



HAL
open science

Position(s) de Leibniz pendant la querelle des infiniment petits- À partir de la lettre à Dancicourt, 11 septembre 1716

Sandra Bella

► To cite this version:

Sandra Bella. Position(s) de Leibniz pendant la querelle des infiniment petits- À partir de la lettre à Dancicourt, 11 septembre 1716. 2022. hal-04005275

HAL Id: hal-04005275

<https://hal.science/hal-04005275>

Preprint submitted on 26 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Sandra Bella

Position(s) de Leibniz pendant la querelle des infiniment petits
À partir de la lettre à Dancicourt, 11 septembre 1716

Leibniz's Position(s) during the *querelle des infiniment petits*
From the letter to Dancicourt, 11th September 1716

Résumé

Pendant la querelle des infiniment petits à l'Académie royale des sciences, Leibniz est intervenu publiquement pour défendre le bien-fondé de son calcul différentiel en formulant des aspects de sa philosophie des mathématiques. Ces interventions ont souvent été étudiées comme s'adressant surtout aux opposants du calcul, sans insister sur les désaccords, pourtant réels, entre Leibniz et ses propres partisans. Quelques mois avant sa mort, dans une lettre à Pierre Dancicourt, Leibniz remémore ces discrédances et révèle que ses partisans l'avaient en quelque sorte passé sous silence.

Cet article revient sur les malentendus générés par les interventions publiques de Leibniz et analyse certaines des difficultés épistémologiques et philosophiques à l'œuvre dans ce contexte de querelle.

Mots clefs : Calcul différentiel, fictions, infiniment petits, Fontenelle, Hermann, Naudé

Abstract :

During the *querelle des infiniment petits* at the Académie royale des sciences, Leibniz publicly stepped in to defend the soundness of his differential calculus by articulating aspects of his philosophy of mathematics. These interventions have often been presented as being mainly addressed to opponents of the calculus, without insisting on the actual disagreements between Leibniz and his own supporters. A Few months before his death, in a letter to Pierre Dancicourt, Leibniz recalls these misunderstandings and reveals that his supporters had in a way silenced him. This article reviews the misunderstandings generated by Leibniz's public interventions and analyzes some of the epistemological and philosophical difficulties at stake in the context of the *querelle*.

Keywords : Differential Calculus, fictions, infinitely small, Fontenelle, Hermann, Naudé

1. Introduction

Le 11 septembre 1716, Leibniz répond à une lettre du mathématicien Pierre Danguicourt (1664-1727) datée de juillet¹. Ce dernier lui avait fait part de son manuscrit dans lequel il concluait que la *substance étendue* ne pouvait être conçue que constituée par des points géométriques. Il avait abouti à cette conclusion après avoir examiné les autres conceptions en vogue – atomiste, aristotélicienne et cartésienne – et les avoir jugées insatisfaisantes. Leibniz n'est pas le premier à qui Danguicourt a demandé l'avis². Entre autres, il a sollicité son collègue de l'Académie de Berlin Philippe Naudé (1654-1729)³. Ce dernier a saisi l'occasion pour lui exhiber des calculs qui selon lui illustreraient le manque de fondement du calcul différentiel. De plus, Naudé affirme que Leibniz lui avait donné raison à ce propos.

La réponse de Leibniz se divise en deux parties. Dans la première, il propose une solution à la question de la différence entre l'étendue continue idéale et la matière actuelle. La deuxième partie tourne autour d'un passage dans lequel il évoque la querelle contre son calcul différentiel qui eut lieu à l'Académie royale des sciences, et les manières par lesquelles il y est intervenu pour marquer sa position. Il éclaircit ensuite les difficultés mathématiques posées par les exemples de Naudé. C'est essentiellement sur cette deuxième partie que porte ma contribution.

Le calcul de Leibniz a été introduit en France à partir de la fin 1691 par des mathématiciens réunis autour du philosophe Nicolas Malebranche (1638-1715) et avec l'intervention décisive de Johann Bernoulli (1667-1748)⁴. Parmi les membres de ce groupe, Guillaume de L'Hospital (1661-1704) et Pierre Varignon (1654-1722) sont les plus actifs⁵. Tous deux font partie de l'Académie royale des sciences parisienne. À partir de 1699, en raison des

¹ Lettre de Leibniz à Pierre Danguicourt du 11 septembre 1716, LBr 194, fol. 6-7, lettre de Pierre Danguicourt à Leibniz de juillet 1716, LBr 194, fol. 3-5.

² Pour le contenu du manuscrit et certaines des objections, on pourra consulter Timo Kaitaro : « Manuscrit de Mr Danguicourt : système métaphysique néantiste d'un disciple de Leibniz », *Sjuttonhundratat : Nordic Journal for Eighteenth-Century Studies*, vol. 6, 2009.

³ Deux membres de l'Académie de Berlin s'appellent Philippe Naudé. L'un, dit L'Ancien est le père de l'autre dit Le Jeune. Philippe Naudé L'Ancien (1654-1729) est membre de l'Académie de Berlin depuis sa création, Philippe Naudé Le Jeune (1684-1745) a été nommé à l'Académie en 1711. Il est probable que l'interlocuteur de Danguicourt soit le père, mais je n'ai pas trouvé suffisamment d'indices pour en être certaine.

⁴ Pour la querelle de l'infiniment petits, on pourra consulter (non exhaustif) Paolo Mancosu : *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New-York 1996, Sandra Bella : *La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz (1690-1706)*, Paris 2022 (sous presse).

⁵ Certains membres du cercle autour de Malebranche étaient déjà académiciens et se voient octroyés un titre. L'Hospital (nommé en 1693) et Malebranche sont nommés membres honoraires, Varignon (nommé en 1688) et Bernard le Bovier de Fontenelle (nommé en 1697) entrent dans la classe des pensionnaires géomètres, Filleau Des Billettes dans celle de pensionnaire mécanicien, Thomas Fantet de Lagny dans celle d'associé géomètre, Louis Carré (nommé en 1697) et Antoine Parent dans celle d'élève (de Varignon et De Billettes respectivement).

nouveaux règlements⁶, d'autres membres sont nommés, adeptes du nouveau calcul⁷, de sorte que ce dernier acquiert de plus en plus de notoriété, sans faire cependant l'unanimité au sein de l'institution.

L'Hospital est le premier à fournir une publication sous forme de traité et présentant le calcul leibnizien de manière ordonnée (définitions, postulats, règles et applications à la résolution de problèmes géométriques).

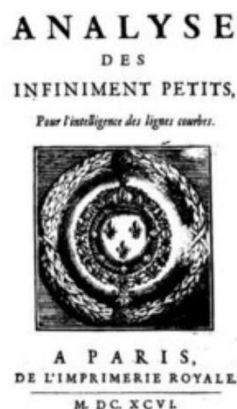


Figure 1 : Page de garde du traité de L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, Imprimerie royale, 1696

Ce traité est publié en juin 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*⁸. Il reste pendant longtemps la référence des académiciens pour comprendre le calcul de Leibniz, mais aussi pour le critiquer. Lorsqu'en juillet 1700, Michel Rolle (1652-1719) accuse le calcul différentiel de manque de fondements et d'exactitude, c'est principalement à ce traité qu'il se réfère⁹.

Parmi les critiques notoires, Rolle considère capricieuse la manière de négliger des quantités par rapport à d'autres lors des calculs, et en particulier il juge que les règles de différenciation ne sont pas proprement justifiées. En outre, il n'admet pas qu'on puisse supposer

⁶ *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1699, pp. 3-12.

⁷ Certains membres du cercle autour de Malebranche étaient déjà académiciens et se voient octroyés un titre. L'Hospital (nommé en 1693) et Malebranche sont nommés membres honoraires, Varignon (nommé en 1688) et Fontenelle (nommé en 1697) entrent dans la classe des pensionnaires géomètres, Filleau Des Billettes dans celle de pensionnaire mécanicien, Thomas Fantet de Lagny dans celle d'associé géomètre, Louis Carré (nommé en 1697) et Antoine Parent dans celle d'élève (de Varignon et De Billettes respectivement).

⁸ Guillaume de L'Hospital : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696.

⁹ *Registres des Procès-verbaux de l'Académie Royale des sciences*, t. 19, f° 281v° (dorénavant « PVARS », suivi du tome, et du numéro de folio). Les critiques de Rolle sur les fondements du calcul ne sont pas retranscrites dans les procès-verbaux. On peut reconstituer le contenu tout d'abord par les réponses de Varignon mais aussi par deux écrits de Rolle dans lesquels toutes les critiques sont développées : Michel Rolle : *Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences touchant le problème général des tangentes*, Paris 1703 et « Du nouveau système de l'infini », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1703, pp. 312-336.

des infiniment petits de tout ordre comme « réels », alors qu'il estime que ce sont des « zéros » ou des « riens ».

L'intervention de Rolle marque le début de ce que les académiciens ont appelé « la querelle des infiniment petits », querelle qui durera jusqu'à environ 1706. Au début, la querelle n'affronte que Rolle et Varignon. Mais, très rapidement plusieurs membres de l'Académie, entre autres Jean Gallois, Thomas Gouye, Philippe de La Hire – dans le camp des « opposants » – et Fontenelle, Malebranche, Carré – dans le camp des « défenseurs » – s'y mêlent. À travers leurs échanges épistolaires, ils en font une affaire de la République des Lettres, affaire dont Leibniz est l'un des principaux intéressés.

Dans le passage de la lettre à Dangicourt évoqué plus haut, Leibniz souligne le lien qu'il établit entre sa conception des infiniment petits – considérés comme « incomparables » ou comme « fictions » – avec leur utilisation. Parce que j'y ferai référence tout au long de cette contribution, je le cite immédiatement en entier :

Pour ce qui est du calcul des Infinitesimales, je ne suis pas tout à fait content des expressions de Monsieur Herman dans sa réponse à Monsieur Nieuwentyt ni de nos autres amis. Et M. Naudé a raison d'y faire des oppositions. Quand ils disputerent en France avec l'Abbé Gallois, le Pere Gouge et d'autres, je leur temoignai, que je ne croyois point qu'il y eut des grandeurs veritablement infinies ni veritablement infinitesimales, que ce n'étoient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler Universellement, comme les racines imaginaires dans l'Algebre telles que $\sqrt[3]{-1}$; qu'il faut concevoir par exemple (1) le diametre d'un petit élément d'un grain de sable, (2) le diametre du grain de sable même, (3) celui du globe de la terre, (4) la distance d'une fixe, de nous, (5) la grandeur de tout le systeme des fixes, comme (1) une differentielle du second degré, (2) une difference du premier degré, (3) une ligne ordinaire assignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie. Et plus on faisoit la proportion ou l'intervalle grand entre ces degrés plus on aprochoit de l'exactitude et plus on pouvoit rendre l'erreur petite et même la retrancher tout d'un coup par la fiction d'un intervalle infini qui pouvoit toujours être réalisée à la façon de demontrer d'Archimede. Mais comme M. le Marquis De L'Hospital croyoit que par là je trahissois la cause, ils me prierent de n'en rien dire outre ce que j'en avois dit dans un endroit des Actes de Leipzig et il me fut aisé de deferer à leur priere¹⁰.

Ici, Leibniz rappelle qu'il avait revendiqué son point de vue auprès des parisiens mais que cela avait été si peu de leur goût que L'Hospital lui aurait demandé de ne plus intervenir. Ce passage est intéressant car Leibniz résume, plus de dix ans plus tard, une partie de la stratégie qu'il a mise en place pour justifier son calcul, mais sans être compris pourtant par ceux qui défendaient son introduction en France et en Europe.

L'échange entre Leibniz et Dangicourt a fait l'objet d'études philosophiques¹¹, mais à ma connaissance il a été peu commenté par des philosophes et historiens des mathématiques, surtout

¹⁰ Lettre de Leibniz à Dangicourt du 11 septembre 1716, fol. 6v°-7r°.

¹¹ Sans prétendre à l'exhaustivité : Maria Sol de Mora Charles : « Métaphysique et Calcul Infinitésimal », *Natur und Sjekt* : IX. *International Leibniz Kongress unter der Schirmherrschaft de Bundespräsidenten*, Hannover, 26 September bis.

le passage qui concerne l'épisode de la querelle des infiniment petits. Douglas Jesseph le cite dans deux de ses articles pour soutenir que Leibniz n'aurait pas eu la possibilité de développer pleinement sa conception « fictionnaliste » des infiniment petits auprès des parisiens : ses adeptes l'auraient silencé du fait que leur conception « réaliste » des infiniment petits, unanimement partagée, se serait opposée radicalement à la sienne. Dans ces conditions, il n'aurait en effet pas été prudent de rendre publique les discrédits entre le Maître et les disciples dans un contexte de recherche d'une acceptation sereine du calcul au sein de l'institution¹².

De fait, comme l'ont remarqué Richard Arthur et David Rabouin dans un article récent¹³, de nombreuses études sur la conception des infiniment petits de Leibniz, de ses épigones et de ses opposants, s'attardent trop sur la question de l'existence ou la réalité des infiniment petits – qu'elles ne semblent pas d'ailleurs distinguer de celle de la justification de leur usage. Elles expliquent ainsi la discordance entre Leibniz et ses adeptes par l'existence de deux positions : l'une « réaliste » qui affirme l'existence des infiniment petits et l'autre « fictionnaliste¹⁴ ». Or, il n'est pas certain que pendant la querelle tous les partisans parisiens considéraient les infinitésimaux comme « réels ». Surtout, bien que la question de la réalité des infiniment petits ait sa pertinence, il me semble qu'ainsi posée elle n'est pas centrale parmi leurs préoccupations, mais qu'elle mérite d'être reformulée de manière à éclaircir d'autres questions plus fondamentales pour comprendre les enjeux épistémologiques – et non pas ontologiques – qui sont au cœur de la querelle, et qui concernent davantage la place et la spécificité des mathématiques et de sa pratique.

Dès les années 1690, Leibniz propose une solution à l'épineux problème de ce qu'il nomme le « labyrinthe du continu ». Une analogie peut être formulée entre la composition des corps et celle de l'étendue idéale. Leibniz l'indique mais pour souligner ses limites, notamment en mettant en avant l'opposition manifeste entre la division actuelle à l'œuvre dans la matière et

Oktober 2011, Vorträge ; T. Kaitano : « Manuscrit de Mr. Dancicourt », 2009, Nicolas Quenille : « Commentaire de la lettre de Pierre Dancicourt », 14 octobre 2017.

¹² Douglas Jesseph: « Leibniz on the foundations of the calculus : The question of the reality of Infinitesimal magnitudes », *Perspectives on Science*, vol. 6, nos. 1 & 2, p. 28-32 et « Truth in Fiction : Origins and Consequences of Leibniz's Doctrine of Infinitesimal Magnitudes », Goldenbaum, Ursula, Jesseph Douglas (ed) : *Infinitesimal Differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, W de G, Berlin 2008, pp. 215-234 : « The full scope of the "fictionalist" reading of the infinite was not made widely known, largely because Leibniz and his associates had reason to fear that any public retreat from a full commitment to the reality of the infinitesimal would complicate the already difficult battle for the acceptance of the calculus ».

¹³ Richard T. W. Arthur et David Rabouin : « Leibniz's syncategorematic infinitesimals II: their existence, their use and their role in the justification of the differential calculus », *Archive for History of Exact Sciences* (2020) 74:401–443.

¹⁴ Dans les deux articles de Jesseph précédemment cités, l'auteur ampute la réponse de Leibniz des expressions comparatives (diamètre du grain de sable, diamètre de la terre, distance des fixes) qui font partie du discours pour une stratégie de justification distincte de celle qui fait appel aux fictions.

l'indétermination propre de la division à l'infini de la substance idéale¹⁵. Mais, force est de constater que sa conception n'est pas nécessairement ni comprise ni acceptée par ses contemporains puisqu'il n'a eu cesse que de l'exposer et l'éclaircir de manière récurrente tout au long de sa vie. La lettre à Dancicourt témoigne de la ténacité de sa position philosophique jusqu'à quelques mois avant la fin de sa vie. Cette différence fondamentale entre l'actuel et l'idéal, que Leibniz exprime, a des répercussions sur la manière de présenter sa conception des infiniment petits impliqués dans son calcul, et sur la manière de défendre leur utilisation. Ainsi, il n'est pas étonnant que des passages concernant la composition de la matière soient souvent accompagnés de passages concernant son calcul. Expliquer l'un aiderait, en quelque sorte, l'explication de l'autre, mais sans nullement s'y réduire. Il est en effet courant chez Leibniz de justifier l'usage des infiniment petits, en montrant justement qu'ils ne doivent pas être conçus de la même manière que des substances simples.

Dans cet article, je reviendrai sur l'épisode bien connu de la querelle des infiniment petits à partir de la manière dont Leibniz le remémore dans la lettre adressée à Dancicourt.

Je procéderai d'abord en analysant comment, pendant la querelle, la conception leibnizienne des infiniment petits a été une source de malentendus, qui perdurent encore chez certains écrits d'historiens et philosophes de nos jours¹⁶. Les interventions de Leibniz pendant la querelle des infiniment petits ont été souvent analysées en les comprenant comme adressées surtout à l'encontre des adversaires de son calcul. Ainsi, au sein de l'institution académique, il y aurait eu un camp des opposants « du vieux stile¹⁷ », plutôt réactionnaire, attaché à la manière des Anciens, qui aurait œuvré à empêcher l'introduction du nouveau calcul, pourtant si *révolutionnaire*. Sans nier cette opposition contre le calcul leibnizien en tant que tel, mais il a été montré qu'il existe des arguments, autres qu'épistémologiques et essentiellement politiques sur lesquels elle repose¹⁸. Je me focaliserai donc ici davantage sur les désaccords entre Leibniz et les partisans de son calcul, point sur lequel il ne semble pas qu'on ait suffisamment insisté. Puis je montrerai

¹⁵ On pourra consulter notamment l'édition critique par Michel Fichant de G.W. Leibniz : *Discours de métaphysique* suivi de *Monadologie* et autres textes, édition établie, présentée et annotée par Michel Fichant, Paris 2004, Richard T. W. Arthur : Leibniz, Cambridge 2014, pp.79-85, Frank Burbage et Nathalie Chouchan, *Leibniz et l'infini*, Paris 1993, pp. 96-116. Ces dernières références ne sont pas données à titre exhaustif.

¹⁶ C'est notamment le cas d'auteurs comme Mikhail Katz et David Sherry. Parmi leurs nombreux articles : Mikhail Katz et David Sherry : « Leibniz's Infinitesimals : Their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond », *Erkenntnis* 78 (3), pp. 571-625.

¹⁷ Lettre de Varignon à Johann Bernoulli du 6 août 1697, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Herausgeber Otto Spiess, Basel 1955, p. 124.

¹⁸ Sandra Bella : « *Magis morale quam mathematicum*, L'attestation volée (mai 1705 - mars 1706) », *Studia Leibnitiana* 51, 2019/2, 176-202.

comment Leibniz argumente sous forme d'un plaidoyer en faveur d'une pratique mathématique, et comment cette pratique est en cohérence avec des aspects de sa philosophie.

2. La conception leibnizienne des infiniment petits et ses *mal-entendus*

Dans l'article cité plus haut, Arthur et Rabouin rappellent que l'introduction des différentielles dans les années 1680 a été très rapidement sujet à controverse, et ils soulignent que leur réception a été souvent interprétée sous forme d'une alternative. D'un côté, il y a ceux qui considèrent les infinitésimaux comme existants, c'est-à-dire pensés comme parties « réelles » du continu – telle serait la position de Johann Bernoulli, L'Hospital et Fontenelle. De l'autre côté, les infinitésimaux sont considérés comme des simples raccourcis de langage. Arthur et Rabouin signalent que cette tendance à interpréter la controverse en termes de dichotomie a été favorablement perpétuée par les historiens depuis au moins 140 ans – ils citent Russell, Cantor et Weierstrass. Abraham Robinson marque un jalon important dans l'interprétation des infinitésimaux en montrant qu'il est possible de légitimer leur « existence » en construisant une théorie consistante de quantités non archimédiennes¹⁹. Les développements en analyse non standard ont conduit pour certains à renchérir cette dichotomie²⁰, mais sans être toujours, à mon sens, attentifs aux dangers d'anachronisme qui découlait de cette interprétation.

Leibniz évite d'entériner cette dichotomie. L'exemple des échanges, autour de 1698, avec Johann Bernoulli est instructif.

Dans une lettre du 20 mai 1698, Johann Bernoulli fait part à Varignon de pensées concernant le débat sur l'infinité du monde²¹. Selon lui, certains de ses contemporains se trompent en pensant le monde soit absolument infini, soit absolument fini. Les concepts d'infini/fini ne sont pas à concevoir d'après lui de manière absolue mais relative. Il affirme qu'il est « probable » que Dieu ait choisi de concevoir plusieurs degrés d'infinité de grandeurs plutôt que d'en choisir un seul, et qu'il existe par exemple des mondes infiniment plus petits que le nôtre – il fait référence aux expériences contemporaines à l'aide de microscopes –, ou à l'inverse des mondes infiniment plus grands que le nôtre – il imagine des mondes habités par des géants gargantuesques. Il explique qu'il peut être utile pour « accoutumer un peu les esprits farouches à ces degrez d'infinité » d'user de « comparaisons grossières » comme celles du grain de sable qui est « comme un rien » relativement à la terre, et celle-ci qui est comme « un point » par rapport au

¹⁹ Arthur et Rabouin : « Leibniz's syncategorematic infinitesimals », p. 403.

²⁰ Notamment, Mikhaïl Katz, David Sherry, et leurs corédacteurs.

²¹ Lettre de Johann Bernoulli à Varignon du 20 mai 1698, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Herausgeber Otto Spiess, Basel 1955, 2, pp. 170-171.

tourbillon du soleil. Il continue sans transition en affirmant que les divers degrés d'infinité se trouvent également en géométrie.

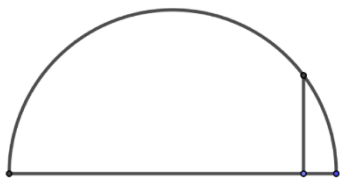


Figure 2 : Demi-cercle et moyenne géométrique entre deux segments d'un diamètre (figure réalisée par l'auteur)

Comme exemple, il considère l'ordonnée d'un demi-cercle qui constitue la moyenne géométrique entre les deux segments correspondant du diamètre. Si l'un de ces segments est infiniment petit, il suit que l'ordonnée sera infiniment plus grande que le petit segment et en même temps infiniment plus petite que l'autre segment.

Leibniz a eu connaissance de cette lettre par Johann lui-même²², et les questions qui y sont traitées sont reprises en partie dans leurs échanges. Dans la lettre à Johann de juin 1698, Leibniz reconnaît que ce dernier a écrit à Varignon des choses profondes sur l'infinité des corps, il lui avoue avoir déjà réfléchi sur ce sujet mais en s'abstenant de se prononcer de manière définitive. En ce qui concerne les infiniment petits qui apparaissent dans les mathématiques, sa déclaration est ferme :

Il se pourrait que les infinis, tel que nous le concevons, ainsi que les infiniment petits, soient imaginaires, et encore aptes à déterminer les choses réelles, de la même manière que les racines imaginaires le font usuellement. Ces choses-là sont parmi les notions idéales par les lois desquelles les choses sont régies, sans pour autant qu'elles soient des parties de la matière.²³

Et pour ce qui est de la matière, Leibniz précise que

de la division actuelle dans quelque partie aussi petite que l'on veut de la matière que tout se passe comme si le monde était composé de créatures innombrables. Mais ce qu'il faut rechercher, c'est s'il n'y a aucune partie de la matière qui n'ait jamais une raison assignable à quelque autre partie, c'est-à-dire s'il y a une ligne droite terminée des deux côtés, mais qui cependant conserve une raison infinie ou infiniment petite à une autre droite²⁴.

²² Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 7 juin 1698 : « Agnosco ex ipsius responsione. Te quaedam ad ipsum scripsisse profunda et ingeniosa de corporibus varie infinitis. », A III, 7, 796

²³ Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 7 juin 1698 : « Fortasse infinita quae concipimus et infinite parva imaginaria sunt sed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariae facere solent. Sunt ista in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etsi in materiae partibus non sint. », AIII, 7, 796.

²⁴ Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 17 juillet 1698 : « Ex actuali divisione sequitur in quantulacunque parte materiae velut mundum esse quendam constantem ex innumeris creaturis; sed illud adhuc quaeritur an ulla usquam portio detur materiae quae ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem ; seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quae tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam vel infinite parvam. », AIII, 7, 827-828.

Dans sa réponse, le mathématicien bâlois explique qu'il ne comprend pas comment d'une division actuelle de la matière en parties infinies en nombre, Leibniz nie l'existence de particules infiniment petites²⁵. Dans cette même lettre, pour illustrer ce en quoi le propos de Leibniz est paradoxal il s'appuie sur un exemple, mais qu'il décide d'emprunter directement aux mathématiques. Il suppose qu'une grandeur est divisée selon la progression géométrique $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Il explique que tant que le nombre de termes est fini, chacun des termes pris séparément est fini, mais lorsque les termes existent en acte, il en existe nécessairement un qui est infinitième, les suivants le sont également.

La réponse de Leibniz comporte deux volets liés mais qu'il est important de distinguer. En ce qui concerne les choses de la nature, la division actuelle de la matière ne conduit absolument pas d'après lui à l'existence de parties minimales. En se référant à un autre exemple de Johann Bernoulli, il concède qu'il puisse y avoir des animalcules dans les animalcules, mais qu'il n'est pas nécessaire que soit donnés des animalcules infiniment petits et encore moins des « ultimes ». En ce qui concerne les mathématiques, et en particulier dans l'exemple que met à l'épreuve Johann Bernoulli, Leibniz désapprouve l'idée que la donnée en acte de $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ etc implique l'existence du terme infinitième. Pour lui, tout ce qu'on est en mesure de conclure est qu'il puisse se donner une fraction aussi petite que n'importe quelle quantité assignable²⁶. Il déclare qu'il ne croit pas que l'ultime terme soit réellement [*revera*] donné, et de manière plus générale il refuse de devoir trancher en faveur de l'existence des infinitésimaux²⁷, dans tous les cas, l'existence d'un « ultime » impliquerait contradiction²⁸. Il répète qu'il suffit pour le calcul de feindre des quantités infiniment petites, comme en Algèbre on suppose des racines imaginaires. Il avance, ce qu'il ne cessera de faire tout au long de sa vie, que ce qui est conclu par leur moyen

²⁵ Lettre de Johann Bernoulli à Leibniz du 16 août 1698 : « quomodo haec cohaerent finitam actu jam divisam esse in partes numero infinitas, et tamen negas aliquam istarum particularum posse esse infinite exiguam, quomodo haec cohaerent? », A III, 7, 873.

²⁶ Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 22 août 1698 : « Ponamus in linea actu dari, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ etc. omnesque seriei hujus terminos actu existere; hinc infero dari et infinitesimum, sed ergo nihil aliud, hinc puto sequi, quam actu dari quamvis fractionem infinitam assignabilem cujuscunque parvitas. », A III, 7, p. 885.

²⁷ Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 29 juillet 1698 : « Itaque mirari etiam non debes, quod dubito an revera detur quantitas infinite parva, aut infinite magna utrinque terminata. Etsi enim concedam, nullam esse portionem materiae, quae non actu sit secta; non tamen ideo devenitur ad elementa insecabilia, aut ad minimas portiones, imo nec ad infinite parvas, sed tantum ad minores perpetuo et tamen ordinarias; similiter ut ad majores perpetuo in augendo acceditur. », A III, 7, 858.

²⁸ Lettre du 22 août 1698 : « Sane ante multos annos demonstravi numerum seu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare; si ut unum totum sumatur. Idem de numero maximo et numero minimo, seu fractione omnium infima. », A III, 7, 884.

peut être redémontré à la manière des Anciens et en utilisant son lemme des incomparables qu'il a énoncé dans les *Acta Eruditorum* de février 1689 et sur lequel je reviendrai²⁹.

Pour argumenter en faveur de la donnée en acte des infiniment petits, Johann Bernoulli n'hésite pas à multiplier les exemples dans lesquels il voit à l'œuvre des infiniment petits de tout ordre (les animalcules, des mondes imaginaires, les différentielles dans des configurations géométriques, etc). Ainsi, il ne prête pas attention à distinguer entre les différentes régions – réelle, phénoménale, idéale – ce que Leibniz s'efforcera de faire dans ses travaux métaphysiques. Leibniz souligne surtout ici la manière dont il faut concevoir les infiniment petits des mathématiques : ce sont des êtres imaginaires mais qui sont aptes à déterminer le réel³⁰.

À la fin des années 1690, Leibniz n'a pas encore rendu public sa conception fictionnelle des infiniment petits. Néanmoins, comme le rappelle la lettre à Dangicourt, en raison des discrédits à l'Académie royale des sciences, Leibniz sera astreint à défendre publiquement son calcul. Je reviens par la suite à ces différentes interventions.

2.1 Un grain de sable, le globe de la terre, la distance des fixes ... et l'infini à la rigueur

Leibniz, en partie à cause de son séjour à Paris entre 1672-1676³¹, est très lié à des savants parisiens, certains académiciens, d'autres qui le deviendront. Il continue un échange épistolaire avec la plupart d'entre eux, notamment avec Malebranche (1672), Gallois (1672), Bignon (1693), L'Hospital (1692), Fontenelle (1700) et Varignon (1701)³². Dans ses lettres, il insiste afin qu'on lui fasse part des nouveautés scientifiques parues en France. En particulier, il tient à être informé à travers l'envoi des derniers numéros de divers journaux – *Journal des Sçavans*, *Mémoires pour l'histoire des sciences et des Beaux-arts (Journal de Trévoux)* et *l'Histoire de l'Académie royale des sciences* –, pour lesquels il propose aussi des articles de tout genre.

L'article de Leibniz, paru en novembre-décembre 1701, s'inscrit dans ce contexte d'interaction. En novembre 1700, Jakob Bernoulli publie un article dans les *Acta Eruditorum*³³

²⁹ Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 28 juillet 1698 : « Interim sufficere pro calculo, ut fingantur, uti imaginariae radices in Algebra; semper enim quod per infinita ista et infinite parva concluditur deductione ad absurdum mea incomparabilium methodo, (cujus aliquando lemmata dedi in Actis) evinci potest. », A III, 7, 858.

³⁰ De fait, comme l'étude récente de Rabouin l'a montré, la philosophie mathématique de Leibniz caractérise les objets mathématiques par leur possibilité à pouvoir être considérés selon le contexte comme des fictions. Ainsi, le caractère fictionnel n'est pas uniquement l'apanage des infiniment petits mais est le propre de tous les objets mathématiques, David Rabouin : « Can one be a fictionalist and a platonist at the sametime? Lessons from Leibniz », *Noesis* n°38 (2022-2), (à paraître).

³¹ J. Hofmann: *Leibniz in Paris 1672-1676*, traduction de l'allemand de *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)*, Munich 1949, traduction publiée en 1974, Cambridge 2008.

³² Nous indiquons entre parenthèses la date de la première lettre trouvée.

³³ Jakob Bernoulli : « Nova methodus expedite determinandi radios osculi seu curvatura in curvis quibusvis algebraicas », *Acta Eruditorum*, novembre 1700, pp. 508-511.

dans lequel il décrit une méthode pour obtenir les rayons de courbure des courbes algébriques. Il cache volontairement la voie qui l'a conduit à l'obtention de sa règle et il propose de la regarder comme une « énigme » que les curieux peuvent chercher à résoudre en attendant qu'il en fournisse l'origine³⁴.

Un article du *Journal de Trévoux* des mois de mai-juin 1701 décrit cette nouvelle règle³⁵. Cette description est précédée d'un préambule du recenseur qui s'avère être l'académicien Gouye, réticent à l'introduction du calcul de Leibniz. Bien qu'il célèbre les avancées en matière de géométrie depuis le début du xvii^e siècle en citant Cavalieri, Wallis, Fermat, il attaque la nouvelle analyse, celle « connue en France sous le nom d'Analyse des infiniment petits ». Selon lui, elle prétend avoir « porté les choses plus loin » en – il cite ironiquement des expressions qu'il tire de la Préface de l'*Analyse des infiniment petits* – « pénétrant jusques dans l'infini, & n'embrassant pas seulement l'infini, mais l'infini de l'infini ou une infinité d'infinis³⁶ ». Pour Gouye, malgré « sa fécondité admirable », l'Analyse des infiniment petits ne procure pas une évidence démonstrative.

Gouye publie cet article dans le numéro de mai-juin 1701, c'est-à-dire quelques mois après le début de la querelle. Dans ce climat tendu au sein de l'institution académique, l'« énigme » posée par Jakob Bernoulli est interprétée comme une provocation à l'encontre de ceux qui continuent à préférer d'autres méthodes, c'est-à-dire celles que justement les promoteurs du nouveau calcul jugent dépassées. Gouye suppose que la voie qui a conduit Jakob Bernoulli à l'obtention de sa règle a sûrement un lien avec la nouvelle analyse, à laquelle il n'adhère pas :

Il y a bien l'apparence que l'énigme de M.B. n'est qu'un déguisement du calcul différentiel : ceux qui sont accoutumés aux anciennes manières de raisonner en Géométrie ont de la peine à les quitter pour suivre des méthodes si abstraites, ils aiment mieux n'aller pas si loin que de s'engager dans les nouvelles routes de l'infini de l'infini de l'infini, où l'on ne voit pas toujours assez clair autour de soy, & où l'on peut aisément s'égarer, sans qu'on s'en aperçoive. Il ne suffit pas en Géométrie de conclure, il faut évidemment qu'on conclut bien³⁷.

La critique de Gouye concerne principalement le traitement des infiniment petits de tout degré. Pour lui, ces notions ne sont pas assez claires pour rendre une pratique géométrique sûre. Leibniz, interpellé par le contenu de cet article et prêt à défendre le bien-fondé de son calcul,

³⁴ « quod vero in artificium inventionis ipsum curiosus inquisit, hoc sibi ad solvendum velut aenigma proponat, donec solututum dederit ipse », *ibid.*, p. 511.

³⁵ Thomas Gouye : « Nouvelle méthode pour déterminer aisément les rayons des développées dans toute sorte de courbe algébrique. Par Monsieur Jacques B. Acta Eruditorum, Mensis Novembris anni 1700. Lipsiae », *Mémoires pour l'histoire des sciences et des Beaux arts, recueillis par l'ordre de S.A.S. Mr. Le Duc de Maine, mois de mai et de juin, seconde édition augmentée de diverses remarques et de plusieurs articles nouveaux*, Amsterdam, chez Jean-Louis Delorme, 1701, pp. 422-430.

³⁶ *Ibid.*, p. 423.

³⁷ Thomas Gouye : « Nouvelle méthode pour déterminer aisément les rayons des développées ... », p. 430

rédige un court écrit de réponse. Cet écrit est publié dans le même journal au numéro du mois de novembre-décembre 1701³⁸.

Leibniz souligne la fécondité de son calcul ainsi que sa « sûreté », qui peut être en effet confirmée par la lecture du traité de L'Hospital. Puis, il ajoute de son propre chef un commentaire concernant la pratique de son calcul :

On n'a pas besoin de prendre l'infini icy à la rigueur, mais seulement comme lors qu'on dit dans l'Optique que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment éloigné, & ainsi sont estimez paralleles. Et quand il y a plusieurs degrez d'infini ou infiniment petit, c'est comme le Globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, & une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiametre du Globe de la terre. De sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diametre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantitez aussi grandes & aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée : de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions qui sont plus directes dans notre methode & plus conformes à l'art d'inventer (*ibid.*).

Dans ce passage, Leibniz explique que la pratique du calcul ne nécessite pas de prendre les infiniment petits de manière « rigoureuse ». Il suffit de prendre des quantités aussi petites que l'on veut pour que l'erreur pourra être rendue aussi petite qu'il est souhaité. Il avance que cette manière de procéder ne diffère de la manière des Anciens que dans les « expressions ». Ce genre de considérations sont proches de celles de son article de février 1689 aux *Acta Eruditorum* de 1689³⁹. Dans ce dernier, Leibniz avait introduit son célèbre Lemme des incomparables. Il expliquait que pour démontrer des résultats, il s'était autorisé à effectuer des calculs en négligeant certaines quantités car il les jugeait inutiles pour conclure et il destinait un paragraphe à justifier cette manière de procéder. Il avait nommé cette manière de procéder – négliger des quantités par rapport à d'autres car on les juge incomparables – le « lemme des incomparables ». Dans l'article du *Journal de Trévoux*, il reprend la même idée : considérer des « quantités aussi petites que l'on veut » aboutit aux mêmes effets calculatoires que lorsqu'on considère que le rapport entre une boule et le diamètre de la Terre ou celui entre la Terre et la distance des fixes est un infiniment petit. De la même manière, il s'en suit à ses yeux que le rapport entre la boule et la distance des fixes est un infiniment infiniment petit. Dans l'article de 1689, il usait du même type de comparaisons (diamètre de la terre, distance des fixes).

Curieusement, les exemples qu'il fournit sont les mêmes que ceux que Johann Bernoulli avait utilisés dans sa lettre du 28 mai 1698 pour « accoutumer un peu les esprits farouches à ces degrez d'infinité » d'user de « comparaisons grossières ». Mais, de fait, ce genre de comparaisons

³⁸ G.W. Leibniz, « Mémoire de Mr Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel », *Mémoires de Trévoux*, novembre-décembre 1701, pp. 270-271.

³⁹ G.W. Leibniz : « Tentamen de motuum coelestium causis », *Acta Eruditorum*, février 1689, pp. 82-96.

n'est pas inédite, et Leibniz comme Johann Bernoulli hérite d'une tradition plus que centenaire qui ne s'arrête nullement avec eux⁴⁰.

Dans le même article, à la suite de la réponse de Leibniz, Gouye ajoute un commentaire dans lequel il tient à préciser que la conception leibnizienne des infiniment petits ceux qui justement pratiquent le calcul différentiel :

Quelques géomètres, qui ont examiné avec beaucoup de soin l'analyse des infiniment petits de Mr. Le Marquis de l'Hôpital, & qui font même profession de suivre sa méthode, disent qu'il y faut prendre l'infini à la rigueur, & non pas comme Mr. Leibnitz l'explique icy⁴¹.

À ma connaissance, ce passage a peu été commenté et j'insisterai par la suite non pas tellement sur la manière dont Leibniz défend son calcul auprès des réticents, mais auprès des partisans.

2.2 De l'utilité des fictions

Varignon adresse en urgence une lettre à Leibniz le 28 novembre 1701, dans laquelle il le prie de démêler ses déclarations parues dans le *Journal de Trévoux* :

M. l'Abbé de Gallois, qui est celui qui le [Rolle] fait agir, repand ici que vous avez déclaré n'entendre par différentielle ou Infiniment petit, qu'une grandeur à la vérité tres petite, mais toujours fixe et déterminée, telle que la Terre par raport au firmament, ou un grain de sable par raport à la Terre (...)⁴²

Lui-même est embarrassé par le propos de Leibniz. Au mois d'août précédent, lors de sa défense du bien-fondé du calcul différentiel⁴³, il avait présenté les différentielles tout autrement:

au lieu que j'ay appelé *Infiniment petit* ou *différentielle* d'une grandeur ce en quoy cette grandeur est Inépuisable. J'ay, dis-je, appelé *Infini* ou *Indéfini*, tout Inépuisable ; et *Infiniment* ou *Indéfiniment* petit par raport à une grandeur, ce en quoy elle est inépuisable. D'où j'ay conclu que dans le calcul différentiel, *Infini*, *Indéfini*, *Inépuisable en grandeur*, *plus grand que quelque grandeur qu'on puisse assigner*, ou *Indéterminablement grand* ne signifient que la même chose, non plus qu'*Infiniment* ou *Indéfiniment petit*, *plus petit que quelque grandeur qu'on puisse assigner*, ou *Indéterminablement petit*.⁴⁴

En fait, la défense par Varignon comportait plusieurs volets dont l'un consistait à légitimer les différentielles en expliquant que leur usage était déjà chez les Anciens et ne serait autre que celui de nombre de géomètres emblématiques du XVII^e siècle – il citait Cavalieri, Viviani, Barrow, Fermat, Roberval, Pascal, ou encore Huygens. Cependant sa référence principale

⁴⁰ Voir à ce sujet : Herber Breger : « On the grain of sand and heaven's infinity », in: « Für unser Glück oder das Glück anderer: Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover, 18.-23. Juli 2016 », vol. 6, édité par L. Wencho, Hildesheim 2017, pp. 67-69.

⁴¹ « Mémoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul différentiel », *op. cit.*, p. 404.

⁴² Lettre de Varignon à Leibniz du 28 novembre 1701, A III, 8, 799.

⁴³ Pierre Varignon : « la deffense de la Geometrie des Infiniment petits contre M. Rolle », *PVARS*, t. 19, 308r°, 311 r°-317v°.

⁴⁴ *Ibid.*

était la notion d'*évanescence* qu'il empruntait aux *Principia*. Il détournait cette notion de son sens newtonien dans le but de caractériser la différentielle dans son lien avec la notion de quantité variable⁴⁵. On comprend alors en quoi le propos de Leibniz, s'il conduit à penser les différentielles comme « fixes et déterminées » - ce qui incompatible avec la notion de « variable » - porte aux yeux de Varignon préjudice à la « cause ».

Dans une lettre à Johann Bernoulli du 20 janvier 1702⁴⁶, Varignon questionne le sens qu'il faut attribuer à l'expression « infini à la rigueur » que Leibniz a utilisée dans sa réponse. Pour lui, il y a deux sens pour le terme infini. Le premier est « celui des mathématiciens & des autres philosophes, qui appellent Infini tout ce qui est inépuisable dans le sens qu'ils le disent infini » et ce sens correspond à l'infini potentiel aristotélicien. C'est à ce sens qu'il s'est référé lors de la séance académique du 7 août 1700 pour défendre le calcul. L'autre sens, explique-t-il, est celui d'un infini « qui comprend tout », mais à partir de ce sens il n'est pas possible de concevoir des infinis de différents ordres. Il espère que l'expression « infini à la rigueur » dont use Leibniz corresponde au deuxième sens car ainsi « nos ennemis seront battus ».

En attendant la réponse de Leibniz, Varignon fait patienter les objecteurs en expliquant que l'intention de ce dernier n'était « qu'une comparaison grossière pour se faire entendre aux moins intelligens ». Pour Varignon, il est clair qu'il ne s'agissait ici que de grandeurs finies et comparables entre elles, contrairement aux différentielles qui sont incomparables par rapport à leurs intégrales.

Leibniz ne reçoit la lettre de Varignon que début février et lui répond alors immédiatement. Il est probable qu'entre-temps Leibniz ait eu en main les numéros de septembre-octobre et novembre-décembre 1701 du *Journal de Trévoux* avant de recevoir la lettre de Varignon. Un écrit inédit, de la main d'un copiste avec des corrections de Leibniz, contient des notes et des remarques sur ces deux numéros, probablement en vue d'une publication dans le journal⁴⁷. Il porte pour titre « Quelques remarques sur les Memoires de Trévoux de l'an 1701 ». En marge, Leibniz signale que ces remarques avaient été écrites en 1702, mais que « le papier ayant été égaré, elles n'ont point été communiquées⁴⁸ ».

⁴⁵ À ce sujet on pourra consulter : Jeanne Peiffer : « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Leibniz'auseinandersetzung mit vorgängern und zeitgenossen, Studia Leibnitiana*, supplementa XXVIII, 1990, p. 244-266 ou Sandra Bella: *La (Re)construction de l'analyse infinitésimale de Leibniz*, op. cit., pp. 389-395.

⁴⁶ Lettre de Varignon à Johann Bernoulli du 20 janvier 1702, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, p. 310.

⁴⁷ G.W. Leibniz : « Quelques remarques sur les Memoires de Trévoux de l'an 1701 », LH 11, 1, 6 fols. 3-4. Une présentation et une transcription de l'extrait de ce manuscrit peut être consulté sur la page web : http://mathesis.altervista.org/justification-of-the-differential-calculus/quelques-remarques-sur-les-memoires-de-trevoux-de-lan-1701-overview/?doing_wp_cron=1648739438.5056250095367431640625 (consulté le 2 avril 2022).

⁴⁸ *Ibid.*, f° 4r°.

Dans « Quelques remarques ... », on retrouve des idées qui seront plus longuement développées dans la réponse de mars et qui concernent la manière de considérer les différentielles dans la pratique calculatoire (j'y reviendrai plus en avant). Ici, il rappelle que son intention en écrivant la réponse au *Journal de Trévoux* était de justifier son calcul auprès de ceux qui n'admettaient pas « d'infini à la rigueur ». Il argumentait, rappelle-t-il, que même si « l'infini ou l'infiniment petit à la rigueur ne seroit qu'imaginaire », l'important est que dans son calcul « la chose se peut réduire à l'incomparable c'est à dire à ce qui est aussi grand et aussi petit qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que la donnée.⁴⁹ »

Leibniz n'était pas averti que, dans son article de mai-juin 1701, Gouye exprimait aussi un désaccord avec ceux qui, pratiquant le calcul différentiel, considéraient pourtant les infiniment petits comme « rigoureux⁵⁰ ». C'est en tout cas ainsi qu'il interprète désormais le commentaire que Gouye avait placé après sa déclaration au *Journal de Trévoux*. Ainsi, dans « Quelques remarques sur les Memoires de Trevoux de l'an 1701 », il ajoute que même si certains prennent les infinis pour « plus reel que les racines imaginaires des equations », cela ne changera en rien la pratique de son calcul⁵¹.

Leibniz répond à Varignon le 2 février 1702⁵². Ayant l'intention de rendre public son point de vue, la lettre est également adressée aux membres de l'Académie. Par l'intermédiaire de Varignon, la lettre est publiée en entier dans le *Journal des Sçavans* du 20 mars 1702⁵³.

Tout d'abord il défend l'autonomie de son calcul : « on n'a pas besoin de faire dépendre l'Analyse Mathématique des controverses métaphysiques⁵⁴ », c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de « s'assurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, en comparaison des nôtres ». Par-là, il veut faire comprendre que dans la pratique calculatoire il est possible de mettre entre parenthèses la nature des différentielles, la fécondité du procédé n'en sera pas affectée. C'est pourquoi il s'est autorisé, dans l'article du *Journal de Trévoux*, « d'expliquer l'infini par l'incomparable ». Par « incomparable » Leibniz précise que l'on peut « entendre comme on veut ». Il est important de souligner que de toute évidence il est attentif ici à contenter tous les

⁴⁹ *Ibid.*, fol. 4.

⁵⁰ « On me répond icy qu'on a voulu parler seulement contre ceux qui disent qu'il faut prendre l'infini à la rigueur. », *ibid.*, fol. 4^o.

⁵¹ *Ibid.* : « on peut disputer contre eux, sans disputer contre leur calcul, qui n'est point différent du mien, et qui n'a aucun interest dans la controverse métaphysique sur les infinis ou infiniment petits réels ».

⁵² Lettre de Leibniz à Varignon du 2 février 1702, A III, 9, 10-17.

⁵³ G. W. Leibniz : « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de luy dans les Memoires des mois de Novembre et Decembre derniers », *Journal des Sçavans*, 20 mars 1702, pp. 183-186.

⁵⁴ *Ibid.*, p. 183

points de vue concernant la nature des différentielles : les incomparables peuvent être entendus comme « des infinis à la rigueur » ou comme « des grandeurs seulement qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres⁵⁵ ». Il insiste sur le fait que, quelle que soit la manière de les considérer, les incomparables ne sauraient être ni fixes ni déterminées.

Leibniz s'était étonné d'apprendre que Gallois, qui est une personne qu'il estime, soit contre son calcul et qu'il ait utilisé ses propos au *Journal de Trévoux* pour le décrier, il suppose que c'est parce que Gallois croit que le calcul est fondé sur des « paradoxes métaphysiques » mais justement pour Leibniz, il est nécessaire de s'en dépendre⁵⁶.

Leibniz a expliqué que considérer les différentielles comme des infinis rigoureux ou tout autre chose importe peu dans la pratique calculatoire. Par la suite il va expliquer sur quel argument philosophique repose une telle déclaration en introduisant une comparaison avec l'usage des racines imaginaires :

D'où il s'ensuit que si quelqu'un n'admet point les lignes infinies & infiniment petites à la rigueur métaphysique & comme des choses réelles, il peut s'en servir seulement comme de notions idéales qui abrègent le raisonnement ; semblables à ce qu'on appelle Racines imaginaires (*ibid*, p. 184).

Les différentielles, tout comme les imaginaires, ne sont pas des choses réelles mais des notions idéales. Dans la lettre suivante, en faisant référence à ses échanges avec Johann Bernoulli, il explique que déjà à l'époque il concevait les infinis ou les infiniment petits comme « des fictions estant utiles et fondées en réalités⁵⁷ ». Il insiste publiquement sur la nécessité de les considérer comme telles. En effet, c'est ainsi que les imaginaires servent à « exprimer analytiquement des grandeurs réelles » – il cite l'expression analytique de la solution correspondant au problème de trisection de l'angle –, et que les différentielles établissent « le calcul des transcendentes ». Les Anciens, « faute d'un calcul », ne parvenaient qu'à des « vérités débarassées », c'est-à-dire qu'elles ne montraient pas la voie de l'invention contrairement à ce que conduit l'Analyse de l'infini grâce à l'intervention des « différences qui sont sur le point de s'évanouir ».

Leibniz souligne que comprendre les différentielles comme des notions idéales ne conduit pas à une « dégradation » de la science de l'infini qui serait « réduite à des fictions », tout au contraire :

⁵⁵ *Ibid.*

⁵⁶ « Peut estre que son opposition ne vient que de ce qu'il croit que nous fondons la demonstration de ce calcul sur des paradoxes Metaphysiques dont je tiens moy même qu'on peut bien le degager. » : Lettre de Leibniz à Varignon le 2 février 1702, A III, 9, 15-16.

⁵⁷ Lettre de Leibniz à Varignon du 14 avril 1702, A III, 9, 55. Dans la lettre du mois de juin suivant, il affirme à Varignon qu'il n'est pas persuadé qu'il faille considérer les infiniment petits autrement que « comme des choses idéales ou des fictions bien fondées », Lettre de Leibniz à Varignon du 20 juin 1702, A III, 9, 102.

On peut dire de même que les infinis & infiniment petits sont tellement fondez que tout se fait dans la Géométrie, & même dans la nature, comme si c'étoient des parfaites realitez : Témoins non seulement notre Analyse Geometrique des Transcendantes, mais encore ma loy de continuité, en vertu de laquelle il est permis de considerer le repos, comme un mouvement infiniment petit (...). Cependant on peut dire en general que toute la continuité est une chose ideale, & qu'il n'y a jamais rien dans la nature qui ait des parties parfaitement uniformes : Mais en récompense le réel ne se laisse pas se gouverner parfaitement par l'ideal & l'abstrait ; & il se trouve que les Regles du fini réussissent dans l'infini, (...) ⁵⁸

Ainsi, pour concilier le continu et le discontinu, le fini et l'infini, l'usage du « comme si » est requis. La continuité est bien une chose idéale mais qui donne accès à la connaissance du réel : elle « ne se laisse gouverner parfaitement par l'idéal et l'abstrait ⁵⁹ ». Les différentielles ne sont pas des quantités ni fixes ni déterminées : en les considérant comme des notions idéales, elles traduisent « les affections des grandeurs ».

Dans la lettre à Johann Bernoulli du 22 mars 1702, Varignon explique que Gouye et La Hire semblent satisfaits de la réponse de Leibniz. Gouye ne comprend pas pourquoi Leibniz s'est si mal expliqué dans sa réponse au *Journal de Trévoux* concernant le statut de l'infini rigoureux :

Le P. Gouye a été fort surpris d'y voir que l'infini rigoureux que M. Leibnitz dit inutile pour son calcul, n'est qu'un infini réel et existant, & non pas l'infini ideal ou l'inépuisable permentem (...) ⁶⁰.

Une accalmie suit grâce aux éclaircissements de Leibniz. Mais, accalmie ne signifie pas nécessairement entente. L'épisode de *Trévoux* a mis en lumière davantage les discrédances entre les défenseurs parisiens du calcul et Leibniz qu'avec ceux qui y sont opposés.

3. « je trahissois la cause » : Une parade entre parisiens ?

Dans la lettre à Dancicourt, Leibniz affirme que L'Hospital considérait que les propos développés lors de ses deux interventions publiques « trahissoi[ent] la cause », et que, pour cette raison, il l'avait passé sous silence. À ma connaissance, il n'existe pas de témoignages d'une interdiction directe par L'Hospital. Il est possible que Leibniz fasse confusion, ou qu'il nomme L'Hospital comme synecdoque du cercle autour de Malebranche dont il était indubitablement l'un des principaux acteurs. Cependant, il est manifeste que dans les années suivantes, s'adressant aux parisiens, Leibniz s'astreint à élaborer une stratégie pour justifier son calcul sans plus se focaliser sur des considérations impliquant les fictions, en évitant la notion d'incomparable et en bannissant de son discours des comparaisons « grossières » entre des grandeurs finies et les différents ordres d'infinis. En revanche, il rédige deux écrits dans lesquels il présente un tout

⁵⁸ G. W. Leibniz : « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon ... », p. 185.

⁵⁹ *Ibid.*

⁶⁰ Lettre de Pierre Varignon à Jean Bernoulli du 22 mars 1702, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, p. 312.

nouveau type de justification de son calcul basée sur sa « Loi de continuité » dans lesquels les différentielles sont interprétées comme des grandeurs évanescentes⁶¹. Le premier « Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire » est envoyé à Varignon, mais aucun des deux n'est publié de son vivant⁶².

Comme on l'a vu plus haut, Varignon défend le calcul en restant souple quant à la manière de considérer les différentielles, à condition toutefois de ne pas les prendre pour des quantités fixes et déterminées. Certes, il défend à certaines occasions la réalité des différentielles, et il convient par la suite de questionner ce point.

Rolle s'appuie principalement – sinon exclusivement – sur le traité de L'Hospital pour émettre les critiques. Il déduit de sa lecture de l'*Analyse des infiniment petits* qu'elle suppose des infiniment petits réels de tout genre⁶³. Il renvoie pour cela à la Préface et aux figures où sont représentées les différentielles de premier et deuxième ordre par des segments finis⁶⁴.

⁶¹ G.W. Leibniz : « Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire » : LBr 951, 15-16, GM, IV, 104-106 et « Defense du calcul des Differences », LH XXXV, 7, 22, fols. 1-2, Appendice de Enrico Pasini : *La nozione di infinitesimo*, in *Leibniz: tra matematica e metafisica*, diss., a.a. 1985-86, Università degli studi di Torino, Lettere e filosofia, pp. 14-19.

⁶² De fait, il existe trois versions successives de « Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire ». Dans la première version (LBr 951, 12-13), Leibniz, pour rendre compte du passage continu du polygone régulier au cercle avait écrit « par la fiction des infinis », mais il choisit de barrer pour le remplacer par « par la supposition des grandeurs infinies ou infinitésimales ».

Une présentation et une transcription de ces deux manuscrits peuvent être consultées sur la page web : <http://mathesis.altervista.org/justification-of-the-differential-calculus/> (Consulté le 2 avril 2022).

On pourra également consulter Douglas Jesseph : « Leibniz on the elimination of infinitesimals, *G.W. Leibniz, Interrelations Between Mathematics and Philosophy*, éd. par Norma B. Goethe, Philip Beeley and David Rabouin, Netherlands, pp. 189-206 et Sandra Bella : « De l'intraitable à l'indéterminé : entre calcul et géométrie, réflexions leibniziennes autour de $\frac{0}{0}$ (1700-1705) », « Mathématique et philosophie leibniziennes à la lumière des manuscrits inédits », *Cahier thématique de Philosophia Scientiae*, 25-2 juin 2021.

⁶³ Michel Rolle : « Du Nouveau Système de l'infini », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, 1702, p. 313, 324.

⁶⁴ Guillaume de L'Hospital : *Analyse des infiniment petits*, op. cit., Préface et figures 46-47 de la Planche IV. L'Hospital considère trois points infiniment proches M , m et n . H est l'intersection des droites Mm et nS parallèle à Mm , k est l'intersection de Mm et de l'arc de centre n et de rayon mn . Si dx est constant c'est-à-dire si $MR = mS$, les triangles mSH et MRm sont égaux, donc $ddy = HS - nS = HS - mR = Hn$ et $ddu = Hm - mk = mM - mk = Hk$.

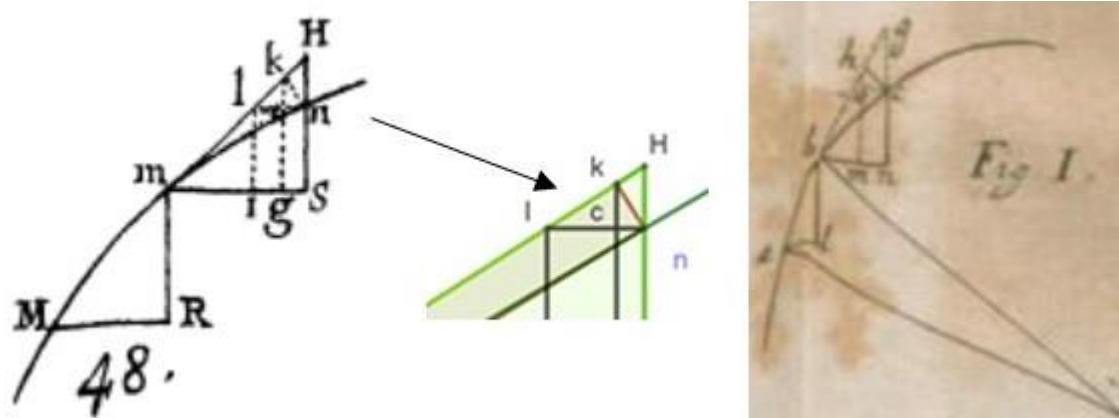


Figure 3 : Représentation des différentielles d'ordre deux. À gauche : $Hn = ddy$, $ddu = Hk$ et $ddx = 0$, Guillaume de L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, fig. 46, planche IV et à droite : $mn = ddx$, $ho = ddy$ et ds est constant, Jakob Bernoulli, « *Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expnsi. Radii circulorum osculantim in terminis simplicissimis exhibitus, una cum novis quibusdam theorematis huc ertinentibus, &c.* », *Acta Eruditorum*, juin 1694, Fig. I, planche VI.

Représenter des différentielles d'ordre supérieur à deux par des segments n'est pas l'exclusivité de L'Hospital, on la retrouve chez les Bernoulli, mais aussi chez Leibniz. Ainsi, le fait de représenter des différentielles par une segment fini n'est pas nécessairement un argument pour conclure que l'auteur serait en faveur de leur « réalité ». En revanche la Préface du traité – à laquelle Gouye se référait également dans son article au *Journal de Trévoux* – énonce clairement l'existence d'infiniment petits de tout ordre qui peuvent être traités à la manière de grandeurs finies, en établissant des rapports entre eux⁶⁵.

Il n'est pas du tout certain que L'Hospital soit l'auteur de la Préface, et plusieurs arguments pencheraient pour l'attribuer à Fontenelle qui d'ailleurs en avait revendiqué la paternité⁶⁶. Si Varignon adopte une position plurivoque quant à la manière de considérer les différentielles, Fontenelle est en revanche catégorique : les infiniment petits de tout ordre ont une existence réelle et peuvent être traités comme des véritables grandeurs.

Leibniz ne prend connaissance de l'approche fontenellienne des infiniment petits que le 23 mai 1702, par une lettre de Varignon dans laquelle ce dernier affirme que Fontenelle a

⁶⁵ « On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisièmes, quatrièmes, & ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »

⁶⁶ Fin 1695, d'après Pierre Costabel, Fontenelle ne connaissait pas suffisamment le calcul leibnizien pour être à même d'élaborer une préface rendant compte de tous les enjeux de la nouvelle Analyse, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, Introduction, p. 13. Cependant, le style est sans aucun doute fontenelliens et les thèses qui y sont défendues se retrouvent dans l'œuvre de cet auteur. À ce sujet on pourra consulter Simone Mazauric : *Fontenelle et l'invention de l'histoire des sciences à l'aube des Lumières*, Paris 2007, pp. 293-320 et Sandra Bella : « Les Infiniment petits à l'Académie Royale des Sciences, le rôle de Fontenelle (1698-1727) », *Revue Fontenelle*, Rouen 2015, pp. 237-263.

l'intention d'écrire « des élémens Metaphysiques de votre Calcul⁶⁷ ». Auparavant, Leibniz avait marqué sa position directement auprès de Fontenelle :

J'espere que le proces sur le Calcul des differences sera terminé ; je serois surpris si on se servoit de contestations metephyisques sur l'infini, pour forger des scrupules sur un calcul, qui n'en a que faire (...)⁶⁸

Le 18 novembre 1702, Fontenelle fait part de son dessein directement à Leibniz : « j'ai commencé la téméraire entreprise des infiniment petits⁶⁹ ». Bien que de toute évidence, Leibniz considère qu'il n'est pas du tout utile de s'attarder à asseoir métaphysiquement son calcul, il encourage Fontenelle dans cette tâche : « votre beau dessein qui va à répandre les lumières de vostre esprit jusque dans les enfoncemens des infiniment petits⁷⁰ ». Leibniz, chercherait-il à flatter le Secrétaire perpétuel de l'Académie ? Il n'est pas faux d'affirmer qu'il a des intérêts à entretenir un rapport amical avec Fontenelle car ce dernier lui procure des informations sur l'Académie et est susceptible de jouer un rôle pour la publication de ces mémoires. Toutefois, si flatterie il y a – « J'attends vos belles meditations sur l'infini ou infiniment petit⁷¹. » – Leibniz revendique, coûte que coûte, sa conviction :

Il est vray que chez moy les infinis ne sont pas des touts et les infiniment petits ne sont pas des grandeurs. Ma metaphysique les bannit de ses terres, et je ne leur donne retraite, que dans les espaces imaginaires du calcul geometrique, où ces notions ne sont de mise que comme les raçines qu'on appelle imaginaires⁷².

Leibniz insiste sur le fait que les infiniment petits ne sont pas des vraies grandeurs – au sens « rigoureux » – et qu'ils n'appartiennent pas à l'ordre du Réel, tout comme les racines imaginaires de l'Algèbre. Il est donc impropre d'entrer dans des considérations métaphysiques les concernant. C'est une position contraire à celle de Fontenelle.

Au tout début de la querelle, pendant la séance académique du 23 février 1701, Fontenelle avait déjà lu un mémoire sur les « Principes Metaphisiques de la Geométrie des infinimt petits⁷³ », mais qui n'a pas été retranscrit. Il publiera son ouvrage en 1727 sous le titre *Éléments de Géométrie de l'infini*⁷⁴, son travail d'élaboration aura été long de 25 ans. Cependant, étant chargé de l'écriture

⁶⁷ Lettre de Varignon à Leibniz du 23 mai 1702, A III, 9, 81.

⁶⁸ Lettre de Leibniz à Fontenelle du 5 mai 1702, A II, 4, 58.

⁶⁹ Lettre de Fontenelle à Leibniz du 18 novembre 1702, A II, 4, 96.

⁷⁰ Lettre de Leibniz à Fontenelle le 12 juillet 1702, A II, 4, 63. t

⁷¹ *Ibid.*

⁷² Lettre de Leibniz à Fontenelle du 9 septembre 1704, A II, 4, 301.

⁷³ Séance du mercredi 23 février 1701, *PVARS*, t. 20, fol. 71r°.

⁷⁴ Bernard Le Bovier de Fontenelle, *Éléments de la Géométrie de l'infini*, Paris 1727.

de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, il sera amené à écrire une histoire de la querelle dans laquelle il développe son point de vue sur les infiniment petits⁷⁵.

Dans l'*Éloge* de Leibniz (1716)⁷⁶, Fontenelle loue le caractère universel du savant et son esprit géométrique⁷⁷. Même s'il cite Newton, il fait de Leibniz le principal, voire le seul, inventeur du calcul. Cependant, il désapprouve les affirmations de Leibniz publiées au *Journal de Trévoux* :

Il semble cependant qu'il en ait été ensuite effrayé lui-même, et qu'il ait cru que ces différents ordres d'infiniment petits n'étaient que des grandeurs *incomparables*, à cause de leur extrême inégalité, comme le serait un grain de sable et le globe de la terre, la terre et la sphère qui comprend les planètes, etc. Or, ce ne serait là qu'une grande inégalité mais non pas infinie, telle que l'on établit dans ce système. Aussi ceux mêmes qui l'ont pris de lui, n'ont-ils pas pris cet adoucissement qui gâterait tout. Un architecte qui a fait un bâtiment si hardi, qu'il n'ose lui-même y loger⁷⁸.

Fontenelle fait mine de prendre au pied de la lettre les comparaisons « grossières » de Leibniz au *Journal de Trévoux*, alors que ce dernier avait expliqué quelle était son intention lorsqu'il usait de telles comparaisons. Pour Fontenelle, la position prise par Leibniz pâtit de plusieurs défauts : elle est peu rigoureuse et excessivement pragmatique. À ces défauts, Fontenelle ajoute un argument moral : la lâcheté du Maître.

Grâce à sa fonction de Secrétaire perpétuel, Fontenelle rend aisément publiques ses considérations, et il est très probable qu'il ait influencé certains de ses pairs. Cependant il n'est pas pour autant certain que sa position ait été partagée unanimement par les partisans parisiens du calcul différentiel.

Il est désormais possible d'apporter une réponse à la question : *y avait-il une dichotomie réel/fiction concernant la manière de concevoir les infiniment petits, dichotomie qui était au plus haut point chez les parisiens ?*

Cette dichotomie existait de fait. Cependant, ma conviction est qu'elle ne s'appuyait pas principalement sur des arguments philosophiques des acteurs, mais que ce qui s'y jouait avait davantage affaire avec l'art de persuader. Expliquons.

Une des principales attaques de Rolle contre le calcul leibnizien – dans sa version française – est l'affirmation selon laquelle les infiniment petits de tout ordre sont réels. Réelles, ces entités gagneraient en consistance mathématique, et les défenseurs auraient un argument

⁷⁵ Sur le lien entre l'écriture de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences* et les *Éléments de Géométrie de l'infini*, on pourra consulter Sandra Bella, « Les Infiniment petits à l'Académie Royale des Sciences, le rôle de Fontenelle (1698-1727) », Rouen, 2015, pp. 237-263.

⁷⁶ Bernard Le Bovier de Fontenelle : « Éloge de M. Leibnitz », l'*Histoire de l'académie royale des sciences*, 1716, p. 94.

⁷⁷ *Ibid.*, p. 97.

⁷⁸ *Ibid.*, p. 114

notable pour le bien-fondé du calcul différentiel. Fontenelle y croit. Mais force est de constater que les acteurs n'avaient pas les moyens épistémologiques de donner sens à cette réalité.

Reste cependant qu'aux attaques de Rolle, il fallait se montrer réactif. Rolle trace en quelque sorte le sillon argumentaire dans lequel les acteurs s'enfoncent dans un dialogue de sourds, argument contre argument. Muni d'une philosophie de la connaissance longuement méditée, Leibniz intervient mais n'est pas entendu. Ce qui est en jeu n'est donc pas tant de croire ou de ne pas croire à la réalité des différentielles mais que l'argument soit tranchant⁷⁹.

4. *Nihil et Omnia... extremitates exclusae non inclusae*

Leibniz a expliqué comment sa conception de ce que sont les choses mathématiques permet d'accepter de plein droit une pratique des infiniment petits ou des infiniment petits. Ce ne sont pas des grandeurs, mais il est d'usage en mathématique de faire comme s'ils l'étaient. Cette précision conduit aussi Leibniz à expliquer pourquoi il faut écarter de la pratique mathématique d'autres concepts – le « pur zéro » ou le « tout » – qui relèvent de la métaphysique.

4.1) *Les « expressions de Monsieur Hermann dans sa réponse à Monsieur Nieuwentijt »*

Bernard Nieuwentijt (1654-1718) est un philosophe et mathématicien hollandais. En 1694, il publie *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum resolvendis problematibus geometricis* puis en 1695, *Analysis infinitorum seu curvilinearum ex polygonorum natura deductae*⁸⁰ Le dessein de l'*Analysis infinitorum* est de fournir les principes pour fonder une méthode utilisant les infiniment petits mais uniquement de premier ordre⁸¹.

Dans *Analysis infinitorum*, Nieuwentijt suppose que toute quantité finie peut être divisée en n'importe quel nombre de parties la rendant inférieure à toute quantité finie donnée. Il admet un nombre infini, ce que Leibniz récuse absolument comme contradictoire tout au long de sa vie. Grâce à l'introduction du « nombre infini », Nieuwentijt définit un infiniment petit comme ce qui est produit par la division d'une quantité finie b par un nombre infini $m : \frac{b}{m}$. Par ailleurs, il pose en axiome que toute quantité qui multipliée par une quantité, qu'elle soit finie ou infinie, ne produit

⁷⁹ Voir aussi l'interprétation de Paolo Mancosu pour comprendre la non-entente entre Leibniz et les partisans de son calcul : *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, p. 173.

⁸⁰ Bernard Nieuwentijt: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amsterdam, 1694. *Analysis infinitorum seu curvilinearum proprietates ex polygonorum natura deductae*, Amsterdam, 1695.

⁸¹ Bien qu'il ait été publié un an après la publication de *Considerationes*, la quasi-totalité de la rédaction de *Analysis* est antérieure à 1690, c'est-à-dire avant qu'il ait pris connaissance des écrits de Leibniz. Cependant, quelques pages ont été écrites plus tard et font référence au calcul leibnizien en y émettant quelques critiques, Rienk H. Vermij: « Bernard Nieuwentijt and the Leibnizian Calculus », *Studia Leibnitiana*, Bd. 21, H. 1, 69-81, 1989, p. 75.

pas une quantité finie doit être comptée en géométrie pour un « pur rien » [*merum nihil*] ou « une non quantité » [*non quantum*]. En particulier, le produit de deux quantités infiniment petites ou les différentielles de différentielles sont des purs riens⁸². Il y a donc exactement trois types de « quantités » : les finies, les infiniment petites et les infiniment grandes⁸³.

Parmi les réponses pour justifier que les différentielles d'ordre deux ne sont pas des riens, Leibniz explique que la troisième proportionnelle des deux quantités – il ne spécifie pas quel type de quantité – est une quantité. Or, puisque Nieuwentijt admet que dx est une quantité, il suit que la troisième proportionnelle des deux quantités x et dx est aussi une quantité. Or cette troisième proportionnelle n'est autre que ddy ⁸⁴. À cet argument, Nieuwentijt retorque que pour que la troisième proportionnelle de deux quantités soit une quantité, il faut que les deux premières quantités soient finies⁸⁵.

Leibniz, étant un peu las de cette discussion, fut heureux d'apprendre que Jakob Hermann (1678-1733), élève de Jakob Bernoulli, préparait une réponse. Celle-ci est publiée en 1700 sous le titre *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuventijt Considerationes Secundas circa calculis differentialis principia*⁸⁶.

Dans sa réponse, Hermann énonce deux lemmes afin de distinguer la notion de « quantité infiniment petite » de celle de « non-quantité » :

I. Une quantité infiniment petite dx multipliée par un nombre m plus grand que n'importe quel nombre donné, devient égal à une quantité x , de laquelle elle est sa différentielle, ici $mdx = x$

⁸² Pour les critiques de Nieuwentijt et les réponses de Leibniz, on pourra consulter l'étude de Vermij et celle de Mancosu citées dans les notes précédentes.

⁸³ Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, p. 159.

⁸⁴ G. W. Leibniz : « Responsio as nonnullas difficultates a Dn. Bernatdo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas », *Acta Eruditorum*, juillet 1696, p. 315. Pour le justifier, il considère des x en progression géométrique lorsque des y en progression arithmétique, ainsi $dx = x \frac{dy}{a}$ où a est une constante, donc $ddx = dx \frac{dy}{a} = dx \frac{dx}{x}$, c'est-à-dire $x ddx = dx dx$. Ainsi x est à dx comme dx est à ddx .

⁸⁵ Bernard Nieuwentijt : *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia; et responsio ad virum nobilissimum G. G. Leibnitium*, Amsterdam 1696, p. 13.

⁸⁶ Jakob Hermann : *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuventijt Considerationes Secundas circa calculis differentialis principia*, Basel 1700. Concernant la réponse de Hermann, on pourra consulter : Fritz Nagel : « Nieuwentijt, Leibniz, and Jacob Hermann on infinitesimals » dans Goldenbaum Ursula and Douglas Jesseph Douglas (ed), *Infinitesimals differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, Berlin 2008, pp. 199-214 et Franco Palladino : « Le quantità utili al ragionamento e alla ricerca. Differenziale e summatriuce in un dibattito tra Nieuwentijt, Leibniz e Hermann », *Geometria, flussioni e differenziali : osservazioni sul rapporto fra tradizione e innovazione nella matematica del seicento*, a cura di Marco Panza e Clara Silvia Roero, Napoli 1995, pp. 427-441.

II. Le Rien, ou la non-quantité (tel que l'admet Dr. Nieuwentijt) multiplié par un nombre aussi grand que l'on veut m , voire plus grand que tout nombre assignable, reste toujours le même rien, et donc aucune quantité ne peut en être tirée, aussi petite soit-elle⁸⁷.

Par ces deux lemmes, Hermann reformule les définitions de Nieuwentijt et pour ce faire, il utilise, comme ce dernier, la notion de nombre « plus grand que tout assignable », qu'il appelle, un peu plus loin, le nombre infini [*numero infinito*].

Ces lemmes lui permettent d'affirmer, comme l'avait affirmé Leibniz, que la troisième proportionnelle l d'une quantité ordinaire x et d'une quantité infiniment petite dx est une quantité. Pour ce faire, il suppose par l'absurde que l est une non-quantité. De l'égalité $\frac{x}{dx} = \frac{dx}{l}$ et en multipliant par m les dénominateurs, il vient $\frac{x}{mdx} = \frac{dx}{ml}$. Or par le lemme I, $mdx = x$ et par le lemme II, $ml = m0 = 0$. Ainsi, $\frac{x}{x} = \frac{dx}{0}$, et puis comme $x = x$, il vient $dx = 0$, ce qui est absurde.

La réponse de Hermann contrecarre Nieuwentijt dans son propre terrain puisqu'il utilise, comme lui, l'expression de nombre infini.

4.2) *Quels infinis pour calculer ?*

Dans sa lettre, Dancicourt reproduit certains exemples que Naudé a utilisés et qui selon lui permettent d'affirmer que par le calcul différentiel, on peut parvenir à montrer des paradoxes tels « qu'une grandeur donnée ou l'infini même est égal à 0⁸⁸ ». Pour ce faire, Naudé suppose que les caractères b et ∞ représentent respectivement une grandeur finie quelconque et l'infini. Si on multiplie la grandeur b par zéro, on obtient $b0 = 0$ ce qui est la même chose que $b0 = 0^2$. En divisant les deux membres de cette dernière égalité par 0, on obtient $b = 0$, ce qui est une absurdité puisque b est quelconque. Aussi, puisque le calcul différentiel soutient que $\frac{b}{0} = \infty$, en multipliant de part et d'autre par 0^2 , il vient $b \times 0 = 0^2 \times \infty$ et en remplaçant 0 par 0^2 , cela donne $b \times 0^3 = 0^2 \times \infty$, puis en divisant par 0^2 , il découle que $0 = \infty$, ou encore $\frac{0}{\infty} = 0$.

⁸⁷ « I. Quantitas infinite parva dx in numerum quovis majorem m ducta, datae quantitati x aequatur, cujus est differentiale ; hoc est $mdx = x$. », *ibid.*, pp. 13-14.

II. Nihil seu non quantum (prout sumit Dn. Nieuwentijt) per numerum quantumvis magnum, quin etiam omni assignabili majorem m multiplicatum, semper idem nihil manet adeoque nulla inde quantitas utcunque parva vel qualibet minor effici potest. »

⁸⁸ Lettre de Pierre Dancicourt à Leibniz du 11 septembre 1716, LBr. 194, fol.4r°.

Naudé soutient que Leibniz avait approuvé tous ces exemples et ce qu'il s'en suivait, c'est-à-dire que ces absurdités étaient des conséquences « légitimement et nécessairement des principes du calcul des infinis⁸⁹ ». Dangicourt supplie Leibniz de lui fournir des explications⁹⁰.

Il est peu vraisemblable que Leibniz ait pu approuver un tel verdict sur le calcul différentiel, mais ce qui est certain c'est que le philosophe avait échangé avec Naudé l'Ancien⁹¹ sur ce sujet à l'occasion d'une rencontre à Berlin avec Philip Joseph Jenisch (1671-1736) en octobre 1702. Dans cette rencontre, Jenisch avait énoncé sous forme d'exemples ses difficultés avec le calcul différentiel, difficultés auxquelles Leibniz répondait et à propos desquelles Naudé avait fait des commentaires.

Un manuscrit témoigne de cette rencontre⁹². Il se présente sous forme de deux colonnes : à gauche sont inscrites les difficultés de Jenisch, elles sont ponctuées par des lettres et des nombres entourés (Fig. 4). Les lettres sont reprises à droite et renvoient aux réponses de Leibniz, les nombres aux commentaires de Naudé (retranscrits à part⁹³).

Comme cela apparaîtra dans ce qui suit, nombre des exemples qui nourrissent les échanges entre Jenisch, Leibniz et Naudé l'Ancien relèvent du même type de problématique que ceux que reproduit Dangicourt.

Les difficultés qu'éprouve Jenisch découlent principalement de la manipulation symbolique avec les caractères « 0 » ou « ∞ » en lien avec des développements en séries infinies.

⁸⁹ *Ibid.*

⁹⁰ *Ibid.* : « Vous nous rendrez un grand service si vous avez la bonté de nous dire ce qui en est et surtout si vous croiez que cette equation soit veritable : $\frac{0}{\infty} = 0$ [...] Car pour moi il me semble que bien que les infiniment petits soient en quelque sorte divisibles[,] cependant le pur zero ne l'est pas et qu'ainsi $\frac{0}{\infty}$ doit etre absurde et non pas egal à zero. Je suis tellement persuadé de cela que je lui ay voulu prouver que dans la division ordinaire $\frac{0}{2}$ à proprement parler n'a pas le zero pour quotient[,] mais il soutient lui que $\frac{0}{2} = 0$ et $\frac{0}{\infty} = 0$ sont des veritez exactes[,] ayez la bonté s'il vous plaît Mr d'en decider. »

⁹¹ Pour rappel, je n'ai pas assez d'éléments pour savoir si le Naudé qui apparaît dans la lettre de Dangicourt est le père ou le fils, voir note 3.

⁹² « Difficultates motae a D^{no} Jenisch circa calculum infinitesimalem », LH 35, 7, 17, fols. 2-5. Le manuscrit est de la main d'un copiste mais contient des ratures et modifications de la main de Leibniz.

⁹³ *Ibid.*, 6r°-8r°. Seule le folio 6r est de la main de Leibniz.

Jenisch

Leibniz

Naudé

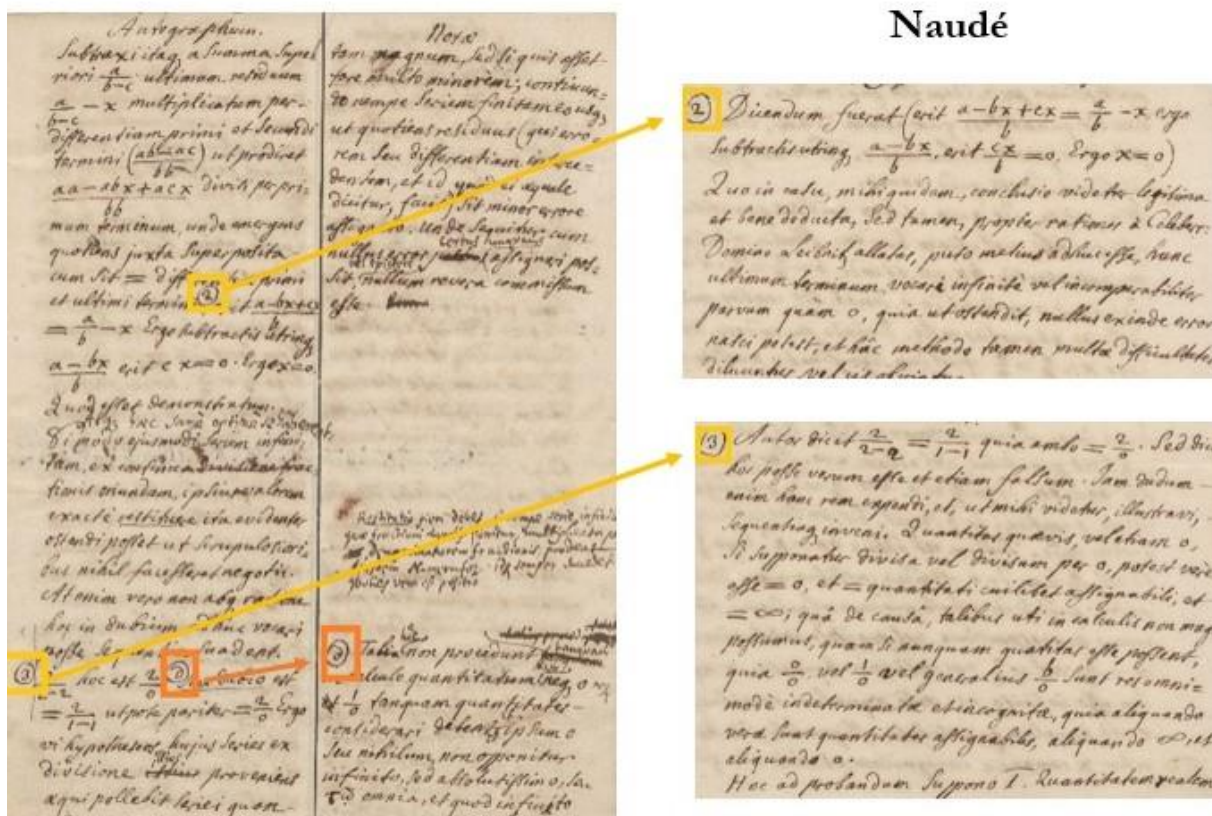


Figure 4 : LH 35, 7, 17, f° 3r° (gauche) et f° 7r° (droite)

À titre d'exemple, Jenisch part du développement formel de la fraction $\frac{a}{b-c}$:

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{acc}{b^3} \text{ etc. « in infinitum »}$$

qu'il manipule sans forcément tenir compte des restrictions possibles concernant les valeurs à attribuer à a, b et c .

En prenant b et c égaux à 2 puis à 1, il obtient :

$$\frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = 1 + 1 + 1 + \text{etc et } \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = 2 + 2 + 2 + \text{etc}$$

mais

$$\frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = \frac{2}{1-1}$$

De ces développements surgit un paradoxe : il apparaît que $\frac{2}{1-1}$ est le double de $\frac{2}{2-2}$ et en même temps il lui est égal.

Jenisch pointe une autre difficulté découlant du postulat qu'il attribue au calcul différentiel :

$$\frac{1}{0} = \infty$$

Les réponses de Leibniz reposent essentiellement sur deux arguments.

L'erreur de Jenisch est de considérer que lors des manipulations symboliques, les caractères « 0 » et « ∞ » représentent respectivement le pur zéro et l'infini absolu. Leibniz souligne que ces deux concepts n'appartiennent pas au domaine des mathématiques : elles ne sont pas des grandeurs – car elles ne respectent pas l'axiome du tout et de la partie – et elles ne sont surtout pas calculables. :

En effet à ce 0 est certes opposé $\frac{1}{0}$; mais à ce même 0 n'est pas opposé l'infini, la véritable opposition est entre l'infini et l'infiniment petit, et pareillement entre l'ensemble de toutes les choses [*omnia*] et le rien [*nihil*]. Puisque donc $\frac{1}{0}$ est opposé à ce 0, il est évident que $\frac{1}{0}$ ne signifie pas à proprement parler l'infini, mais, pour ainsi dire le plus absolument infini, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les choses; ce que nous avons montré plus haut ne pas être une quantité ; et la même chose peut ici être reconnue. À savoir si $\frac{1}{0}$ était une quantité, son double $\frac{2}{0}$ serait aussi une quantité, mais comme $\frac{1}{0}$ signifie toutes les choses, il est évident qu'il ne peut être doublé.

En revanche, il avance qu'il est possible de manipuler ces caractères à condition de les interpréter, non pas comme des absolus, mais comme des grandeurs indéfiniment petites ou indéfiniment grandes, c'est-à-dire dans la supposition de cette fiction. Ces arguments sont repris dans un autre écrit intitulé « *Quaestio de jure negligendi quantitates infiniti parvas*⁹⁴ », probablement contemporain de la rencontre avec Jenisch bien que postérieur à celle-ci⁹⁵ :

Il faut répondre que le vrai 0, c'est-à-dire pris comme absolu, ne peut être soumis à un tel calcul, c'est-à-dire que si quelque chose est multiplié par 0, et le produit à nouveau divisé par 0, il n'est pas restauré, parce que n'importe quoi multiplié par 0 donnera la même chose, à savoir rien⁹⁶.

et

⁹⁴ « *Quaestio de jure negligendi quantitates infiniti parvas* », LH 35, 8, 21 fols. 1-2, Appendice de Enrico Pasini : *La Nozione, di infinitesimo*, pp. 1-2. Une présentation et une traduction française peut être consulté sur la page web: <http://mathesis.altervista.org/justification-of-the-differential-calculus/quaestio-de-jure-negligendi-quantitates-infiniti-parvas-overview-2/> (consulté le 13 avril 2022).

⁹⁵ Leibniz y fait allusion : « Par conséquent, il ne faut pas penser que deux fois 0 sera autre chose que 0, comme j'ai appris que certains hommes ingénieux l'ont affirmé, confondant d'une certaine manière l'infiniment petit et le nul. »

⁹⁶ « Respondendum est 0 verum seu absolute sumtum tali calculo non subesse, seu si quid multiplicetur per 0, id producto rursus per 0 diviso non restitui, cum quaelibet per 0 multiplicatae dent idem, nempe nihil. », *ibid.*

Mais il en va autrement de la supposition de l'infini et des infiniment petits, dont nous nous servons dans le calcul, c'est-à-dire du aussi petit ou de l'aussi grand qu'il faut pour que l'erreur soit montrée inférieure qu'un donné⁹⁷.

Dans la lettre à Danguicourt, pour expliquer le paradoxe « $\frac{0}{\infty} = 0$ » ou « d'autres choses semblables », Leibniz garde sa ligne argumentative : « 0 » ou « ∞ » doivent être interprétés « en prenant zéro pour un nombre d'une grande petitesse et l'infini pour un nombre très grand ». Pour faire comprendre son propos, Leibniz l'illustre en considérant des numérateurs de la forme $\frac{1}{10^n}$ et des dénominateurs de la forme 10^n (où n représente un nombre entier non nul). Le quotient s'approche de 0 au fur et à mesure que n augmente : « ce qui va vers $\frac{0}{\infty} = 0$, ou $\frac{1:\infty}{\infty} = 0$, ou $\frac{1}{\infty\infty} = 0$ ». Cependant, Leibniz précise que « cela y va et non pas qu'il y arrive ». Par-là, il veut faire comprendre qu'« à la rigueur », on n'atteint pas les extrémités des nombres – c'est-à-dire le Rien [*Nilium*] ou l'ensemble de toutes les choses [*omnia*] –, puisque ces extrémités sont « *exclusae* non *inclusae* »⁹⁸. Il ajoute qu'il est important d'être précis sur ce qu'on entend lorsqu'on écrit certains signes, sous peine sinon de tomber dans des paralogismes⁹⁹.

Les réponses de Leibniz illustrent des aspects essentiels d'une philosophie de la pratique mathématique prônée par lui.

Comme il a été vu plus haut, Leibniz défend l'idée selon laquelle l'activité mathématique fait appel souvent à un raisonnement basé sur l'hypothèse du « comme si » dans lequel sont convoquées des entités fictionnelles – qui peuvent être éventuellement contradictoires en soi – mais qui sont traitées comme si elles étaient existantes¹⁰⁰. Un des points importants est que ce traitement est largement facilité par la connaissance symbolique et qu'il aboutit à des énoncés

⁹⁷ « Sed secus esse de infinitis et infinite parvis suppositis, quibus utimur in calculando; id est tam parvis aut tam magnis quam opus est, ut error ostendatur minor dato. », *ibid.*

⁹⁸ Lettre de Leibniz à Pierre Danguicourt du 11 septembre 1716, LBr. 194, fol. 7r°.

⁹⁹ Il donne comme exemple Guido Grandi qui en s'appuyant sur le développement $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 + 1 + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$ soutenait « qu'une infinité de riens ou zeros ajoutés ensemble faisoient une grandeur assignable, et ainsi par une élégante allégorie il illustroit la production de créatures du rien par le moyen de l'infini. », *ibid.*, fol. 7v°.

¹⁰⁰ Dans « Can one be a fictionalist and a platonist at the sametime? Lessons from Leibniz », Rabouin souligne le fait que l'entité fictionnelle ne désigne pas une classe spéciale d'entités mais davantage une manière de traiter avec des expressions comme si elles se référaient à des objets. Le traitement avec des fictions aboutit à des résultats qu'il est possible de réinterpréter mathématiquement. Rabouin repère dans les écrits de Leibniz plusieurs situations. Entre autres, il peut arriver que l'impossibilité à laquelle on parvient puisse être interprétée en termes d'entités véritables (par exemple en reformulant un problème en termes de « dette » lorsqu'on obtient une solution négative) ou qu'elle indique qu'il faut changer les conditions d'un problème pour qu'il n'y ait plus de solutions imaginaires (typiquement dans les problèmes géométriques d'intersection). Rabouin remarque à juste titre que ce dernier cas est celui des dorismes que l'on retrouve chez les Anciens (p. ###). Un argument essentiel qui apparaît dans l'article pour justifier la relativité du caractère fictionnel d'une chose est l'exemple du cercle que Leibniz qualifie de « fictif » dans la situation où il est considéré comme un polygone d'une infinité de côtés. Le penser de cette manière est un excellent compendium puisqu'il permet d'affirmer du cercle ce qui peut être d'un polygone (si cela ne dépend pas du nombre de côtés), *ibid.*, p. ###

vrais, voire universels, c'est-à-dire sur ce quoi portent les mathématiques. Cette pratique implique qu'il ne saurait pas y avoir de questionnement sur la nature ontologique de objets présentement considérés. C'est le propre de la connaissance aveugle d'omettre dans le travail actuel de la pensée l'explication des choses auxquelles les caractères se réfèrent, même si cette explication est connue ou supposée connue¹⁰¹. Les mathématiques traitent des expressions qui sont ou supposent être des grandeurs et des relations qu'elles entretiennent entre elles. *Nihilum* et *Omnia* ne sont pas du domaine des mathématiques mais de la métaphysique. Les traiter autrement que comme telles, en usant du calcul symbolique, ne peut aboutir qu'à des contradictions telles que celles qu'exhibait Naudé.

5. Conclusion

En juillet 1705, au cours d'une des dernières étapes de la querelle, Leibniz écrit à Gallois. À cet adversaire avéré, représentant majeur de l'Institution académique, Leibniz justifie son calcul en reprenant en partie les mêmes formulations que celles dont il avait usé au *Journal de Trévoux*, celles que justement Varignon et ses amis lui avaient expressément demandé – voire interdit – de reproduire publiquement¹⁰². Cette lettre privée, au pic de la querelle, dirigée à l'un des plus incontestables opposants, témoigne d'un aspect de la querelle sur lequel j'ai voulu insister : Leibniz a éprouvé des difficultés à faire accepter les justifications de son calcul – plus que ce qu'il s'attendait – auprès de ceux qui pourtant le pratiquaient. En justifiant sa conception des infiniment petits, il rend publics des aspects cruciaux de sa philosophie des mathématiques. Il est mis sous silence mais, certainement en raison de ses inclinaisons diplomatiques, il lui « fut aisé de deferer à leur priere ». Il n'insistera plus, en tout cas publiquement, à convaincre les parisiens. La correspondance privée est en ce sens une aide essentielle pour poursuivre l'enquête sur comment, malgré cette sorte d'interdiction, il continue à développer ses arguments philosophiques pour une certaine pratique mathématique.

Hermann fournit un argument à la hauteur de la critique de Nieuwentijt mais de cela Leibniz ne se satisfait pas. Il n'est pas « content des expressions de Monsieur Herman » parce que ce dernier use d'une notion – le nombre infini – qui non seulement ne saurait appartenir au champ mathématique mais qu'il manipule symboliquement comme si elle en était. Des exemples

¹⁰¹ G.W. Leibniz : « Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis » : « Plerumque autem, praesertim in Analysis longiore, non totam simul naturam rei intuemur, sed rerum loco signis utimur, quorum explicationem in praesenti aliqua cogitatione compendii causa solemus praetermittere, scientes aut credentes nos eam habere in potestate (...) », A VI, 4, 587.

¹⁰² Lettre de Leibniz à Gallois, fin juillet 1705, A III, 10, 48 (Vorausedition, 7.10.2020).

apparus dans les échanges avec Naudé et Jenisch, puis ceux que reproduit Danguicourt, Leibniz ne saurait non plus se satisfaire. Considérer les infinitésimaux comme des fictions ne conduit pas à « dégrader » la science de l'infini, mais tout au contraire puisqu'il s'agit d'une clarification sur ce dont traitent les mathématiques. C'est bien parce que Leibniz prend le soin d'expliquer à quel régime les choses mathématiques appartiennent – « ces idées claires et distinctes qui sont sujet de l'imagination¹⁰³ » – et de les distinguer des notions métaphysiques, qu'il se permet de ne pas être « content » lorsqu'on ne suit pas une pratique conforme à ces distinctions. En revanche, une fois ces clarifications et ces distinctions faites, il juge qu'il est légitime de faire des comparaisons comme celles du *Journal de Trévoux* qu'aucun juge « grossières » et que d'autres, encore de nos jours, interprètent comme s'il prenait « refuge dans des analogies » en offrant une « fondation précaire » à son calcul¹⁰⁴.

J'espère que cet article a montré qu'il n'en est rien, et que ce qui semblait être des vacillations ne sont que l'indication d'une exigence, jamais interrompue, pour fonder une mathématique intégrant les infinis.

Dr. SANDRA BELLA, Agrégée de mathématiques, Docteure en Histoire des mathématiques, chercheuse ERC PHILIUMM, Laboratoire Sphère, Université Paris-Cité, Bâtiment Olympe de Gouges, Place Paul Ricoeur, 75013 Paris, 75013 Paris, bellusky@hotmail.com

¹⁰³ Lettre de Leibniz à la Reine Sophie-Charlotte, A II, 21, 339.

¹⁰⁴ Rupert Hall : « From Galileo to Newton », New York 1981, p. 98 : « Leibniz took refuge in analogies, likening the infinitesimal to a grain of sand infinitely little in comparison to the Earth, and yet infinitely smaller in comparison with the whole universe. For long the greatest achievement of mathematics rested on a shaky foundation. »