



HAL
open science

Démonstration d'une conjecture de Kruyswijk et Meijer sur le plus petit dénominateur des nombres rationnels d'un intervalle

Michel Balazard, Bruno Martin

► To cite this version:

Michel Balazard, Bruno Martin. Démonstration d'une conjecture de Kruyswijk et Meijer sur le plus petit dénominateur des nombres rationnels d'un intervalle. 2023. hal-04010689

HAL Id: hal-04010689

<https://hal.science/hal-04010689>

Preprint submitted on 1 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Démonstration d'une conjecture de Kruyswijk et Meijer sur le plus petit dénominateur des nombres rationnels d'un intervalle

Michel Balazard et Bruno Martin *

ABSTRACT

The average value of the smallest denominator of a rational number belonging to the interval $] (j - 1)/N, j/N]$, where $j = 1, \dots, N$, is proved to be asymptotically equivalent to $16\pi^{-2}\sqrt{N}$, when N tends to infinity. The result had been conjectured in 1977 by Kruyswijk and Meijer.

KEYWORDS

Farey sequences, Kloosterman sum
MSC classification : 11B57, 11L05

1 Introduction

Si E est une partie de \mathbb{R} , notons $q(E)$ le plus petit dénominateur d'une fraction irréductible représentant un nombre rationnel appartenant à E (avec $q(E) = \infty$ si E ne contient aucun nombre rationnel) :

$$q(E) = \min \{q \in \mathbb{N}^* ; \exists p \in \mathbb{Z}, p/q \in E\}.$$

Nous dirons que $q(E)$ est le *dénominateur minimal* de E . Observons que $E \mapsto q(E)$ est une fonction décroissante.

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, posons

$$q(t, \delta) = q(]t - \delta, t]),$$

et pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $j = 1, \dots, N$, posons

$$q_j(N) = q\left(\frac{j}{N}, \frac{1}{N}\right) = q\left(] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]\right).$$

*B. Martin est financé par le projet ANR-FWF : FWF: I 4945-N et ANR-20-CE91-0006.

On a, par exemple, $q_1(N) = N$ et $q_N(N) = 1$. On pose

$$S(N) = \sum_{j=1}^N q_j(N).$$

Kruyswijk et Meijer ont établi en 1977 l'existence de constantes positives C_1 et C_2 telles que $C_1 \leq S(N)/N^{3/2} \leq C_2$ et conjecturé que

$$S(N) \sim \frac{16}{\pi^2} N^{3/2} \quad (N \rightarrow +\infty)$$

(cf. [6]). Stewart a ensuite obtenu un premier encadrement explicite de $S(N)$ (cf. [8]), qu'il a amélioré en 2013 dans l'article [9] : pour N suffisamment grand, on a

$$1.35N^{3/2} < S(N) < 2.04N^{3/2}.$$

Nous confirmons la conjecture de Kruyswijk et Meijer sous la forme suivante.

Théorème *Pour $N \geq 2$, on a*

$$S(N) = \frac{16}{\pi^2} N^{3/2} + O(N^{4/3} \ln^2 N). \quad (1)$$

Notre démonstration repose sur une estimation récemment obtenue par Chen et Haynes, dans la prépublication [1], pour une version continue du problème : on a

$$\int_0^1 q(t, \delta) dt = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{\delta^{1/2}} + O(\ln^2 \delta) \quad (0 < \delta \leq 1/2). \quad (2)$$

En suivant l'approche proposée par Stewart, nous obtenons une formule explicite pour la différence

$$R(N) = S(N) - N \int_0^1 q(t, 1/N) dt$$

et établissons l'estimation

$$R(N) = O(N^{4/3} \ln^2 N), \quad (3)$$

en utilisant, notamment, la majoration de Weil de la valeur absolue de la somme de Kloosterman. Le théorème est alors une conséquence directe de (2) et (3).

Au lieu de choisir l'intervalle semi-ouvert $]t - \delta, t]$ pour la définition de $q(t, \delta)$, on peut considérer l'un des trois autres types d'intervalles possibles : $[t - \delta, t[$, $[t - \delta, t]$ et $]t - \delta, t[$. Le théorème reste inchangé dans tous les cas. Nous en donnons une justification au paragraphe 6.

Nous utiliserons parfois la notation d'Iverson : $[P] = 1$ si la propriété P est vraie, et $[P] = 0$ si elle est fausse. Rappelons également que la notation de Vinogradov $A \ll B$ signifie que $A = O(B)$. Enfin nous employons la notation $e(x) = \exp(2i\pi x)$.

2 Préalables arithmétiques

2.1 Fonction plafond

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x . En désignant par $\{t\}$ la partie fractionnaire du nombre réel t , on a $\lceil x \rceil = x + \{-x\}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{card}([a, b[\cap \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (a > b) \\ \lceil b \rceil - \lceil a \rceil & (a \leq b). \end{cases} \quad (4)$$

2.2 Fonction inverse modulaire

Si q est un nombre entier positif et a un nombre entier premier à q , nous noterons $\text{inv}(a, q)$ le nombre entier b tel que

$$0 < b \leq q \text{ et } ab \equiv 1 \pmod{q}.$$

Si le nombre q est clairement déterminé par le contexte, on note souvent \bar{a} au lieu de $\text{inv}(a, q)$.

2.3 Rappels sur les ensembles de Farey

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous noterons \mathcal{F}_k l'ensemble de Farey d'ordre k , constitué des nombres rationnels représentés par des fractions irréductibles p/q avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $q \leq k$, et $(p, q) = 1$ (dites « fractions de Farey d'ordre k »), muni de la relation d'ordre usuelle.

La pertinence des ensembles de Farey pour l'étude du dénominateur minimal d'une partie de \mathbb{R} repose sur l'équivalence suivante,

$$q(E) > k \Leftrightarrow E \cap \mathcal{F}_k = \emptyset. \quad (5)$$

Soit

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_M = 1 \quad (6)$$

les éléments de $\mathcal{F}_k \cap [0, 1]$. On a $M = A(k)$, où, en notant φ l'indicatrice d'Euler,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n) \quad (x > 0).$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes.

Si deux fractions de Farey d'ordre k , disons a/r et b/s avec $a/r < b/s$, sont consécutives dans \mathcal{F}_k , alors

$$br - as = 1 \quad \text{et} \quad r + s > k.$$

(Theorems 28 et 30, p. 28 de [4]). Si $0 < b/s \leq 1$, il résulte de la première de ces relations que $b = \text{inv}(r, s)$.

Par conséquent, chaque élément ρ_i de (6), avec $1 \leq i \leq M$, est déterminé par le couple, disons (r, s) , où r est le dénominateur de ρ_{i-1} et s celui de ρ_i . Lorsque i varie de $i = 1$ à $i = M$, la suite de ces couples décrit bijectivement l'ensemble

$$\{(r, s) \in \mathbb{N}^{*2} ; \max(r, s) \leq k < r + s, (r, s) = 1\}. \quad (7)$$

On observe que

$$\rho_i - \rho_{i-1} = \frac{1}{rs}.$$

Enfin, si r et s sont les dénominateurs respectifs de deux fractions consécutives, disons $\rho < \rho'$ dans \mathcal{F}_k , alors le dénominateur t de la fraction ρ'' suivant immédiatement ρ' est

$$t = \vartheta(k, r, s) = s \left\lfloor \frac{k+r}{s} \right\rfloor - r = k - s \left\{ \frac{k+r}{s} \right\} \quad (8)$$

(cf. [3], Lemma 1, p. 399, et (2), p. 400).

3 Une application de la transformation de Fourier discrète

3.1 Définition et formule d'inversion

Nous utiliserons la transformation de Fourier discrète (cf. [7], Chapter 2). Soit q un nombre entier positif, et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période q . On pose

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=1}^q f(n) e\left(-\frac{nx}{q}\right) \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

La fonction \widehat{f} est la transformée de Fourier (discrète) de f , relative à sa période q . C'est une fonction définie sur \mathbb{Z} , de période q . La transformation de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Connaître \widehat{f} et q permet de retrouver f par la formule d'inversion de Fourier,

$$f(n) = \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q \widehat{f}(x) e\left(\frac{nx}{q}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3.2 Sommes de Kloosterman et de Ramanujan

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme de Kloosterman,

$$K(a, b; q) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q e\left(\frac{an + b\bar{n}}{q}\right),$$

où $\bar{n} = \text{inv}(n, q)$. La valeur de cette somme est réelle.

Si $b = 0$, on note $K(a, 0; q) = c_q(a)$, somme de Ramanujan. C'est une fonction paire de a , qui n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction indicatrice des nombres premiers à q . On a aussi $K(0, b; q) = c_q(b)$.

Nous utiliserons l'inégalité de Weil,

$$|\mathbf{K}(a, b; q)| \leq (a, b, q)^{1/2} \tau(q) \sqrt{q},$$

où τ est la fonction « nombre de diviseurs » (cf. [5], Corollary 11.12, p. 280).

3.3 Sommes faisant intervenir l'inversion modulo q

Soit q un nombre entier positif, et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période q . Soit N un nombre entier positif. Posons

$$g(n) = [(n, q) = 1] \cdot f(N\bar{n}) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

La fonction g est de période q . Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= \sum_{n=1}^q g(n) e\left(-\frac{nx}{q}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q f(N\bar{n}) e\left(-\frac{nx}{q}\right) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q e\left(-\frac{nx}{q}\right) \left(\frac{1}{q} \sum_{y=1}^q \widehat{f}(y) e\left(\frac{N\bar{n}y}{q}\right)\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{y=1}^q \widehat{f}(y) \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q e\left(\frac{-nx + N\bar{n}y}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{y=1}^q \widehat{f}(y) \mathbf{K}(-x, Ny; q). \end{aligned}$$

Par inversion de Fourier, on en déduit

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q \widehat{g}(x) e\left(\frac{nx}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q e\left(\frac{nx}{q}\right) \left(\frac{1}{q} \sum_{y=1}^q \widehat{f}(y) \mathbf{K}(-x, Ny; q)\right) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{y=1}^q \widehat{f}(y) \sum_{x=1}^q e\left(\frac{nx}{q}\right) \mathbf{K}(-x, Ny; q). \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse supplémentaire que f est impaire, nous allons en déduire une majoration de la somme des valeurs de la fonction g sur un intervalle. Notre démonstration est inspirée de celle de l'inégalité de Pólya-Vinogradov, telle qu'elle est exposée, par exemple, dans [2], Chapter 23.

Soit I un intervalle fini de \mathbb{Z} . On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{n \in I \\ (n,q)=1}} f(N\bar{n}) = \sum_{n \in I} g(n) \\
&= \frac{1}{q^2} \sum_{n \in I} \sum_{y=1}^{q-1} \widehat{f}(y) \sum_{x=1}^q e\left(\frac{nx}{q}\right) K(-x, Ny; q) \quad (\widehat{f}(q) = \widehat{f}(0) = 0 \text{ car } \widehat{f} \text{ est impaire}) \\
&= \frac{1}{q^2} \sum_{y=1}^{q-1} \widehat{f}(y) \sum_{x=1}^q K(-x, Ny; q) \sum_{n \in I} e\left(\frac{nx}{q}\right) \\
&= \frac{\text{card } I}{q^2} \sum_{y=1}^{q-1} \widehat{f}(y) c_q(Ny) + \frac{1}{q^2} \sum_{y=1}^{q-1} \widehat{f}(y) \sum_{x=1}^{q-1} K(-x, Ny; q) \sum_{n \in I} e\left(\frac{nx}{q}\right). \tag{9}
\end{aligned}$$

D'une part, comme \widehat{f} est impaire et c_q paire, on a

$$\sum_{y=1}^{q-1} \widehat{f}(y) c_q(Ny) = 0.$$

D'autre part, en appliquant la majoration

$$\left| \sum_{n \in I} e(n\alpha) \right| \leq \frac{1}{\sin \pi \alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \tag{10}$$

et la majoration de Weil de la somme de Kloosterman, on obtient, pour $y \in \{1, \dots, q-1\}$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{x=1}^{q-1} K(-x, Ny; q) \sum_{n \in I} e\left(\frac{nx}{q}\right) \right| &\leq \tau(q) q^{1/2} \sum_{x=1}^{q-1} \frac{(x, Ny, q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)} \\
&\leq \tau(q) q^{1/2} \sum_{x=1}^{q-1} \frac{(x, q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{q-1} \frac{(x, q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)} &= \sum_{d|q} \sqrt{d} \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=d}}^{q-1} \frac{1}{\sin(\pi x/q)} \\
&\leq \sum_{d|q} \sqrt{d} \sum_{\substack{x=1 \\ d|x}}^{q-1} \frac{1}{\sin(\pi x/q)} = \sum_{d|q} \sqrt{d} \sum_{m < q/d} \frac{1}{\sin(\pi m/(q/d))} \\
&\leq \sum_{d|q} \sqrt{d} \cdot \frac{q}{d} \ln(q/d) \quad (\text{cf. [2], p. 136}) \\
&= q\beta(q), \tag{12}
\end{aligned}$$

disons, où l'on a noté β la fonction arithmétique définie par

$$\beta(q) = \sum_{d|q} \frac{\ln(q/d)}{\sqrt{d}}. \quad (13)$$

En insérant (11) et (12) dans (9), on obtient, pour f impaire, la majoration

$$\left| \sum_{\substack{n \in I \\ (n,q)=1}} f(N\bar{n}) \right| \leq \frac{\tau(q)\beta(q)}{\sqrt{q}} \sum_{y=1}^{q-1} |\widehat{f}(y)|. \quad (14)$$

Une majoration de la fonction sommatoire de la fonction arithmétique $\tau\beta$ nous sera utile :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \tau(n)\beta(n) &= \sum_{n \leq x} \tau(n) \sum_{d|n} \frac{\ln(n/d)}{\sqrt{d}} = \sum_{d \leq x} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m \leq x/d} \tau(md) \ln m \\ &\leq \sum_{d \leq x} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}} \sum_{m \leq x/d} \tau(m) \ln m \ll \sum_{d \leq x} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}} (x/d) \ln^2(x/d) \\ &\ll x \ln^2 x \quad (x \geq 1). \end{aligned} \quad (15)$$

3.4 Application à la première fonction de Bernoulli

Nous désignons par B_1 la première fonction de Bernoulli, définie par

$$B_1(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Z}) \\ \{x\} - 1/2 & (x \notin \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Proposition 1 *Soit I un intervalle de nombres entiers, q et N des nombres entiers positifs. On a*

$$\left| \sum_{\substack{n \in I \\ (n,q)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{n}}{q}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{q} \tau(q) \beta(q) \ln q, \quad (16)$$

où $\beta(q)$ a été définie en (13).

Démonstration Calculons la transformée de Fourier discrète de $f(n) = B_1(n/q)$. On a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &= \sum_{n=1}^q B_1\left(\frac{n}{q}\right) e\left(-\frac{nx}{q}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} - \frac{1}{2}\right) e\left(-\frac{nx}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q-1} n e\left(-\frac{nx}{q}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q-1} e\left(-\frac{nx}{q}\right). \end{aligned}$$

Si $q \mid x$, on trouve $\widehat{f}(x) = 0$. Si $q \nmid x$, l'identité

$$\sum_{n=1}^{q-1} nz^n = z \frac{(q-1)z^q - qz^{q-1} + 1}{(z-1)^2} \quad (z \neq 1),$$

fournit l'égalité

$$\widehat{f}(x) = \frac{e(x/q)}{1 - e(x/q)} + \frac{1}{2} = \frac{1 + e(x/q)}{2(1 - e(x/q))}.$$

Comme B_1 est impaire, et comme

$$\sum_{y=1}^{q-1} |\widehat{f}(y)| \leq \sum_{y=1}^{q-1} \frac{1}{2 \sin \pi y/q} \leq \frac{q \ln q}{2},$$

l'inégalité (14) entraîne (16). □

Pour évaluer le terme $R(N)$ dans le paragraphe 5, nous aurons recours à l'estimation suivante qui découle directement de (16) par sommation partielle.

Proposition 2 *Soit $s \in \mathbb{N}^*$, a, b deux nombres réels tels que $a < b$, et $N \in \mathbb{N}$. On a*

$$\left| \sum_{\substack{a < r \leq b \\ (r,s)=1}} (r-a) B_1\left(\frac{\bar{r}N}{s}\right) \right| \leq (b-a) \sqrt{s} \tau(s) \beta(s) \ln s.$$

4 Identité pour $S(N)$

En explicitant l'approche proposée par Stewart dans [8] et [9], nous allons obtenir une formule explicite pour la différence

$$R(N) = S(N) - N \int_0^1 q(t, 1/N) dt$$

(cf. Proposition 5 ci-dessous).

4.1 Expression de $R(N)$ au moyen des lois de répartition des dénominateurs minimaux

Nous transformons d'abord la somme $S(N)$ à l'aide d'une manipulation classique. Posons, pour $1 \leq k \leq N$,

$$\alpha_N(k) = \text{card} \{j \in \{1, \dots, N\} ; q_j(N) = k\}.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^N \alpha_N(k) = N \quad ; \quad \sum_{k=1}^N k \alpha_N(k) = S(N).$$

Posons ensuite, pour $0 \leq k \leq N$,

$$\theta_N(k) = \text{card} \{j \in \{1, \dots, N\} ; q_j(N) > k\}.$$

Ainsi,

$$\theta_N(0) = N \quad ; \quad \theta_N(N) = 0 \quad ; \quad \alpha_N(k) = \theta_N(k-1) - \theta_N(k) \quad (1 \leq k \leq N).$$

Par conséquent,

$$S(N) = \sum_{k=1}^N k \alpha_N(k) = \sum_{k=1}^N k (\theta_N(k-1) - \theta_N(k)) = \sum_{k=0}^N \theta_N(k). \quad (17)$$

En posant maintenant, pour $0 \leq k \leq N$,

$$\nu_N(k) = \text{mes} \{t \in [0, 1[; q(t, 1/N) > k\}$$

(où mes désigne la mesure de Lebesgue), une démonstration analogue fournit l'égalité

$$\int_0^1 q(t, 1/N) dt = \sum_{k=0}^N \nu_N(k).$$

En remarquant que $\theta_N(0) - N\nu_N(0) = N - N = 0$, on obtient par différence la relation

$$R(N) = \sum_{k=1}^N (\theta_N(k) - N\nu_N(k)). \quad (18)$$

4.2 Sous-intervalles de $]0, 1]$ ne contenant aucun terme d'une suite donnée

Pour donner une expression de la différence $\theta_N(k) - N\nu_N(k)$, nous utiliserons le lemme suivant.

Proposition 3 *Soit $M, N \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 0$, et F un ensemble de $M + 1$ points du segment $[0, 1]$, dont les éléments, notés ρ_i , $i = 0, \dots, M$, vérifient*

$$\rho_0 = 0 < \rho_1 < \dots < \rho_M = 1.$$

Soit

$$X(\delta) = \{t \in]0, 1] ;]t - \delta, t] \cap F = \emptyset\}.$$

On a

$$X(\delta) = \bigcup_{i=1}^M [\rho_{i-1} + \delta, \rho_i[$$

et

$$\left\{ j \in \{1, \dots, N\} ; \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \cap F = \emptyset \right\} = \bigcup_{i=1}^M ([N\rho_{i-1} + 1, N\rho_i[\cap \mathbb{Z})$$

(où l'intervalle $[a, b[$ est vide si $a \geq b$).

Démonstration

D'une part, chaque intervalle $[\rho_{i-1} + \delta, \rho_i[$ est inclus dans l'ensemble $X(\delta)$. D'autre part, si $t \in X(\delta)$, on a $t < \rho_M = 1$; soit i_0 le plus petit indice i tel que $t < \rho_i$. On a $i_0 > 0$ et $\rho_{i_0-1} + \delta \leq t$ (sinon on aurait $\rho_{i_0-1} \in]t - \delta, t]$). Par conséquent $t \in [\rho_{i_0-1} + \delta, \rho_{i_0}[$ et la première égalité ensembliste est démontrée.

Pour la seconde, on observe que

$$j \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \cap F = \emptyset \Leftrightarrow j \in NX(1/N) \cap \mathbb{Z}. \quad \square$$

Proposition 4 *Sous les hypothèses de la proposition 3, on a*

$$\begin{aligned} \text{card} \left\{ j \in \{1, \dots, N\} ; \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \cap F = \emptyset \right\} = \\ N \text{mes}(X(1/N)) + \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N}}^M (\{-N\rho_i\} - \{-N\rho_{i-1}\}). \end{aligned}$$

Démonstration

En notant que les intervalles $[N\rho_{i-1} + 1, N\rho_i[$ de la proposition 3 (dont certains peuvent être vides) sont deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned} \text{card} \left\{ j \in \{1, \dots, N\} ; \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \cap F = \emptyset \right\} = \\ \sum_{i=1}^M \text{card}([N\rho_{i-1} + 1, N\rho_i[\cap \mathbb{Z}) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N}}^M ([N\rho_i] - [N\rho_{i-1}] - 1) \quad (\text{d'après (4)}) \\ = N \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N}}^M (\rho_i - \rho_{i-1} - 1/N) + \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N}}^M (\{-N\rho_i\} - \{-N\rho_{i-1}\}) \\ = N \text{mes}(X(1/N)) + \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N}}^M (\{-N\rho_i\} - \{-N\rho_{i-1}\}). \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Identité pour $R(N)$

Pour $k \geq 1$, nous allons choisir $F = \mathcal{F}_k$ dans la proposition 4; indiquons la dépendance en k en notant

$$\rho_0(k) = 0 < \rho_1(k) < \dots < \rho_M(k) = 1 \quad (M = A(k)),$$

les éléments de $\mathcal{F}_k \cap [0, 1]$.

Proposition 5 Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$R(N) = -2 \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq 1/N > \rho_{i+1}(k) - \rho_i(k)}}^{A(k)-1} B_1(N\rho_i(k)).$$

Démonstration

Pour $k = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} \theta_N(k) &= \text{card} \{j \in \{1, \dots, N\} ; q_j(N) > k\} \\ &= \text{card} \left\{ j \in \{1, \dots, N\} ; \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset \right\} \quad (\text{d'après (5)}) \\ &= N \text{mes} \left(\left\{ t \in]0, 1] ; \left] t - \frac{1}{N}, t \right] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset \right\} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq 1/N}}^{A(k)} (\{-N\rho_i(k)\} - \{-N\rho_{i-1}(k)\}), \right. \end{aligned}$$

d'après la proposition 4. Or on a

$$\text{mes} \left(\left\{ t \in]0, 1] ; \left] t - \frac{1}{N}, t \right] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset \right\} = \text{mes}(\{t \in]0, 1] ; q(t, 1/N) > k\}) = \nu_N(k),$$

donc

$$\theta_N(k) - N\nu_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq 1/N}}^{A(k)} (\{-N\rho_i(k)\} - \{-N\rho_{i-1}(k)\}).$$

En notant $\xi_N(k)$ cette somme, on en déduit avec (18) que

$$R(N) = \sum_{k=1}^N \xi_N(k).$$

Pour la fin du raisonnement, le nombre k est fixé et nous écrivons ρ_i au lieu de $\rho_i(k)$, et M au lieu de $A(k)$. La quantité $\xi_N(k)$ se prête à une transformation d'Abel. En posant

$$\varepsilon_i = [\rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N] \quad \text{et} \quad f(t) = \{-Nt\},$$

on a

$$\xi_N(k) = \sum_{i=1}^M (f(\rho_i) - f(\rho_{i-1}))\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{M-1} f(\rho_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

Or,

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(\rho_i - \rho_{i-1}, \rho_{i+1} - \rho_i) < 1/N \\ 0 & \text{si } \min(\rho_i - \rho_{i-1}, \rho_{i+1} - \rho_i) \geq 1/N \\ 1 & \text{si } \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N > \rho_{i+1} - \rho_i \\ -1 & \text{si } \rho_i - \rho_{i-1} < 1/N \leq \rho_{i+1} - \rho_i. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\xi_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N > \rho_{i+1} - \rho_i}}^{M-1} f(\rho_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} < 1/N \leq \rho_{i+1} - \rho_i}}^{M-1} f(\rho_i).$$

Si dans la dernière somme on fait le changement de variable de sommation $j = M - i$, on obtient la somme

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \rho_{M-j} - \rho_{M-j-1} < 1/N \leq \rho_{M-j+1} - \rho_{M-j}}}^{M-1} f(\rho_{M-j}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \rho_j - \rho_{j-1} \geq 1/N > \rho_{j+1} - \rho_j}}^{M-1} f(1 - \rho_j),$$

où l'on a utilisé le fait que $\rho_{M-j} = 1 - \rho_j$. Par conséquent,

$$\xi_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N > \rho_{i+1} - \rho_i}}^{M-1} (f(\rho_i) - f(1 - \rho_i)).$$

Comme $f(t) = \{-Nt\}$, on a

$$f(t) - f(1 - t) = \{-Nt\} - \{-N(1 - t)\} = \{-Nt\} - \{Nt\} = -2B_1(Nt).$$

Par conséquent,

$$\xi_N(k) = -2 \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i - \rho_{i-1} \geq 1/N > \rho_{i+1} - \rho_i}}^{M-1} B_1(N\rho_i). \quad \square$$

5 Estimation de $R(N)$

5.1 Transformation de la somme $R(N)$

Pour k, N des nombres entiers tels que $1 \leq k \leq N$, posons

$$\sigma_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq 1/N > \rho_{i+1}(k) - \rho_i(k)}}^{A(k)-1} B_1(N\rho_i(k)),$$

et

$$T(N) = -\frac{R(N)}{2} = \sum_{k=1}^N \sigma_N(k). \quad (19)$$

Proposition 6 *On a*

$$T(N) = T(N) = T_1(N) + T_2(N), \quad (20)$$

avec

$$T_1(N) = \sum_{\substack{r < s \\ rs \leq N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{\substack{s \leq k < r+s \\ \vartheta(k,r,s) > N/s}} 1,$$

$$T_2(N) = \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{\substack{r \leq k < r+s \\ \vartheta(k,r,s) > N/s}} 1.$$

Démonstration

En utilisant les propriétés rappelées au §2.3, on obtient

$$\sigma_N(k) = \sum_{\substack{\max(r,s) \leq k \\ r+s > k \\ (r,s)=1 \\ rs \leq N < s\vartheta(k,r,s)}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right),$$

où $\bar{r} = \text{inv}(r, s)$ (observons que le couple $(r, s) = (k, 1)$, qui figure dans l'ensemble (7), ne contribue pas à la somme). Par conséquent,

$$T(N) = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{\max(r,s) \leq k \\ r+s > k \\ (r,s)=1 \\ rs \leq N < s\vartheta(k,r,s)}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) = \sum_{\substack{rs \leq N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{\substack{k=1 \\ \max(r,s) \leq k < r+s \\ \vartheta(k,r,s) > N/s}} 1.$$

La diagonale $r = s$ ne contribue pas à la somme. On a aussi

$$rs \leq N \Rightarrow r + s \leq r + N/r \leq N + 1,$$

donc, dans la dernière somme, la condition $k < r + s$ rend la condition $k \leq N$ superflue. En séparant la somme suivant les conditions $r < s$ ou $s > r$, on obtient l'énoncé. \square

5.2 Décomposition de $T_1(N)$

Comme

$$\vartheta(k, r, s) = s \left\lfloor \frac{k+r}{s} \right\rfloor - r,$$

il est naturel de regrouper les termes suivant les valeurs possibles de $j = \lfloor (k+r)/s \rfloor$.

On a

$$(r < s) \text{ et } (s \leq k < r + s) \Rightarrow 1 + \frac{1}{s} \leq \frac{k+r}{s} \leq 3 - \frac{2}{s},$$

donc j ne peut prendre que les valeurs 1 et 2. La valeur $j = 1$ correspond aux valeurs de k telles que $s - r \leq k < 2s - r$. La valeur $j = 2$ correspond aux valeurs de k telles que $2s - r \leq k < 3s - r$. Ainsi,

$$T_1(N) = T_{11}(N) + T_{12}(N), \tag{21}$$

avec

$$T_{11}(N) = \sum_{\substack{r < s \\ rs \leq N \\ s(s-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{s \leq k < \min(r+s, 2s-r)} 1,$$

$$T_{12}(N) = \sum_{\substack{r < s \\ rs \leq N \\ s(2s-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{2s-r \leq k < \min(r+s, 3s-r)} 1.$$

5.3 Estimation de $T_{11}(N)$

En distinguant les valeurs de r et s telles que $r + s \leq 2s - r$ ou $r + s > 2s - r$, on a

$$T_{11}(N) = \sum_{\substack{r \leq s/2 \\ rs \leq N \\ s(s-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{s \leq k < r+s} 1 + \sum_{\substack{s/2 < r < s \\ rs \leq N \\ s(s-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{s \leq k < 2s-r} 1.$$

Remarquons que

$$(s(s-r) > N) \text{ et } (rs \leq N) \Rightarrow r < \frac{1}{2}\left(\frac{N}{s} + s - \frac{N}{s}\right) = \frac{s}{2}$$

donc la seconde double somme sur r et s est vide, et la condition $r \leq s/2$ est superflue dans la première. De plus, comme

$$(s(s-r) > N) \text{ et } (r > 0) \Rightarrow s > \sqrt{N},$$

on a

$$T_{11}(N) = \sum_{s > \sqrt{N}} \sum_{\substack{1 \leq r \leq \min(N/s, s-(N+1)/s \\ (r,s)=1}} r B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right).$$

D'après la proposition 2, on a

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq r \leq \min(N/s, s-(N+1)/s \\ (r,s)=1}} r B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \right| \leq \frac{N}{s} \sqrt{s} \tau(s) \beta(s) \ln s = \frac{N}{\sqrt{s}} \tau(s) \beta(s) \ln s.$$

Soit K un nombre réel tel que $\sqrt{N} \leq K \leq N$. Pour $K < s \leq N$, nous utilisons la majoration triviale

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq r \leq \min(N/s, s-(N+1)/s \\ (r,s)=1}} r B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \right| \leq \sum_{1 \leq r \leq N/s} r \leq \frac{N^2}{s^2}.$$

Nous avons donc

$$|T_{11}(N)| \leq \sum_{\sqrt{N} < s \leq K} \frac{N}{\sqrt{s}} \tau(s) \beta(s) \ln s + N^2 \sum_{K < s \leq N} \frac{1}{s^2}.$$

L'estimation (15) permet d'obtenir, par sommation partielle, la majoration

$$\sum_{n \leq t} \frac{\tau(n) \beta(n) \ln n}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{t} \ln^3 t) \quad (t \geq 1).$$

Nous obtenons ainsi

$$T_{11}(N) \ll NK^{1/2} \ln^3 N + N^2/K.$$

Le choix $K = N^{2/3}/\ln^2 N$ (pour N assez grand) fournit alors l'estimation

$$T_{11}(N) \ll N^{4/3} \ln^2 N. \quad (22)$$

5.4 Estimation de $T_{12}(N)$

Comme

$$r < s \Rightarrow r + s < 3s - r,$$

on a

$$T_{12}(N) = \sum_{\substack{r < s \\ rs \leq N \\ s(2s-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{2s-r \leq k < r+s} 1 = \sum_{\substack{s/2 < r \leq s \\ rs \leq N \\ s(2s-r) > N \\ (r,s)=1}} (2r-s) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right).$$

Notons que

$$(rs \leq N) \text{ et } (s/2 < r) \Rightarrow s \leq \sqrt{2N}.$$

Par conséquent,

$$T_{12}(N) = 2 \sum_{1 \leq s \leq \sqrt{2N}} \sum_{\substack{s/2 < r \leq \min(s, N/s, 2s-(N+1)/s) \\ (r,s)=1}} (r-s/2) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right).$$

D'après la proposition 2, on a

$$\left| \sum_{s/2 < r \leq \min(s, N/s, 2s-(N+1)/s)} (r-s/2) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \right| \leq \frac{s^{3/2}}{2} \tau(s) \beta(s) \ln s,$$

et donc

$$\begin{aligned} |T_{12}(N)| &\leq \sum_{1 \leq s \leq \sqrt{2N}} s^{3/2} \tau(s) \beta(s) \ln s \\ &\ll N^{3/4} \ln N \sum_{1 \leq s \leq \sqrt{2N}} \tau(s) \beta(s) \\ &\ll N^{5/4} \ln^3 N \quad (\text{d'après (15)}). \end{aligned} \quad (23)$$

5.5 Estimation finale de $T_1(N)$

En insérant (22) et (23) dans (21), nous obtenons

$$T_1(N) \ll N^{4/3} \ln^2 N. \quad (24)$$

5.6 Évaluation de $T_2(N)$

Rappelons que

$$T_2(N) = \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{\substack{r \leq k < r+s \\ \vartheta(k,r,s) > N/s}} 1.$$

Nous regroupons les termes suivant les valeurs possibles de $j = \lfloor (k+r)/s \rfloor$. On a

$$(s < r) \text{ et } (s \leq k < r+s) \Rightarrow 2 + \frac{1}{s} \leq \frac{k+r}{s} < \frac{2r}{s} + 1 \leq 2N + 1.$$

donc j peut prendre les valeurs $2, \dots, 2N$. Comme

$$\left\lfloor \frac{k+r}{s} \right\rfloor = j \Leftrightarrow js - r \leq k < (j+1)s - r,$$

on en déduit

$$T_2(N) = \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ s(js-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{\max(r, js-r) \leq k < \min(r+s, (j+1)s-r)} 1.$$

On remarque que

$$rs \leq N \text{ et } js - r > \frac{N}{s} \Rightarrow js - r > r,$$

donc

$$\begin{aligned} T_2(N) &= \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ s(js-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{js-r \leq k < \min(r+s, (j+1)s-r)} 1 \\ &= \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ r \leq js/2 \\ s(js-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{js-r \leq k < r+s} 1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$+ \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ r > js/2 \\ s(js-r) > N \\ (r,s)=1}} B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \sum_{js-r \leq k < (j+1)s-r} 1. \quad (26)$$

La double somme intérieure en r et s dans (26) est vide car les conditions sur r et s entraînent

$$N < s(js - r) < s(js - js/2) = \frac{js}{2}s \leq \frac{js}{2} \frac{N}{r} < N.$$

De plus, pour que la somme intérieure soit non vide dans (25), on doit avoir $js - r < r + s$, c'est-à-dire $r > (j-1)s/2$. Par conséquent,

$$T_2(N) = \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s < r \\ rs \leq N \\ (j-1)s/2 < r \leq js/2 \\ s(js-r) > N \\ (r,s)=1}} (2r - (j-1)s) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right).$$

Le terme correspondant à $j = 2$ vaut 0 puisque les conditions entraînent $s < r \leq s$. Par ailleurs,

$$\frac{(j-1)s}{2} < r \text{ et } r \leq N/s \Rightarrow s \leq \sqrt{\frac{2N}{j-1}}.$$

Ainsi

$$T_2(N) = 2 \sum_{j=3}^{2N} \sum_{s \leq \sqrt{2N/(j-1)}} \sum_{\substack{(j-1)s/2 < r \leq \min(js/2, N/s, js-(N+1)/s \\ (r,s)=1}} (r - (j-1)s/2) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right).$$

On constate que la sommation en r porte sur un intervalle (peut-être vide) dont la longueur n'excède pas $s/2$. On a donc d'après la proposition 2

$$\left| \sum_{\substack{(j-1)s/2 < r \leq \min(js/2, N/s, js-(N+1)/s \\ (r,s)=1}} (r - (j-1)s/2) B_1\left(\frac{N\bar{r}}{s}\right) \right| \leq \frac{s}{2} \sqrt{s} \tau(s) \beta(s) \ln s.$$

Il suit

$$\begin{aligned} T_2(N) &\leq \sum_{j=3}^{2N} \sum_{1 \leq s \leq \sqrt{2N/(j-1)}} s^{3/2} \tau(s) \beta(s) \ln s \\ &\ll \ln^3 N \sum_{j=3}^{2N} \left(\frac{N}{j-1}\right)^{5/4} \quad (\text{cf. (23)}) \\ &\ll N^{5/4} \ln^3 N. \end{aligned} \tag{27}$$

5.7 Conclusion

En insérant (24) et (27) dans (20), nous obtenons l'estimation

$$T(N) \ll N^{4/3} \ln^2 N$$

et donc, d'après (19),

$$R(N) \ll N^{4/3} \ln^2 N.$$

Cela conclut la preuve du théorème.

6 Variantes du théorème

Posons

$$\begin{aligned}\bar{S}(N) &= \sum_{j=1}^N q\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]\right), \\ S^*(N) &= \sum_{j=1}^N q\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right[\right), \\ \tilde{S}(N) &= \sum_{j=1}^N q\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right[\right).\end{aligned}$$

Nous démontrons dans cette section que la formule asymptotique (1) reste valable pour les quantités $\bar{S}(N)$, $S^*(N)$ et $\tilde{S}(N)$.

D'abord, la fonction $x \mapsto 1-x$ transforme $[(j-1)/N, j/N[$ en $](N-j)/N, (N-j+1/N]$ et conserve les dénominateurs minimaux. Par conséquent,

$$q\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right[\right) = q\left(\left[\frac{N-j}{N}, \frac{N-j+1}{N}\right]\right) \quad (1 \leq j \leq N),$$

et donc $S^*(N) = S(N)$. Ensuite, comme $E \mapsto q(E)$ est décroissante, on a

$$\bar{S}(N) \leq S^*(N) = S(N) \leq \tilde{S}(N).$$

Proposition 7 *On a pour $N \geq 1$,*

$$\tilde{S}(N) - S(N) \leq N\tau(N) \quad \text{et} \quad S(N) - \bar{S}(N) \leq N\tau(N).$$

Comme $\tau(N) \ll_{\varepsilon} N^{\varepsilon}$, cela entraîne bien que $\bar{S}(N)$ et $\tilde{S}(N)$ satisfont également (1).

Démonstration Nous démontrons seulement la première inégalité, la seconde se démontre de même. Introduisons les notations

$$\tilde{q}_j(N) = q\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right[\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_N(k) = \text{card}\{j \in \{1, \dots, N\} ; \tilde{q}_j(N) > k\}.$$

Notons quelques différences entre ces quantités et $q_j(N)$ et $\theta_N(k)$. On n'a jamais la relation $\tilde{q}_j(N) = N$; en revanche, on a $\tilde{q}_1(N) = \tilde{q}_N(N) = N + 1$ et

$$\tilde{\theta}_N(N-1) = \tilde{\theta}_N(N) = 2 \quad ; \quad \tilde{\theta}_N(N+1) = 0 \quad (N \geq 2).$$

Néanmoins, en procédant comme pour (17), nous obtenons l'identité

$$\tilde{S}(N) = \sum_{k=0}^N \tilde{\theta}_N(k),$$

d'où

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^N (\tilde{\theta}_N(k) - \theta_N(k)).$$

Comme $q_j(N) \leq \tilde{q}_j(N)$, on a

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^N \text{card}\{j \in \{1, \dots, N\} ; \tilde{q}_j(N) > k \text{ et } q_j(N) \leq k\}.$$

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\tilde{q}_j(N) > k$ et $q_j(N) \leq k$. Il existe donc $i \in \{1, \dots, A(k)\}$ tel que

$$\frac{j}{N} = \rho_i(k) \quad \text{et} \quad \rho_{i-1}(k) \leq \frac{j-1}{N},$$

ce qui implique

$$N\rho_i(k) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq \frac{1}{N}. \quad (28)$$

Réciproquement, si $i \in \{1, \dots, A(k)\}$ est tel que (28), il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\tilde{q}_j(N) > k$ et $q_j(N) \leq k$. On a donc établi que

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geq \frac{1}{N}}}^{A(k)} [N\rho_i(k) \in \mathbb{Z}].$$

En utilisant la paramétrisation de $\mathcal{F}_k \cap]0, 1]$ donnée par (7), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{S}(N) - S(N) &= \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{\max(r,s) \leq k \\ r+s > k \\ rs \leq N \\ (r,s)=1}} [s \mid N] \\ &= \sum_{\substack{rs \leq N \\ (r,s)=1}} ([s \mid N]) \sum_{\max(r,s) \leq k < r+s} 1 \quad (\text{on a } r+s \leq N+1, \text{ cf. preuve de la proposition 6}) \\ &= \sum_{\substack{rs \leq N \\ (r,s)=1}} [s \mid N] \min(r, s). \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{\substack{rs \leq N \\ (r,s)=1}} [s \mid N] \min(r, s) = \sum_{s \mid N} \sum_{\substack{r \leq N/s \\ (r,s)=1}} \min(r, s) \leq \sum_{s \mid N} s \cdot N/s = N\tau(N),$$

et donc

$$\tilde{S}(N) - S(N) \leq N\tau(N). \quad \square$$

REMERCIEMENTS

Pour la préparation de ce travail, les deux auteurs ont bénéficié du programme Research in Paris à l'Institut Henri Poincaré. Ils remercient chaleureusement cette institution pour l'excellent accueil qu'ils ont reçu.

Références

- [1] H. CHEN et A. HAYNES – « Expected value of the smallest denominator in a random interval of fixed radius », <https://arxiv.org/abs/2109.12668>, (2021).
- [2] H. DAVENPORT – *Multiplicative number theory*, 3^e éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 2000, Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.
- [3] R. R. HALL et G. TENENBAUM – « On consecutive Farey arcs », *Acta Arith.* **44** (1984), p. 397–405.
- [4] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT – *An introduction to the theory of numbers*, 6^e éd., Oxford University Press, 2008.
- [5] H. IWANIEC et E. KOWALSKI – *Analytic number theory.*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [6] D. KRUYSWIJK et H. G. MEIJER – « On small denominators and Farey sequences », *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **80** (1977), p. 332–337.
- [7] H. L. MONTGOMERY – *Early Fourier analysis*, Pure Appl. Undergrad. Texts, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- [8] C. L. STEWART – « On a sum associated with the Farey series », Tech. Report ZW 88/76, Math. Centrum, Amsterdam, Afd. zuivere Wisk., 1976.
- [9] — , « On the distribution of small denominators in the Farey series of order N », *Advances in combinatorics*, Springer, Berlin, 2013, p. 275–286.

BALAZARD, Michel
Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France
Adresse électronique : balazard@math.cnrs.fr

MARTIN, Bruno
ULCO, LMPA, Calais, France
Adresse électronique : Bruno.Martin@univ-littoral.fr