



**HAL**  
open science

# Étude d'un opérateur d'agrégation à la baisse en logique multivalente

Adrien Revault d'Allonnes

► **To cite this version:**

Adrien Revault d'Allonnes. Étude d'un opérateur d'agrégation à la baisse en logique multivalente. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA) 2019, Nov 2019, Alès, France. hal-04023893

**HAL Id: hal-04023893**

**<https://hal.science/hal-04023893>**

Submitted on 10 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude d'un opérateur d'agrégation à la baisse en logique multivalente

## Study of an abating aggregation operator in many-valued logic

Adrien Revault d'Allonnes<sup>1</sup>

Marie-Jeanne Lesot<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Paris 8, Vincennes à Saint-Denis, FR-93526, Saint-Denis, France, ara@up8.edu

<sup>2</sup> Sorbonne Université, LIP6, F-75005, Paris, France, Marie-Jeanne.Lesot@lip6.fr

### Résumé :

Cet article présente un opérateur d'agrégation paramétrique, à l'origine conçu pour la cotation de l'information, dans le cadre formel de la logique multivalente. Il est étudié ici hors de ce contexte applicatif, à travers l'examen de configurations particulières soulignant l'étendue de ses capacités, des extrêmes minimal et maximal ; montrant certaines des t-normes qu'il permet de représenter, comme cas particuliers ; et comment il permet des comportements intermédiaires riches et flexibles.

### Mots-clés :

Opérateur d'agrégation, logique multivalente.

### Abstract:

This paper considers a parametrised aggregation operator, originally introduced in the formal framework of many-valued logic and in the applicative context of information scoring. It studies this operator outside this applicative context, looking at specific configurations of interest : highlighting the wide range of its instantiations, from the lower to the upper extreme cases ; showing some t-norms it can encode, as specific cases ; and also how it allows rich and flexible intermediate behaviours.

### Keywords:

Aggregation operator, many-valued logic.

## 1 Introduction

L'agrégation est un vaste domaine de recherche, en particulier dans le cadre de la logique floue [2, 6], qui a conduit à une large palette d'opérateurs, ainsi que de classifications de leurs propriétés. On peut par exemple distinguer les opérateurs logiques, exprimant la conjonction, la disjonction ou l'implication, de compromis ou encore hybrides [4]. Dans le cadre de la logique multivalente [7, 5], l'agrégation est principalement effectuée par des opérateurs logiques [5] ou arithmétiques [9].

Cet article propose d'étudier une autre forme d'opérateur multivalent, nommé AbOp, introduit dans [8] pour la tâche de cotation d'infor-

mation : celle-ci [3] mesure la qualité des informations, le plus souvent par un ensemble de critères variés [3, 1] agrégés en un score final. Dans l'approche proposée dans [8], la qualité d'une information est évaluée par un score dont la valeur évolue lors de l'intégration successive de différents critères : ces facteurs sont projetés sur le score courant, conduisant à une valeur mise à jour, agrégeant la valeur précédente et le critère considéré. Ces corrections sont faites selon deux types de comportement, cet article considère le cas dit "à la baisse" : le résultat diminue la valeur courante, ou, au plus, la laisse inchangée.

Cet article étudie l'opérateur AbOp d'un point de vue théorique, en dehors du cadre applicatif dans lequel il a été introduit. Après en avoir rappelé la définition, l'article examine formellement les contraintes sur les paramètres qui permettent d'obtenir le comportement souhaité, et propose une représentation matricielle. Il étudie ensuite des cas particuliers, illustrant la grande variété d'opérateurs qu'AbOp permet de représenter, incluant les cas extrêmes, des t-normes classiques et des opérateurs intermédiaires plus riches.

## 2 Définition de l'opérateur AbOp

La logique multivalente [7, 5] utilise  $M$  degrés de vérité munis d'un ordre total,  $\mathcal{L}_M = \{\tau_0, \dots, \tau_{M-1}\}$ , où  $\tau_\alpha \leq \tau_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ . Ces degrés couvrent  $M$  niveaux de vérité, de  $\tau_0$ , 'faux', à  $\tau_{M-1}$ , 'vrai'. De façon générale, un opérateur d'agrégation est alors défini comme une fonction  $F : \mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M \longrightarrow \mathcal{L}_M$ .

## 2.1 Comportement souhaité

Dans le cadre applicatif considéré dans [8], non détaillé ici, l'opérateur d'agrégation doit présenter un effet à la baisse par rapport à son premier argument et être croissant en ses deux arguments. Formellement, ces trois contraintes s'écrivent, pour tout  $\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma \in \mathcal{L}_M$  :

$$C_1 : F(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_\alpha \quad (1)$$

$$C_2 : \text{si } \tau_\alpha \leq \tau_\beta, F(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq F(\tau_\beta, \tau_\gamma) \quad (2)$$

$$C_3 : \text{si } \tau_\alpha \leq \tau_\beta, F(\tau_\gamma, \tau_\alpha) \leq F(\tau_\gamma, \tau_\beta) \quad (3)$$

Comme souligné dans [8], les opérateurs d'agrégation conjonctifs, comme les t-normes, satisfont ces propriétés. Toutefois, ils imposent également d'autres contraintes, telles que la commutativité, l'associativité et un élément neutre,  $\tau_{M-1}$ . Celles-ci sont superflues dans le contexte de la cotation d'information et conduiraient à limiter l'expressivité du modèle. Une définition générique de l'opérateur est donc proposée dans [8].

Réciproquement, les contraintes  $C_1$  à  $C_3$  excluent d'autres opérateurs, comme les implications (décroissantes en leur premier argument), ou les disjonctions, les opérateurs de compromis ou hybrides, qui ne possèdent pas d'effet à la baisse.

## 2.2 Définition formelle

Afin d'être générique, l'opérateur AbOp [8] dépend d'un ensemble de paramètres

$$\kappa \subseteq \{\kappa_\alpha^\gamma \in \mathcal{L}_M, \alpha, \gamma \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket\} \quad (4)$$

$$\text{tel que } \forall \alpha, \exists \gamma, \kappa_\alpha^\gamma = \tau_{M-1} \quad (5)$$

et est formellement défini comme

$$F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \quad (6)$$

Cette définition est discutée et illustrée ci-dessous, graphiquement et par des exemples.

La condition exprimée par l'éq. (5) garantit que l'éq. (6) est bien définie, c'est-à-dire que

$F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$  peut être calculée : il est nécessaire que, pour tout  $\alpha, \beta$ , l'ensemble dont le minimum est calculé soit non vide. Comme pour tout  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\tau_\beta \leq \tau_{M-1} = \kappa_\alpha^\gamma$  pour un  $\gamma$  d'après l'éq. (5), la fonction peut être calculée.

**Représentation graphique.** La figure 1, reproduite de [8], illustre une telle fonction dans le cas particulier de la logique à cinq valeurs  $\mathcal{L}_5$  : les disques alignés horizontalement représentent les degrés de  $\mathcal{L}_5$ , de  $\tau_0$  à  $\tau_4$ , correspondant aux valeurs de  $\tau_\alpha$  ou du résultat. Les étiquettes sur les arcs représentent les paramètres  $\kappa_\alpha^\gamma$ . Le calcul de  $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$  consiste alors à partir du disque étiqueté par  $\tau_\alpha$  et à suivre les arcs dont les étiquettes  $\kappa_\alpha^\gamma$  sont supérieures ou égales à  $\tau_\beta$ . Le résultat est alors la plus petite valeur accessible  $\tau_\gamma$ , c'est-à-dire le disque pointé le plus à gauche tel que  $\kappa_\alpha^\gamma \geq \tau_\beta$ .

Les figures 2 à 5 illustrent diverses instanciations de ce schéma général et sont commentées dans la section 4. A titre d'exemple, dans le cas de la figure 3, le calcul de  $F(\tau_3, \tau_2)$  part du disque étiqueté  $\tau_3$  et considère les arcs dont l'étiquette est supérieure à  $\tau_\beta = \tau_2$ , c'est-à-dire ceux qui pointent vers  $\tau_3$  et  $\tau_2$ . Le résultat est la valeur minimale, soit  $F_{\kappa_Z}(\tau_3, \tau_2) = \tau_2$ . Avec l'instanciation représentée en haut de la fig. 2, un unique arc sort de  $\tau_3$ , pointant vers  $\tau_0$ . Il satisfait la contrainte puisque  $\kappa_3^0 = \tau_4 \geq \tau_2$  : le résultat est donc  $F_{\kappa_D}(\tau_3, \tau_2) = \tau_0$ .

**Interprétation des paramètres.** Les paramètres  $\kappa$  peuvent donc être interprétés comme des conditions sur les transitions entre la valeur initiale  $\tau_\alpha$  et la valeur de résultat  $\tau_\gamma$  : la transition est autorisée si la valeur  $\tau_\beta$  qui doit être agrégée avec  $\tau_\alpha$  est inférieure au coût, c'est-à-dire si  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma$ . Quand plusieurs transitions sont possibles, celle qui conduit à la valeur la plus faible, est choisie. Dans le cadre de la cotation de l'information, les paramètres  $\kappa$  contrôlent l'ampleur de l'effet à la baisse du nouveau critère sur la mise à jour du score courant.

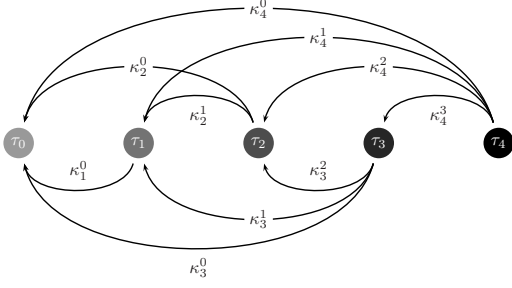


Figure 1 – Exemple de  $F(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ , dans  $\mathcal{L}_5$  [8].

### 3 Contraintes sur les paramètres

La définition générale donnée dans les équations (4) à (6) suggère que  $M^2$  paramètres doivent être spécifiés pour une instantiation de AbOp. Ils peuvent être stockés dans une matrice carrée, qui doit contenir au moins une occurrence de  $\tau_{M-1}$  par ligne, du fait de la contrainte donnée dans l'éq. (5).

Toutefois, la forme de la fonction donnée dans l'éq. (6) et les contraintes  $C_1$  à  $C_3$  spécifiant le comportement souhaité restreignent les choix, et donc le nombre de paramètres requis. Cette restriction est cruciale puisque, sinon, il serait plus pertinent et moins coûteux de définir directement et explicitement les valeurs de  $F(\tau_\alpha, \tau_\beta)$  pour toutes les paires  $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ .

Cette section discute et formalise les restrictions à considérer, ainsi que leurs conséquences sur la représentation matricielle.

#### 3.1 Non-redondance des paramètres

Une contrainte d'ordre est d'abord imposée aux paramètres, de telle sorte que  $\forall \tau_\alpha, \tau_\gamma, \tau_\delta \in \mathcal{L}_M$

$$\text{si } \tau_\gamma \leq \tau_\delta, \text{ alors } \kappa_\alpha^\gamma < \kappa_\alpha^\delta \quad (7)$$

Comme prouvé dans la proposition 1 ci-dessous, cette contrainte de monotonie ne restreint pas l'ensemble des opérateurs que l'on peut définir et elle permet de simplifier les preuves des propriétés des sections suivantes

**Théorème 1** *Soit  $\kappa$  un ensemble de paramètres tel qu'il existe  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  tels que*

$\tau_\gamma \leq \tau_\delta$  et  $\kappa_\alpha^\gamma \geq \kappa_\alpha^\delta$  et soit  $\kappa' = \kappa \setminus \{\kappa_\alpha^\delta\}$ .  
Alors  $F_\kappa = F_{\kappa'}$ .

*Démonstration* : de façon informelle, le principe est que,  $\forall \tau_\alpha, \tau_\beta$ , si  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$ , alors  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma$ . Comme la valeur minimale est conservée par définition,  $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) \neq \tau_\delta$  : la valeur  $\delta$  n'est pas sélectionnée, car  $\gamma$  est un candidat inférieur.

Formellement, pour tout  $\tau_\alpha, \tau_\beta$ , si  $\tau_\beta > \kappa_\alpha^\delta$ , alors  $\kappa_\alpha^\delta$  n'est pas impliqué dans le calcul de  $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ , aussi  $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) = F_{\kappa'}(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ . Si, au contraire,  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$ , alors

$$\begin{aligned} F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) &= \min\{\tau_u \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^u\} \\ &= \min(\min\{\tau_u \in \mathcal{L}_M \setminus \{\tau_\delta\} \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^u\}, \tau_\delta) \\ &= \min(F_{\kappa'}(\tau_\alpha, \tau_\beta), \tau_\delta) = F_{\kappa'}(\tau_\alpha, \tau_\beta) \end{aligned}$$

La seconde ligne isole, dans le minimum, la valeur spéciale  $\tau_\delta$  qui est candidate puisque, par hypothèse,  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$ . La dernière égalité vient de ce que, comme  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$ ,  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma$ , aussi  $F_{\kappa'}(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_\gamma$ , qui est inférieur à  $\tau_\delta$ , par hypothèse. ■

Aussi, dans la suite de l'article, on fait l'hypothèse que les valeurs de  $\kappa_\alpha^\gamma$  sont ordonnées selon leurs exposants, pour chaque  $\alpha$ .

**Corollaire.** La propriété précédente a deux conséquences d'intérêt, respectivement pour les valeurs élevées et les valeurs faibles. En effet, elle conduit d'abord à ce que, si  $\kappa_\alpha^\gamma = \tau_{M-1}$ , alors les valeurs de tout  $\kappa_\alpha^\delta$  pour  $\delta > \gamma$  peuvent être omises : par monotonie, elles ne peuvent qu'être égales à  $\tau_{M-1}$  aussi, et seraient, donc, redondantes. Plus généralement, pour tout  $\alpha$ , il est possible de ne conserver qu'une seule occurrence de chaque valeur observée parmi les  $\kappa_\alpha^\gamma$  : les autres, associées à des  $\gamma$  supérieurs, sont redondantes.

Pour les valeurs faibles, cette propriété implique également que, pour tout  $\alpha$ , une unique occurrence de  $\tau_0$  doit apparaître parmi les  $\kappa_\alpha^\gamma$ , celle associée au plus petit  $\gamma$ . Les valeurs de  $\kappa_\alpha^\delta$  pour des  $\delta$  inférieurs n'ont alors pas de valeur acceptable et doivent être considérées comme non définies.

**Représentation matricielle.** La représentation matricielle des  $\kappa$  peut donc être contrainte : par ligne, une unique occurrence de chaque valeur observée est imposée. De plus, les cellules associées à des valeurs redondantes ou non définies peuvent être laissées vides : la matrice est donc très creuse.

### 3.2 Effet à la baisse

Le comportement à la baisse souhaité, exprimé par la contrainte  $C_1$ , impose également des contraintes sur les paramètres de AbOp, raffinant la condition exprimée dans l'éq. (5) :

**Théorème 2**  $F_\kappa$  satisfait la contrainte  $C_1$  définie dans l'éq. (1) ssi  $\kappa$  est tel que

$$\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \exists \gamma^* \text{ tel que } \tau_{\gamma^*} \leq \tau_\alpha \text{ et } \kappa_\alpha^{\gamma^*} = \tau_{M-1}$$

Dans le théorème, la dépendance entre  $\gamma^*$  et  $\alpha$  n'est pas notée explicitement, afin de simplifier les notations.

*Démonstration* : Si  $F_\kappa$  présente l'effet à la baisse, pour tout  $\tau_\alpha$ , la contrainte  $C_1$  pour  $\tau_{M-1}$  impose que  $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_{M-1}) = \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \tau_{M-1} \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \leq \tau_\alpha$ . Aussi, il doit exister  $\gamma^*$  tel que  $\tau_{M-1} \leq \kappa_\alpha^{\gamma^*}$  et  $\tau_{\gamma^*} \leq \tau_\alpha$ . La première de ces inégalités impose que  $\kappa_\alpha^{\gamma^*} = \tau_{M-1}$ .

Réciproquement, si  $\kappa$  satisfait l'équation ci-dessus, alors pour tout  $\tau_\alpha$  et  $\tau_\beta$ , la valeur  $\gamma^*$  associée à  $\tau_\alpha$  garantit que  $F(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_{\gamma^*}$ . En effet,  $\tau_\beta \leq \tau_{M-1} = \kappa_\alpha^{\gamma^*}$  implique que  $\gamma^*$  fait partie de l'ensemble des candidats, aussi  $F(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_{\gamma^*}$ . Comme, par définition,  $\tau_{\gamma^*} \leq \tau_\alpha$ , on en conclut que  $F(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_\alpha$ . ■

Cette condition exprime que, pour tout  $\alpha$ , l'unique occurrence de  $\tau_{M-1}$  dans l'ensemble des  $\kappa_\alpha^\gamma$  (cf section précédente) est associée à une valeur inférieure ou égale à  $\tau_\alpha$ . Dans la représentation graphique de la figure 1, cela signifie qu'il existe au moins un arc *vers la gauche*, étiqueté  $\tau_{M-1}$ , à partir de tout disque.

De plus, par non-redondance, cette propriété implique qu'il n'y a pas d'arc vers la droite.

**Conséquence sur la représentation matricielle.** Le théorème précédent implique que, sur chaque ligne, l'unique occurrence de  $\tau_{M-1}$  est située dans la partie située sous la diagonale (incluse). Comme discuté dans la section 3.1, il n'est pas nécessaire de donner les valeurs situées dans des colonnes à droite de  $\tau_{M-1}$ . Aussi, la matrice est triangulaire inférieure, contenant au plus  $M(M+1)/2$  valeurs.

### 3.3 Monotonie dans le premier argument

Au niveau matriciel, les contraintes précédentes s'appliquent aux lignes individuellement. Les contraintes de monotonie imposent des contraintes entre les lignes.

La croissance dans le premier argument,  $C_2$  exprimée dans l'éq. (2), impose les conditions d'ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1, \forall \alpha_2 \text{ tels que } \alpha_1 \leq \alpha_2, \quad \forall \beta \\ \exists \gamma^* \text{ tel que } \tau_\beta \leq \kappa_{\alpha_1}^{\gamma^*} \\ \text{et } \gamma^* \leq \gamma \text{ pour tout } \gamma \text{ tel que } \tau_\beta \leq \kappa_{\alpha_2}^\gamma \end{aligned} \quad (8)$$

Cette contrainte est une réécriture directe de  $C_2$  en utilisant la définition de  $F_\kappa$ , elle ne nécessite donc pas de démonstration.

**Conséquence sur la représentation matricielle.** Cette contrainte signifie que, pour une position de référence  $a_{ij}$  dans la matrice, toutes les valeurs situées dans la sous-matrice gauche (soit  $a_{kl}$  tels que  $k \geq i, l \leq j$ ) sont inférieures à  $a_{ij}$ .

Dans le cas particulier où  $\tau_\beta = \tau_{M-1}$ , cette contrainte implique qu'il doit exister  $\gamma^*$  tel que  $\kappa_{\alpha_1}^{\gamma^*} = \tau_{M-1}$  et  $\gamma^*$  est inférieur ou égal à tous les  $\gamma$  pour lesquels  $\kappa_{\alpha_2}^{\gamma^*} = \tau_{M-1}$  : la valeur  $\tau_{M-1}$  située sur la ligne  $\alpha_1$  doit être à gauche des valeurs de  $\tau_{M-1}$  sur la ligne  $\alpha_2$ .

Dans l'autre cas extrême où  $\tau_\beta = \tau_0$ , la contrainte implique qu'il ne peut y avoir de valeur indéfinie dans la ligne  $\alpha_1$  si la valeur est

définie dans la ligne  $\alpha_2$ .

### 3.4 Monotonie dans le second argument

La croissance dans le second argument exprimée par la contrainte  $C_3$  donnée dans l'éq. (3) n'impose pas de contrainte, elle découle directement de la définition. En effet, pour tout  $\alpha, \beta_1$  et  $\beta_2$  tel que  $\beta_1 \leq \beta_2$ , on a, successivement :

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_2} \leq \kappa_\alpha^\gamma &\Rightarrow \tau_{\beta_1} \leq \kappa_\alpha^\gamma \\ \{\tau_\gamma | \tau_{\beta_2} \leq \kappa_\alpha^\gamma\} &\subseteq \{\tau_\gamma | \tau_{\beta_1} \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \\ \min\{\tau_\gamma | \tau_{\beta_2} \leq \kappa_\alpha^\gamma\} &\geq \min\{\tau_\gamma | \tau_{\beta_1} \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \\ F(\tau_\alpha, \tau_{\beta_2}) &\geq F(\tau_\alpha, \tau_{\beta_1}) \end{aligned}$$

### 3.5 Résumé des contraintes matricielles

En récapitulant les contraintes précédentes sur les paramètres  $\kappa$ , on déduit que la matrice associée est une matrice triangulaire inférieure creuse, dont chaque ligne contient exactement une occurrence de  $\tau_{M-1}$  et telle que les valeurs sur chaque ligne sont uniques et croissantes. De plus, les valeurs de deux lignes consécutives satisfont également une contrainte d'ordre.

Ainsi, d'un point de vue matriciel, l'instanciation de AbOp consiste à choisir, dans chaque ligne, la position de  $\tau_{M-1}$ , éventuellement celle de  $\tau_0$ , puis les valeurs intermédiaires, en satisfaisant les contraintes d'ordre, certaines cellules pouvant rester vides.

## 4 Configurations spécifiques

Cette section étudie l'opérateur AbOp générique précédent par des exemples spécifiques d'intérêt, pour illustrer la variété de comportements qu'il offre : deux cas extrêmes sont d'abord considérés, qui constituent les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble d'opérateurs couverts; des instanciations basées sur des matrices plus pleines sont ensuite étudiées, dont on montre qu'elles correspondent à des implémentations de t-normes classiques. Enfin, des comportements

intermédiaires, soulignant la richesse et la flexibilité de l'opérateur, sont considérés.

Dans chacun des cas, les représentations matricielle et graphique (dans le cas de  $\mathcal{L}_5$ ) sont données et des propriétés et caractéristiques sont discutées.

### 4.1 Borne inférieure : cas drastique

La borne inférieure est obtenue lorsque la valeur  $\tau_{M-1}$  requise dans chaque ligne est affectée à la plus petite valeur possible, c'est-à-dire la première colonne :

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}_M, \quad \kappa_\alpha^0 = \tau_{M-1} \quad (9)$$

soit  $\kappa_D = \begin{bmatrix} \tau_{M-1} \\ \tau_{M-1} \\ \vdots \\ \tau_{M-1} \end{bmatrix}$

En effet, aucune autre valeur n'est alors nécessaire. La représentation graphique pour  $\mathcal{L}_5$  est donnée sur la partie supérieure de la fig. 2. Cette configuration est drastique car elle vérifie

### Théorème 3

$$\forall \tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \quad F_{\kappa_D}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \tau_0$$

*Démonstration :* Pour tout  $\tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M$ ,  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^0 = \tau_{M-1}$ , aussi 0 est un candidat, qui satisfait la contrainte de minimalité  $F_{\kappa_D}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min(\min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \setminus \{\tau_0\} | \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\}, \tau_0) = \tau_0$ . ■

Aussi cette configuration fournit toujours le résultat  $\tau_0$  : elle a bien sûr une expressivité très limitée, mais permet de fixer explicitement une borne inférieure à l'ensemble des opérateurs qu'AbOp permet de représenter.

### 4.2 Borne supérieure

La borne supérieure est, au contraire, obtenue quand  $\tau_{M-1}$  est affectée à la plus grande valeur possible, soit, d'après le théorème 2

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}_M, \quad \kappa_\alpha^\alpha = \tau_{M-1} \quad (10)$$

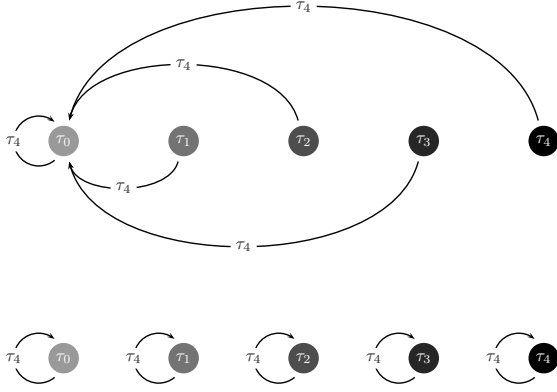


Figure 2 – Bornes inférieure  $F_{\kappa_D}$  (en haut) et supérieure  $F_{\kappa_U}$  (en bas), cf sections 4.1 et 4.2.

et toutes les autres valeurs sont laissées non définies. Cela correspond à la matrice diagonale

$$\kappa_U = \begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & \\ & \tau_{M-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$$

Sa représentation graphique dans le cas  $\mathcal{L}_5$  est donnée par la partie inférieure de la fig. 2.

Cet opérateur peut être simplifié en

#### Théorème 4

$$\forall \tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \quad F_{\kappa_U}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \tau_\alpha$$

*Démonstration* : pour tout  $\tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M$ ,  $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\alpha = \tau_{M-1}$ , et cette valeur  $\gamma = \alpha$  est l'unique candidat puisque les autres ne sont pas définies. ■

Cet opérateur d'agrégation restreint AbOp à une fonction identité en son premier argument : c'est en effet la borne supérieure d'un opérateur présentant un comportement à la baisse. Aussi  $F_{\kappa_U}$  constitue l'autre borne de l'ensemble des opérateurs qu'AbOp permet de représenter.

### 4.3 T-norme de Zadeh

Un cas moins extrême que les cas précédents est obtenu en considérant une matrice triangulaire

pleine, ce qui impose que  $\tau_{M-1}$  soit mis sur la diagonale. On considère ici le cas où

$$\kappa_\alpha^\alpha = \tau_{M-1} \quad \text{et} \quad \kappa_\alpha^\gamma = \tau_\gamma \quad \text{for } \gamma < \alpha \quad (11)$$

Cette configuration signifie qu'excepté pour les cas  $\kappa_\alpha^\alpha$ , la transition entre  $\tau_\alpha$  et  $\tau_\gamma$  ne dépend que de la destination  $\tau_\gamma$ . Ce comportement peut être interprété comme une effet à la baisse régulier, qui ne dépend pas de la valeur à abattre  $\tau_\alpha$ .

Elle correspond à la matrice dont les valeurs sous-diagonales sont constantes par colonne

$$\kappa_Z = \begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_0 & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_{M-1} & & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_{M-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$$

illustrée graphiquement par la fig. 3 pour  $\mathcal{L}_5$ . Chaque ligne de la matrice est obtenue en supprimant, de la ligne inférieure, la dernière valeur sous la diagonale, à partir de la dernière ligne qui couvre toute l'échelle  $\mathcal{L}_M$ .

Cette configuration correspond à un cas de référence : elle constitue une implémentation de la t-norme de Zadeh. En effet,

#### Théorème 5

$$\forall \tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \quad F_{\kappa_Z}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min(\tau_\alpha, \tau_\beta)$$

*Démonstration* :

$$\begin{aligned} F_{\kappa_Z}(\tau_\alpha, \tau_\beta) &= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \\ &= \min(\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \gamma < \alpha, \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma = \tau_\gamma\} \\ &\quad \cup \{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \gamma = \alpha, \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\alpha = \tau_{M-1}\} \\ &\quad \cup \{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \gamma > \alpha, \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\}) \\ &= \min(\{\tau_\beta\} \cup \{\tau_\alpha\} \cup \emptyset) \end{aligned}$$

En effet, comme discuté dans la section 3, quand  $\tau_\gamma > \tau_\alpha$ ,  $\kappa_\alpha^\gamma$  sont indéfinis et ne conduisent donc pas à des candidats. ■

Cette configuration montre qu'AbOp généralise des opérateurs classiques.

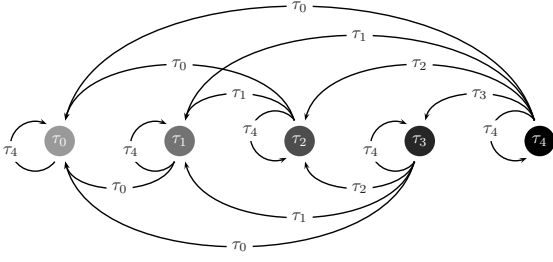


Figure 3 – Cas de référence  $F_{\kappa_Z}$  cf section 4.3.

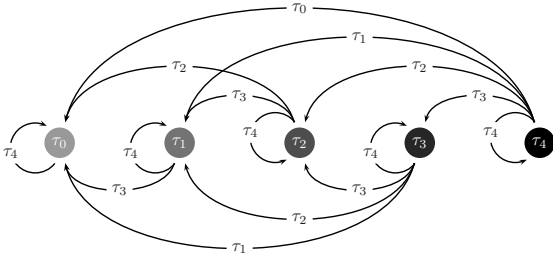


Figure 4 – Cas de référence  $F_{\kappa_L}$  cf section 4.4.

#### 4.4 Seuils comme coût de transition : t-norme de Łukasiewicz

Une autre matrice triangulaire pleine est obtenue lorsque, pour une dernière ligne complète, chaque ligne est définie à partir de la suivante en supprimant le premier élément de la ligne au lieu du dernier. Formellement, elle s'écrit

$$\kappa_\alpha^\gamma = \tau_{M-1-(\alpha-\gamma)} \text{ pour } \gamma \leq \alpha \quad (12)$$

qui correspond bien à la matrice

$$\kappa_L = \begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_{M-4} & \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$$

et à la représentation graphique donnée sur la fig. 4. Elle peut être interprétée en termes de coût de transition : le coût est défini par la différence entre  $\tau_\alpha$  et  $\tau_\gamma$ , conduisant ainsi à un effet à la baisse linéaire.

Cette configuration correspond de plus également à un cas de référence, car elle définit

l'instanciation d'AbOp représentant la t-norme de Łukasiewicz :

#### Théorème 6

$$\forall \tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \quad F_{\kappa_L}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \tau_{\max(\alpha+\beta-(M-1), 0)}$$

*Démonstration* : Pour tout  $\tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M$ ,

$$F_{\kappa_L}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\}$$

$$= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \gamma \leq \alpha \text{ et } \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\}$$

$$= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \gamma \leq \alpha \text{ et}$$

$$\tau_\beta \leq \tau_{M-1-(\alpha-\gamma)}\}$$

$\tau_\beta \leq \tau_{M-1-\alpha+\gamma}$  est équivalent à  $\gamma \geq \alpha + \beta - (M - 1)$ , par définition, ce qui conduit pour la plus petite valeur  $\tau_\gamma$  à  $\tau_{\alpha+\beta-(M-1)}$  si  $\alpha + \beta \geq (M - 1)$ . Sinon, la plus petite valeur est  $\tau_0$ . ■

#### 4.5 Exemples intermédiaires

Les exemples discutés ci-dessus sont des cas extrêmes d'expressivité faible, ou des t-normes classiques. Cette section illustre la flexibilité de l'opérateur AbOp qui offre de nombreuses autres configurations.

La figure 5 représente deux cas, pour  $\mathcal{L}_5$ , qui ne diffèrent que par la valeur de  $\kappa_4^2$ . Leurs matrices respectives sont (les colonnes 2 et 4 sont vides)

$$\kappa_{I_1} = \begin{bmatrix} \tau_4 & & & & \\ \tau_4 & & & & \\ \tau_3 & \tau_4 & & & \\ & \tau_4 & & & \\ & \tau_3 & \tau_4 & & \end{bmatrix} \quad \kappa_{I_2} = \begin{bmatrix} \tau_4 & & & & \\ \tau_4 & & & & \\ \tau_3 & \tau_4 & & & \\ & \tau_4 & & & \\ & \tau_1 & \tau_4 & & \end{bmatrix}$$

Ces 2 opérateurs ont la particularité d'exclure  $\tau_1$  et  $\tau_3$  des résultats possibles, qui appartiennent à  $\{\tau_0, \tau_2, \tau_4\}$  : l'agrégation qu'ils effectuent simplifie l'échelle, qui passe de 5 à 3 valeurs.

$F_{I_1}$  implémente un effet à la baisse sévère : excepté dans les cas rares où  $\tau_\alpha \in \{\tau_2, \tau_4\}$  et  $\tau_\beta = \tau_4$ , le résultat est strictement inférieur à  $\tau_\alpha$ . Le seul cas où  $F_{I_1}(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \tau_4$  est obtenu quand  $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau_4$ . Si  $\tau_\beta \neq \tau_4$ ,  $F_{I_1}(\tau_4, \tau_\beta)$  décroît fortement, à  $\tau_2$ . Cet opérateur est donc



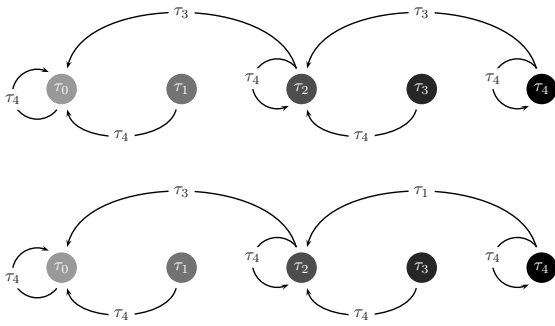


Figure 5 –  $F_{I_1}$  (en haut) et  $F_{I_2}$  (en bas) cf section 4.5.

plus sévère que les t-normes précédentes, qui ont  $\tau_{M-1}$  pour élément neutre. Il est néanmoins moins sévère que l’opérateur drastique, offrant un comportement sémantiquement plus riche.

$F_{I_2}$  est significativement moins sévère : quand  $\tau_\alpha = \tau_4$ , le résultat est aussi  $\tau_4$  sauf si  $\tau_\beta$  est vraiment faible, plus précisément  $\tau_1$  ou  $\tau_0$ .  $F_{I_2}$  permet de représenter un effet à la baisse subtil, qui a la particularité de ne pas être régulier : une valeur intermédiaire de  $\tau_\beta$  a un effet neutre sur une valeur élevée de  $\tau_\alpha$ , mais provoque une décroissance forte si  $\tau_\alpha$  est inférieur ou égal à  $\tau_2$ .  $F_{I_2}$  peut être caractérisé comme offrant un effet à la baisse avec accélération. Dans le cadre de la cotation d’information, cette configuration représente une sensibilité accrue : plus le score courant est bas, plus l’effet à la baisse est marqué, lors de l’intégration d’une nouvelle dimension.

## 5 Conclusions et perspectives

Cet article a illustré la flexibilité de l’opérateur AbOp, par le biais de configurations spécifiques de ses paramètres : il généralise des opérateurs existants et permet de représenter des comportements riches dont on peut finement paramétrer l’effet à la baisse. La représentation graphique facilite son interprétation. Il constitue ainsi un outil pertinent pour l’agrégation de critères mesurés sur une échelle discrète ordonnée, au-delà d’approches purement logiques

ou arithmétiques.

Les travaux en cours visent à étendre les caractérisations formelles des configurations de AbOp qui offrent des propriétés théoriques pertinentes, comme l’associativité ou l’idempotence, ainsi qu’à examiner les t-normes qu’il permet de capturer. Les perspectives incluent la définition d’autres caractéristiques plus fines, comme une possible notion de degrés de sévérité. Une typologie enrichie des comportements à la baisse, distinguant par exemple les cas réguliers, linéaires ou accélérés est également envisagée.

## Références

- [1] C. Batini and M. Scannapieco. *Data & Information Quality*. Springer, 2016.
- [2] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, editors. *Aggregation Operators : New Trends and Applications*, volume 97. Springer, 2002.
- [3] P. Capet and T. Delavallade, editors. *Information Evaluation*. Wiley, 2014.
- [4] M. Detyniecki. *Mathematical Aggregation Operators and their Application to Video Querying*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- [5] S. Gottwald. *A treatise on many-valued logics*, volume 9. Research Studies Press, Baldock, 2001.
- [6] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2009.
- [7] N. Rescher. *Many-valued Logic*. McGraw Hill, 1969.
- [8] A. Revault d’Allonnes and M.-J. Lesot. Formalising information scoring in a multivalued logic framework. In *Proc. of IP-MU’14*, pages 314–323. Springer, 2014.
- [9] H. Seridi and H. Akdag. Approximate Reasoning for Processing Uncertainty. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII)*, 5(2) :110–118, 2001.