentale*³² de la preuve.

4.1. La didactique des domaines d'expérience

L'expression « Didactique des domaines d'expérience » a été forgée par Paolo Boero pour nommer une approche qui conçoit des situations d'apprentissage dans lesquelles des *situations familières* sont le socle de la construction de *concepts scientifiques* et des problèmes associés. La relation entre les deux ordres est dialectique. Cette approche a sa source dans le paradigme vygotkien de la relation entre concept quotidien et concept scientifique (Boero *et al.*, 1995) qui met en avant le rôle de la relation enfant-adulte et celui du langage.

Cette approche s'est construite sur les concepts de *domaine d'expérience* (Boero et Douek, 2008), de *discussion mathématique* (Bartolini Bussi, 1996) et de *médiation sémiotique* (Mariotti, 2009). Les travaux entrent dans le cadre de la *recherche pour l'innovation* qui implique l'enseignant^o comme chercheur^o au sein d'une équipe académique qui développe des concepts théoriques et des moyens de modélisation grâce au et pour le travail dans la classe (Arzarello et Bussi, 1998, p. 244 ; Boero *et al.*, 2009, p. 62). Ils s'inscrivent dans un temps long, de deux à trois ans.

³¹ Notes d'une contribution à la célébration du cinquantenaire de l'IREM de Lyon, reprises dans la *Brève 196* de l'IREM de Lyon.

³² On se souviendra que l'expression épistémologie expérimentale des mathématiques, suggérée par Jean-Louis Ovaert, fut envisagée pour désigner notre domaine de recherche avant que l'expression didactique des mathématiques ne s'impose (Brousseau, 1975).

Un domaine d'expérience est un domaine d'activité socialement pérenne dans lequel s'organise et se développe une dialectique des connaissances communes et des connaissances scientifiques (Boero et Douek, 2008, p. 100). La didactique des domaines d'expérience a pour but « de rendre systématique le raisonnement, la justification, l'argumentation et l'effort d'expression. » (*ibid.*, p. 108). Plusieurs aspects tels que l'autonomie de l'élève, la place de la discussion, le rôle de l'enseignant, et la visée d'acculturation à la pratique des mathématiques apparentent ces recherches à l'IBL. En particulier, elles font l'hypothèse de l'émergence de normes sociomathématiques ou « *règles de rationalité* qui s'établissent graduellement et autorisent à soutenir, modifier, préciser ou rejeter les conjectures proposées » (*ibid.*, p. 109, mes italiques). Elles s'en distinguent par la prise en charge de la spécificité des mathématiques en retenant des situations-problèmes qui ont un caractère théorique – dans une mesure adaptée aux élèves – et la thématization de l'argumentation par l'usage de narration de la construction de la preuve. L'expression écrite tient une place particulière :

In the story narration, it should become clear that students recognize the involved lines of argumentation, their possible hierarchical relations, and their role in the logical combination that produces the proof. Thus, narration should make clear students' teleological aims. At this level, communication efforts should not yet be subject to production rules for mathematical texts, but instead should respond to the need of mutual understanding. (Boero *et al.*, 2010, p. I-17).

Elle facilite le passage d'argumenter dans la dynamique du débat à l'argumentation comme production structurée et analysée. La narration de la construction de la preuve³³ structure les échanges. Elle est un catalyseur de la conceptualisation sur le mode scientifique et de l'acculturation aux mathématiques. Le travail de rédaction est demandé à deux moments :

- après un débat, chaque élève doit produire un texte sur le but et la structure de la discussion, pour susciter l'intériorisation et la réorganisation des idées ;
- une synthèse collective clôt la séquence pour produire un texte collectif que chacun copie dans son cahier.

L'enseignant^o structure la discussion, il insiste sur la qualité de l'expression, il favorise la prise de conscience des règles du raisonnement et des liens entre les connaissances en prenant en compte la distance entre les comportements observés et ceux attendus (Boero *et al.*, 2010, p. I-12). *Le texte est un objet* qui ancre les échanges auquel, dans le temps, se rattacheront les règles de rationalité et un modèle d'écriture, c'est-à-dire une explicitation des normes sociomathématiques.

Le travail sur la langue est une caractéristique de la didactique des domaines d'expérience, et plus généralement la médiation sémiotiques dans laquelle la construction des connaissances est considérée comme une conséquence d'une activité dans laquelle les signes émergent et évoluent dans l'interaction sociale (Mariotti, 2009, p. 428). Cette médiation est permise par l'égal accès des élèves et de l'enseignant^o à un domaine d'expérience partagé. Ce domaine et la tâche associée permettent à l'enseignant^o des interventions (e.g. retour à la tâche, focalisation)³⁴ pour gérer l'évolution de la séquence en minimisant la rupture du contrat de neutralité.

³³ "Story narration of proof construction" (*ibid.*).

³⁴ "back to the task [...] teacher's interventions aiming to reconstruct the context of the task" (*ibid.*, p. 434). « Focalization [...] all teacher interventions where in a more or less explicit way students' attention is directed on particular aspects of their experience (past or present). » (*ibid.*, p. 435).

4.2. Situations de recherche pour la classe

Les travaux du projet *Situations de Recherche pour la Classe* (SiRC) ont pour objectif de préciser les conditions d'une pratique de la *démarche de recherche*³⁵ et d'apprentissage des savoirs transversaux associés parmi lesquels argumenter, définir et prouver. Plus fondamentalement, il s'agit de modifier le rapport des élèves aux mathématiques en leur donnant l'opportunité de *faire vraiment des mathématiques* (Grenier, 2009, p. 162), et pour cela de leur faire vivre dans le contexte scolaire *l'expérience scientifique du mathématicien*³⁶. Ces objectifs suggèrent une proximité avec l'approche IBL, cependant le cadre théorique utilisé, la TSD, marque l'écart.

La recherche de SiRC utilise les concepts de *situation didactique*, de *situation adidactique*, et de *milieu* pour son rôle constructeur de la situation adidactique. Rappelons que le rôle du milieu, au sens de la TSD, est d'être un antagoniste mathématiquement pertinent et régulateur de l'action de l'élève. Il assure la viabilité du caractère adidactique de la situation³⁷, c'est-à-dire la mise en retrait de l'enseignant qui est une condition d'une activité *vraiment mathématique*. Du point de vue théorique, ce retrait est une conséquence de propriétés intrinsèques de la situation, non l'application d'un principe a priori : les mécanismes régulateurs sont des propriétés de la situation, ils assurent la viabilité du retrait de l'enseignant^o soit, en pratique, la robustesse de la dévolution dans les cas où l'enseignant^o se doit d'intervenir (Arsac *et al.*, 1992).

Une SiRC se déroule sur plusieurs séances ; l'ouverture du temps est nécessaire à l'entrée dans la recherche et à son développement. Elle alterne des activités en petits groupes et des débats en séance plénière. Elle est initiée par la « mise en scène » d'une interrogation qui répond aux critères déjà évoqués : accès facile, pas de réponse immédiate mais des stratégies possibles quel que soit le niveau, des conjectures assez évidentes qui amorcent le processus de recherche. Cependant, la problématique à l'origine des questions est proche de celle de recherches en mathématique actuelles en mathématiques ; par exemple, en mathématiques discrètes, les problèmes de polyominos et de pavages (Gravier et Ouvrier-Buffet, 2022 ; Grenier et Payan, 2002, p. 191-192). Le milieu pour la résolution est constitué d'objets matériels manipulés selon les règles d'un jeu formels (au sens où ces règles de manipulation sont indépendantes de la nature physique des objets). Ce choix permet d'éviter les difficultés des références dites familières qui induisent des « bruits » de signification (par ex. le dilemme de choix de la situation, cf. sec. 2.2). La recherche des élèves puise sa dynamique dans la *dialectique entre réflexion théorique et manipulation d'objets* qui a une fonction d'objectivation lors des débats contradictoires (telle est la fonction du milieu dit antagoniste du sujet). Enfin, chaque groupe d'élèves tient un « cahier de recherche » (*ibid.*, p. 165).

Plus que de faire vivre une situation de résolution d'un problème, une SiRC a pour finalité de *faire naître un enjeu de vérité* attaché à la transformation d'un énoncé en une conjecture, et de donner du sens à la problématique de la preuve. Ainsi, cette approche accepte-t-elle la *possibilité de non-fin* : la situation peut être close sans qu'une réponse ait été apportée, le problème peut même totalement changer dans le cours de la recherche. Cette position permet de clore la SiRC sur une situation ouverte, son objectif est

³⁵ EDUSCOL, 2009 ; cette référence a été confirmée en 2016.

³⁶ Cet objectif met ce projet dans la filiation des projets Math.en.Jean (depuis 1985) puis Math à Modeler (depuis 2003).

³⁷ La situation de référence est la situation d'agrandissement du puzzle (Brousseau, 1981/1998, p. 225/231).

atteint si *la question de la vérité est posée et partagée*, l'ensemble de la classe et chacun de ses élèves s'appropriant cet enjeu, c'est-à-dire faisant de la preuve ou de la réfutation l'objet du travail. La clôture d'une SiRC porte sur le bilan de l'activité mathématique : reconnaître le statut des raisonnements, préciser les stratégies et les types de preuve, distinguer ce qui est prouvé de ce qui ne l'est pas. La communauté scientifique se forme, elle est structurée sans pour autant être formalisée. Il n'y a pas d'institutionnalisation de ce qu'il faut retenir au-delà du constat partagé de l'activité vécue, il ne s'agit pas d'un manque mais de la conséquence du choix de rester hors les cadres formels de l'institution. *Il n'y a pas d'enseignement mais un processus d'acculturation.*

4.3. Didactique du débat scientifique en cours

L'idée du *débat scientifique en cours* est d'impliquer les élèves dans l'entreprise commune de construction d'une connaissance. Le débat et la résolution d'un problème sont des outils pour donner du sens à la connaissance objet du cours. La validation ne porte pas seulement sur la solution, elle est aussi celle de la connaissance associée que la preuve valide et relie à d'autres connaissances.

La didactique du débat scientifique *en cours*³⁸ est une approche singulière. Elle ne s'apparente ni à un enseignement magistral, ni à l'IBL. Certes, elle partage des principes l'IBL : autonomie des élèves, authenticité des problèmes, principes éthiques et épistémologiques des mathématiques (Legrand, 1995b, 1995a), mais l'autonomie et sa contrepartie, la neutralité de l'enseignant^o, sont la conséquence d'une formalisation de la règle : « Cette neutralité de l'enseignant, qui est la clef de voûte du dispositif, est donc techniquement difficile à établir et ne peut se maintenir que dans un *contrat didactique explicite* qui permet de renégocier le contrat social coutumier. » (Legrand, 1993, p. 130 - mes italiques). Le contrat « coutumier » est, ici, celui de l'enseignement magistral.

L'enseignant^o a ainsi une place qui s'apparente à celle qu'il a dans le cours magistral, elle en diffère par la relation qu'il établit *explicitement* entre et avec les élèves. Les règles invoquées sont celles des « pratiques officielles » de la « communauté scientifique » (Legrand, 1986, p. 399). Nécessairement idéalisées, ces pratiques servent de référence pour jauger et réguler le débat. Sans elles, soit les élèves dériveraient soit les interventions de l'enseignant passeraient pour arbitraires (*ibid.*) :

C'est donc pour permettre aux élèves, d'abord d'entrer dans des problématiques scientifiques, ensuite d'éviter de trop déformer le sens des connaissances apprises et enfin d'accéder à une certaine forme d'autonomie de pensée, que le professeur propose à la classe ou à l'amphi d'adopter un mode de fonctionnement inspiré de la communauté des chercheurs. (Legrand, 1993, p. 131).

La situation est celle du cours dans sa configuration magistrale, mais pas dans l'esprit. Elle est structurée par le marquage social, l'enseignant^o d'une part et les élèves de l'autre, et par les règles explicites du débat au termes desquelles chacun accepte *le risque* de ce qu'il propose et assure *la sincérité* de l'engagement de ses arguments. Si donc l'enseignant est neutre, cette neutralité est celle d'un arbitre

³⁸ Cette approche a été initialement pensée par Marc Legrand pour résoudre dans l'enseignement supérieur le problème, auquel l'IBL cherche une solution pour les niveaux plus élémentaires, de donner du sens à des connaissances mathématiques le plus souvent réduites à la reproduction de techniques. Elle a été reprise et travaillée dans des groupes IREM qui l'ont étendue aux enseignements du collège pour apporter une solution au problème de l'apprentissage de la démonstration (Legrand, 1986 ; Legrand *et al.*, 2011).

dans un jeu dont les règles sont dites et auquel les élèves acceptent de participer en connaissance de cause :

À notre sens, c'est au professeur de donner un statut scientifique à l'erreur dans les phases de recherche, c'est au débat de faire à la longue la preuve de son efficacité didactique : montrer à la "classe" ou à "l'amphi" que ceux qui interviennent en prenant le risque d'une plus grande implication personnelle s'offrent à eux-mêmes et offrent aux autres des occasions de comprendre en profondeur les mathématiques, occasions qu'ils auraient rencontrées avec une moindre intensité et qui dans bien des cas leur auraient totalement échappé au cours d'échanges didactiques moins aventureux. (*ibid.*, p. 124).

Livrés à eux-mêmes les élèves se perdraient dans les discussions, « il faut bien que quelqu'un conduise le groupe social classe ou amphi, afin d'éviter que le débat ne s'enlise dans un forum où chacun crierait plus fort que l'autre » (*ibid.*, p. 129). L'enseignant^o utilise le tableau pour limiter et canaliser les échanges, et garder une chronique des idées importantes vers lesquelles revenir. Par ailleurs, les élèves peuvent, au fil des échanges, ne plus se comprendre ou se croire à tort d'accord ou se mettre d'accord sur des positions mathématiques inadmissibles. L'enseignant^o a ainsi, comme dans l'approche IBL, à gérer un équilibre délicat entre la liberté qu'il laisse aux élèves et la contrainte de sa responsabilité vis-à-vis du savoir à enseigner – dilemme inhérent à l'IBL. Le contrat didactique explicite avec les élèves limite cependant la difficulté en lui donnant deux référents « objectifs » : les mathématiques et les règles du débat.

Le choix des problèmes répond aux exigences, communes aux approches dans les cadres IBL et TSD, d'équilibre entre simplicité et complexité pour faciliter l'engagement des élèves et obtenir des productions originales qui susciteront les discussions et les efforts pour prouver ou réfuter une proposition.³⁹ Il s'agit ici de problèmes de modélisation, dans un domaine concret ou familier, choisis pour mettre en tension la logique dite du quotidien⁴⁰ et la logique mathématique, et ainsi provoquer la prise de conscience de leurs différences. La modélisation est en elle-même un problème dont la résolution est discutée, mais elle n'est pas, dans le référentiel de l'enseignant^o, l'objet de la situation. Aussi, si elle paraît trop complexe ou engage les élèves dans des impasses, alors il peut faire une proposition et relancer la situation.

La clôture de la situation consiste en deux types d'institutionnalisation :

- d'une part, la reconnaissance de la connaissance qui est l'objet du cours comme solution d'un problème mathématique qu'il a fallu détacher de la modélisation qui l'introduit et exprimer dans les termes du savoir.
- d'autre part, la reconnaissance des principes partagés de validation. Une part importante d'entre eux sont des méta-connaissances par nature implicites et donc complexes à institutionnaliser (*ibid.*, p. 151).

4.4. Situations d'initiation au raisonnement déductif

La « pratique du problème ouvert » appartient à un courant d'innovation pédagogique que l'on peut rattacher au courant international des recherches sur la résolution de problème du début des années 1980. Cette approche est portée en France par l'IREM de Lyon qui y voit une « technique

³⁹ À cela s'ajoute, ici, le besoin de productions qui soient en rapport avec l'objet du cours.

⁴⁰ Ou logique naturelle.

pédagogique » qui peut être utilisée pour « placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur^o (Arsac et Mante, 1983, p. 7). Il ne s'agit pas d'enseigner mais de mettre les élèves au contact d'une science vivante : « la pratique de la recherche de problèmes apprend d'abord ce que sont les mathématiques (même si elle apprend aussi des mathématiques) » (*ibid.*, p. 7 et 10). L'enseignant^o n'a pas de rôle particulier sinon de proposer un problème et d'accompagner les élèves en leur laissant toute latitude, même si une solution n'est pas trouvée dans le temps imparti. Il s'agit d'une *recherche pour l'innovation* (Boero *et al.*, 2009) : ses résultats et propositions doivent pouvoir être utilisés par tout enseignant^o dans sa classe.

L'essentiel repose ici encore sur le problème. La répétition des observations conduit à une caractérisation de ceux susceptibles de fonctionner : énoncé court qui n'induit pas une méthode ou une solution, les élèves ont assez de familiarité avec le domaine conceptuel de l'énoncé. Une autre exigence est que le problème permette assez de propositions pour que, même s'il n'est pas résolu dans le temps imparti, il y ait un échange riche lors du bilan des avancées pour les discuter et les comparer (nous retrouvons l'essentiel des principes IBL).

Lors de cette clôture de la séquence, l'enseignant^o guide le débat en sollicitant des arguments, voire des preuves et des contre-exemples. Iel initie ainsi la prise de conscience de la nature du *débat mathématicien*. Cette phase de conclusion est fragile : l'enseignant^o s'attache à impliquer les élèves dans le respect du principe de leur autonomie mais sans renoncer à sa responsabilité professionnelle et mathématicienne.

La rédaction d'affiches qui présentent des propositions est un moyen de régulation des échanges, notamment en demandant l'attention aux principes d'écoute et de respect mutuel. Mais si les règles d'un bon comportement collectif peuvent être comprises sinon suivies, celles du débat mathématicien n'émergent pas spontanément : elles n'ont pas d'analogues dans la vie quotidienne dans laquelle la question de la vérité d'un jugement n'a pas de réponse aussi radicale qu'en mathématique – la pratique peut s'accommoder d'un énoncé *vrai en général*.

Au milieu des années 1980, prenant en compte l'introduction dans les programmes de l'initiation au raisonnement déductif dans les premières années du collège, les travaux évoluent vers une recherche sur ce thème : « il s'agit de rendre l'élève progressivement capable de contrôler par lui-même la vérité d'un énoncé mathématique. » (Arsac, Colonna *et al.*, 1992 ; Arzac et Mante, 1996, p. 21). Le cadre reste celui d'une recherche pour l'innovation : « Proposer des situations de classe utilisables dans le cours d'une classe ordinaire, effectivement testées dans ces conditions, et permettant de fournir une réponse à cette demande du programme. » (*ibid.*, p. 22). L'approche se structure, elle est de nature expérimentale et adopte le cadre théorique et méthodologique de la TSD.

Les acquis des recherches sur le problème ouvert et l'étude épistémologique du rapport entre raisonnement quotidien et mathématique, conduit à postuler a priori que les métarègles du raisonnement déductif ne seront pas entièrement construites et adoptées collectivement par les élèves (*ibid.*, p. 24), notamment les trois suivantes : (1) *un énoncé est soit vrai soit faux*, (2) *un exemple ne suffit pas à valider un énoncé*, (3) *un contre-exemple suffit à invalider un énoncé*. Les travaux se concentrent sur l'étude des situations favorables à leur apprentissage.

La situation fondamentale pour l'initiation au raisonnement déductif est celle d'un débat dont l'enjeu est l'explicitation de l'accord sur *des règles assujettissant la validité* d'un énoncé. La construction des situations

adidactiques correspondantes ne pouvant, a priori, assurer que ces règles seront formulées, ni qu'un consensus acceptable au regard des mathématiques sera trouvé, l'hypothèse travaillée est que les conflits lors du débat justifieront l'intervention de l'enseignant^o et donneront du sens aux règles qu'il édictera. « Cela suppose que l'enseignant ne présentera ces règles qu'après la prise de conscience par les élèves de la difficulté de conclure le débat » (*ibid.*, p. 23). Le problème doit être choisi pour rendre très probable ce débat, trois conditions sont retenues (*ibid.*, p. 25) :

- les élèves ne doivent pas tous produire la même solution au problème posé ;
- des réponses différentes aux questions ci-dessus entraînent des solutions différentes au problème, le résultat exact ne doit pouvoir être obtenu que par l'utilisation des règles dont l'apprentissage est visé ;
- les élèves doivent percevoir que la différence entre les solutions est liée aux techniques de validation utilisées.

La séquence des situations est construite pour amener au débat plénier, un scénario précis est proposé (*ibid.*, p. 26). Il mérite que l'on en retienne le détail :

- formation de groupes (4 à 5 élèves)
- distribution de l'énoncé
- recherche individuelle (5 à 10 minutes) – appropriation initiale
- recherche en groupe (environ 45 minutes) – travail pour *une* solution commune
- production d'une affiche (résultats et explications pour convaincre)
- ramassage des affiches, ordonnancement et étiquetage.
- ouverture du débat avec la première affiche (A).
- travail de chaque groupe sur l'affiche A (10 minutes)
- jugement de chaque groupe énoncé par un porte-parole sous l'une des deux formes suivantes :
 - « Nous sommes d'accord avec cette affiche car ... »
 - « Nous ne sommes pas d'accord avec cette affiche car ... »

[...]

Ce scénario se poursuit en faisant expliciter les accords et les désaccords argumentés, individuels ou collectifs, pour chacune des affiches. L'enseignant^o invite les auteurs à répondre aux remarques ou objections sur le même mode de justification que celui de leur proposition. Une fois exprimées, ces positions sont mises en débat.

Les observations, est-il rapporté, confirment qu'au fil des débats pléniers, les règles pragmatiques du raisonnement quotidien suscitent des désaccords qui les mettent en question. Les élèves les constatent mais ne parviennent pas à les dépasser, ils campent sur leurs positions. L'enseignant^o formule le motif des désaccords puis édicte la règle qui tranche le débat.

Deux observations robustes sont avancées (Arsac, Colonna *et al.*, 1992, p. 187-188 ; Arsac et Mante, 1996, p. 22-23 et 40-42) :

- les élèves s'approprient majoritairement les règles,
- les élèves évoquent spontanément les situations vécues comme référence ; elles sont utilisées comme telles par l'enseignant^o

Cependant, la qualité du débat n'est pas assurée, elle dépend de la nature des solutions proposées. Enfin, la *variété des solutions*, parce qu'elle appelle la recherche de critères de comparaison et de choix, et

le temps, parce qu'il est nécessaire à la convergence et au consensus, sont deux conditions d'émergence d'une norme sociomathématique de la preuve.

4.5. Des principes partagés

Les travaux de cette section ont pour origine la même volonté de permettre aux élèves de *faire vraiment des mathématiques*, en reprenant l'expression de Denise Grenier, ce qui implique leur autonomie intellectuelle et corrélativement la neutralité de l'enseignant^o. Ces deux conditions sont communes avec l'approche IBL, mais la façon dont la seconde est satisfaite est significativement différente. Dans le cas de l'approche IBL, la neutralité est un principe inscrit dans le rôle de l'enseignant, animateur et modérateur de l'activité individuelle et collective. Dans le cas des approches regroupées sous le thème épistémologie expérimentale, elle est recherchée comme *conséquence de la conception de situations* qui favorisent la dévolution d'un enjeu de vérité et de responsabilité. La recherche porte sur les caractéristiques de ces situations et non sur l'enseignant^o même lorsque son rôle est magistral comme il l'est dans le modèle de la *didactique du débat scientifique en cours*.

L'enseignant^o ne pouvant s'affranchir de ses responsabilités mathématiciennes et institutionnelles, le dépassement de cette limite est recherché de deux façons : l'intégration de l'enseignant-mathématicien^o à la situation et la relaxation de la contrainte institutionnelle. Cette dernière est obtenue en acceptant des conclusions imparfaites et en ouvrant le temps (didactique des domaines d'expérience, SiRC), en édictant des règles du jeu et installant l'enseignant^o dans un rôle d'arbitre (débat scientifique en cours), ou encore en intégrant un principe robuste d'institutionnalisation (initiation au raisonnement déductif).

La situation fondamentale pour donner du sens à la preuve est celle de la prise de décision collective sur la validité la solution d'un problème ou de l'énoncé d'une conjecture. Le texte, celui de la solution ou de l'énoncé, est l'objet du jugement. Le débat est le moyen de la décision et de son appropriation collective, il a pour enjeu l'acceptation du texte – c'est-à-dire de sa validité sur la forme et le fond au regard d'une norme probatoire partagée. Remarquons que cette situation n'est pas une situation mathématique, ou de modélisation mathématique, au sens canonique du concept de situation fondamentale de la TSD. C'est une situation de débat scientifique dont le caractère mathématique vient du choix du problème dont les caractéristiques rendent le *débat* potentiel en permettant l'engagement de tous les élèves et l'initialisation de sa résolution dans des directions multiples dont la comparaison motive les échanges critiques. La nature mathématique du débat est potentialisée⁴¹ par la capacité du problème à évoluer vers un problème mathématique (théorique) parce qu'il est introduit par un énoncé mathématique (initiation au raisonnement déductif), ou par un milieu formel tangible (SiRC), ou encore parce qu'il induit de façon assez immédiate une modélisation mathématique (didactique des domaines d'expérience, débat scientifique en cours).

L'écriture demandée d'un texte public exige une attention à la langue, à la cohérence et au sens qui engagent une dialectique de la formulation plus exigeante que celle de la communication orale prise dans la dynamique parfois vive du débat. Quelles que soient les modalités, ces textes participent à la création d'une mémoire personnelle (narration du raisonnement, cahier de recherche) et la création d'un objet commun (affichage des argumentations).

⁴¹ L'idée de potentiel est développée dans les travaux de Jean-Philippe Georget (en particulier 2009, p. 79).

5. Les situations de preuve

Les objectifs des recherches que j'ai réunies pour ce cours sont proches, ils se démarquent nettement les uns des autres par leur options épistémologiques (i.e. la reproduction de l'activité du mathématicien versus détermination par les savoirs), leurs cadres théoriques et leurs méthodes. Au-delà de ces différences que l'on pourrait parfois considérer comme des complémentarités, ces travaux portent sur trois grandes catégories de questions : celle de la spécificité de la preuve comme savoir disciplinaire, celle de la nature de l'argumentation mathématique en amont de la démonstration, celle des caractéristiques des situations de preuve et donc de l'objet et de la régulation du débat nécessaire au partage d'une norme probatoire dans la classe de mathématique.

Les réponses à ces questions sont nécessaires pour résoudre les problèmes didactiques que soulève le travail de l'enseignant^o, pour donner une raison d'être à l'engagement des élèves et pour leur permettre de reconnaître les *leçons à tirer* de leur activité (Brousseau, 1986/1998, p. 49). Ce sont ces dernières qui seront l'objet de l'institutionnalisation de la norme.

J'aborde ces questions dans les sections qui suivent en précisant d'abord le concept d'argumentation mathématique, puis celui de situation de preuve.

5.1. Prouver : une compétence

Les programmes et textes officiels, et leurs divers documents d'accompagnement, en France et internationalement, identifient « prouver » comme une *compétence*. Son statut épistémologique est celui d'un *savoir transversal* (Grenier et Payan, 2006) dont une caractéristique est d'être engagé dans la construction des savoirs disciplinaires et d'être indépendant de savoirs spécifiques (par ex. raisonnement mathématique), voire de la discipline elle-même (par ex. conjecturer).

Une compétence s'acquiert par la pratique de la discipline, elle doit être apprise bien qu'elle échoue à être enseignée explicitement (par ex. Schoenfeld, 1987). C'est le sens de la question de Gilbert Arzac (1988) : *peut-on enseigner la démonstration ?*

La réponse serait positive s'il ne s'agissait que de s'en tenir à l'apprentissage d'un style de rédaction, elle est négative dès lors qu'il s'agit du sens de la validation en mathématique. En résumé, écrit Daniel Lehmann, quelque regret qu'on puisse avoir qu'il n'y en ait pas de plus sécurisants, flair, tact et discernement sont les principaux critères de validation en mathématiques. Il conclut :

Il ne va pas de soi que l'apprentissage de la démonstration doive être institutionnalisé. Cette institutionnalisation peut présenter des dangers, en privilégiant un discours ayant pour sujet la démonstration (définition, exemples, ...) au détriment de la signification de celle-ci en tant qu'instrument d'acquisition du savoir. Ce qui est important, c'est que les élèves apprennent à faire des mathématiques, c'est-à-dire apprennent à chercher et si possible à résoudre les problèmes qui se posent à eux ou les problèmes qu'on leur pose et qu'ils auront bien voulu s'approprier. Il faudra bien, pour cela, qu'ils comprennent ce qu'est une démonstration [ce qui ne veut pas dire qu'ils sachent en donner une définition, est-il ajouté en note] et qu'ils apprennent à en faire. (Lehmann, 1989, p. 15-16).

Gilbert Arzac résume cette position par : la démonstration ne doit intervenir que comme outil et ne doit donc pas faire l'objet d'un enseignement explicite (*ibid.*, p. 262).

Le mot démonstration a en fait deux significations dans le texte de Daniel Lehmann, un type de texte d'une part et d'autre part une preuve en mathématique. En affirmant, au début de sa note, que preuve

et démonstration sont synonymes, il se prive d'une distinction entre l'objet mathématique et sa signification. Plus de trente ans après, le mot preuve est adopté par les institutions permettant d'émanciper la preuve dans la classe de mathématique de la démonstration-outil au sens de la forme qui sera fixée à la fin du cycle 4.

Si la *compétence* échappe à l'enseignement magistral, il faut pour en permettre l'apprentissage créer des situations qui suscitent *une activité* dans laquelle *sa manifestation* puisse être observée, désignée et reconnue pour telle⁴². *Compétence et activité sont indissociables, comme le sont connaissance et problème*. La compétence est la décomposition et l'organisation de l'activité pour mobiliser des connaissances opératoires efficaces dont une grande part est de l'ordre du concept-en-acte (Vergnaud, 1990, 2011).

Rappelons, pour ce qui nous intéresse ici, qu'il y a, à l'origine de l'activité de l'élève, un problème à résoudre. À ce point, il s'agit d'une activité individuelle (voire au sein d'un petit groupe assimilable à un sujet épistémique individuée) dont le produit est une explication, acquise pour l'individu, de la validité d'une solution ; cette explication est personnelle et temporellement située. La problématique de la preuve est celle de sa transformation en une argumentation dans une transition privé-public, qui permettra la qualification du produit individuel en un bien collectif aux termes d'un accord explicite. Le corollaire est la dépersonnalisation et éventuellement l'institutionnalisation – acte de détachement du contexte et du temps – de l'argumentation qui devient une preuve.

L'ensemble de ces processus individuels et sociaux mobilise divers niveaux de langage et divers registres sémiotiques pour produire les textes explicatifs ou argumentatifs, et pour instrumenter le débat probatoire. Le langage a « une fonction de communication, une fonction de représentation, une fonction d'aide à la pensée et à l'organisation de l'action. » (Vergnaud, 1990, p. 168). Il est fonctionnellement constitutif de la construction et de l'institution d'une preuve.

Pour cette raison, sans la réduire à cela, je propose de caractériser la compétence nécessaire à la preuve et au débat en mathématique en aménageant le modèle de la compétence linguistique selon quatre composantes (Cuq et Gruca, 2017, p. 245) :

- *Composante linguistique* : connaissance des règles et des structures grammaticales, du vocabulaire ;
- *Composante sociomathématique* : connaissance des règles partagées d'utilisation des formes linguistiques et sémiotiques en fonction dans la classe de mathématique ;
- *Composante discursive* : cohérence des types de discours en fonction de la situation de communication dans laquelle ils s'insèrent ;
- *Composante stratégique* : capacité d'utiliser des stratégies verbales et non verbales adaptées au débat mathématique.

Le débat mathématique est un instrument (outil-processus) pour la construction de la compétence mathématique, en particulier de sa composante sociomathématiques (reconnaissance et acquisition des critères de preuve), et de sa composante stratégique (construction d'une argumentation mathématique).

⁴² Rappelons-nous que cette acception est commune aux formations métiers dans lesquelles ce sont essentiellement des gestes, des procédures et des savoir-faire qui sont enseignés.

5.2. Argumentation mathématique

Je reviens sur la définition de « raisonnement » de Raymond Duval (1992, p. 52) : le raisonnement est l'organisation de propositions orientée vers un énoncé-cible pour modifier sa valeur épistémique. Cette définition n'introduit pas de contradiction avec le choix des recherches IBL (cf. § 3.1.). Elle en limite la portée en projetant le raisonnement dans le plan du discours, celui des termes « proposition » et « énoncé ».

L'expression du raisonnement abouti est la matière d'un texte à l'appui de la validité d'un énoncé. Ce texte est une *argumentation* lorsqu'il est orienté vers l'acceptation par autrui (éventuellement soi-même) de la validité prétendue. Il est une *explication* lorsqu'il met l'énoncé cible en relation avec des énoncés dont la validité est acquise (*ibid.*, p. 40). Il est une preuve quand l'argumentation qu'il soumet est acceptée par une communauté individuée, c'est-à-dire par des individus réunis dans une circonstance donnée, à un moment donné, avec un projet commun de connaissance.

Le fait que l'expression d'un raisonnement soit une *argumentation peut être prétendu*. Le fait qu'une argumentation soit une *preuve doit être débattu et accepté*.

« Démonstration » désigne les preuves de la communauté mathématique, sans préjuger de leurs formes qui peuvent être différentes de celle héritée d'Euclide.

Il est fréquent de rencontrer des mathématiciens^o qui considèrent que les termes preuve et démonstration sont synonymes⁴³. Cette position n'est pas tenable dans une problématique d'apprentissage du CP à l'université. Un retour sur l'histoire permet de nuancer leur position :

Nolens volens, une preuve est teintée de rhétorique, car elle est un discours complet, qui est surtout d'adéquation à ce qu'il prouve et présente de ce chef un caractère interprétatif, alors qu'une démonstration peut être considérée comme un acte d'extériorité ou d'objectivation, quelque chose qui requiert le regard (l'objet est celui d'un sujet), mais un « voir » qui se suffit à lui-même, véritablement une « monstration » de la vérité de ce qui est en cause. (Dhombres, 2008, p. 61).

Nous pouvons retenir, sans créer de rupture indépassable avec les mathématiciens^o, que la démonstration est un outil dans un processus de construction des savoirs mathématiques par un acte collectif d'objectivation et de reconnaissance de ce qui les fonde. Cette reconnaissance ne tient pas à une norme discursive et linguistique particulière, c'est le sens de la position de Daniel Lehmann, elle résulte d'un accord au terme d'un procès de l'institution mathématique. La norme de la démonstration est un moyen de créer un référent commun de la critique et de régler ce procès. Sa nature est sociomathématique.

Sur le chemin de la connaissance la première étape est la formulation d'une *conjecture* pour laquelle celui qui l'énonce a de bonnes raisons de soutenir sa vérité. Le procès probatoire porte sur trois aspects : la formulation de son énoncé, le cadre d'une conception⁴⁴ dans lequel elle est prétendue, l'argumentation

⁴³ Cédric Villani m'a réaffirmé cette position à l'occasion d'un bref échange de courriels à propos du rapport Villani-Torossian sur l'enseignement des mathématiques (30 mars 2018).

⁴⁴ « Conception » est utilisé ici au sens du modèle cK Φ (Balacheff, 2019a).

qui l'accompagne. Ces composantes étant explicitées, l'énoncé mérite d'être reconnu comme une conjecture. Cette observation m'a conduit à proposer⁴⁵ une caractérisation de la conjecture :

Conjecture = {conception, énoncé, argumentation}

Cette forme a pour intérêt sa congruence avec la caractérisation de théorème sous la forme du triplet décrit par Maria-Alessandre Mariotti (cf. ce volume ; 1997, p. 180) :

Théorème = {théorie, énoncé, preuve}

Le rapprochement de ces deux représentations rappelle que l'argumentation devenant une preuve transforme la conjecture en *théorème* et relie le théorème à la *théorie*. Toutefois, l'idée de théorème est impropre aux niveaux élémentaires. En fait, même lorsque la démonstration est introduite, cette notion a un usage dans la classe restreint à ceux des énoncés dont l'institutionnalisation autorise les utilisations sans restitution de la preuve. Un théorème dans l'ordinaire de la classe de mathématique est un *énoncé vrai* qui mérite, du fait de son importance et de sa portée, l'intégration explicite à la théorie. L'enjeu de la validation est essentiellement la modification du statut épistémique d'un énoncé qui devient un *énoncé vrai*.

Il nous faut revenir aux termes propositions et énoncés utilisés par Raymond Duval. Ils dénotent *la mise en mots* d'objets de pensée. Il s'agit, d'une part, d'explicitations nécessaires au débat public de preuve, et d'autre part, d'instrumenter la pensée (Vergnaud, 1990, p. 158-159, 1991, p. 85). D'une façon générale, et donc a fortiori dans le cas de jeunes élèves, il est utile de distinguer dans la mise en mots ce qui est dit ou écrit – la phrase – de ce qu'elle représente – l'énoncé. Cette distinction, reprise ici de John Langshaw Austin⁴⁶, n'est pas faite dans l'usage courant sans que pour autant la communication en soit affectée mais cela masque le travail nécessaire. La *phrase*, objet linguistique complexe, est le produit d'un travail au cours duquel elle évolue pour être ajustée au mieux à l'intention de l'énonciation (adéquation sémantique) et être respectueuse des règles et structures grammaticales de la langue (correction linguistique). Ce travail se poursuit jusqu'à l'expression finale de l'argumentation.

La caractérisation d'un énoncé vrai⁴⁷, sur le mode de celle de théorème, serait :

Énoncé vrai = {base de connaissances, phrase, argumentation mathématique}

Les termes de ce triplet évoluent dans le cours des échanges (dialectique de la communication et de la formulation au sens de la TSD) jusqu'au point où une explication de la vérité est établie aux yeux du résolveur du problème, individuel ou collectif, et peut fonctionner au moins comme une argumentation pour les autres⁴⁸.

⁴⁵ Ref. in *La Lettre de la preuve* (Balacheff, 1999).

⁴⁶ "A statement is made and its making is an historic event, the utterance by a certain speaker or writer of certain words (a sentence) to an audience with reference to an historic situation, event or what not. A sentence is made up of words, a statement is made in words. A sentence is not English or not good English, a statement is not in English or not in good English. Statements are made, words or sentences are used. We talk of my statement, but of the English sentence (if a sentence is mine, I coined it, but I do not coin statements)." (Austin, 1950, p. 3).

⁴⁷ J'utilise ici le vocabulaire commun, mais « valide » serait plus exact.

⁴⁸ Voire comme une explication, mais ce n'est pas d'emblée le cas – repensons à l'exclamation fameuse de Cantor : je le vois mais je ne le crois pas.

Ce que peut être la base de connaissances doit être explicité. Les premières recherches sur l'apprentissage de la preuve ont été centrées sur des questions de logique et de structure discursive, puis sur les processus probatoires dans le contexte de la résolution de problèmes. Elles ne prenaient pas en charge pleinement la nature théorique de la conjecture et de sa transformation en théorème⁴⁹.

Cette explicitation s'est imposée dans le cadre de la didactique des domaines d'expérience (cf. section 4.1.). Dans cette approche le travail de modélisation conduit les élèves à une étude *dans* le modèle (qui est un modèle mathématique) sans pour autant le leur signifier. Il faut pour cela détacher le procès de validation du recours aux contrôles exogènes par le référent, et avoir un accord sur le modèle – c'est-à-dire sur les connaissances que ce modèle assemble et institue. C'est le « taken as shared » des approches IBL (Cobb et Yackel, 1996). Reconnaître devoir s'en tenir aux contrôles endogènes au modèle est un acte initiateur de la constitution d'une norme sociomathématique.

Raisonnement *dans* le modèle, sans retour au référent, est une première introduction à une *activité théorique*. En effet, assurer la validité d'un raisonnement consiste alors soit à vérifier que les énoncés utilisés sont ceux acceptés lors de la construction du modèle, soit des énoncés issus d'un *raisonnement valide dans le modèle* ; décider de cette validité n'est pas autre chose qu'interroger la logique qui la sous-tend, ses règles et les conditions de leur utilisation (cf. par exemple Arzac et Mante, 1996, p. 33). Ce sont là les caractéristiques du raisonnement déductif. Pour autant, les argumentations avancées ne sont pas d'emblée conformes à la norme mathématique. À minima, elles doivent être acceptables au regard de la discipline, même si elles n'y ont pas le statut de preuves (Herbst *et al.*, 2009, p. 43). Ainsi en est-il, par exemple, du recours à un *exemple générique* ou celui à une *expérience mentale* (NB 1987) qui peuvent être admis aux niveaux élémentaires.

Si un modèle n'est pas une théorie au sens fort de ce terme dans la discipline, il l'est localement – en reprenant la formule de Hans Freudenthal (1971, p. 430) – au sens de *l'organisation locale des connaissances*. Pour cette raison, j'ai repris l'expression « base de connaissances » pour désigner l'ensemble organisé des connaissances d'origines souvent diverses qui sont au fondement de la modélisation. Établie par et pour la communauté de la classe, cette base de connaissances peut associer des savoirs scolaires, des connaissances-en-acte, voire des faits d'observation dont la légitimité est empirique. Elle doit être *instituée* pour exister comme ressource référente de l'argumentation (Ball et Bass, 2003).

En somme...

- Les conditions d'éligibilité d'une phrase au débat probatoire dans la classe de mathématiques seront sa conformité à l'éthique (sincérité, responsabilité), sa correction linguistique (vocabulaire et syntaxe), son adéquation sémantique (fidélité à l'objet de l'énoncé).
- La recevabilité mathématique d'une argumentation sera soumise à la satisfaction des conditions sur les phrases auxquelles s'ajouteront la correction formelle du texte (cohérence logique), sa congruence aux conceptions des élèves et enfin son ancrage dans la base de connaissances partagée.

⁴⁹ J'ai saisi cette idée assez tôt, mais sans en tirer toutes les conséquences : « D'élève-praticien, tout orienté vers la maîtrise d'un savoir-faire, on passe à l'élève-théoricien dont la justification de l'activité est celle de connaître. » (NB 1988, p. 65, 1990).

5.3. Dialectique de la validation et situation de preuve

La TSD a son origine dans la recherche de situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques en les faisant naître dans le creuset d'une *dialectique de la validation* (Brousseau, 1972, p. 436) dont l'aboutissement prend la forme de l'explicitation d'un accord collectif sur la vérité ou la fausseté d'un énoncé et sa reconnaissance formelle (l'institutionnalisation). Le concept didactique canonique correspondant est celui de *situation de validation*. Les concepts de *situation d'action* et de *situation de formulation* s'en déduisent en raisonnant sur les conditions nécessaires à une dialectique pertinente et efficace : disponibilité des conceptions que l'enseignant^o souhaite voir engagées, partage de moyens de communication langagiers et non langagiers qui instrumentent le débat contradictoire. Une autre condition est celle de l'autonomie des élèves en assurant une bonne plausibilité de l'aboutissement du processus dans un espace de possibles mathématiquement acceptables. Pour réaliser cette condition, la TSD dispose, d'une part, du concept de *milieu* dont les propriétés doivent assurer une régulation endogène propre à rendre minimale l'intervention de l'enseignant^o et, d'autre part, d'un *modèle de jeu de stratégie collectif* pour donner consistance à une *finalité* qui oriente l'activité des élèves.

Ce jeu est déterminé par le terrain concret ou abstrait sur lequel il se déroule, ses états et les règles de changement d'état, la spécification d'un état de bonne fin et les rôles des joueurs (Brousseau, 1986/1998, p. 82 sqq). La création d'un milieu objectif, réalité⁵⁰ tierce et antagoniste, sur le terrain de jeu est un moyen de régulation endogène qui objective les rétroactions (réfutation, évidence empirique). Le jeu régule l'action et détermine les raisons d'agir. Il doit se dérouler sans interventions de l'enseignant^o. Pourtant ces interventions peuvent être légitimes et nécessaires pour assurer le respect des règles qui pourraient être oubliées, malencontreusement non respectées ou transgressées.

Comme en droit où la loi écrite réclame un juge, *le jeu aux règles explicites appelle l'arbitre*. Ainsi, absent du jeu théorique (*situation adidactique*), l'enseignant^o fait partie du jeu effectivement joué (*situation didactique*) : il est garant du respect des règles mais indifférent aux stratégies – c'est en cela que l'activité des élèves est autonome bien que l'on puisse observer la présence active de l'enseignant. Le *contrat didactique* fixe les limites de la responsabilité des élèves-joueurs et de l'enseignant^o-arbitre.

La situation doit être conçue pour que chacun ait intérêt à jouer son rôle de façon sincère et efficace dans un contexte favorisant l'émulation plus que la compétition pour contribuer à la réussite collective. La dialectique de la validation prend la forme d'échanges contradictoires dont il est attendu qu'ils mobilisent des figures de rhétorique que les élèves utiliseront puis auxquelles ils renonceront (Brousseau, 1978/1998, p. 127). Ainsi, au sens de la TSD, « un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration » (*ibid.*) ; nous parlerions aujourd'hui de *recherche de la preuve*. C'est ce *problème de validation* que la situation doit faire émerger, et pas seulement le problème qui est sa raison d'être mise en avant lors de sa dévolution.

Les situations de validation sont un moyen efficace pour la transformation de construits individuels en un objet de connaissance partagé qui pourra être reconnu et institutionnalisé par l'enseignant^o. La validité de cette connaissance est ainsi attestée, mais le plus souvent en laissant implicite les fondements de cette décision. La preuve est alors un outil, elle n'est pas en elle-même l'enjeu de la situation, son objet.

⁵⁰ Matérielle ou immatérielle.

Cette limite restreint la portée de ces situations pour l'apprentissage de la preuve. Pour lever cette hypothèse, il faut accéder au « schéma de validation explicite », le mettre en question, en reconnaître les caractéristiques et les instituer, alors seulement « la petite société de la classe » peut prétendre être véritablement mathématique (Brousseau, 1986/1998, p. 112). Guy Brousseau utilise l'expression « situation de preuve » pour désigner les situations de validation ayant ces caractéristiques, mais il ne développe pas la modélisation dans cette direction et n'y revient pas. J'adopterai l'expression *situation de décision* pour désigner les situations de validation qui n'exigent pas l'explicitation d'un schéma de validation explicite, en réservant le nom de *situation de preuve*⁵¹ aux situations de validation dont l'objet est le problème de validation.

La conception de situations d'interactions sociales ouvertes, telles celles de l'approche IBL, repose sur l'hypothèse que la création d'un débat libre dans la classe suffirait à faire émerger le problème de validation. Ce n'est pas ce qui est observé, même lorsque le problème est choisi sur les critères du problème ouvert et lorsque la situation vérifie les caractéristiques d'une situation de validation incluant un milieu objectif.

La situation de preuve doit *donner aux élèves les raisons de s'engager dans une validation par les connaissances* (théorèmes et théorèmes-en-acte, règles d'inférence, contrôles) et non par les seules interactions avec le milieu objectif (mesurer, observer, manipuler, tracer, calculer). Pour cela, le milieu pour poser le problème de validation ne peut être seulement matériel, il doit *inclure* des connaissances (Margolinas, 1992, p. 42 sqq), au sens où elles obligent. C'est à cette condition que ce milieu est un système antagoniste du sujet : les connaissances constituent la référence (*savoirs locaux*).

La situation adidactique d'apprentissage de la preuve sera fondée sur le milieu de référence, qui associe milieu objectif et connaissances, et modélisera un jeu de stratégie collectif instrumentant et régulant la dialectique du vrai et du faux. Ce jeu transforme la preuve outil dans la situation de validation, en objet dans la situation de preuve.

5.4. Le débat, objet et régulations

La reconnaissance d'une argumentation comme preuve mathématique passe par une discussion critique, des échanges et des examens d'arguments pour et contre, des propositions d'explications, et un effort de réduction des conflits de fond (sur la connaissance, les structures argumentatives) ou de principe (sur les règles, les métarègles du travail mathématique). Il est fréquent, dans la littérature, de nommer débats ces discussions, je m'en tiendrai à cet usage bien qu'il souligne plus le conflit que la collaboration ou la coopération sur le procès de validation. Les règles de ce jeu, formulées ou induites, doivent amener les élèves à avoir un intérêt à :

- s'engager dans la dialectique des preuves et des réfutations ;
- partager les règles du débat probatoire mathématique ;
- transformer une construction personnelle en un bien public ;
- contribuer à une base de connaissances partagée (*savoirs locaux*).

La finalité du jeu est la publication d'une preuve, texte public accepté par l'ensemble des élèves et potentiellement acceptable par l'enseignant^o. La réussite de ce passage de la sphère privée, dans laquelle

⁵¹ Cette expression apparaît deux fois dans le recueil d'articles présentant la TSD (Brousseau, 1998, p. 43 et p. 111).

un élève ou un groupe d'élève est parvenu à une explication qui le convainc, à celle de la classe est la pierre de touche de la situation. La publication du texte est son institutionnalisation. Elle le constitue en un élément légitime de la mémoire commune dont la connaissance qu'il établit est une contribution au savoir de référence. Pour y parvenir, le processus est analogue à celui que suit le mathématicien^o. Il comprend plusieurs types d'activités en étroites interactions, celles du rapport dialectique entre formulation et validation, dont :

- *Rédiger* (créer les phrases et les organiser) ;
- *Valider le texte* (les contraintes de bonne forme) ;
- *Valider la preuve* (les critères de validité).

Les travaux rapportés dans ce cours vérifient plusieurs de ces conditions, rarement toutes. En particulier, les situations dans le paradigme IBL sont trop faiblement structurées pour être modélisées en termes de jeu de stratégie collective. Mais ces situations vérifieraient-elle toutes les conditions, dans leur esprit sinon à la lettre, la proposition que je fais ici doit être considérée avec précaution : *si une situation de preuve favorise a priori l'explication et la discussion des règles aux différents niveaux, les éléments théoriques sont assez solides pour l'assurer, sa mise en œuvre est incertaine du fait de la nature même de l'engagement humain dans l'interaction sociale* (image de soi, rapport aux autres, marquage social entre « bons » et « mauvais » élèves, manipulation des règles, etc.). Il ne peut être assuré que tous les élèves participeront à la construction d'un consensus, les désaccords peuvent résister aux tentatives internes de résolution des conflits sur les règles du débat.

Les arbitrages sont nécessaires, ils ne peuvent venir d'un milieu objectif, ni du jeu de stratégie collectif. C'est à l'enseignant^o qu'ils incombent pour confirmer ou rejeter au besoin l'usage d'une règle, rappeler à la règle, etc. Dans une certaine mesure iel peut agir en tant que mathématicien^o (apport d'un contre-exemple, demande de justification factuelle). Mais cela est-il possible lorsque ce qui est en question est le marquage d'un consensus (ce qui est partagé – Yackel et Cobb, 1996, p. 471) ou l'institutionnalisation d'une règle qui complètera la norme sociomathématique ?

Ces interventions paraissent impossibles sans une rupture unilatérale du contrat d'autonomie des élèves. Une solution, au demeurant classique, peut consister à s'appuyer sur ceux d'entre eux qui ont une légitimité particulière ; une *communauté de valideurs* (*ibid.*, p. 473, Tabach *et al.*, 2014, p. 196-197). Cela peut affaiblir la construction de la norme sociomathématique en tant que norme partagée parce que certains élèves pourraient se sentir tenus à l'écart ou enjoins de s'aligner. Cette difficulté peut être levée par un déplacement de son objet. En désignant dans un premier temps les problèmes que les conflits vécus par les élèves révèlent, l'institutionnalisation permet de « donner du sens aux règles institutionnalisées par le professeur, dans la mesure où elles leur permettront de trancher le débat dans lequel ils se sont engagés et qu'ils ne peuvent conclure. » (Arsac et Mante, 1996, p. 25). Cela suppose que l'enseignant^o ne présentera ces règles qu'après *la prise de conscience* par les élèves de la difficulté de conclure le débat. Ce faisant, iel peut agir explicitement en tant que représentant^o de la communauté mathématique.

On s'interrogera sur la possibilité pour l'enseignant^o d'être partie prenante de la situation de preuve sans risquer de rompre le processus d'appropriation des élèves (rupture du contrat de dévolution) dont il est postulé qu'il nécessite leur prise de responsabilité autonome, et sans hypothéquer ses responsabilités d'enseignant^o ? Claire Margolinas répondait de façon assez nette : « Le maître n'est pas un sujet mathématique, il n'est jamais dans une situation adidactique, mais toujours en situation

didactique. Réduire le maître à un sujet rationnel, en interaction avec un milieu objectif, ne me semble pas valable. L'analogie avec la théorie des jeux s'arrête là où le travail du maître commence. » (Margolinas, 1992, p. 120). Trois décennies plus tard, parce que les recherches, quelles que soient les approches, apportent suffisamment d'indications, je pense que nous pouvons reconsidérer cette position et revenir sur le problème qu'il nous faut résoudre, aussi bien dans le cadre théorique de l'IBL que dans celui de la TSD.

L'enseignant^o peut être un participant^o de la situation de preuve, s'il occupe dans cette situation une position de mathématicien^o, non comme partenaire du jeu mais comme *arbitre*. Ici a, dans les termes de la TSD, une place comme élément du milieu dans sa dimension sociale. L'arbitre peut avoir à juger des conflits, il contribue alors à les nommer et à les comprendre. Un conflit que les élèves ne peuvent régler au sein du jeu, peut être tranché de façon « objective » en s'appuyant sur la référence mathématique et en l'expliquant. Cet arbitrage est un moteur de l'évolution de la norme sociomathématique.

6. Conclusion : les élèves, les mathématiques, l'enseignant

En 1988, Gilbert Arzac posait la question : « La démonstration, telle qu'elle est dans les mathématiques, est-elle enseignable ? » (Arsac, 1988, p. 276). Il ne répondait pas mais constatait les positions divergentes entre des mathématiciens qui tendaient à classer la démonstration parmi les savoirs non scolarisables et des didacticiens qui s'élèvent « avec force contre cette idée » (cf. section 4). Pour ma part, je retenais à l'époque que « la construction de situations qui permettraient des débats *sur* la preuve, et pas seulement des débats de preuve, la détermination de leurs caractéristiques et de leurs contraintes sont des problèmes ouverts pour la recherche didactique. » (Balacheff, 1988, p. 580 sqq.).

L'introduction du mot « preuve » dans le discours institutionnel, voire sa banalisation, a contribué à l'évolution de la problématique : une preuve dans la classe de mathématique n'est plus nécessairement une démonstration mais une argumentation à la fois adaptée au niveau de développement et d'apprentissage des élèves, et acceptable au regard des mathématiques – ou plutôt à celui des mathématiciens qui accorderaient leurs exigences aux contraintes de ce niveau.

La nouvelle question est donc celle de l'enseignabilité de la preuve dans la classe de mathématique. Les institutions répondent positivement en la mettant non au rang des connaissances mais à celui des compétences. Cependant les difficultés et les échecs sont importants. Si le problème de l'acquisition du raisonnement mathématique, ainsi que les programmes désignent cette compétence, est mieux compris et sa complexité est mieux analysée, en revanche il reste ouvert au point que la question de son enseignabilité est encore posée : “The critical issues of how students come to acquire these competencies and whether these competencies can be taught remain important open research questions.” (Weber et Harel, 2018, p. 7).

Dans le mouvement du projet d'enseigner la démonstration à celui d'enseigner la preuve, d'une certaine façon passant de la technique au sens, une problématique est devenue dominante : reproduire la façon de travailler des mathématiciens. Je perçois dans cette approche le risque de privilégier la mise en scène de comportements sans interroger assez leurs significations et ainsi de perdre de vue ce qui est à l'origine du procès particulier de preuve en mathématique.

Travailler comme les mathématiciens^o c'est rencontrer leurs objets et entrer dans les problématiques que ceux-ci imposent : *les mathématiciens^o font ce qu'ils font parce que leurs objets sont ce qu'ils sont*. Nous

nous accorderons sûrement sur le fait que ce travail a pour finalité la production de connaissances – des théorèmes – et que ces connaissances sont de nature théorique. Dans cette activité, la preuve (démonstration) a deux fonctions fondatrices : elle permet la certification d'une nouvelle connaissance qui acquiert le statut de savoir lorsque son énoncé et sa preuve sont publiés, et elle réalise la mise en relation avec les savoirs existants. *La démonstration est un constructeur des mathématiques.*

Homologue et non transposition de la démonstration, les caractéristiques de l'*argumentation mathématique*, et ce qu'elles impliquent pour la construction des connaissances, permettront qu'elle ait la même fonction fondatrice dans la classe que la démonstration dans la communauté mathématicienne. Pour cela, une condition nécessaire est que le mot ne désigne pas l'engagement dans la construction dynamique d'arguments qui concourent à soutenir la validité d'un énoncé, mais désigne le texte qui objective cette construction, permettant la reconnaissance et l'inscription pérenne de l'argumentation mathématique dans la mémoire de la classe.

Au plan sociomathématique, les élèves et l'enseignant^o sont engagés dans un processus de mathématisation d'une pensée déjà mathématique, celle qui permet d'entrer dans la situation de preuve. Ils font des mathématiques. L'enseignant^o, arbitre du jeu, est dans la position du mathématicien^o. Il reprendra sa position institutionnelle dans la phase d'institutionnalisation qui marque la clôture de la situation de preuve par l'accord collectif sur la validité de l'énoncé et de sa preuve dans le contexte explicite de la base de connaissances partagée à ce moment de l'histoire commune.

Des notes de Guy Brousseau (1984), préalables à un cours lors de l'école d'été de didactique des mathématiques sous le titre « Le rôle du maître et l'institutionnalisation », invitent à poursuivre la réflexion dans cette direction dans le cadre de la TSD. Il écrit :

Une situation d'action fait évoluer l'élève vers un changement de point de vue ; une situation de formulation fait évoluer vers un changement de code, de langage ; une situation de preuve fait évoluer l'élève vers un changement de la théorie qui permet de produire des théorèmes.

On notera l'expressions « situation de preuve » pour ce qui sera plus tard ancré dans la TSD par l'expression « situation de validation ». Il poursuit :

Si on s'arrête là, le rôle du maître c'est de proposer des situations à l'élève, il ne formule pas le savoir, donne seulement la consigne, avec plus ou moins de renseignements pour motiver l'élève et lui faire comprendre à quoi on joue. On a fait marcher ça et puis dans les classes il y avait beaucoup de phénomènes qui échappaient à l'analyse, *le maître avait besoin de parler avec les élèves, de raconter ce qui s'était passé.* C'est comme ça que s'est imposé le concept d'institutionnalisation. Les élèves ne pouvaient pas continuer s'il ne se passait pas 'quelque chose'. On ne pouvait pas entrer dans de nouvelles situations si on ne s'accordait pas sur ce qui s'était passé dans les séquences précédentes. Le modèle quasi-isolé est totalement insuffisant, *le maître fait partie de la situation.* Pourquoi ?

Le modèle quasi-isolé est celui qui guide les travaux évoqués dans ce cours. Le rôle de l'enseignant^o n'est pas ignoré, c'est sa problématisation qui est en question. Les observations rapportées et analysées s'en tiennent pour l'essentiel aux tensions et aux limitations induites par le postulat d'autonomie des élèves et son corollaire, la neutralité de l'enseignant^o. Le cours de Brousseau lors de l'école d'été de 1984 a en fait porté sur les paradoxes didactiques (Brousseau, 1986/1998, p. 72-80) qui sous-tendent les dilemmes et tensions au sein des situations. En particulier ceux, les plus fréquents, dont l'origine est la tension entre la responsabilité professionnelle et la responsabilité mathématique. L'équilibre de cette relation est fragilisé par la montée d'un flux d'incertitudes au moment de clore la situation. L'un des

résultats de la TSD est d'avoir énoncé et validé des principes d'ingénierie des situations quasi-isolées qui réduisent les paradoxes, les tensions et les dilemmes qui en résultent. Les processus de dévolution et d'institutionnalisation permettent de contrôler l'écart entre les situations effectives et le modèle adidactique sous-jacent⁵².

Gilbert Arzac (1988, p. 42) concluait sa synthèse de l'état de la recherche par le constat « [d'une recherche] plus orientée vers des propositions de remédiations à un état de choses jugé mauvais que vers une analyse poussée de la situation telle qu'elle est et a été et ne prend guère en compte d'autres questionnements possibles concernant ce qu'on pourrait appeler le contrôle de la transposition. » L'orientation ne me paraît pas avoir significativement évolué, elle a au contraire affirmé son caractère de *recherche pour l'innovation*, en reprenant l'expression de Paolo Boero. En revanche, la compréhension de la complexité de l'enseignement de la preuve s'est précisée avec une convergence objective des travaux bien qu'ils se soient développés de façons indépendantes. Ainsi a-t-on compris que *la neutralité de l'enseignant° ne signifie pas son absence*.

À l'écoute de la classe, l'enseignant°-mathématicien° a besoin d'instruments pour donner une légitimité à des activités des élèves bien qu'ils aient utilisé des définitions ou des symboles non canoniques, ou qu'ils aient produit une preuve non congrue à une démonstration (Herbst *et al.*, 2009, p. 42). Ces instruments sont à construire. Certains d'entre eux sont préfigurés par les projets mais pas au point, par exemple, d'être introduits dans la formation comme des savoirs professionnels documentés pour un usage dans la classe. Décrire, valider et documenter ces instruments et les savoirs associés est un problème ouvert. Une priorité pour les programmes de recherche à venir serait d'avancer au moins sur le cas des tâches suivantes :

- Au cours de la situation de preuve, l'enseignant°-mathématicien° doit :
 - faire expliciter *les accords et désaccords*, ou les désigner ;
 - apporter des contrexemples ou contradictions factuels ;
 - formaliser l'enregistrement des preuves et la chronique de leur construction ;
 - enregistrer et mettre à jour la base de connaissances, la tenir à disposition ;
 - gérer et garantir la mémoire de la classe, enregistrer la jurisprudence.
- À l'issue du débat probatoire, l'enseignant°-mathématicien° prend acte du consensus sur l'évaluation et la validation de la preuve, et institutionnalise les critères de preuve qu'ils aient été formulés et partagés par les élèves ou qu'il les ait énoncés pour trancher un conflit avéré et nommé.

Enfin, pour tous les travaux, *le temps* est à l'évidence une contrainte ou au moins une variable déterminante. Dans tous les cas, ses exigences et sa gestion ne permettent pas d'envisager un enseignement qui reposerait de façon systématique sur des situations de preuve. En revanche, utilisées de façon limitée avec pour finalité la création ou la mise à jour des normes sociomathématiques, ces situations constitueront un corpus de références pour donner une signification pragmatique et fondamentale à *l'argumentation mathématique*, précurseur de la démonstration.

⁵² Ce contrôle n'est pas absolu, les protagonistes sont des êtres humains, la situation implique de nombreux déterminants contextuels et sociaux dont les modèles didactiques ne peuvent intégrer la complexité (au sens des sciences de la complexité).

Références

- Anderson, J. R., Corbett, A. T., Koedinger, K. R. et Pelletier, Ray. (1995). Cognitive Tutors: Lessons Learned. *Journal of the Learning Sciences*, 4(2), 167-207. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0402_2
- Anderson, T. et Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher*, 41(1), 16-25. <https://doi.org/10.3102/0013189X11428813>
- Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 247-280.
- Arsac, G. (2018). *Naissance et premiers pas du problème ouvert à l'IREM de Lyon* [Allocution pour les 50 ans de l'IREM de Lyon, in: Brève 196, 27 juin 2018].
- Arsac, G., Balacheff, N. et Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(1), 5-29. <https://doi.org/10.1007/BF00302312>
- Arsac, G., Colonna, A. et Chapiron, G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses universitaires de Lyon.
- Arsac, G. et Mante, M. (1983). Des « problèmes ouverts » dans nos classes de premier cycle. *Petit x*, 2, 5-33.
- Arsac, G. et Mante, M. (1996). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 21-43.
- Artigue, M. (Réalisateur). (2018, décembre 21). *Démarches d'investigation, problèmes ouverts...*, recherche didactique. <https://www.youtube.com/watch?v=A1PNXDCJmTo>
- Artigue, M. et Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Arzarello, F. et Bussi, M. G. B. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A national case study from an international perspective. In A. Sierpiska et J. Kilpatrick (Éds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (Vol. 4, p. 2). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5196-2_1
- Austin, J. L. (1950). In G. Longworth (Éd.), *Truth* (The virtual issue n°1-2013). The Aristotelian Society. <https://www.aristoteliansociety.org.uk/pdf/2013%20AS%20Virtual%20Issue.pdf>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* [Doctorat ès-sciences]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, 10(3), 2-8.
- Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat... [Newsletter]. *La lettre de la preuve*. <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html>
- Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, et R. Lins (Éds.), *Perspectives on School Algebra* (p. 249-260). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_14
- Balacheff, N. (2019a). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet et C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (p. 423-456). ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02333720>
- Balacheff, N. (2019b). *L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration*. 29.
- Balacheff, N. (2023). *Notes for a study of the didactic transposition of mathematical proof* (p. 27) [Preprint].
- Ball, D. L. (1991). *Implementing the NCTM Standards: Hopes and Hurdles*. 20.
- Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal*, 93(4), 373-397. <http://www.jstor.org/stable/1002018>
- Ball, D. L. et Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, et D. Schifter (Éds.), *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 27-44). NCTM. <https://www.researchgate.net/profile/Hyman->

- Bass/publication/312532588_Making_mathematics_reasonable_in_school/links/5f943d3f299bf1b53e40ca68/Making-mathematics-reasonable-in-school.pdf
- Ball, D. L., Lewis, J. et Thames, M., Hoover. (2008). Making Mathematics Work in School. In *Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views. NCTM Monograph N°14* (p. 13-44 et 195-201). National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.jstor.org/stable/30037740>
- Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school: To Giovanni Prodi on occasion of his 70th birthday. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 11-41. <https://doi.org/10.1007/BF00143925>
- Boero, P., Consogno, V., Guala, E. et Gazzolo, T. (2009). Research for innovation: A teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I-IV and some related basic research results. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 29(1), 56-96.
- Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. et Scali, E. (1995). Aspects of the mathematics—Culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In L. Meira et D. Carraher (Éds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (17 pages). http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/boero%26c_PME_XIX.pdf
- Boero, P. et Douek, N. (2008). La didactique des domaines d'expérience. *Carrefours de l'éducation*, 26(2), 99. <https://doi.org/10.3917/cdle.026.0099>
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F. et Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto et T. F. Kawasaki (Éds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 179-209). PME.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Éd.), *La mathématique à l'école élémentaire* (p. 428-442). Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.
- Brousseau, G. (1975). Epistémologie expérimentale vs Didactique [Blog]. *Guy Brousseau*. <https://guy-brousseau.com/3297/1975-epistemologie-experimentale-vs-didactique-2016/>
- Brousseau, G. (1978). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37-127.
- Brousseau, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la III^e école d'été de didactique des mathématiques*. III^e école d'été de didactique des mathématiques. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/84-11-R%C3%B4le-du-Ma%C3%AAtre.pdf>
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. et Gibel, P. (2002). Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 205-230.
- Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 41. <https://doi.org/10.7202/031700ar>
- Cobb, P. et Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational psychologist*, 31(3/4), 175-190.
- Cuq, J.-P. et Gruca, I. (2017). *Cours de didactique du français langue étrangère et seconde*. Presse Universitaire de Grenoble.
- Dhombres, J. (2008). La preuve mathématique en tant qu'elle est épreuve de mémoire. *Communications*, 84(1), 59-84. <https://doi.org/10.3406/comm.2008.2507>
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Dreyfus, T., Nardi, E. et Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna et M. de Villiers (Éds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, p. 191-213). Springer Science et Business Media.
- Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61.

- EDUSCOL. (2009). *Raisonnement et démonstration*. MENESR-DGESCO.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf
- EDUSCOL. (2016). *Mathématiques—Raisonner*. MENESR-DGESCO;
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travailles/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf
- Ernst, D. C., Hodge, A. et Yoshinobu, S. (2017). What Is Inquiry-Based Learning? *Notices of the American Mathematical Society*, 64(06), 570-574. <https://doi.org/10.1090/noti1536>
- Even, R. (2018). Classroom-Based Issues Related to Proofs and Proving. In A. J. Stylianides et G. Harel (Éds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (p. 145-151). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_10
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.
- Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. et Arora, A. (2008). *TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands. Tel: +31-20-625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web site: <http://www.iea.nl>. https://timssandpirls.bc.edu/timss_advanced/frameworks.html
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Didactique des mathématiques, Paris-Diderot]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603>
- Gravier, S. et Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization—Exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM – Mathematics Education*, 54(4), 925-940.
<https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3>
- Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques*, 161-177. <https://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR10001.pdf>
- Grenier, D. et Payan, C. (2002). Situations de recherche en « classe » Essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 189-203.
- Grenier, D. et Payan, C. (2006). Les « situations de recherche » pour l'apprentissage de savoirs transversaux. *Actes du colloque EMF 2006*, 12 pages. http://emf.unige.ch/files/2814/5390/3967/EMF2006_GT6_Grenier.pdf
- Hanna, G. et de Villiers, M. (Éds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education : The 19th ICMI study* (corrected edition 2021). Springer.
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., Lin, F.-L., Selden, A., Tall, D. et Yevdokimov, O. (2012). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In G. Hanna et M. de Villiers (Éds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, p. 10). Springer.
- Herbst, P. et Balacheff, N. (2009). Proving and Knowing in Public: The Nature of Proof in a Classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, et E. J. Knuth (Éds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (p. 40-63). Routledge.
- Herbst, P. et Chazan, D. (2009). Methodologies for the study of instruction in mathematics classrooms. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(1), 11-32. <https://revue-rdm.com/2009/methodologies-for-the-study-of/>
- Herbst, P. et Chazan, D. (2011). Research on Practical Rationality: Studying the Justification of Actions in Mathematics Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 405-462.
- Herbst, P. G. (2003). Using Novel Tasks in Teaching Mathematics: Three Tensions Affecting the Work of the Teacher. *American Educational Research Journal*, 40(1), 197-238. <https://doi.org/10.3102/00028312040001197>
- Historique des actions menées par l'association MATH.en.JEANS depuis 1985*. (1985, depuis). MATH.en.JEANS.
<https://www.mathenjeans.fr/historique-mej>
- Jones, K. et Herbst, P. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and Contexts. In G. Hanna et M. de Villiers (Éds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, p. 261-277). Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_11
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations—The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Legrand, M. (1986). L'introduction du débat scientifique en situation d'enseignement. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, fascicule 5 « Didactique des mathématiques », 1988-1989*(exp. n°3), 1-16.
http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988-1989__5_A3_0
- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM*, 10, 123-159.
http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/10_article_68.pdf
- Legrand, M. (1995a). Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique (deuxième partie). *Repères IREM*, 21, 111-139.
- Legrand, M. (1995b). Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique (première partie). *Repère IREM*, 91-108.
- Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L. et Parreau, A. (2011). *Le principe du « débat scientifique » dans un enseignement*. IREM de Grenoble. <http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf>
- Lehmann, D. (1989). *La démonstration*. IREM de Lille.
- Loewenberg Ball, D., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Maher, C. A. et Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194. <https://doi.org/10.2307/749600>
- Mantes, M. et Arsac, G. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. CANOPE -CRDP Lyon.
- Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : Les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 113-158.
- Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : The role of the teacher. *ZDM*, 41(4), 427-440. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z>
- Mariotti, M. A. (2021). Initiation à la preuve : La médiation des environnements informatiques. *Actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques*. 21e école d'été de didactique des mathématiques, Ile de Ré.
- Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F. et Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Éd.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, p. 180-195). University of Helsinki.
- Maths à Modeler : Recherches*. (2003, depuis). <https://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/recherches.html>
- Mercier, A. (2012). Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : Une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. In J.-L. Dorier et S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle* (p. 1423-1431). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Mullis, I. V. S., Ed, Martin, M. O., Ed, Boston College, T. et P. I. S. C., et International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (Netherlands). (2017). *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands. Tel: +31-20-625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web site: <http://www.iea.nl>.
<http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>
- Mullis, I. V. S., International Association for the Evaluation of Educational Achievement, et TIMSS (Éds.). (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. TIMSS et PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. <https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/frameworks.html>
- Mullis, I. V. S. et Martin, M. O. (2014). *TIMSS advanced 2015 assessment framework*. TIMSS et PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G., O'Sullivan, C. Y. et Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 assessment frameworks*. TIMSS et PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O. et von Davier, M. (Éds.). (2021). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- O'Connor, K. M., Mullis, I. V. S., Garden, R. A., Martin, M. O. et Gregory, K. D. (2003). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003* (2nd ed). International Study Center. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2003i/frameworksD.html>
- OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>

- PISA Mathematics Framework. (2022). <https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html#Mathematical-Reasoning>
- Polya, G. (1945). *How to Solve It* (1954^e éd.). Princeton University Press. <https://press.princeton.edu/titles/669.html>
- Robert, A. et Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(2). <https://revue-rdm.com/2005/prise-en-compte-du-meta-en/>
- Saada-Robert, M. et Brun, J. (1996). Transformations of school knowledge: The contributions and extensions of genetic psychology. *Prospects*, 26(1), 25-36. <https://doi.org/10.1007/BF02195607>
- Schoenfeld, A. H. (1987). Confessions of an Accidental Theorist. *For the Learning of Mathematics*, 7(1), 30-38. <http://www.jstor.org/stable/40247883>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, 38(3), 289-321.
- Tabach, M., Hershkowitz, R., Rasmussen, C. et Dreyfus, T. (2014). Knowledge shifts and knowledge agents in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 192-208. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.001>
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. et Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna et M. de Villiers (Éds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 96(1), 79-86. <https://doi.org/10.3406/rfp.1991.1350>
- Vergnaud, G. (2011). La pensée est un geste Comment analyser la forme opératoire de la connaissance. *Enfance*, 2011(01), 37. <https://doi.org/10.4074/S0013754511001042>
- Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (La documentation française, p. 96) [Rapport public]. Ministère de l'éducation nationale. <https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/>
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 6(1), 69-118.
- Yackel, E. et Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.2307/749877>

Je remercie Janine Rogalski et Cécile Ouvrier-Bufferet pour leurs relectures précises et leurs suggestions sur ce texte, ainsi que Maria Alessandra Mariotti et Patricio Herbst pour les nombreux échanges au cours des années à propos des thèmes abordés dans ce cours.