HAL
open science

Le théorème des six exponentielles restreint à l'irrationalité

Michel Waldschmidt

To cite this version:

Michel Waldschmidt. Le théorème des six exponentielles restreint à l'irrationalité. RMS : revue de la filière mathématiques [2004-..], 2021, 131 (3), pp.26-33. hal-04025073

HAL Id: hal-04025073

https://hal.science/hal-04025073v1

Submitted on 11 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Revue de la filière mathématiques RMS, avril 2021, 131ème année, N.3, 2020–2021, 26–33.

Le théorème des six exponentielles restreint à l'irrationalité

par

Michel Waldschmidt

Résumé. *Si p, q, r sont trois nombres rationnels positifs multiplicativement indépendants et u un nombre réel positif tel que les trois nombres p^u, q^u, r^u soient rationnels, alors u est aussi rationnel. Pour démontrer ce résultat, on introduit un paramètre L et une matrice carrée $L \times L$ dont les coefficients sont des fonctions $(p^{s_1}q^{s_2}r^{s_3})^{(t_0+t_1u)x}$. Le déterminant $\Delta(x)$ de cette matrice s'annule en un point réel $x \neq 0$ si et seulement si u est rationnel. Les hypothèses impliquent que $\Delta(1)$ est un nombre rationnel, dont on majore facilement un dénominateur. Pour majorer $|\Delta(1)|$, on montre que les $L(L-1)/2$ premiers coefficients de Taylor de $\Delta(x)$ à l'origine sont nuls.*

Abstract. *Let p, q, r be three multiplicatively independent positive rational numbers and u a positive real number such that the three numbers p^u, q^u, r^u are rational ; then u is also rational. We prove this result by introducing a parameter L and a square $L \times L$ matrix, the entries of which are functions $(p^{s_1}q^{s_2}r^{s_3})^{(t_0+t_1u)x}$. The determinant $\Delta(x)$ of this matrix vanishes at a real point $x \neq 0$ if and only if u is rational. From the hypotheses, it follows that $\Delta(1)$ is a rational number ; one easily estimates a denominator of it. An upper bound for $|\Delta(1)|$ follows from the fact that the $L(L-1)/2$ first Taylor coefficients of $\Delta(x)$ at the origin vanish.*

Mots–clés : *nombres rationnels ; irrationalité ; théorème des six exponentielles ; conjecture des quatre exponentielles ; indépendance multiplicative de nombres réels ; déterminant ; série de Taylor*

2010 Mathematics Subject Classification : 11J86

Dans [S], Omar Sonebi fait appel au cas particulier suivant du théorème des six exponentielles :

> ($\star$) *Si u est un nombre réel positif tel que x^u soit rationnel pour tout x rationnel positif, alors u est entier.*

L'auteur ajoute ce commentaire : *Ce problème est en fait particulièrement compliqué, il nécessite des résultats assez forts pour être résolu.*

C'est un fait que les démonstrations (voir notamment [Lan, Lau, R, W1, W2]) du théorème de transcendance des six exponentielles cité dans [S, p. 61] nécessitent des outils de théorie algébrique des nombres (pour démontrer une inégalité de Liouville permettant de minorer un nombre algébrique non nul), d'analyse complexe (pour majorer la valeur d'une fonction analytique ayant de nombreux zéros) et même quelquefois d'algèbre commutative (pour démontrer un lemme de zéros). Nous allons montrer que ce commentaire est moins justifié pour le cas particulier ($\star$).

Un autre cas particulier du théorème des 6 exponentielles, qui a fait l'objet de la compétition Putnam en 1971 [1] (voir [H]), consiste à montrer que si x^u est entier pour tout x entier positif, alors u est entier. On peut démontrer assez facilement cet énoncé en utilisant le calcul des différences finies (voir [H] et [W1, Chapitre I Exercice 6, p. I-12 — I-13]). Mais, comme me l'a fait remarquer Alain Tissier, cela ne suffit pas pour démontrer ($\star$). Disposer d'une démonstration du même genre pour l'énoncé ($\star$) pourrait être intéressant, mais l'auteur n'en connait pas. Nous allons nous contenter de montrer comment simplifier la preuve du théorème des six exponentielles quand on se restreint à l'irrationalité.

Voici la version du théorème des six exponentielles restreinte à l'irrationalité (la version non restreinte [S, p. 61] concerne la transcendance). On dit que trois nombres positifs p, q, r sont multiplicativement indépendants si une relation $p^a q^b r^c = 1$ avec a, b, c entiers implique $a = b = c = 0$.

Théorème. *Soient p, q, r trois nombres rationnels positifs multiplicativement indépendants et u un nombre réel positif tel que les trois nombres p^u, q^u et r^u soient rationnels. Alors u est rationnel.*

Il est facile de voir que si u est un nombre rationnel et p un nombre premier tel que p^u est aussi rationnel, alors u est entier. Il est clair aussi que trois nombres premiers distincts sont multiplicativement indépendants, par le théorème fondamental de l'arithmétique. Par conséquent on déduit du théorème le corollaire suivant [H, Theorem 2] :

Corollaire. *Soient p, q, r trois nombres premiers distincts et u un nombre réel positif tel que les trois nombres p^u, q^u et r^u soient rationnels. Alors u est un entier.*

On peut choisir u irrationnel et p premier tel que p^u soit également entier, par exemple $u = (\log q)/(\log p)$. On ne connaît pas d'exemple de u irrationnel et de nombres rationnels p et q multiplicativement indépendants avec p^u et q^u rationnels : montrer qu'il n'y en a pas est le problème des quatre exponentielles restreint à l'irrationalité, qui est toujours ouvert. En notant $p^u = r$ et $q^u = s$, on aurait

$$u = \frac{\log r}{\log p} = \frac{\log s}{\log q}.$$

Le problème est donc celui de montrer qu'une matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} \log p & \log q \\ \log r & \log s \end{pmatrix}$$

1. 32nd Putnam 1971 question A6 https://prase.cz/kalva/putnam/putn71.html

a un rang égal à 2 quand p, q, r, s sont des nombres rationnels positifs avec p, q multiplicativement indépendants et p, r également multiplicativement indépendants.

L'idée de la démonstration du théorème est la suivante : si les six nombres p, q, r, p^u, q^u et r^u sont rationnels, alors les trois fonctions de variable réelle p^x, q^x et r^x prennent des valeurs rationnelles en tous les points $\xi_{\underline{t}} = t_0 + t_1 u$ avec $\underline{t} = (t_0, t_1) \in \mathbf{Z}^2$. Pour $\underline{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{Z}^3$, il en est donc de même de la fonction $f_{\underline{s}}(x) = (p^{s_1} q^{s_2} r^{s_3})^x$. On choisit un entier N suffisamment grand (on précisera cette condition tout à la fin), on pose $S = N^2$, $T = N^3$, $L = N^6$, de sorte que $L = S^3 = T^2$. Le déterminant [2]

$$\Delta = \det\Big(f_{\underline{s}}(\xi_{\underline{t}})\Big)_{\substack{0 \le s_j < S \\ 0 \le t_i < T}}$$

est un nombre rationnel. Soit D un dénominateur commun de p, q, r, p^u, q^u et r^u. Pour $s_j \ge 0$ et $t_i \ge 0$ entiers, les nombres

$$D^{6ST} f_{\underline{s}}(\xi_{\underline{t}}) = (Dp)^{s_1 t_0} (Dq)^{s_2 t_0} (Dr)^{s_3 t_0} (Dp^u)^{s_1 t_1} (Dq^u)^{s_2 t_1} (Dr^u)^{s_3 t_1}$$

sont entiers, donc $D^{6LST}\Delta$ est un entier rationnel. La démonstration va consister à majorer $|\Delta|$, en particulier pour N suffisamment grand on aura $|\Delta| < D^{-6LST}$, donc $\Delta = 0$; on montrera aussi que la condition $\Delta = 0$ implique que u est rationnel.

Commençons par ce dernier point. Dire que le déterminant Δ est nul signifie qu'il existe des nombres rationnels $a_{\underline{s}}$, non tous nuls, tels que la fonction

$$F(x) = \sum_{s_1=0}^{S} \sum_{s_2=0}^{S} \sum_{s_3=0}^{S} a_{\underline{s}} f_{\underline{s}}(x)$$

vérifie

$$F(\xi_{\underline{t}}) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \le t_0, t_1 < T. \tag{1}$$

Les trois nombres $\log p, \log q, \log r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ car p, q, r sont multiplicativement indépendants. Le lemme suivant, appliqué à

$$\{w_1, \ldots, w_n\} = \big\{s_1 \log p + s_2 \log q + s_3 \log r \ \mid \ 0 \le s_1, s_2, s_3 < S\big\}$$

avec $n = L$ montre que les conditions (1) impliquent que les nombres $\xi_{\underline{t}}$ ne sont pas deux à deux distincts, donc que u est rationnel.

2. Ce déterminant est bien défini au signe près, dépendant de l'ordre que l'on choisit pour l'ensemble des $\underline{s}$ et pour celui des $\underline{t}$.

Lemme 1. *Soient $w_1, \dots, w_n$ des nombres réels deux à deux distincts et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels non tous nuls. Alors le nombre de zéros réels de la fonction*

$$F(x) = a_1 \mathrm{e}^{w_1 x} + \cdots + a_n \mathrm{e}^{w_n x}$$

est $\leq n-1$.

Démonstration. On va utiliser le théorème de Rolle sous la forme suivante : *si une fonction réelle de variable réelle continûment dérivable a m zéros réels, alors sa dérivée en a au moins $m-1$.*

La démonstration du lemme 1 se fait par récurrence sur n. L'énoncé est vrai pour $n = 1$: la fonction $a_1 \mathrm{e}^{w_1 x}$ n'a pas de zéro. Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$ avec $n \geq 2$. On suppose aussi $a_1, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls – ce n'est pas restrictif. La dérivée $G(x)$ de la fonction $\mathrm{e}^{-w_n x} F(x)$ s'écrit

$$G(x) = a_1(w_1 - w_n)\mathrm{e}^{w_1 x} + \cdots + a_{n-1}(w_{n-1} - w_n)\mathrm{e}^{w_{n-1} x}$$

avec des coefficients $a_1(w_1 - w_n), \dots, a_{n-1}(w_{n-1} - w_n)$ qui ne sont pas tous nuls. L'hypothèse de récurrence montre que $G(x)$ a au plus $n-2$ zéros. Le théorème de Rolle implique que la fonction $\mathrm{e}^{-w_n x} F(x)$, donc la fonction $F(x)$ aussi, a au plus $n-1$ zéros. □

Il ne reste plus qu'à majorer $|\Delta|$. Cette majoration n'utilise pas les hypothèses arithmétiques : elle est valable pour sans supposer p, q, r, p^u, q^u et r^u rationnels.

On introduit la fonction

$$\Psi(x) = \det\Big(f_{\underline{s}}(\xi_{\underline{t}} x)\Big)_{\substack{0 \leq s_j < S \\ 0 \leq t_i < T}},$$

de sorte que $\Delta = \Psi(1)$, et on développe le déterminant pour écrire

$$\Psi(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \epsilon(\sigma) \mathrm{e}^{w_\sigma x};$$

on a noté $\mathfrak{S}_L$ l'ensemble des $L!$ bijections $\sigma : \underline{s} \to (t_{0,\sigma(\underline{s})}, t_{1,\sigma(\underline{s})})$ de l'ensemble des $\underline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ $(0 \leq s_j < S,\ j = 1, 2, 3)$ sur l'ensemble des $\underline{t} = (t_0, t_1)$, $(0 \leq t_i < T,\ i = 1, 2)$, $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ (dépendant de l'ordre choisi pour les $\underline{s}$ et pour les $\underline{t}$) et, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_L$,

$$w_\sigma = \sum_{s_1=0}^{S-1} \sum_{s_2=0}^{S-1} \sum_{s_3=0}^{S-1} (s_1 \log p + s_2 \log q + s_3 \log r)(t_{0,\sigma(\underline{s})} + t_{1,\sigma(\underline{s})} u).$$

On utilisera la majoration

$$|w_\sigma| \leq LST(1+u)\log(pqr). \tag{2}$$

On considère le développement de Taylor de ψ à l'origine :

$$\Psi(x) = \sum_{m\geq 0} \alpha_m x^m.$$

Le lemme suivant montre que l'on a

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{M-1} = 0$$

avec $M = L(L-1)/2$.

Rappelons qu'une fonction analytique en 0 est une fonction qui est la somme au voisinage de 0 d'une série entière convergente ; cette série est alors sa série de Taylor.

Lemme 2. *Soient $f_1, \ldots, f_L$ des fonctions analytiques en 0 et $\xi_1, \ldots, \xi_L$ des nombres complexes. Le développement de Taylor de la fonction*

$$F(x) = \det\Big(f_\lambda(\xi_\mu x)\Big)_{1\leq\lambda,\mu\leq L},$$

s'écrit

$$F(x) = \sum_{m\geq 0} \alpha_m x^m$$

avec

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{M-1} = 0.$$

Démonstration. Grâce à la multilinéarité du déterminant, il suffit de montrer ce résultat quand chaque $f_\lambda(x)$ est un monôme x^{n_λ}. Si le déterminant

$$\det\Big((\xi_\mu x)^{n_\lambda}\Big)_{1\leq\lambda,\mu\leq L} = x^{n_1+n_2+\cdots+n_L} \det\Big(\xi_\mu^{n_\lambda}\Big)_{1\leq\lambda,\mu\leq L}$$

n'est pas nul, alors $n_1, \ldots, n_L$ sont deux à deux distincts, donc

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_L \geq 0 + 1 + \cdots + (L-1) = M.$$

□

Pour obtenir la majoration attendue de $|\Delta|$, on introduit un nombre $R \geq 1$ – on choisira $R = \mathrm{e}$, la base des logarithmes népériens, mais on pourrait prendre n'importe quelle constante absolue > 1 pour conclure.

Lemme 3. *Soient $w_1, \ldots, w_J$, $a_1, \ldots, a_J$ des nombres réels. Si le développement de Taylor à l'origine de la fonction*

$$F(x) = \sum_{j=1}^{J} a_j \mathrm{e}^{w_j x}$$

s'écrit

$$F(x) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m x^m$$

avec

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{M-1} = 0,$$

alors

$$|F(1)| \leq R^{-M} \sum_{j=1}^{J} |a_j| \mathrm{e}^{|w_j| R}.$$

Démonstration. On a

$$F(x) = \sum_{j=1}^{J} a_j \sum_{m \geq 0} \frac{w_j^m}{m!} x^m = \sum_{m \geq 0} \sum_{j=1}^{J} a_j \frac{w_j^m}{m!} x^m,$$

donc

$$\alpha_m = \sum_{j=1}^{J} a_j \frac{w_j^m}{m!}$$

et

$$|\alpha_m| \leq \sum_{j=1}^{J} |a_j| \frac{|w_j|^m}{m!}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |F(1)| &= \left| \sum_{m \geq M} \alpha_m \right| \leq \sum_{m \geq M} |\alpha_m| \leq R^{-M} \sum_{m \geq M} |\alpha_m| R^m \\ &\leq R^{-M} \sum_{m \geq M} \sum_{j=1}^{J} |a_j| \frac{|w_j|^m}{m!} R^m \leq R^{-M} \sum_{j=1}^{J} |a_j| \mathrm{e}^{|w_j| R}. \end{aligned}$$

□

Le lemme 2 nous autorise à utiliser la majoration fournie par le lemme 3 pour la fonction Ψ avec $J = L!$ et $a_j = \pm 1$; comme $\Psi(1) = \Delta$, on obtient, grâce à (2) :

$$|\Delta| \leq R^{-M} L!(pqr)^{LST(1+u)R}.$$

Pour conclure la démonstration du théorème, il reste à vérifier que l'on a

$$L!(pqr)^{LST(1+u)R} D^{6LST} < R^M \tag{3}$$

pour N suffisamment grand. Rappelons les valeurs des paramètres

$$L = N^6, \quad S = N^2, \quad T = N^3, \quad M = \frac{1}{2}L(L-1).$$

On vérifie que la condition (3) est vérifiée avec $R = \mathrm{e}$ dès que

$$N > 12 \log D + 2\mathrm{e}(1+u)\log(pqr) + 1.$$

Quelques commentaires. On peut se demander d'où vient l'introduction de ce déterminant Δ. La réponse est qu'il vient de loin. Les méthodes de transcendance ont leur origine dans la démonstration par Hermite de la transcendance du nombre e ; elles ont été élaborées par de nombreuses contributions depuis 1873, notamment par Siegel, Lang et Ramachandra, qui sont à l'origine du théorème des six exponentielles. La première apparition de ce théorème est dans un article d'Alaoglu et Erdös [AE] concernant les travaux de Ramanujan sur les nombres hautement composés et les nombres colossalement abondants ; ils ont demandé à Siegel s'il était vrai que les conditions p^u et q^u entiers avec p et q premiers impliquaient u entier, Siegel leur a dit qu'il ne savait pas le démontrer mais qu'il savait le faire en ajoutant r^u, comme dans le théorème .

> [AE, p. 449] *This question leads to the following problem in Diophantine analysis. If p and q are different primes, is it true that p^x and q^x are both rational only if x is an integer ?*
>
> [AE, p. 455] *It is very likely that q^x and p^x can not be rational at the same time except if x is an integer...At present we cannot show this. Professor Siegel has communicated to us the result that q^x, r^x and s^x cannot be simultaneously rational except if x is an integer*

On trouvera les démonstrations de Lang et Ramachandra dans les références [Lan] et [R] respectivement. Ces démonstrations font intervenir des fonctions

auxiliaires. Les remplacer par le déterminant Δ est une idée de M. Laurent [Lau, § 6.1]. L'introduction d'un déterminant dans une question de nature semblable se trouve déjà dans l'article [CS] de Cantor et Straus sur un théorème de Dobrowolski concernant un problème de Lehmer. On trouvera d'autres références dans [W1, W2].

Références

[AE] L. Alaoglu & P. Erdös – « On highly composite and similar numbers », *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), p. 448–469.
DOI http://dx.doi.org/10.2307/1990319.
MR http://msp.org/idx/mr/0011087
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0061.07903

[CS] D. C. Cantor & E. G. Straus – « On a conjecture of D. H. Lehmer », *Acta Arith.* **42** (1982/83), no. 1, p. 97–100.
DOI http://dx.doi.org/10.4064/aa-42-1-97-100.
MR http://msp.org/idx/mr/0679001
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0504.12002
Correction, id. no. 3 p.327.
MR http://msp.org/idx/mr/0729742
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0521.12003

[H] H. Halberstam – « Transcendental numbers », *Math. Gaz.* **58** (1974), p. 276–284,
DOI https://www.jstor.org/stable/3616099.
MR http://msp.org/idx/mr/0466034
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0293.10016

[Lan] S. Lang – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.
MR http://msp.org/idx/mr/0214547
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0144.04101
Collected papers. Volume I : 1952–1970. New York, NY : Springer. 525 p. (2000).
MR http://msp.org/idx/mr/1781684
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0955.01032

[Lau] M. Laurent – « Sur quelques résultats récents de transcendance », *Astérisque* (1991), no. **198-200**, p. 209–230 (1992) ; Journées Arithmétiques, Luminy 1989.
https://smf.emath.fr/publications/sur-quelques-resultats-recents-de-transcendance.
MR http://msp.org/idx/mr/1144324
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0762.11027

[R] K. Ramachandra – « Contributions to the theory of transcendental numbers. I, II », *Acta Arith.* **14** (1967/68), 65-72 and 73–88.

DOI http://dx.doi.org/10.4064/aa-14-1-73-88.
MR http://msp.org/idx/mr/0224566
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0176.33101

[S] O. Sonebi – « Réponse R868 à la question posée dans RMS 125 4 », *Revue de la Filière Mathématiques* (octobre 2020), 131e année no. 1, p. 60–62.
https://www.rms-math.com/index.php?option=com_staticxt&Itemid=172&staticfile=RMS131-112.html.

[W1] M. Waldschmidt – *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*, IMS Report, vol. **116**, Institute of Mathematical Sciences, Madras, 1992, With an appendix by Michel Laurent.
https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/LIL.pdf.
MR http://msp.org/idx/mr/1613746
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0809.11038

[W2] — , *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. **326**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
DOI http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-11569-5.
MR http://msp.org/idx/mr/1756786
Zbl http://msp.org/idx/zbl/0944.11024

Deux références supplémentaires :

K.Senthil Kumar & Veekesh Kumar & R.Thangadurai– « On a Problem of Alaoglu and Erdős », *Resonance* (2018), vol. 23, No.7, 749–758.
https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/023/07/0749-0758

M. Waldschmidt – « Six Exponentials Theorem - Irrationality », *Resonance* (2022) vol. 27, No.4, 599–607.
https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/027/04/0599-0607

Michel WALDSCHMIDT
Sorbonne Université and Université Paris Cité
CNRS, IMJ-PRG
F – 75005 Paris, France
michel.waldschmidt@imj-prg.fr
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt