



HAL
open science

Importance de l'analyse a priori des tâches effectivement proposées lors de la reprise d'une ingénierie didactique dans des classes ordinaires

Michèle Couderette, Chantal Amade-Escot

► To cite this version:

Michèle Couderette, Chantal Amade-Escot. Importance de l'analyse a priori des tâches effectivement proposées lors de la reprise d'une ingénierie didactique dans des classes ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2022, 42 (3), pp.325-370. hal-03999028

HAL Id: hal-03999028

<https://hal.science/hal-03999028v1>

Submitted on 21 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Importance de l'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées
lors de la reprise d'une ingénierie didactique dans des classes
ordinaires

Michèle Couderette*, Chantal Amade-Escot**

**Importance of *a priori* analysis of effectively proposed tasks to the pupils
in an investigation of the reuse and implementation of didactic engineering
in mathematics in ordinary classes**

Abstract – This methodological oriented contribution is about the integration in two ordinary school classes of a didactic engineering related to the subtraction, developed by Brousseau in the 80s. More specifically, this article focuses on the importance of *a priori* analysis of the tasks effectively proposed to students in the process of analyzing ordinary teaching/learning practices.

Research has highlighted two key moments conditioning the engineering process: the first consisting in bringing out the mathematical proof of a result resulting from a subtraction, the second in using the proof to construct and give meaning to an operating algorithm. These two key moments are subject to different interpretations leading the teachers to modify the initially planned didactic environment and to propose tasks deviating from the basic situations. In this paper, we show the need for a stratum of *a priori* analysis of the tasks really proposed, a stratum intercalated between the epistemic *a priori* analysis of the didactic engineering and the *a posteriori* analysis of the contingency, and that, in order to understand the implementation of a didactic engineering in ordinary classes.

Key words: *A priori* Analysis, Didactic Engineering, Subtraction, Joint Action in Didactics

**Importancia del análisis *a priori* de las tareas realmente propuestas en una
investigación sobre la reutilización y aplicación de una ingeniería didáctica
en matemáticas en clases ordinarias**

* Université Paris-Est Créteil, INSPE, LDAR

** Université de Toulouse 2 Jean Jaurès, INSPE, UMR EFTS

Resumen – Esta contribución de orientación metodológica trata de la integración en dos clases ordinarias de Primaria de una ingeniería didáctica relativa a la sustracción desarrollada por Brousseau en los años 80. Más específicamente, este artículo se centra en la importancia del análisis *a priori* de las tareas realmente propuestas a los estudiantes en el proceso de análisis de las prácticas ordinarias de enseñanza/aprendizaje. La investigación ha puesto de relieve dos momentos clave que condicionan el proceso de ingeniería: el primero consistiendo en sacar la prueba matemática de un resultado obtenido de una resta, el segundo utilizando la prueba para construir y dar sentido a un algoritmo de operación. Estos dos momentos clave están sujetos a diferentes interpretaciones por parte de los profesores, lo que les lleva a modificar el entorno didáctico previsto inicialmente y a proponer tareas que se desvían de las situaciones fundamentales. En este trabajo, mostramos la necesidad de un estrato de análisis *a priori* de las tareas realmente propuestas, estrato intermedio entre el análisis epistémico *a priori* de la ingeniería didáctica y el análisis *a posteriori* de la contingencia, para comprender la aplicación de la ingeniería didáctica en las clases ordinarias.

Palabras-claves: Análisis *a priori*, Ingeniería Didáctica, Sustracción Acción Conjunta en Didáctica

RESUME

Cette contribution d'orientation méthodologique porte sur l'intégration dans deux classes ordinaires d'école primaire d'une ingénierie didactique relative à la soustraction élaborée par Guy Brousseau dans les années 80. Il s'agit de porter l'accent sur l'importance de l'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées aux élèves dans le processus d'analyse de pratiques ordinaires d'enseignement/apprentissage. La recherche a mis en évidence deux moments-clés conditionnant le déroulement de l'ingénierie : le premier consistant à faire émerger la preuve mathématique d'un résultat issu d'une soustraction, le second visant à utiliser la preuve pour construire et donner sens à un algorithme opératoire. Ces deux moments-clés font l'objet d'interprétations différentes conduisant les enseignantes à modifier le milieu didactique initialement prévu et à proposer des tâches s'écartant des situations fondamentales. Dans cet article, nous montrons la nécessité d'une strate d'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées, strate s'intercalant entre l'analyse *a priori* épistémique de l'ingénierie didactique et l'analyse *a posteriori* de la contingence et ce, afin de comprendre la reprise d'une ingénierie didactique dans des classes ordinaires.

Mots-Clés : Analyse *a priori*, Ingénierie didactique, Soustraction, Action Didactique Conjointe.

1. INTRODUCTION ET VISEE DE L'ARTICLE

Durant les années 80, de nombreux travaux de recherche ont porté sur l'enseignement/apprentissage de la soustraction à l'école primaire. La

plupart se situaient en aval de l'enseignement de la soustraction, se focalisant principalement sur les erreurs opératoires des élèves (De Corte et Verschaffel, 1987 ; Fuson, 1982 ; Resnick, 1982). À la même époque, Brousseau a élaboré une ingénierie didactique de la soustraction dont l'originalité était de se situer en amont de l'enseignement d'une technique opératoire. Un compte-rendu de ce travail d'ingénierie a fait l'objet d'une description détaillée rédigée par Berté¹ (1996). Cette ingénierie fait partie d'un ensemble d'ingénieries didactiques construites au centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques (COREM). Conçues au sein d'un collectif chercheurs-praticiens, expérimentées dans des classes, ces ingénieries dont la visée première était phénoménotechique, ont contribué à l'élaboration de la théorie des situations didactiques.

L'ingénierie de la soustraction prend sa source dans l'observation d'un élève « *Le cas Gaël* » (Brousseau, 1981). Gaël rencontre des difficultés électives en mathématiques et refuse d'entrer dans la dévolution et de tenir son rôle d'élève. L'équipe de Brousseau invente alors des dispositifs didactiques visant à créer des conditions permettant aux élèves (y compris ceux en difficultés) de prendre en charge la production du savoir mathématique visé.

La recherche de thèse dont est issu cet article (Couderette, 2018²) s'inscrit dans la lignée des travaux relatifs à la reprise dans des classes ordinaires, d'ingénieries didactiques produites par et pour la recherche. En 2010, lors d'un symposium au congrès AREF³ intitulé « Variabilité et conditions de réalisation d'une ingénierie dans des institutions scolaires ordinaires », des didacticiens de mathématiques suisses et français ont discuté des conditions de reprise de l'ingénierie « Le jeu du trésor » dont rend compte la thèse de Pérès (1984). L'année suivante, Quilio, Assude et Mercier (2011) dans le cadre de la recherche « ACE-Arithmétique » pointent des « obstacles à l'implémentation de l'ingénierie de la soustraction » tels que le statut de certains éléments matériels du milieu didactique, ou l'enfermement dans la manipulation. Reprenant cette même ingénierie, notre recherche de thèse (Couderette,

¹ Cette description, accompagnée de quelques commentaires de Berté, présente les étapes et situations originales de l'ingénierie de la soustraction élaborée au COREM. C'est à ce texte ronéoté, déposé à l'IREM de Bordeaux, que nous renvoyons lorsque nous citons Berté (1996) et dont les annexes 1 et 2 en sont extraites.

² Thèse en cotutelle et codirection entre l'Université de Toulouse Jean Jaurès (Chantal Amade-Escot, UMR EFTS) et l'Université de Genève (França Leutenegger, GREDIC).

³ Actualité de la Recherche en Éducation et en Formation.

2018) s'est intéressée à la manière dont trois enseignantes (deux en France et une en Suisse) la transposent afin d'identifier les déterminants influençant les adaptations engendrées. Au-delà des résultats de la thèse sur les effets combinés des traditions curriculaires et des épistémologies professorales dans l'usage de cette ingénierie par les professeurs, est apparue, au fil du travail empirique, la nécessité méthodologique d'intercaler une strate d'analyse *a priori* supplémentaire entre celle inhérente à l'ingénierie didactique élaborée au COREM et l'analyse *a posteriori* des pratiques didactiques observées lors de la reprise⁴. C'est à la discussion de cette nécessité qu'est consacré cet article.

Pour mener à bien cette discussion méthodologique, nous avons fait le choix de focaliser sur une partie des données recueillies en France. En effet, la thèse a confirmé à la suite des travaux de Ligozat (2010) combien les arrières plans curriculaires spécifiques à chaque pays influencent les mises en œuvre. Nous avons donc considéré pertinent — pour traiter de l'importance des analyses *a priori* des tâches effectivement proposées aux élèves dans les études de pratiques ordinaires d'enseignement s'appuyant sur des ressources didactiques (au sens large proposé par Gueudet et Trouche, 2010) — de neutraliser la variable curriculaire spécifique des systèmes éducatifs des deux pays. Nous nous concentrons sur les pratiques d'implémentation de cette ingénierie en France, pays et tradition curriculaire dans lesquels elle a été élaborée. L'ingénierie a été ainsi reprise et mise en œuvre dans deux sites contrastés se différenciant principalement par le niveau d'expérience (au sens d'Huberman, 1989) des enseignantes : l'une de moins de 7 ans d'ancienneté ; l'autre (25 ans d'ancienneté), plus expérimentée étant par ailleurs maitresse-formatrice. Aucune des deux enseignantes n'avait une formation universitaire en mathématiques. L'hypothèse sous-jacente à ce choix était de penser que l'expérience professionnelle pouvait être à l'origine de certains phénomènes didactiques mis en évidence par Quilio, Assude et Mercier (2011).

Rappelons que la problématique de cet article s'attache moins à rendre compte des pratiques d'enseignement observées lors de cette implémentation que de discuter de la nécessité d'une strate d'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées par les enseignantes, strate s'intercalant entre l'analyse *a priori* des situations l'ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; 1990) et l'analyse *a posteriori* de la contingence.

Pour ce faire, nous présentons dans un premier temps l'inscription théorique de la recherche (section 2) au sein de laquelle est rappelée la

⁴ Une nouvelle exploitation de ces matériaux a fait l'objet d'une présentation lors dans un symposium sur l'analyse *a priori* lors du 5^e colloque de l'ARCD⁴ (Coudrette & Amade-Escot, 2018).

fonction des analyses *a priori* ; dans un second temps nous rendons compte de la structure didactique de l'ingénierie de la soustraction en lien avec les choix épistémiques retenus lors de sa conception (section 3) et pointons deux moments cruciaux conditionnant l'avancée du savoir. La section 4 documente comment ces moments font l'objet d'interprétations différentes par les enseignantes, en particulier les modifications des milieux didactiques les conduisant à proposer des tâches s'écartant des situations fondamentales de l'ingénierie. Les analyses empiriques présentées dans cette section mettent en évidence la nécessité d'une analyse *a priori* de ces tâches pour : (i) révéler certains phénomènes de transposition didactique internes à la classe qui résultent des choix opérés par les deux enseignantes ; (ii) identifier certains déterminants les influençant en lien avec les adaptations produites au regard de l'ingénierie didactique. Les données de la thèse font ainsi l'objet d'une réutilisation permettant d'approfondir certains aspects de méthode évoqués dans sa conclusion.

2. INSCRIPTION THEORIQUE

2.1. Une démarche « clinique expérimentale » au principe d'une posture comparatiste

Dans cet article, le choix d'une posture comparatiste consiste à explorer les manières dont deux enseignantes, l'une chevronnée, l'autre débutante, mettent en œuvre une ingénierie didactique reconnue comme robuste et testée à de multiples reprises au COREM. Sa visée est de produire des connaissances sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage de la soustraction à l'école primaire, ainsi que de mettre au jour certaines dimensions génériques ou *a contrario* spécifiques de l'action didactique dans chaque contexte d'observation.

Pour ce faire, nous avons mis en œuvre une démarche « clinique expérimentale » dans laquelle la composante expérimentale (que nous développons en détail en section 2) permet de rendre possible la comparaison des pratiques dans les deux sites. L'ingénierie de la soustraction constitue ainsi le *tertium comparationis* de l'étude qui s'est déroulée dans deux classes ordinaires (CE1 et CE1/CE2). L'observation du fonctionnement didactique dans les classes constitue la composante clinique de la méthodologie (Leutenegger, 2009). Dans « Le temps d'instruire », cette auteure souligne l'intérêt d'un abord clinique. Il « réside dans la possibilité de mettre en évidence des phénomènes qui, par leur complexité et le nombre de variables en jeu, ne peuvent que difficilement se décrire » (Ibid., p. 398). Elle ajoute que la comparaison inter-cas rend possible l'identification de similitudes et de différences dans le fonctionnement des systèmes didactiques

(Leutenegger, 2000, 2009). En défendant l'idée que la dimension « expérimentale » (ici la reprise de l'ingénierie de la soustraction en classe ordinaire) ne vient pas contrarier la démarche clinique, Leutenegger montre, au contraire, qu'elle donne l'occasion de « perturber » le fonctionnement du système didactique observé en proposant des manières de faire certes inhabituelles, mais compatibles avec la pratique ordinaire du professeur. De ce fait, la démarche « clinique expérimentale » renforce les visées de la démarche comparatiste : rendre intelligible le fonctionnement des systèmes didactiques en révélant des pratiques routinières qui, sans l'introduction de cette composante expérimentale, seraient restées inaperçues. Notre contribution, qui s'inscrit dans cette démarche, s'intéresse plus particulièrement à une strate méthodologique encore peu discutée : celle de l'analyse *a priori* des tâches proposées par le professeur lorsqu'il utilise et interprète une ressource didactique (*cf.* 2.3 ci-après).

2.2. Une analyse de l'action didactique conjointe

L'analyse comparée de pratiques ordinaires a mis en lumière des phénomènes de co-construction du savoir professeur élèves au sein de la classe, induisant la nécessité d'une analyse ascendante des phénomènes transpositifs (Schubauer-Leoni et Leutenegger, 2005). Pour ces auteures, l'analyse des pratiques ordinaires impose d'élargir le programme épistémologique inhérent à toute recherche didactique pour considérer que « l'investigation des phénomènes transpositifs [ne peut être] ni (que) dans les savoirs, ni (que) dans les sujets – enseignants et apprenants – mais dans leur action conjointe » (*Ibid.*, p. 408). Il s'agit de comprendre comment à partir des tâches proposées aux élèves, enseignant et élèves s'engagent dans l'action didactique. L'analyse du processus interactionnel de co-construction du savoir met en exergue le rôle de chacun dans la dynamique évolutive du contrat didactique (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat et Fluckiger, 2007 ; Sensevy, 2007). Le triplet des genèses (mésogenèse, topogenèse, et chronogenèse) permet de décrire cette dynamique : (i) la mésogenèse en identifiant l'évolution des éléments constitutifs du milieu didactique au fil des interactions ; (ii) la topogenèse en rendant compte des places qu'occupent élèves et enseignant vis-à-vis du savoir en cours de construction ; (iii) la chronogenèse en suivant l'avancée du savoir. Le modèle d'analyse de l'action didactique conjointe du professeur et des élèves (Schubauer-Leoni et *al.*, 2007) reprend et approfondit : (i) les concepts de contrat et de milieu didactique et les logiques associées de dévolution et d'institutionnalisation du savoir élaborées par Brousseau (1998) ; (ii) les dynamiques de mésogenèse, topogenèse et chronogenèse développées par Chevallard (1992). Il a pour ambition – à partir de l'étude des pratiques d'enseignement et d'apprentissage – de

mettre au jour le travail de « coproduction de connaissances en classe à la lumière des pratiques culturelles qui le légitiment » (Schubauer-Leoni et Leutenegger, 2005, p. 408). Il s'agit selon ces auteures de penser « un programme didactique qui travaille l'activité *via* l'agir d'individus concrets » de façon articulée avec le programme épistémologique (*Ibid*, p. 417).

C'est à ce niveau, dès lors que l'on s'intéresse à la manière dont les enseignants et les enseignantes interprètent et mettent en œuvre les ressources didactiques qui leur sont proposées, que la notion d'analyse *a priori* (Artigue, 1988) nous semble devoir être re-convoquée à une seconde strate d'analyse préalable, indispensable pour conduire l'analyse *a posteriori*.

2.3. A propos de l'analyse *a priori*

Identifiée comme une étape incontournable dans la méthodologie d'ingénierie didactique en mathématiques (Artigue, 1988 ; Mercier & Salin, 1988), la notion d'analyse *a priori* n'a pas depuis lors, fait l'objet de nombreux développements. En lien avec la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM), ces auteurs ont souligné la nécessité épistémologique de fonder les situations didactiques sur une analyse des connaissances et des savoirs qui y sont encapsulés : il s'agit de modéliser les savoirs mathématiques au sein de situations fondamentales afin de rendre compte des conditions dans lesquelles le savoir visé est nécessaire pour résoudre le problème mathématique proposé aux élèves. Cette analyse épistémique permet alors d'envisager l'enchaînement de situations d'action, de formulation, de validation (Ligozat & Orange, 2017). L'analyse *a priori* des situations, parce qu'elle est produite indépendamment de la contingence, est à même - lors la conception des ingénieries didactiques et les essais en classe qui y sont associés - de comprendre et d'ajuster les différentes séquences constitutives de l'ingénierie. C'est au regard de l'analyse *a priori* des situations, que l'ingénieur didacticien peut donner du sens aux phénomènes observés en classe par la mise en tension entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori* (Artigue, 1988 ; Mercier & Salin, 1988).

En 2007, à l'occasion d'un ouvrage sur l'action didactique conjointe du professeur et des élèves, les enjeux de l'analyse *a priori* sont rediscutés dans le cadre d'une approche ascendante des phénomènes transpositifs (Assude & Mercier, 2007). Ces auteurs mettent l'accent sur la nécessité de modéliser aussi les savoirs en jeu dans les interactions en classe. Quelques travaux plus récents s'inscrivant dans cette perspective ont montré l'intérêt de mener plusieurs strates d'analyses *a priori* pour comprendre les pratiques d'enseignement des mathématiques, soit dans le cadre d'ingénieries coopératives (Quilio, 2017), soit au regard des usages que font les enseignants des différentes

ressources didactiques que sont les préconstruits curriculaires, les manuels ou logiciels scolaires (Ligozat, 2009, 2010). C'est dans cette dernière perspective d'usage des ressources didactiques que nous nous situons. Nous souhaitons montrer la nécessité d'intercaler entre l'analyse *a priori* des situations de l'ingénierie didactique de la soustraction (section 3) et l'analyse *a posteriori* de l'action didactique conjointe lors de sa mise en œuvre dans des classes ordinaires de CE1 et CE2, une analyse *a priori* des tâches proposées aux élèves pour comprendre les usages que font les professeurs des ressources didactiques qui leur sont proposées ou qu'ils mobilisent.

Nous pensons en effet que l'analyse épistémique des tâches effectivement mises en place en classe permet de documenter certaines dimensions de « l'épistémologie du professeur » (Brousseau, 1998, p. 65) définie par l'auteur comme un modèle implicite des mathématiques à l'origine des phénomènes transpositifs observables dans les classes, notamment des « représentations erronées que tend à induire la pratique d'enseignant » (Artigue, 1990, p. 245). Nous reviendrons sur cette question dans la présentation des résultats et leur discussion.

3. COMPOSANTE EXPERIMENTALE : L'INGENIERIE DIDACTIQUE DE LA SOUSTRACTION

Nous présentons dans un premier temps la structuration globale de l'ingénierie. Nous pointons ainsi à partir des textes originaux de Brousseau (1998) quels en sont les attendus en termes de savoirs à construire par les élèves. Nous décrivons ensuite brièvement chaque étape, en nous centrant sur leur visée didactique principale sans entrer dans le détail de chacune des leçons.

Nous focalisons ensuite sur les deux moments cruciaux identifiés dans la thèse (Couderette, 2018, p. 475) qui relèvent, selon nous, des choix transpositifs opérés par les concepteurs de cette ressource didactique. Nous mettons en évidence les éléments de savoirs qui sont nécessaires à la résolution des problèmes par les élèves à ces deux moments en nous appuyant sur les analyses *a priori* constitutives de l'ingénierie didactique que nous complétons de certains éléments nous semblant épistémologiquement décisifs.

3.1. Visées de l'ingénierie didactique

Brousseau (1990) fait le constat que « l'enseignement d'une opération arithmétique est essentiellement fondé sur la communication d'une procédure de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est

supposé en présenter le sens ». Il propose alors une ingénierie didactique dont la visée est d'une part de construire le sens de l'opération — la soustraction — d'autre part de donner sens à un algorithme opératoire de la soustraction (Figure 1).

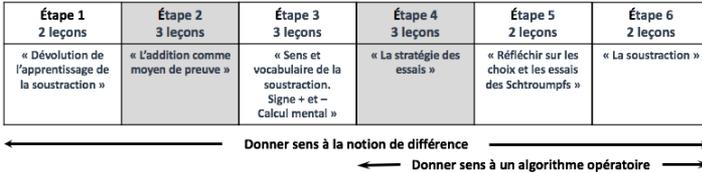


Figure 1. – Structure de l'ingénierie didactique

Brousseau déclare que « l'enseignement a pour objectif le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu a-didactique » (*Ibid.*, 1990). Les situations de l'ingénierie de la soustraction sont des situations d'apprentissage dans le sens où la production de savoirs est sous la responsabilité de l'élève. Le milieu didactique est soigneusement construit de façon à ce que la dévolution puisse avoir lieu.

3.2. Brève description de l'ingénierie didactique

L'ingénierie didactique de la soustraction développée en six étapes, s'appuie d'abord sur la définition mathématique d'une différence (les trois premières étapes) pour ensuite sur l'utilisation de cette définition afin de construire un algorithme de la soustraction (les trois étapes suivantes). Les trois premières étapes ont pour objectif de construire la définition de la différence de deux nombres comme « le nombre que l'on doit ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand ». L'ingénierie s'appuie sur une situation fondamentale, produite par la modélisation du premier problème proposé aux élèves (Figure 2).

Dans le parking du garage, il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?

Figure 2. – Énoncé du premier problème

En jouant sur les variables didactiques ou sur la sémantique, la situation fondamentale produit un ensemble de situations particulières donnant accès au sens d'une différence. Les énoncés rapportés ci-dessous constituent un échantillon des problèmes de la première étape (2 leçons).

La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Il lui en reste 8. Combien en a-t-elle distribuées ?

La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Elle en distribue 23. Combien en reste-t-il ?

Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a-t-il de maillots de rugby ?

Figure 3. – Exemples de problèmes utilisés dans l'ingénierie

Cette première étape met en jeu des situations d'action durant lesquelles les élèves jouent au « jeu de la boîte » (Brousseau, 1998) : il s'agit pour les élèves de reconnaître les problèmes soustractifs, de les résoudre selon leurs propres procédures puis de vérifier empiriquement leurs résultats (ouverture de la boîte puis comptage).

La seconde étape, composée de trois leçons, décrite dans « *Le cas de Gaël* » (Brousseau, 1981), vise la preuve d'un résultat par un moyen intellectuel. Il s'agit de remplacer une validation contingente (compter les cubes dans la boîte) par une validation intellectuelle (prouver sans ouvrir la boîte). Cette validation s'appuie sur l'équivalence entre $a - b = d$ et $d + b = a$ ($0 \leq a \leq b$). Si l'introduction du surcomptage est prévue comme devant être à l'initiative de l'enseignant, la construction de la preuve d'un résultat (enjeu de savoir de cette étape) est pour sa part à la charge de l'élève. Pour que la dévolution de la preuve ait lieu, Brousseau introduit dans le milieu une variable didactique qui consiste à demander à un élève de parier sur sa réponse puis, le surcomptage effectué, à retarder l'ouverture de la boîte en demandant de confirmer — ou non — le pari. C'est pendant ce court instant, et de par les décisions de l'élève, que se construit la preuve d'un résultat.

La troisième étape est une étape que nous qualifions de technique : elle vise le vocabulaire, le codage des opérations, et l'explicitation de techniques pour des calculs simples. Au terme de cette étape, les élèves sont alors capables de reconnaître un problème soustractif, de le résoudre par une technique qui leur est propre et de vérifier le résultat obtenu en utilisant l'addition comme moyen de preuve.

Les trois dernières étapes (4, 5 et 6) ont pour objectif de mettre les élèves en situation de recherche de procédures permettant de calculer une différence. Les problèmes proposés (Figure 4 ci-dessous) engagent tous un calcul difficile car l'opération $a - b$ est telle que le chiffre des unités ou des dizaines de a est inférieur au chiffre des unités ou dizaines de b .

Un cahier a 92 feuilles, 34 sont écrites. Combien y a-t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Sur le bureau, il y a 83 cahiers, des rouges et des verts. Il y a 47 cahiers rouges. Combien y a-t-il de cahiers verts ?

Figure 4. – Exemples de problèmes à l'étape 4

À l'étape 4, les élèves sont amenés à construire des stratégies de résolution. Au sens de la théorie des situations didactiques, c'est une phase d'action : les élèves effectuent les calculs par essais /erreurs, ajustant leurs essais jusqu'à obtenir la solution. Le moyen de preuve installé lors des étapes précédentes devient un outil au service de la recherche d'une solution. Au fil de cette étape, les prémices de plusieurs procédures apparaissent : la méthode de la fausse position en réduisant le nombre d'essais, l'addition à trou en recherchant le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand, la soustraction par échange d'une dizaine contre dix unités.

Si le moyen de preuve est outil de résolution, il permet en outre de discuter de certaines erreurs, et ainsi d'invalider des procédures de nature algorithmique erronées telles que, par exemple $92 - 34 = 62$ ou $92 - 34 = 60$, erreurs répertoriées dans les travaux de Resnick (1982). Ces erreurs ayant été élucidées, les étapes suivantes entraînent les élèves dans un débat (phase de formulation) autour de plusieurs procédures de résolution qui leur sont présentées (ci-après quelques procédures extraites de l'ingénierie).

$\begin{array}{r} 56 \\ + \dots \\ \hline 93 \end{array}$			$\begin{array}{r} 56 \\ + 30 \\ \hline 86 \end{array}$			$\begin{array}{r} 56 \\ + 37 \\ \hline 93 \end{array}$		
Schtroumpf Musicien								
$\begin{array}{r} 39 \\ + \dots \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 39 \\ + 5 \\ \hline 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} 39 \\ + 45 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 39 \\ + \dots \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 39 \\ + 50 \\ \hline 89 \end{array}$	$\begin{array}{r} 39 \\ + 45 \\ \hline 84 \end{array}$			
Schtroumpfissime						Schtroumpfette		

Figure 5. – Stratégies de résolution présentées à l'étape 4

L'analyse de ces procédures conduit à l'explicitation de techniques (exemples, ci-dessus) : méthode de la fausse position (Schtroumpf Musicien) ; méthode de la fausse position en déterminant le chiffre des unités de la solution (Schtroumpfissime), méthode de la fausse position en déterminant le chiffre des dizaines de la solution (Schtroumpfette). Deux autres procédures introduisent l'addition à trou (Super Schtroumpf) ainsi qu'un algorithme de la soustraction (Grand Schtroumpf).

3.3. Deux moments cruciaux dans la structure de l'ingénierie didactique

Les deux moments cruciaux (Fig. 6, partie grisée) identifiés constituent les pierres angulaires de l'architecture didactique de cette ingénierie. Le premier se situe à l'étape 2 et vise la construction d'une preuve intellectuelle d'un résultat à un problème soustractif. Le second, à l'étape 4, utilise la preuve intellectuelle pour dévoiler et résoudre les erreurs de nature algorithmique effectuées par les élèves.

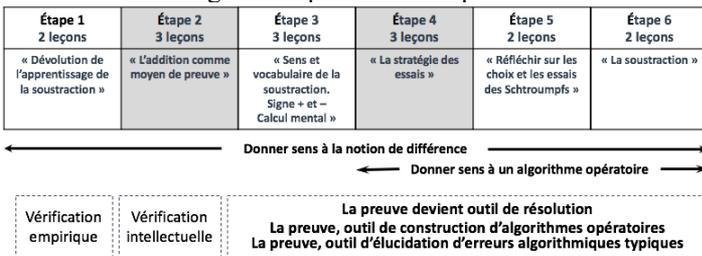


Figure 6. – Deux moments cruciaux dans l'ingénierie didactique

Dans les lignes qui suivent nous présentons les choix didactiques opérés par Brousseau à ces deux moments cruciaux à partir de la description de l'ingénierie didactique proposée par Berté (1996). Ce niveau d'analyse relève de l'analyse *a priori* des situations au sens de la TSDM (Artigue, 1988 ; Mercier & Salin, 1988) lors de la conception de l'ingénierie (section 2.3.).

3.3.1. Premier moment crucial : construction de la preuve intellectuelle d'un résultat

Lors de la première étape, les élèves vérifient leurs résultats en ouvrant la boîte et en comptant les cubes restants. Lors de la seconde étape, Brousseau introduit le pari, dont la fonction est d'obliger l'élève à reconsidérer sa réponse avant d'ouvrir la boîte. On demande à l'élève de parier sur sa réponse : « Qui serait prêt à parier avec moi sur sa réponse ? ». Le pari constitue un « apprêt didactique » (Brousseau, 1998), sorte de sous-couche préparant la preuve intellectuelle. L'élève doit faire, en quelque sorte, le chemin inverse de celui l'ayant conduit au résultat : imaginer remettre les cubes dans la boîte, dénombrer, comparer au nombre de cubes initial puis conclure. Au fil des trois leçons, le surcomptage puis l'addition émergent.

Examinons le déroulement d'une tâche de cette étape telle que décrite dans l'ingénierie didactique (Annexe 1). Il s'agit sur cette tâche d'amener les élèves sur le terrain de la preuve. Nous empruntons à Berté (1996) les éléments qui synthétisent dans sa présentation de l'ingénierie de la soustraction les analyses *a priori* réalisées lors de sa

conception. Dans la figure 7 ci-après, nous reprenons ces éléments (colonne de gauche) pour la première tâche de la leçon 3. La colonne de droite présente l'analyse *a priori* de la situation au sens de la TSDM que nous avons raffinée pour les besoins de la recherche.

Un problème est écrit au tableau : « Dans la boîte, j'ai 45 cubes. J'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant ? » (Berté, 1996, p. 14).

1) Lire et résoudre le problème

- Le problème est joué par l'enseignante : « *Voici la boîte. Que dois-je faire ?* »

- Résoudre le problème : « *Prenez votre ardoise, écrivez votre réponse* »

- Parier : « *Qui serait prêt à parier avec moi sur sa réponse ?* »

a-didacticité	Pose d'un élément dans le milieu didactique : simulation du problème avec le matériel.
	Dévolution de la recherche de la solution.
	Glissement du contrat didactique : il s'agit de se persuader de l'exactitude du résultat.

2) Parier sur sa réponse

- Retarder le pari : « *Attends, avant de parier (tu as raison d'hésiter), je voudrais que tu vérifies ta réponse mais sans ouvrir la boîte. Quelqu'un a une idée ?* »

- Effectuer le surcomptage des cubes en reposant les cubes sortis sur le couvercle.

- Demander l'élève de confirmer ou non son pari : « *alors tu paries ?* »

- Si l'élève maintient son pari, on ouvre la boîte et on compte, sinon on essaie avec la réponse d'un autre élève.

didacticité	L'enseignant introduit le surcomptage.
-------------	--

a-didacticité	Dévolution de la preuve d'un résultat.
	Double rétroaction du milieu didactique matériel, l'une relative à l'exactitude de la réponse, l'autre quant au bien-fondé du maintien du pari.

Figure 7. – Analyse *a priori* de la première situation de la leçon 3

Remarquons que l'analyse *a priori* de la situation montre une intercalation de didacticité dans une situation globalement a-didactique : s'il y a dévolution de la recherche de la solution et de la preuve, l'ajout des cubes un à un — le surcomptage — est nécessairement à la charge de l'enseignant. Imaginer remettre les cubes enlevés dans la boîte pour retrouver la quantité initiale demande une capacité à concevoir que toute action a son inverse, ce qui, selon la psychologie du développement de l'enfant (Piaget & Inhelder, 1975), n'est pas acquis à ce niveau d'enseignement. Aussi nous considérons que dans ce moment crucial, l'ingénierie invite l'enseignant à prendre une position topogénétique haute (Schubauer-Leoni et al., 2007) pour

initier cette action de remettre dans la boîte les cubes enlevés. Ce complément d'analyse, fondé sur le cadre de l'action didactique conjointe professeur-élèves, élargit selon nous l'analyse *a priori* originale de la situation de l'ingénierie tout en soulignant la compatibilité de ce cadre avec la TDSM.

La dévolution de la preuve se manifeste, après le surcomptage, au moment du pari. En demandant à l'élève de confirmer son pari, l'enseignant doit retarder la vérification empirique (l'ouverture de la boîte) pour permettre à l'élève de prendre en compte le résultat du surcomptage et de construire un raisonnement l'amenant à maintenir ou pas son pari. Les rétroactions du milieu matériel, par ouverture de la boîte, renvoient à l'élève une réponse quant à la pertinence du maintien du pari. De ce fait, elles contribuent à la construction de la preuve.

3.3.2. *Second moment crucial : la stratégie des essais comme construction d'algorithmes opératoire*

Ce moment se situe à l'étape 4, c'est-à-dire après que l'addition comme moyen de preuve d'un résultat d'un problème soustractif, le vocabulaire, et les signes opératoires aient été installés dans la mémoire de la classe. L'étape précédente a permis de discriminer les calculs pouvant s'effectuer mentalement de ceux nécessitant un apprentissage supplémentaire, celui d'un algorithme opératoire. La preuve devient dans cette étape 4 un outil pour introduire d'autres savoirs : la technique par essais successifs permettant d'initier la méthode de la fausse position (par réduction du nombre d'essais) ainsi que les premiers jalons d'un algorithme de l'addition lacunaire (recherche du chiffre des unités du complément). Elle permet au passage d'écarter des procédures calquées sur l'addition, notamment en mettant en exergue la non commutativité de la soustraction. Examinons la situation de résolution de problème, telle que décrite dans l'ingénierie didactique.

Le problème suivant est présenté aux élèves : « J'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ? » (Annexe 2).

1) Choix du premier nombre

- Collecter 4 à 5 réponses ; ajouter une réponse imaginaire si nécessaire

-Débattre collectivement de ces réponses : trop petite ? trop grande ? Faire remarquer que pour certaines réponses proposées, « *les dizaines n'ont pas été choisies au hasard (7 dizaines donc 9-2)* » ou bien que « *les unités n'ont pas été choisies au hasard (5)* »

- retenir deux « *possibilités* » : 65 et 75.

2) Travail sur la somme

À partir d'une organisation spatiale écrite au tableau par l'enseignant, obtenir par technique raisonnée la solution en trois essais successifs.

Preuve à obtenir	premier essai	deuxième essai	troisième essai
29	29	29	29
+ ...	+ ...	+ ...	+ ...
94	---	---	---

Puis on fait les essais

Preuve à obtenir	premier essai	deuxième essai	troisième essai
29	29	29	29
+ ...	+38	+35	+ ...
94	7	64	94

Au premier essai je trouve 7 pour les unités. Inutile de continuer le 8 ne va pas, il faut un 5. J'améliore tout de suite en ajustant les unités. C'est trop petit. De combien ? Le prochain essai pour être le bon. Le but est d'arriver au plus en deux coups. À la fin de la leçon on va s'exercer.

Extrait du texte de l'ingénierie didactique

3) Vérification avec la boîte

- Bien mettre en évidence les barres de 10 et les unités. Pour enlever 9 unités comment faire ?

- Faire émerger que l'on a besoin de casser une barre de 10 : « *certaines doivent bien arriver à imaginer qu'il faut casser une barre de 10* »

Dévolution de la résolution du problème

Appel à la mémoire didactique.

- Amener les élèves à justifier la mise à l'écart de certaines réponses trop grandes, trop petites.

- Utiliser la « preuve » pour déterminer les chiffres possibles à l'ordre des unités ou des dizaines.

Situation de preuve :

- Utiliser la preuve pour faire émerger une technique réfléchie permettant d'obtenir la solution en trois coups.

- Initier un algorithme opératoire pour la recherche du complément.

Contrat didactique d'ostension :

- Montrer une organisation spatiale et de tenir un discours monstrotaire pour trouver la solution

Introduction mésogénétique :

- Montrer avec les cubes organisés en barres de 10 et en cubes-unités la nécessité de casser une dizaine et, par conséquence, que le chiffres des dizaines du résultat est égal à 6 et non 7.

Figure 8. – Analyse a priori de la première situation de la leçon 11

3.3.3. Particularité des deux moments cruciaux au sein de l'ingénierie didactique

L'agencement du milieu didactique des situations de l'ingénierie de la soustraction ainsi que les propositions de son évolution à ces deux moments cruciaux relèvent de variables didactiques fondées sur les choix transpositifs qui président à la conception de cette ingénierie (Brousseau, 1998). En rendent compte les analyses *a priori* de ces situations présentées dans les sections précédentes. Par ailleurs, les différentes situations de cette ingénierie sont robustes et utiles pour l'enseignement de la soustraction (Quilio & Santacru, 2010). Nous ajoutons pour notre part, que ces deux moments cruciaux relèvent de

« sauts informationnels⁵ » décisifs quant aux visées de l'ingénierie pour chacune des étapes 2 et 4.

Pour résumer, l'analyse *a priori* des situations de l'ingénierie telles que pensées par ses concepteurs à ces deux moments cruciaux met en évidence l'importance de la variable de commande (au sens de Brousseau (1998) et Artigue (1988)) intrinsèque à chacune des situations : à l'étape 2, la non ouverture de la boîte pour vérifier un résultat provoque la recherche d'une procédure de vérification intellectuelle ; tandis qu'à l'étape 4, c'est le choix des variables numériques (ne permettant plus d'effectuer une soustraction de la même manière qu'une addition) qui conduit à l'utilisation de la preuve comme procédure de résolution. Ces raisons épistémiques nous ont amené à qualifier ces étapes de l'ingénierie de moments cruciaux et à retenir les situations qui y sont relatives — notamment dans le cadre méthodologique de cet article — comme composantes expérimentales pertinentes à observer lors des implémentations. En effet, les perturbations qu'elles sont susceptibles de provoquer lors des mises en œuvre en classe ordinaire sont à même de créer des conditions d'émergence de phénomènes didactiques (Leutenegger, 2009) permettant de mieux comprendre les manières dont les professeurs interprètent la ressource didactique que constitue l'ingénierie de la soustraction. Ainsi, la question qui a guidé notre travail empirique était la suivante : Qu'advient-il dans les classes lorsque les enseignants d'aujourd'hui mettent en place l'ingénierie de la soustraction au CE1 et plus particulièrement lors de ces moments cruciaux ?

C'est en nous intéressant, à partir d'analyses ascendantes de la transposition didactique sous couvert du modèle de l'action didactique conjointe (Mercier, 2002 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005), aux manières de faire de deux enseignantes d'expérience contrastée qu'est alors apparu nécessaire — compte tenu des adaptations observées lors des mises en œuvre —, d'introduire sur le plan de la méthode, une strate supplémentaire d'analyse *a priori* afin d'accéder aux savoirs réellement mis à l'étude lors de ces deux moments cruciaux. Nous présentons dans les sections qui suivent les résultats qui y sont relatifs : c'est à dire dans

⁵ Selon Brousseau (1986, p. 23) : « Un saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale faisant “fonctionner” une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. »

un premier temps l'analyse *a priori* des tâches effectives, telles que proposées par les enseignantes pour mettre en scène ce qui, dans les situations de l'ingénierie originale, relevait d'une part de l'addition comme moyen de preuve dans « le jeu de la boîte et des cubes » (étape 2) et d'autre part, de la construction d'algorithmes opératoires dans la « stratégie des essais » (étape 4) ; puis dans un second temps, l'analyse *a posteriori* des mises en œuvre.

4. DE LA NÉCESSITE D'UNE ANALYSE A PRIORI DES TACHES EFFECTIVEMENT PROPOSÉES PAR LES ENSEIGNANTES

L'introduction par les enseignantes de modifications importantes des milieux didactiques constitutifs des situations de l'ingénierie nous a amené à intercaler entre l'analyse *a priori* des situations (telle que produites par les concepteurs de l'ingénierie) et l'analyse *a posteriori* de la contingence, une strate supplémentaire d'analyse épistémique : celle des tâches effectivement proposées par les enseignantes. Il s'agit à cette étape d'identifier quels sont les savoirs encapsulés dans les « milieux didactiques primitifs » mis en place. La notion a été élaborée par Amade-Escot & Venturini (2015) en filiation avec les réflexions de Schubauer-Leoni et *al.* (2007) sur le fait que l'enseignant propose des tâches et que c'est à charge du didacticien de montrer en quoi ces tâches sont susceptibles de faire (ou non) milieu didactique pour les élèves. L'adjectif « primitif⁶ » souligne l'idée que l'analyse épistémique de ces tâches ne préjuge en rien de l'évolution inéluctable du milieu (ou mésogénèse) qui adviendra dans l'action conjointe professeur-élèves et dont rend compte l'analyse *a posteriori*. Dans les sections qui suivent, nous nous appuyons sur des épisodes significatifs relevés lors de la thèse pour montrer l'importance de cette analyse *a priori* des tâches prescrites. Comme le discutent Schubauer-Leoni et *al.* (2007), l'étude du didactique ordinaire suppose d'accorder une attention particulière aux tâches d'enseignement dans la mesure où « le milieu n'est que potentiel ... à charge de la recherche d'en établir la portée didactique » (p. 56). Ainsi « l'analyse *a priori* [des tâches prescrites] s'avère une condition nécessaire pour anticiper les possibles systèmes d'objets et partant, les possibilités qu'émerge une situation mathématique du système de tâches proposé. » (*Ibid.*, p. 86).

⁶ Primitif : « Ce qui est la source, le point de départ d'un enchaînement logique ou causal de choses de même nature » (Dictionnaire CNRTL).

4.1. Le cas de Valentine, enseignante chevronnée

Valentine est une enseignante maitresse-formatrice, ayant 25 années d'expérience. La classe observée (CE1) est composée de 27 élèves, elle est décrite par Valentine comme « *hétérogène, mais avec une bonne tête de classe qui tire* » (entretien préalable avec l'enseignante, cité par Couderette, 2018, p. 277).

4.1.1. Description de la pratique observée : tâches mises en place

Pour chacun des moments cruciaux que nous présentons ci-après, nous adoptons une description des tâches effectivement mises en place par Valentine en deux colonnes. La colonne de gauche et les photogrammes rendent compte de la pratique observée et participe de l'analyse a posteriori. En colonne de droite les insertions des rectangles gris présentent des éléments de l'analyse *a priori* de la tâche effectivement proposée par l'enseignante. Nous en montrons l'intérêt dans la section 4.1.2 et nous discutons de sa nécessité plus loin.

Premier moment crucial : construction de la preuve intellectuelle

Le problème est affiché au tableau : « Dans la boîte j'ai 45 cubes. J'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant ? ».

[1] Le problème est lu par Ens. Elle interroge les élèves en écrivant au tableau : nombre de cubes dans la boîte / nombre de cubes sortis / ma réponse / le résultat

Dévolution de la recherche de la solution.

[2] Livio simule le problème avec la boîte et les cubes.

Pose d'un élément dans le milieu didactique : simulation du problème avec le matériel.

[3] Les élèves cherchent la solution ; Ens. circule dans la classe.

[4] Recension des réponses des élèves : 30, 32, 26, 51, 36, 52, 25, 27, 37.

Introduction du surcomptage par l'enseignante

[5] Ens. interroge Maxine (réponse 36) et lui demande si elle veut bien parier sur sa réponse.

[6] Ens. : *Ma elle pense qu'il y a 36 cubes dans la boîte qui sont cachés on ne les voit pas, et ici [montrant les 18 cubes enlevés] c'est quoi ce que j'ai au-dessus sur ma boîte ? Bon alors Ma tu vas compter à partir de ces 36 dans la boîte, et on va ajouter nos 18, d'accord ? Et en principe on devrait trouver combien en tout (Ens. montre le tableau) ?*

Surcomptage par effet de contrat

[7] Léo : 45 !

- [8] Ens. : *45 bon alors on y va Ma, donc tu as dit 36 vas-y. Tu les poses là* (sur le couvercle de la boîte).
- [9] [Ens. distribue un à un les cubes à Ma] Les élèves comptent en cœur de 37 à 45.
- [10] Ens. (suspend son geste) : *Qu'est-ce qu'il se passe ?*
- [11] Sam : *C'est pas bon.*
- [12] Ens. : *Est-ce qu'elle termine à 45 là ? Ça veut dire quoi ? Est-ce que Ma a trouvé le bon nombre ?*
- [13] Es : *Non !*
- [14] Ens. : *Tu pensais que 36 cubes dans la boîte plus les 18 cubes sortis ça faisait 45, et tu viens de te rendre compte de quoi ?*
- [15] Ma : *C'est pas ça.*
- [16] Ens. : *C'est pas ça, bon écoute c'est pas grave Ma, on rejouera d'accord ?*
- [17] Ens. sollicite Gabriel (Gab, réponse 25). La situation est rejouée à l'identique : surcomptage de 26 à 43. Ens. conclut par « *on veut arriver à combien de cubes en tout ? [...] bon tant pis hein, on a joué Gab...* »
- [18] Sollicitation d'Enzo (réponse 27). Surcomptage des cubes.
- [27] Ens. : *Est-ce que c'est le bon nombre alors ?* [Acquiescements des élèves]. **Donc il a gagné.**
- [28] Ens. (à Bert.), *qu'est-ce que ça veut dire s'il a la bonne réponse. Combien j'ai de cubes dans ma boîte ?*
- [29] Bert. : *Ben 27...*
- [30] Ens. : *27 et là, en sortie j'en ai combien ?*
- [31] Bert : *Euh... 18.*
- [32] Ens. : *Alors quel est le calcul qu'on a fait, quelle est la preuve qu'on a utilisée ? Qu'est-ce qu'on a fait comme calcul ?*
- [33] Bert. : *Ben euh $45+18$ égal...*
- [34] Ens : Bert. a dit, on a fait $45 + 18 = 27$, c'est ça ?
- [35] Dimitri : **Moi, j'ai compté de 10 en 10. Moins 10 et puis moins 10...**
- [36] Léo : *Moi aussi et je suis arrivé à 27.*
- [37] Clémence : **Moi j'ai fait 4 paquets de 10, j'ai mis 5 verts tous seuls. J'ai barré un paquet de 10. J'ai**



Arrêt du comptage par effet Topaze (Brousseau, 1998)



Surcomptage des cubes



1^{ère} tentative pour faire émerger l'addition comme moyen de preuve

Retour au contrat pérenne : expliquer sa procédure de résolution du problème

barré les cinq verts et euh dans le paquet de 10 j'en ai barré trois et après j'ai compté et j'ai vu que ça faisait 27.

[38] Ens. : [...] *Je reviens à ce que m'a dit tout à l'heure Bert. Elle a dit on vient de faire $45 + 18 = 27$, est-ce que c'est vrai ?*

[39] Ès : *Non !*

[40] Ens. : *Qu'est-ce qu'on a fait, Bert ?*

[41] Gab : *$27 + 18 = 45$!*

[42] Ens. : ***On a vérifié. C'était votre réponse plus les cubes sortis égal 45, c'est compris ? Ah bé tiens, on va quand même ouvrir parce que on ne sait jamais...***

[43] Livio *compte les cubes dans la boîte : 27 cubes.*

[44] Ens. : ***27, donc on ne s'est pas trompé, d'accord ?***

2nde tentative pour faire émerger l'addition comme moyen de preuve

Retour au contrat didactique précédent : validation empirique du résultat.



Figure 9. – Valentine – Analyse de la pratique observée – 1^{er} moment crucial

Deuxième moment crucial : stratégie des essais pour construire le sens d'un algorithme

Le problème présenté aux élèves est : « J'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ? ».

Comme à l'accoutumée, le problème est affiché au tableau, puis lu par l'enseignante. Contrairement à l'étape 2 (section 2.1.1), le problème n'est pas simulé avec la boîte et les cubes. Les élèves ont un temps de recherche de 5 minutes pour résoudre le problème. Si, lors des séances précédentes, Valentine notait au tableau toutes les propositions des élèves, dans cet épisode, elle n'en retient cette fois que certaines, 65, 70, 54, 75, écartant 64, 73, 65, mais rajoutant 95, prétextant l'avoir repérée sur une ardoise. Notre analyse commence par la discussion qui s'en suit.

[1] Es. : *Impossible !*

Andréa : *Çà s'peut pas,*

Leo : *Comme c'est des moins, c'est impossible,*

Gab : *On a dit on enlève, on n'a pas dit on ajoute*

[2] Ens. : *est-ce qu'il y a des résultats qui ne peuvent pas être ça ?*

[3] Ann : *54, on peut aussi l'enlever. [...]*
il est beaucoup trop petit.

[4] Gab : *On n'a pas enlevé 20, on a enlevé 30. On a enlevé une dizaine de plus.*

Appel à la mémoire didactique : écarter les valeurs improbables.

Les élèves réfutent la valeur rajoutée par Ens.

- [5] Ens. : *Il a dit, Gab ou Léo, il a dit 94, c'est : on enlève 30, il a dit 29, mais il a pris 30 parce que ça se rapprochait. Il resterait combien de dizaines ?*
- [6] Les élèves avancent plusieurs valeurs 40, 50.
- [7] Ens. attend. Léo propose 60
- [8] Ens. : *Il en resterait 60. Dans tous les cas, c'est une réponse qui est proche de 6 dizaines, ou 7 dizaines. D'accord ? 54, en effet, ça serait trop petit.*
- [9] Ens. : *Regardez ce que je vais faire au tableau. Je vais prendre une de ces réponses. Et je vais commencer par le nombre de cubes que j'enlève, plus le nombre que l'on pense. Vous voyez comment je le matérialise au tableau ? Et on doit trouver combien dessous ?*
- [10] Ens. demande de vérifier la valeur 70
- [11] Emma pose en colonne l'addition $29 + 70$. A l'instant où elle écrit 9 pour les unités, **Ens. s'étonne ostensiblement « ah ! »**
- [12] Andréa : *On sait que c'est déjà pas ça. Pour la preuve, il y a 9, et pour 94, il y a 4.*
- [13] Ens. reprenant les propos d'Andréa : *il dit des choses intéressantes. Il dit : "C'est pas la peine d'aller plus loin, de tout faire, c'est même pas la peine de calculer ça, parce que déjà, Emma, quand elle fait 9 plus 0, elle trouve 9." Alors que nous, on doit trouver combien, dessous ?*
- [14] Les élèves proposent 75 et 65.
- [15] Rémi annonce que 65 est la solution : *Quand on enlève 4 et après, comme il n'y a pas assez d'unités, il faut prendre une dizaine.*
- [16] Ens. : *Ah. Il soulève quelque chose. Il est en train de dire que lorsque l'on n'a pas assez...*
- [17] Ens. demande à Rémi de « faire la preuve » de son résultat (65).
- [18] Ens. revient sur ce qui a été fait : *Vous avez vu ce qui s'est passé, là ? En prenant le bon résultat, en faisant la preuve, on s'est déjà aperçus que c'était pas la peine d'aller plus loin, parce que le nombre des unités n'était pas bon.*
- [19] Rémi vient de nous parler, de ce problème des unités. Alors, regardez

Recherche des valeurs improbables

Recherche du chiffre des dizaines possible du résultat



Effet Topaze



Bifurcation vers la justification du passage d'une dizaine :

La recherche d'une technique algorithmique de l'addition à trous est escamotée.

ce qu'on va faire pour bien comprendre. Alors, Rémi l'a dit tout à l'heure, quand on a 94... Quand on a 94 cubes, et qu'il faut en enlever 29, d'accord ? Est-ce que je peux les enlever, ces neuf-là ? [...] Est-ce que j'ai assez d'unités ? Donc qu'est-ce qu'il faut que je fasse ?

[20] Rémi : Il faut que tu prends un paquet de 10.

[21] Ens. : Alors, il faut que je prenne un paquet de 10, [cassant une barre de 10 cubes]. D'accord ? Donc j'ai été obligée de les prendre sur ma dizaine. Et ma dizaine, est-ce qu'elle existe, là ? [Es : non] Elle n'existe plus. Donc on a enlevé une dizaine en plus. D'accord ? On a cassé la dizaine. Voilà. Donc c'est pour ça qu'il ne peut pas y avoir 7 dizaines. Il doit y en avoir une en moins. D'accord ?



Figure 10. - Valentine – Analyse de la pratique observée – 2^d moment crucial

4.1.2. Analyse a priori des tâches effectivement proposées par Valentine par rapport à l'ingénierie

Analyse a priori de la tâche proposée au premier moment crucial

L'analyse du premier moment montre une enseignante mettant en place le problème de la boîte et des cubes à l'identique de l'ingénierie (Fig. 9). Lors de la définition de la tâche et la mise en place du milieu didactique primitif, elle dirige cette situation : lecture, puis jeu du problème, recherche, recension des réponses. La situation proposée par l'ingénierie est modifiée lors de la transcription des données au tableau, ce qui fait ostension de certains éléments. Puis, alors que l'ingénierie prévoit une intervention du professeur pour lancer la dévolution de la preuve : « *qui veut parier ?* », l'enseignante désigne une élève pour parier, élève qu'elle a repérée lors de sa circulation dans la classe. Prenant à sa charge l'initiative du rajout des cubes enlevés, Valentine donne ces cubes un à un à l'élève désignée qui les pose ensuite sur la boîte. Ce faisant, elle enrôle l'ensemble de la classe dans un surcomptage des cubes (Fig. 9, [9]). Puis, suspendant son geste (Fig. 9, [10]) elle signifie aux élèves l'arrêt de celui-ci. Cette manière de faire est rejouée à l'identique plusieurs fois. Au final, la tâche effective proposée aux élèves par Valentine ne retient pas la possibilité pour eux de maintenir ou non le pari après le surcomptage alors que cet apprent didactique constitue la variable de commande de la situation. La modification opérée par l'enseignante ne favorise pas le potentiel

rétroactif du milieu matériel (Brousseau, 1998), pourtant central dans le processus a-didactique de construction de la preuve prévu par l'ingénierie.

Ces observations montrent une tâche sensiblement différente de la situation prévue par l'ingénierie. La tâche ainsi définie ne permet pas la dévolution de la preuve, affaiblissant ainsi le potentiel a-didactique de la situation mathématique initialement prévue dans l'ingénierie.

Analyse a priori de la tâche proposée au second moment crucial

Tout comme pour le premier moment, l'analyse de la tâche effectivement proposée à ce second moment crucial (Fig. 10), semble, de prime abord, au plus près de l'ingénierie didactique : la tâche introduit « une valeur imaginaire » puis fait appel aux savoirs construits précédemment pour juger de la validité des propositions des élèves. Le milieu matériel de la tâche (tableau) propose une organisation spatiale (Fig. 10, [9]) se concrétisant par une demande à une élève de vérifier une proposition, 70, ce qui conduit subrepticement les élèves à rechercher le chiffre des dizaines de la solution et à conclure que seules les deux propositions 65 et 75 sont possibles (Fig. 10, [14]). Cependant la tâche effective s'écarte de l'ingénierie en éludant le travail sur la somme (Annexe 2, paragraphe 2) pour ne retenir que la tâche « vérification avec la boîte » (paragraphe 3) visant à justifier la valeur du chiffre des dizaines de la solution par la nécessité de casser une dizaine pour obtenir un nombre d'unités suffisant pour effectuer la soustraction $94 - 29$.

Ainsi, le travail sur la somme, visant la recherche d'une technique opératoire permettant de calculer le complément, prémices de l'algorithme de l'addition lacunaire, n'est donc pas constitutif du milieu de la tâche effectivement proposée aux élèves en ce deuxième moment crucial.

4.1.3. Analyse a posteriori : difficultés rencontrées dans l'action conjointe

Il s'agit dans cette section d'examiner les contraintes qui pèsent sur les acteurs de la relation didactique lors de la mise en œuvre des tâches effectives et d'interpréter les effets de ces contraintes en termes de gestion la relation didactique. Nous nous appuyons pour ce faire sur certains descripteurs de l'action didactique conjointe.

Difficultés rencontrées lors du premier moment crucial

L'analyse de l'action conjointe professeur-élèves montre que Valentine n'a pas relevé le glissement de contrat didactique qui se joue à ce moment crucial (Fig. 9, [12], [27]). Jusqu'alors, les élèves devaient

résoudre le problème en déterminant le nombre de cubes restant dans la boîte ; dans cette situation il s'agit cette fois, non pas de porter l'accent sur le résultat, mais d'apporter une preuve intellectuelle du résultat annoncé. Or, les commentaires de l'enseignante portent sur le résultat ([12] : « *Est-ce que Ma a trouvé le bon nombre ? [...] C'est pas grave, hein, on rejouera* » ; [27] : « *Est-ce que c'est le bon nombre ? Donc il a gagné.* ») et non pas sur le gain ou non du pari, alors que c'est ce qui permet la dévolution de la preuve.

Du point de vue de la topogénèse, l'enseignante tient de bout en bout une position en surplomb : (i) en transcrivant les données essentielles du problème au tableau effectuant le travail de repérage des données à la place des élèves ; (ii) en donnant un à un les cubes aux élèves, provoquant par effet de contrat le surcomptage en cœur des élèves ; (iii) en suspendant le comptage ou en rappelant le résultat à atteindre (Fig. 9, [10], [14], [17]), amenant par un effet Topaze les élèves à comprendre que la réponse est fausse. Notre interprétation est que l'enseignante reste prisonnière du contrat habituel à la classe qui est de résoudre les problèmes⁷. Les conclusions qu'elle formule en fin de chacun des surcomptages (Fig. 9, [16], [17], [27]) montrent qu'elle porte davantage l'attention sur la réponse de l'élève. Ce mode opératoire — surcomptage contrôlé par l'enseignante, puis acceptation ou non de la réponse testée sans remise en cause du pari — se reproduit à l'identique à trois reprises, ce qui a pour effet de maintenir les élèves dans le contrat didactique usuel « rechercher la solution du problème ». Par voie de conséquence, lorsqu'elle cherche à faire émerger une procédure de validation, les élèves lui répondent par des procédures de résolutions (Fig. 9, [35 à 37]). Après plusieurs tentatives infructueuses pour faire exprimer par les élèves la procédure de validation, l'enseignante l'énonce elle-même : « *Votre réponse plus les cubes sortis égal 45* ». Enfin, notons qu'elle conclut par l'ouverture de la boîte. Le pari, que nous avons pointé comme élément didactique déterminant dans la dévolution de la preuve, n'est ici pas exploité : l'ouverture de la boîte est effectuée par l'enseignante pour valider le résultat et non pour valider le gain du pari. La dévolution de la preuve ne pouvant, de ce fait, avoir lieu, le contrat didactique « prouver » ne peut vivre. Aussi, produisant un effet Jourdain, l'enseignante énonce elle-même la preuve : « *Elle pensait, Maxine, que 36, c'est ça... tu pensais que 36 cubes dans la boîte plus les 18 cubes sortis ça faisait*

⁷ Modalité de gestion du contrat didactique observé tout au long des observations. Cette interprétation est corroborée par les entretiens, que dans le cadre de cet article nécessairement concis, nous ne pouvons documenter ici.

47, et tu viens de te rendre compte de quoi ? [pas de réponse de Ma] c'est pas ça ».

Enfin, elle clôt la résolution du problème par l'ouverture de la boîte en déclarant « *Ah bé tiens, on va quand même ouvrir parce que on ne sait jamais...* ». Ce faisant, elle entretient une ambiguïté sur l'objectif de la séance « *vérifier empiriquement* » ou « *vérifier par un moyen intellectuel* ». La co-construction de la preuve intellectuelle est, du coup, freinée. Les élèves ne basculent pas sur le terrain de la preuve, l'enseignante introduit alors au tableau un ostensif non prévu dans l'ingénierie didactique (Figure 11), automatisant une procédure à accomplir pour valider une réponse et provoquant ainsi un déplacement chronogénétiq.

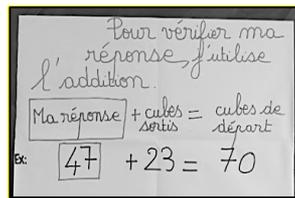


Figure 11. – Affiche automatisant une procédure de validation

Difficultés rencontrées lors du second moment crucial

L'analyse du second moment crucial (Figure 10) montre une enseignante focalisée sur l'avancée chronogénétiq de la compréhension d'un algorithme opératoire. Bien que les traces écrites au tableau laissent entrevoir l'utilisation de la preuve, l'enseignante laisse dans un premier temps les élèves écarter certaines valeurs jugées trop petites ou trop grandes (Fig. 10, [3]). Attendant ensuite des propositions allant dans le sens de son projet didactique (Fig. 10, [4], [5]), elle use d'un effet Jourdain (Fig. 10, [11]), pour orienter les élèves vers une solution « proche de six dizaines ou sept dizaines ». Toujours dans le droit-fil de l'ingénierie, nous la voyons ensuite poser dans le milieu didactique une addition lacunaire posée en colonne, $29 + \quad = 74$. Cette organisation spatiale, préconisée par l'ingénierie, vise à orienter les élèves vers la recherche du chiffre des unités (Fig. 10, [13]), les amenant ainsi à réduire leurs propositions à 65 et 75 (Fig. 10, [14]). Nous interprétons la manière de faire de l'enseignante comme une volonté de rester proche du texte de l'ingénierie. Pour autant, l'intervention d'un élève à propos du nombre d'unités et de dizaines (Fig. 10, [15]), amène Valentine à prendre un raccourci vers l'algorithme de la soustraction par passage : l'intervention de l'élève,

« *Quand on enlève 4 et après, comme il n'y a pas assez d'unités, il faut prendre une dizaine* », aussitôt relevée par l'enseignante, est mise à profit pour illustrer, à l'aide d'un matériel didactique de numération, la technique opératoire de la soustraction par cassage (Fig. 10, [19 à 21]).

L'organisation spatiale qui structure le milieu didactique faisant travailler sur la somme (Annexe 2, paragraphe 2 de l'ingénierie) visant à amorcer une résolution du problème « par une technique raisonnée par essais successifs » (Fig. 8, Analyse *a priori* de la situation) n'est pas exploitée. De ce fait, les prémices de l'algorithme de l'addition lacunaire ne peuvent émerger. Les aspects sémiotiques du milieu didactique (Sensevy, 2007) ne sont pas donc exploités par Valentine. Nous interprétons ces constats comme l'activation par cette enseignante d'une pratique routinière, sans doute incorporée à partir d'usages professionnels répandus dans l'enseignement de la soustraction, à savoir l'explication du fonctionnement de l'algorithme de la soustraction par cassage (une dizaine vaut dix unités). Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que le retour à la boîte, pensé dans le texte de l'ingénierie comme moyen de « vérification » (Annexe 2, paragraphe 3), conforte l'enseignante dans l'interprétation qu'elle fait de la situation en valorisant le cassage d'une dizaine de cubes (Fig. 10, [21]) alors que ce point est second dans l'ingénierie. Ce constat nous semble rendre compte du poids de l'épistémologie pratique de l'enseignante comme nous le discutons en section 5.

4.2. Le cas de Caroline, enseignante peu expérimentée

Caroline est une enseignante en début de carrière, ayant une expérience d'enseignement de cinq ans. La classe observée est un cours double réunissant des élèves de CE1 et de CE2. Le groupe du niveau CE1 est qualifié par Caroline de « très hétérogène », avec des « *bons élèves mais aussi [d'autres] en très grandes difficultés. Certains ne sont pas lecteurs et ont des difficultés en numération* » (entretien préalable).

4.2.1. Description de la pratique observée : tâches d'enseignement mises en place

Dans les lignes qui suivent, nous reproduisons les modalités de présentation des analyses du cas précédent.

Premier moment crucial : construction de la preuve intellectuelle

L'extrait ci-après porte sur la mise en œuvre de la même situation que dans la classe de Valentine. Il s'agit de résoudre le problème « Dans la boîte j'ai 45 cubes. J'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant ? » et de faire la preuve du résultat.

- [1] Ens. écrit le problème au tableau, tout en le lisant, puis un élève le relit.
- [2] Ens. joue le problème avec la boîte et les cubes sous la direction des élèves.
- [3] Ens. : *Maintenant vous prenez votre ardoise et vous écrivez votre réponse.*
- [4] Les élèves recherchent la solution. Ens. écrit au tableau : nombre de cubes dans la boîte / nombre de cubes sortis/ ma réponses / le résultat.
- [5] Ens. : Qui est prêt à parier sur sa réponse ?
- [6] Ens. (à Jonas pariant sur 30) : *Alors avant de parier je voudrais que tu vérifies, tu as la possibilité de vérifier mais sans ouvrir la boîte. Comment faire ?*
- [7] Jonas, Charlotte, Sami et Océane formulent tour à tour une procédure de résolution (comptage sur les doigts, utilisation des cubes, retraits numériques successifs, utilisation de la numération décimale).
- [8] Ens. repousse les justifications des élèves :
(à Charlotte) : *Tu es en train d'expliquer comment tu fais pour trouver, moi je voudrais savoir comment faire pour vérifier.*
- [9] (à Sami et Océane) : *Oui mais là c'est pareil [vous êtes] en train d'expliquer.*
- [10] (à Jonas) : *Excuse-moi je te coupe, mais tu es en train d'expliquer, je veux savoir comment on fait pour vérifier sa réponse.*
- [11] Ens. : *Langue au chat ?*
- [12] Ens. : *Ça veut dire ça veut dire que si j'ajoute les 18 qu'on a enlevés, combien je vais avoir ?*
- [13] Tout à tour les élèves répondent 30, puis 18, puis 45
- [14] Ens. : *Et voilà, je dois en retrouver 45, en tout. Au début j'en avais 45 dans la boîte, j'en ai enlevé 18, ça veut dire qu'avec ceux qui sont dans la boîte et ceux-là j'en ai 45. Jonas me dit il y en a 30, on va vérifier pour voir si on tombe, si en ajoutant ceux là, on arrive à 45.*
- [15] (à Jonas) : *Vas-y je te laisse faire. On dit qu'il y en a 30 [dans la boîte].*
- [16] Jonas : *31 32 33 34 35 36 37 38 et une dizaine...*
- [17] Sami et Loïc : 48
- [18] Ens. : *48 ! Ah ! Donc est-ce que ta réponse est bonne ?*

Ajout mésogénétique

Simulation du problème avec le matériel

Dévolution de la recherche de la solution

Changement de contrat didactique
Tentative de faire basculer les élèves de la recherche de la solution à la vérification d'un résultat

Introduction mésogénétique

Termes relatifs à l'addition

Non dévolution de la preuve

Glissement vers un contrat d'ostension

Surcomptage des cubes



Pari ré-interrogé

Disparition d'une variable de commande

Non ouverture de la boîte

- [19] Jonas : *Non.*
- [20] Ens. : *Et non on ne trouve pas 45. Donc c'est pas ça. Est-ce que tu veux toujours parier avec moi, sur ta réponse ?*
- [21] Jonas : *Non.*
- [22] Ens. : *Qui veut parier encore avec moi ?*
- [23] Ens. (à Charlotte) : *Donc toi tu dis qu'il y en a 26 dans la boîte, donc tu vas rajouter les 18 et on va voir si on retrouve le nombre du début, nombre total 45, alors vas-y. donc 26, c'est ce que tu as dit voilà, 26 vas-y, rajoute, mets-les sur le couvercle.*
- [24] Charlotte surcompte les cubes.
- [25] Ens. : *44, est-ce qu'on arrive à 45 ?*
- [26] Charlotte : *Non.*
- [27] Ens. : *Et non, alors tu veux toujours parier avec moi sur ta réponse ? Tu penses toujours que 26 c'est la bonne réponse ?*
- [28] Charlotte : *Oui.*
- [29] Ens. : *Oui ? pourtant tu viens de vérifier-là. (Se tournant vers les élèves) Là, elle trouve 44, et elle me dit quand même que 26 c'est la bonne réponse. Pourquoi 26 ne peut pas être la bonne réponse ? »*
- [30] Loane : *Parce que 44 c'est moins que 45, alors 26 ça peut pas être la bonne réponse*
- [31] Ens. : *Et oui il faut trouver exactement 45 quand on vérifie. Nicolas tu veux parier avec moi ?*
(à Nicolas) : *Donc moi je te demande qu'est-ce qu'on parie ?*
- [32] Nicolas : *27*
- [33] Ens. : *donc avec ceux-là on doit en avoir 45, alors vérifie.*
- [34] Ens. : *Tu as trouvé 45 ?*
- [35] Loïc : *Non.*
- [36] Ens. : *Il a pas trouvé 45 là ? [...] Et ben si... donc tu as gagné [serrant la main de Nicolas] Bravo. Donc la bonne réponse était 27.*

Surcomptage des cubes



Disparition d'une variable de commande

Non ouverture de la boîte

Surcomptage des cubes



Pari non interrogé

Disparition d'une variable de commande

Non ouverture de la boîte



Confirmation du gain du pari par Ens.

Figure 12. – Caroline – analyse de la pratique observée –
1^{er} moment crucial

Deuxième moment crucial : stratégie des essais pour construire le sens d'un algorithmique

Il s'agit ici du même problème à résoudre que chez Valentine : « J'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ? ».

Le problème est écrit au tableau, lu par l'enseignante, puis par une élève. Les élèves ont un temps de recherche pour résoudre le problème. Ils ont déjà l'expérience de résolution de problèmes par essais successifs : l'enseignante rappelle que l'on « proposait un nombre pour un premier essai, puis on le prouvait. Si ce n'était pas la bonne réponse, on essayait un autre nombre. » Comme à l'accoutumée, Caroline note toutes les réponses des élèves au tableau : 33, 77, 73, 70, 90 et 65. Nous débutons notre analyse par la discussion qui s'en suit.

- [1] Ens. : *Est-ce que parmi vos propositions il y en a certaines qu'on peut éliminer parce que ce n'est pas possible ? Laquelle, Théo ?*
- [2] Théo : 90.
- [3] Ens. : *Pourquoi Théo ?*
- [4] Théo : *Parce qu'il faut en rajouter 29 de 90, et ça rajoute deux dizaines et ça fait 100... 119.*
- [5] Ens. : *Et oui, alors 94, ça peut pas...*
- [6] Océane : 70.
- [7] Ens. : *Pourquoi ?*
- [8] Océane : *Parce que si on enlève 29, ben...*
- [9] Ens. : *On doit pas enlever 29, on doit rajouter 29 à 70. Moi, je trouve que ces trois propositions elles sont intéressantes parce qu'elles ont toutes 7 dizaines, et effectivement, le nombre qu'on va leur rajouter, il a deux dizaines... Alors, on va tester.*
- [10] Théo : *Il y en a un que c'est pas la bonne. 70, puisque...*
- [11] Ens. : *Attends, on va les tester, on va les tester...*
- [12] Ens. (entourant les trois valeurs 77, 73 et 70) : *Moi je trouve que ces trois elles sont possibles puisqu'on a 7 dizaines et qu'on va en rajouter deux, puisqu'à 29 il y a deux dizaines. Est-ce qu'il y a une autre réponse là-dedans qui vous paraît impossible ? Yanis ?*
- [13] Yanis : 65.
- [14] Ens. : *Pourquoi ?*
- [15] Yanis : *Parce que il y a pas les 7 dizaines.*
- [16] Ens. : *Oui, mais il y en a 6.*

Appel à la mémoire didactique : utilisation du moyen de preuve construit

Utilisation de l'addition pour invalider la réponse « 90 ».

Position topogénétique haute de l'enseignante pour retenir les valeurs « 77 », « 73 » et « 70 ».

- [17] Yanis : 33.
- [18] Ens. : *Alors, pourquoi 33 elle est impossible d'après toi ? [...] Théo ?*
- [19] Théo : *Parce que c'est trop petit. Ça va faire 50... 60... ça va faire moins de 94.*
- [20] Ens. : *Et voilà, ça va faire entre 50 et 60.*
- [21] Ens. (désignant les quatre valeurs au tableau) : *Donc, les propositions qui sont possibles, ce sont ces quatre.*
- [22] Ens. : *Alors, on va tester la première, 77. Donc, premier essai. $29 + 77$. Alors, 9 et 7, ça fait combien ? Il y a que Théo qui est réveillé ce matin ? Saousseem ?*
- [23] Saousseem : 16.
- [24] Ens. (pointant le chiffre « 6 ») : *Ça fait 16. Donc, je pose 6, je retiens 1. Est-ce que je continue mon essai ? J'ai trouvé 6 unités là, combien je dois en trouver des unités ?*
- [25] Emmanuela : 4.
- [26] Ens. : *Et oui, donc c'est pas la peine, je vais pas perdre de temps. Donc, celui-là, il va pas. Donc, ça veut dire que 77 c'était trop petit ou trop grand ?*
- [27] Plusieurs élèves : *Trop grand ! Trop petit !*
- [28] Ens. : *Trop grand, puisque je trouvais 6 unités, je trouve plus. Donc, celui-là, je le barre.*
- [29] *Je vais tester 73. $29 + 73$. 9 et 3, Yanis...*
- [30] Yannic : *Non, 12.*
- [31] Ens. : 12.
- [32] Plusieurs élèves : *Ça va pas. C'est pas assez.*
- [33] Théo : *Il faut 2 unités... Non, il en faut 4, alors qu'il y en a 2.*
- [34] Ens. : ***Voilà, il faut 4 unités et là on en trouve 2. Donc, c'est pas... Ça va pas être un nombre avec 3 unités. Qu'est-ce qu'on pourrait essayer ?***
- [35] Es. : 65 !
- [36] Yanis : *C'est sûr que c'est celui-là !*
- [37] Ens. : *Alors, 9 et 5 ?*
- [38] Es. : 14.
- [39] Ens. : *14, et je retiens 1. 6 et 3 ? 9. Donc, c'était 65 la bonne réponse. Alors, vous voyez comment on s'y est*

Position surplombante de Ens. pour amener les élèves à tester les valeurs 70, 73, 77 et 65.

Effet Topaze : focalisation sur le chiffre des unités.

pris là ? Pourquoi on n'a pas continué ces premiers essais ? Pourquoi on les a arrêtés ?

[40] *Loïc : Parce que déjà, les unités, c'est pas bon.*

[41] *Ens. : Voilà. Les unités ne correspondaient pas. Donc, c'est pas la peine de perdre du temps. [...] Par contre, il faut bien réfléchir chaque fois qu'on fait un essai..., se demander "Est-ce que le nombre que j'ai proposé, il est trop grand ou est-ce qu'il est trop petit ?". C'est ça la question, pour pouvoir ajuster après sa réponse.*

Glissement vers un contrat d'utilisation des connaissances :

Ens. prend en charge l'utilisation de la preuve pour valider des réponses proposées par les élèves.

Figure 13. – Caroline – Analyse de la pratique observée – 2^e moment crucial

4.2.2. Analyse a priori des tâches effectivement proposées par Caroline par rapport à l'ingénierie

Analyse a priori de la tâche proposée au premier moment crucial

Tout comme Valentine, Caroline introduit le problème de la boîte et des cubes comme indiqué dans l'ingénierie. Nous observons toutefois que, contrairement à Valentine, Caroline suit scrupuleusement l'ingénierie. Lors de la définition de la tâche, les rôles sont répartis : un élève lit le problème tandis que l'enseignante effectue les manipulations à opérer avec la boîte et les cubes sous la dictée des autres élèves. La simulation du problème effectuée, les élèves résolvent le problème sur ardoise. La tâche respecte l'organisation préconisée : copie à l'identique de l'énoncé au tableau ; interrogation tour à tour des élèves ayant une réponse erronée supérieure à la solution, une réponse erronée inférieure, une réponse correcte. Lors de la manipulation des cubes, l'enseignante se tient à proximité des élèves surveillant de près leur surcomptage.

Nous observons ici une jeune enseignante se maintenant au plus près de l'ingénierie lors de la mise en place de la tâche. Ce n'est qu'après la simulation du problème que Caroline modifie la tâche initialement prévue en introduisant les termes inducteurs de l'addition : « *si j'ajoute les 18 qu'on a enlevés* » (Fig. 12, [12], [14], [23]) alors que le texte de l'ingénierie évite tout mot inducteur de l'addition, ne suggérant que le surcomptage (Annexe 1). La structure de tâche est modifiée dans le sens d'un « contrat d'ostension » (Brousseau, 1996, p. 26).

Le pari, variable de commande de la situation, s'il est re-questionné pour les deux premières valeurs testées (Fig. 12, [20], [27]), ne l'est plus pour la dernière valeur. L'ouverture de la boîte, qui permet de valider ou d'invalider le maintien du pari par l'élève, n'a pas lieu. C'est Caroline qui prend en charge cette validation (Fig. 12, [29], [36]). De ce fait, le milieu didactique proposé par Caroline ne laisse pas les élèves se rendre compte par eux-mêmes de la perte ou du gain du pari, ce qui du point de vue de l'analyse *a priori* de la tâche proposée (Fig. 12) fait disparaître la variable de commande de la situation a-didactique de l'ingénierie.

Nous considérons que la modification introduite dans la tâche proposée aux élèves par Caroline transforme le contrat original de l'ingénierie dans le sens d'un contrat d'ostension, c'est à dire un contrat fortement didactique portant sur un savoir nouveau qui se caractérise par le fait que « le professeur 'montre' un objet ou une propriété, l'élève accepte de le 'voir' comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. L'identification de

l'objet ne permet cependant pas d'en définir les propriétés » (Brousseau, 1996, p. 46). Ce constat aura des conséquences en termes de contraintes et de possibles que nous développons ci-après (section 4.2.3).

Analyse a priori de la tâche proposée au second moment crucial

Caroline mène cette séance comme les précédentes : elle laisse les élèves résoudre le problème puis, comme indiqué dans l'ingénierie didactique, collecte les réponses des élèves, réponses qu'elle note au tableau. Contrairement à Valentine, elle n'introduit pas de valeur « imaginaire » (Annexe 2, phase 1). Certaines réponses, « 90 » et « 33 », sont écartées, les élèves justifiant cette impossibilité par utilisation de la preuve (Fig. 8, [4], [19]).

Nous observons un premier écart à l'ingénierie dans la définition initiale du milieu didactique. Rappelons que la situation de l'ingénierie a pour visée de faire discuter sur le chiffre possible des dizaines ou des unités. Berté (1996) rappelle que les dizaines et les unités sont des variables didactiques qui n'ont pas été choisies au hasard (Annexe 2 : 1/ choix du premier nombre). Or, nous observons que, dans la tâche effectivement proposée par Caroline à ce second moment crucial, les discussions sur les valeurs possibles du chiffre des dizaines ou des unités sont éludées (Fig. 8, [10 à 11], [15 à 16]). Seules quatre valeurs sont retenues parmi celles énoncées par les élèves : 77, 73, 70, 65 (Fig. 8, [21]).

Un deuxième écart se manifeste lors de la recherche de la solution. Alors que l'ingénierie prévoit d'obtenir la solution en construisant l'algorithme de l'addition lacunaire (Annexe 2 : 2/ Travail sur la somme), la tâche proposée par Caroline consiste à faire tester les valeurs les unes après les autres en s'appuyant sur l'addition (Fig. 8, [22], [29]). Elle arrête le test à l'ordre des unités lorsqu'il est manifeste que la réponse ne peut être la solution. (Fig. 8, [24 à 26], [33 à 34]). Enfin, l'ouverture de la boîte n'a pas lieu, ne permettant pas aux élèves de se rendre compte de la nécessité de casser une dizaine pour avoir un nombre d'unités suffisant pour soustraire.

Au terme de l'analyse *a priori* de la tâche proposée par Caroline à ce deuxième moment crucial, nous considérons que la composante a-didactique, initialement pensée dans l'ingénierie pour permettre aux élèves d'initier les prémices d'un algorithme opératoire, ne pourra advenir.

4.2.3. Difficultés rencontrées dans l'action conjointe, analyse a posteriori

Difficultés rencontrées lors du premier moment crucial

L'analyse de l'action didactique conjointe professeur-élèves montre que Caroline a bien relevé l'enjeu didactique à cette étape de l'ingénierie : à plusieurs reprises, elle repousse les explications des élèves dès lors que celles-ci portent sur une procédure de résolution (Fig. 12, [8 à 10]). Assumant une position topogénétique haute en déclarant « *langue au chat ?* » (Fig. 12, [11]), elle introduit alors le surcomptage amorçant ainsi la construction de la procédure de validation d'un résultat. Enfin, elle ne s'attarde pas sur la qualité de la réponse des élèves (correcte ou incorrecte) mais sur la relance du pari ; elle invite Jonas et Charlotte à parier sur leur réponse, puis demande la confirmation de leur pari (Fig. 12, [20], [27]). Ces éléments, selon nous, sont des indices d'une certaine perception par l'enseignante du changement de contrat didactique proposé par l'ingénierie à l'étape du pari : amener les élèves sur le versant de la preuve.

Cependant, si l'ingénierie précise que le surcomptage est à l'initiative de l'enseignante (Annexe 1), la construction de la preuve doit rester à la charge de l'élève. Or, l'analyse *a priori* de la tâche effectivement proposée par Caroline dans ce premier moment crucial, montre que la dévolution de la preuve n'est que partielle. Le pari qui constitue la variable de commande de la situation, n'est pas ici pleinement exploité puisque l'ouverture de la boîte n'a pas lieu alors qu'elle permet de valider ou d'invalider le maintien du pari par l'élève (et non pas le pari en lui-même). Ainsi, lorsque Charlotte maintient son pari (Fig. 12, [28]) et alors que sa réponse est fautive, Caroline ne la laisse pas aller au bout. Il n'y a pas ouverture de la boîte pour que l'élève se rende compte qu'elle n'aurait pas dû le maintenir. Cette procédure n'est pas non plus comprise de Nicolas (Fig. 12, [34 à 35]). Lors de ce dernier pari, Caroline valide alors elle-même la solution au problème : « *Il a pas trouvé 45 là ? [...] Ben si... donc tu as gagné, bravo* » (Fig. 12, [36]).

La disparition de la variable de commande (l'ouverture de la boîte) du fait de la modification du milieu de la situation de l'ingénierie, amène l'enseignante par une série d'indices et d'effets Topaze à conduire les élèves vers la solution escomptée les privant de la responsabilité décisionnelle quant au maintien du pari (Fig. 12, [20], [27], [29]). Notons que, dans l'échange avec Nicolas, les contraintes du maintien de la relation didactique conduisent Caroline à endosser la responsabilité de la conclusion, (Fig. 12, [36]), bloquant ainsi la construction de la preuve par les élèves. L'analyse *a posteriori* à partir des descripteurs de l'action didactique conjointe, confirme un certain affaiblissement de dévolution de la preuve en raison de la non ouverture de la boîte ce qui a pour conséquence d'annihiler sa fonction rétroactive inhérente à la situation d'ingénierie initialement conçue.

Ici, le croisement entre analyse *a priori* de la situation didactique de l'ingénierie, analyse *a priori* de la tâche effectivement proposée aux élèves, et analyse *a posteriori* de la pratique, met en lumière une enseignante qui, bien qu'ayant perçu le changement de contrat didactique lié au pari, ne réussit pas à se saisir pleinement dans l'action conjointe avec ses élèves du potentiel didactique de certains éléments du milieu de la situation. En fait, si Caroline en conserve un élément (le pari), elle en écarte un autre (l'ouverture de la boîte) ce qui l'oblige, pour pouvoir conclure les échanges, à introduire de nouvelles pièces dans le milieu didactique (mots inducteurs de l'addition, indices Topaze). Dans ce premier moment crucial, à l'inverse de ce que souhaitait Caroline, les modifications mésogénétiques opérées ont pour conséquence un ralentissement de la construction de la vérification intellectuelle : les élèves ne perçoivent pas la différence entre l'utilisation de l'addition pour résoudre le problème (la recherche du complément) et l'utilisation de l'addition pour vérifier (la preuve). Ce constat conduira l'enseignante à introduire quelques jours plus tard une feuille blanche où elle demandera aux élèves de résoudre un problème soustractif sur le recto et, sur le verso, d'écrire, selon la manière qui leur paraîtra la plus pertinente, comment établir la preuve de leurs résultats (surcomptage dessiné, addition, etc.). Ce nouveau matériel et son organisation spatiale (recto/verso) lui permettront d'amener les élèves, par une série d'ostensions, à différencier les deux procédures. Ayant observé, au fil de la reprise de l'ingénierie par Caroline, l'utilisation récurrente d'ostensions dans la régulation des tâches proposées, nous avons fait l'hypothèse qu'il s'agissait d'un indice de son épistémologie pratique (nous y reviendrons en discussion).

Difficultés rencontrées lors du second moment crucial

L'analyse de l'action conjointe professeur-élèves lors du second moment crucial (Figure 13) met en évidence que face à la difficulté de faire advenir la recherche d'un algorithme, les actions de l'enseignante produisent une réorientation du contrat didactique vers un enjeu de savoir différent de celui visé de l'ingénierie : trouver la solution du problème en réduisant le nombre d'essais.

Dans un premier temps, comme pour les séances précédentes, l'enseignante transcrit au tableau les réponses des élèves. Ce faisant, les élèves comprennent par effet de contrat qu'il s'agit à ce moment-là de valider ou d'invalider les réponses proposées.

Dans un souci d'accélération du temps didactique, nous observons que Caroline s'adresse principalement aux élèves qu'elle sait capable d'énoncer correctement le moyen de preuve. Par exemple : 90 n'est pas la solution car « *il faut rajouter 29 [...] et ça fait 119* » (Fig. 13, [4]) ;

33 ne convient pas car il est « *trop petit* » (Fig. 13, [18 à 19]). Elle ne suit pas d'autres élèves lorsque ceux-ci, à deux reprises, n'utilisent pas l'addition pour justifier la réponse 70 ou la réponse 65 (Fig. 13, [6 à 10] puis [13 à 16]). L'enseignante, par ses actions, valorise ainsi la mémoire didactique de certains élèves afin d'activer l'addition comme moyen de preuve construite lors du premier moment crucial.

Nous interprétons ces régulations comme une difficulté de Caroline à identifier les enjeux du contrat didactique à ce moment crucial de l'ingénierie, celui d'utiliser l'addition non plus pour vérifier une réponse mais pour construire un algorithme opératoire. Optant alors pour une position topogénétique haute, l'enseignante désigne d'elle-même des réponses plausibles, « *je trouve que ces trois [réponses]... elles sont possibles puisqu'on a sept dizaines et qu'on va en rajouter deux* » (Fig. 13, [12]). Elle retient ensuite subrepticement une quatrième valeur, 65, « *donc, les propositions qui sont possibles, ce sont ces quatre* » (Fig. 13, [21]) et ce, alors même qu'un élève, raisonnant sur les dizaines, manifeste son désaccord (Fig. 13, [15]). De ce fait, les arguments sur la plausibilité d'une réponse, arguments prenant appui sur la valeur des chiffres composant le nombre ne peuvent être reconnus par les élèves. Comme nous l'avions anticipé dans l'analyse *a priori* de la tâche effective, nous observons une seconde réorientation vers la vérification des quatre valeurs retenues. Élèves et enseignante, sous couvert d'un nouveau contrat didactique (trouver la solution en utilisant l'addition) invalident les valeurs 77 et 73 en arrêtant l'addition au rang des unités (Fig. 13, [24], [34]) : le test de la valeur 77 montre que le nombre d'unités est trop grand (Fig. 13, [26], [27]) alors que pour 73, il est trop petit (Fig. 13, [32 à 34]). Cette modalité de régulation conduit alors la classe à se rabattre sur la seule valeur restante possible, 65, valeur retenue par l'enseignante en ce qu'elle est la solution du problème (Fig. 13, [37 à 39]).

Finalement, l'analyse *a posteriori* met en évidence qu'élèves et enseignante résolvent le problème par une utilisation du moyen de preuve et non par la recherche du complément s'appuyant sur l'algorithme de l'addition lacunaire. La conclusion de l'enseignante : « *il faut bien réfléchir chaque fois qu'on fait un essai... se demander est-ce que le nombre que j'ai proposé, il est trop grand ou est-ce qu'il est trop petit ? C'est ça la question, pour pouvoir ajuster après sa réponse* » (Fig. 13, [41]), conforte notre interprétation de prégnance du contrat didactique « résoudre le problème en utilisant la preuve construite précédemment ». Les prémices de la construction de l'algorithme de l'addition lacunaire (c'est-à-dire la détermination du chiffre des unités du nombre-complément) ne peuvent ainsi trouver

place dans la mésogenèse, ce qui était pourtant la visée principale de cette situation didactique à cette étape de l'ingénierie de la soustraction.

5. DISCUSSION CONCLUSIVE SUR LA PERTINENCE DES DEUX STRATES D'ANALYSE A PRIORI POUR COMPRENDRE LES USAGES DE RESSOURCES DIDACTIQUES PAR LES PROFESSEURS

Il s'agit ici, à la lumière des cas présentés de revenir sur la nécessité d'une analyse *a priori* de la tâche effectivement proposée aux élèves dès lors que l'on veut mener une analyse comparatiste des pratiques ordinaires d'enseignant·e·s aux prises avec des ressources didactiques, qu'elles leur soient proposées ou qu'elles aient été choisies.

Dans les deux cas étudiés, nous observons des adaptations et des modifications, par les enseignantes, des milieux constitutifs de la situation a-didactique de l'ingénierie qui ont pour conséquence de mettre à l'étude des savoirs mathématiques différents de ceux de l'ingénierie de la soustraction.

Au cours du premier moment crucial, les deux enseignantes ont contourné la difficulté de construire l'objet « preuve » (objet central dans l'architecture de l'ingénierie la soustraction) en imaginant chacune un dispositif de façon à ce que cet objet soit présent dans les milieux didactiques des étapes suivantes : Valentine introduit un élément ostensif (une affiche « mode d'emploi »), tandis que Caroline introduit, plus tard, une tâche supplémentaire qui par son organisation spatiale et matérielle (la résolution au recto et la vérification au verso d'une feuille) lui permettra d'atteindre ses objectifs. Les effets de ces dispositifs seront différents. Dans la classe de Valentine, enseignante chevronnée, la construction de la preuve n'est pas réalisée mais automatisée dans un contrat de reproduction (Brousseau, 1996). En revanche, dans celle de Caroline, enseignante moins expérimentée, demeure une incertitude quant au savoir qu'elle souhaite institutionnaliser entre l'opération « addition » comme moyen de résoudre ou comme moyen de preuve, et ce malgré les efforts de cette enseignante pour différencier ces procédures au fil des actions d'ostension qu'elle produit.

Au cours du deuxième moment crucial, toutes deux éludent la construction de l'algorithme de l'addition lacunaire, bifurquant

chacune vers des choix que nous pensons pouvoir expliquer⁸ au regard de leur épistémologie professionnelle (au sens de Brousseau (1998) *cf.* 2.3). Nous observons que dans un premier temps les enseignantes restent fidèles au texte de l'ingénierie de la soustraction : (i) les élèves cherchent la solution du problème ; (ii) les dimensions matérielle et spatiale du milieu didactique primitif proposé aux élèves sont conformes aux indications de l'ingénierie ; (iii) les réponses sont discutées collectivement. Les deux mises en œuvre se démarquent de l'ingénierie au moment de la discussion sur les contraintes liées aux chiffres des unités et des dizaines. Les analyses *a posteriori* pointent que dans la classe de Valentine, la contrainte sur les unités est repérée par les élèves, ce qui les amène à retenir deux réponses plausibles, alors que dans celle de Caroline, c'est l'enseignante elle-même qui retient quatre réponses possibles. Pour lever l'incertitude sur la solution, qui dans l'ingénierie s'appuie sur l'introduction de l'algorithme de l'addition lacunaire (Annexe 2, 2/ Travail sur la somme), Valentine profite des explications d'un élève pour bifurquer vers l'algorithme de la soustraction par cassage, tandis que Caroline développe une technique de résolution par essais successifs.

Dans la perspective pragmatiste sous-tendant le modèle de l'action didactique conjointe professeur-élèves, nous interprétons les mises en œuvre observées en termes d'effets de « l'épistémologie pratique du professeur » :

« cette épistémologie, en partie spontanée, en partie implicite [...] est pratique parce qu'elle a des conséquences pratiques, elle est directement ou indirectement agissante dans le fonctionnement de la classe ; elle est pratique parce qu'elle est produite en grande partie par la pratique, dans la confrontation aux causalités que le professeur pense identifier dans celles-ci et dans les habitudes de perception et d'action cristallisées dans les tâches au moyen desquelles il enseigne ; elle est pratique parce que même si elle est en grande partie non intentionnelle, elle est produite pour la pratique comme réponse générique aux multiples problèmes qu'elle révèle » (Sensevy 2007, p. 37-38)

L'interprétation en termes d'épistémologie pratique du professeur (Amade-Escot, 2019 ; Sensevy, 2007) met en lumière, *via* une analyse ascendante de la transposition didactique, certains phénomènes dont les extraits présentés plus haut exemplifient quelques traits mis en évidence chez Valentine et Caroline. Nous souhaitons ici attirer

⁸ Ne pouvant développer ici la totalité des matériaux empiriques qui soutiennent cette interprétation (données d'observations et d'entretiens sur les 22 séances de reprise de l'ingénierie par les deux enseignantes), nous renvoyons à la lecture de la thèse (Couderette, 2018) où la récurrence de certains constats autorise, selon nous, à fonder cette assertion.

l'attention sur le fait que nous ne pourrions fonder cette interprétation sans les informations apportées par l'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées par les deux enseignantes (ici réduite aux deux moments cruciaux). Elles permettent de donner du sens aux interactions observées. Valentine infléchit la séance en activant une routine professionnelle d'enseignement largement répandue chez les professeurs des écoles en France : l'explication du fonctionnement de l'algorithme de la soustraction par passage à l'aide d'un matériel de numération ; tandis que chez Caroline, l'avancée du savoir est guidée par des préoccupations liées à la résolution du problème.

Pour conclure, il nous semble possible de dire à la lumière des cas présentés que l'analyse *a priori* des tâches effectivement proposées par les professeurs est une strate d'analyse incontournable, s'intercalant entre l'analyse *a priori* des situations relevant des choix épistémiques au fondement de l'ingénierie didactique (analyse *a priori* nécessaire pour tous types ressources didactiques mises à disposition des enseignants) et l'analyse *a posteriori* de la dynamique évolutive du contrat didactique dans l'action conjointe du professeur et des élèves.

En effet, si l'on considère à la suite des réflexions sur la nécessité d'un contrôle épistémologique des savoirs dans la conception des situations de toute ingénierie didactique (Artigue 1988 ; Brousseau, 1998 ; Mercier & Salin, 1988) que l'analyse *a priori* de la situation relève d'une part, du travail du chercheur-didacticien, et d'autre part, d'une analyse indépendante de la contingence observée, alors il nous semble que le terme d'analyse *a priori* (tel qu'envisagé en théorie des situations didactiques) doit être, d'un point de vue méthodologique, étendu à l'analyse des tâches prescrites dans les études du didactique ordinaire, en ce qu'elle documente certains déterminants de la pratique professorale observée.

Nous proposons ainsi, dans la continuité des considérations développées sur les phénomènes didactiques que le modèle de l'action conjointe professeur-élèves peut/doit traiter (Schubauer-Leoni et al., 2007), d'envisager la question de l'analyse *a priori* des tâches effectives proposées par les professeurs comme une strate d'analyse épistémique indispensable à toute enquête sur les pratiques didactiques ordinaires. Le travail du chercheur didacticien à ce niveau est de saisir et de modéliser les savoirs qui sont envisagés par les professeurs (Ligozat & Orange, 2017). Mais au-delà de ce principe partagé par les didacticiens, notre étude sur la reprise de l'ingénierie de la soustraction dans les classes ordinaires introduit une nécessité supplémentaire, celle de la mise en relation de plusieurs strates d'analyse *a priori*. Cette question de méthode, déjà abordée par d'autres auteurs (Ligozat, 2009 ; Quilio, 2017) se trouve confortée par notre recherche. Elle implique sur

le plan méthodologique, que le chercheur puisse suspendre son jugement d'adéquation ou de non adéquation de la pratique enseignante au regard de la ressource didactique utilisée, pour comprendre les déterminations qui pèsent sur cette pratique. En effet, la recherche de thèse a mis en évidence — grâce à la mise en relation des trois strates d'analyse menées (analyse *a priori* raffinée des situations de l'ingénierie, analyse *a priori* des tâches effectivement proposées par les enseignantes, et analyse *a posteriori* de l'action didactique conjointe *in situ*) — qu'au-delà de l'influence de certains usages d'enseignement partagés par les professeurs d'écoles, l'épistémologie pratique singulière à chaque professeur (Amade-Escot, 2019 ; Sensevy, 2007) produit des effets dans l'interprétation qu'elles ou ils font de l'ingénierie didactique aux deux niveaux de sa transposition en classe : celui de l'agencement des milieux didactiques primitifs ; celui de la gestion des incertitudes au fil des d'interactions didactiques.

Ainsi, en lien avec la réflexion méthodologique sur l'importance des deux strates d'analyse *a priori*, les données disponibles sur les manières dont ces deux enseignantes ont mis en œuvre l'ensemble des étapes de l'ingénierie, ainsi que leur comparaison avec celles dont une enseignante en Suisse a pu le faire dans un autre système éducatif (Coudérette, 2018), permettent de pointer que les deux moments cruciaux ici présentés condensent les possibles difficultés que rencontrera tout professeur au regard de la nécessaire et subtile compréhension de la logique épistémique de l'ingénierie de la soustraction.

Nous considérons pour conclure que toute ressource didactique porte en elle des éléments cruciaux d'un point de vue épistémologique qu'il est nécessaire d'identifier pour pouvoir comprendre la pratique d'enseignement dès lors que la ressource est mobilisée. Mais cette analyse épistémique de la ressource didactique ne dispense pas de mener une seconde strate d'analyse *a priori* qui vise à identifier les effets des adaptations opérées par les professeurs en termes des savoirs qu'ils mettent à l'étude, condition nécessaire si l'on veut accéder à l'intelligibilité de la pratique didactique à partir d'une analyse ascendante des processus transpositifs, et afin de documenter les déterminations qui pèsent sur cette pratique.

Les auteurs remercient le comité d'évaluation ainsi que le comité de rédaction pour l'ensemble des suggestions ayant permis d'améliorer leur texte.

BIBLIOGRAPHIE

- AMADE-ESCOT, C. (2019). Épistémologies pratiques et action didactique conjointe du professeur et des élèves. *Education & Didactique*, 13(1), 109-114.
- AMADE-ESCOT, C. & VENTURINI, P. (2015). Joint Action in Didactics and Classroom Ecology: Comparing Theories using a Case Study in Physical Education. *Interchange: A Quarterly Review of Education*, 46(4), 413-437.
- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 283-307.
- ARTIGUE, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 241-286.
- ASSUDE, T., & MERCIER, (2007). L'action conjointe professeur-élève dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 153-185). Rennes : PUR.
- BERTE, A. (1996). *Soustraction à l'école élémentaire*. Rédigé à partir des préparations des professeurs et des chercheurs, et des observations faites dans l'école. École Michelet, COREM. Bordeaux : Publication de l'IREM, document ronéoté.
- BROUSSEAU, G. (1981). Le cas de Gaël. Bordeaux : Publication de l'IREM.
- BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat d'état. Université de Bordeaux 1.
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (3), 309-336
- BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds), *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne* (p. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : la pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- COUDERETTE, M. (2018). *Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques*. Thèse de Doctorat en cotutelle, Université Toulouse Jean Jaurès, Université de Genève
- COUDERETTE, M. & AMADE-ESCOT, C. (2018, octobre). De l'importance de l'analyse a priori dans une enquête sur l'implémentation d'une ingénierie didactique en mathématique dans des classes ordinaires. Études de cas en France. Communication au symposium « L'analyse a priori et/ou analyse ascendante de la transposition » coordonné par F. Ligozat. 5ème colloque international de l'Association pour des Recherches Comparatistes en Didactique, 10-13 octobre, Bordeaux, France.
- DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for research in mathematics education*, 18(5), 363-381.
- FUSON, K. (1982) An analysis of the counting-on solution procedure in addition. in T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds). *Addition and*

- Subtraction: a cognitive perspective* (p. 67-81). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.
- GUEUDET G. & TROUCHE, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : PUR
- HUBERMAN, M. (1989). *La Vie des enseignants : Évolution et bilan d'une profession*. Paris : Delachaux & Niestle.
- LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209-250.
- LEUTENEGGER, F. (2009). *Le temps d'instruire : approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique*. Bern : Peter Lang.
- LIGOZAT, F. (2009). De la tâche prescrite à la tâche effectivement réalisée en classe. Un double feuilleté d'analyse des tâches pour l'étude du didactique ordinaire. In S. Canelas-Trevisi, M.-C. Guernier, G. Sales-Cordeiro, & D.-L. Simon (Éds.), *Langage, objets enseignés et travail enseignant* (p. 233-250). ELLUG.
- LIGOZAT, F. (2010). Les textes de l'activité mathématique scolaire. Préconstruits et ressources dans la genèse des formes de l'action didactique. In G. Gueudet & L. Trouche. *Ressources Vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques* (p. 303-320). Rennes, Lyon : PUR et INRP.
- LIGOZAT, F., & ORANGE, C. (ÉDS.). (2017). La modélisation des savoirs dans les analyses didactiques des situations d'enseignement et apprentissage. Éditorial. *Recherches en Education*, 29, 2-10.
- MERCIER, A. (2002). La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 41, 135-171.
- MERCIER, A. & SALIN, M.H. (1988). Sur l'analyse *a priori* : outil pour l'observation. In, Actes de la 6^{ème} école d'été de didactique des mathématiques d'Orléans (p. 203-216). Bordeaux : Publication de l'IREM.
- PIAGET, J. & INHELDER, B. (1975). *La psychologie de l'enfant*. Paris : PUF.
- QUILIO, (2017). Caractériser les relations des élèves avec le savoir, pour comprendre l'espace de décisions du professeur dans le contexte d'un enseignement des nombres et de leurs usages. *Recherches en Éducation*, 29, 55-71.
- QUILIO, S., ASSUDE T. & MERCIER A. (2011). Obstacles dans l'implémentation d'une ingénierie didactique sur la soustraction. In XIII conferencia interamericana de educação matemática. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1378/703
- QUILIO, S. & SANTACRU, R. (2010). *Soustraction à l'école élémentaire*. Édition augmentée du Document École Michelet Talence / COREM - Apports didactiques Serge Quilio. Lyon et Marseille : INRP et École Saint Charles de Marseille, document ronéoté.
- RESNICK, L. (1982). Syntax and semantics in subtraction, in T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective* (p. 136-155). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.
- SCHUBAUER-LEONI M.L. & LEUTENEGGER F. (2005) Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), 407-429.

SCHUBAUER-LEONI M.L., LEUTENEGGER F., LIGOZAT F., & FLUCKIGER A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, (p. 51-91). Rennes : PUR.

SENSEVY, G. (2007) Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, (p. 13-49). Rennes : PUR.

Annexe 1 : Description du premier moment crucial de l'ingénierie (Berté, 1996, p. 13, Leçon 3)

Vérification retardée : Le problème choisi va être un problème où on a des cubes, on en enlève et on cherche le nombre qui reste (sens fonctionnel dynamique). C'est un problème pour lequel la vérification est la plus simple : on met les cubes, on enlève le nombre voulu, on ferme, on résout et pour vérifier on ouvre la boîte et on compte les cubes restant dans la boîte. Mais l'enseignant va retarder cette vérification et permettre ainsi à l'élève de mettre en œuvre une stratégie de base pour être sûr de sa réponse sans ouvrir la boîte. Il s'agit, à partir du nombre supposé de cubes restant dans la boîte que l'élève ajoute en comptant un à un les cubes sortis comme si on les remettait dans la boîte pour voir si le nombre de cubes obtenus correspond ou non au nombre qu'il y avait au départ dans la boîte.

Le pari : L'enseignant va demander à l'élève de parier sur sa réponse, mais avant de parier de s'assurer sans ouvrir la boîte, que la réponse est bonne ou mauvaise, n'est ou n'est pas la solution, par surcomptage. Il demande en fait une anticipation de la preuve par addition et force ainsi à remplacer la vérité contingente (compter les cubes dans la boîte) par une vérité nécessaire (prouver intellectuellement qu'une réponse est ou non solution sans ouvrir la boîte). Certains élèves vont s'approprier la possibilité qu'ils ont de retarder la vérification dans la boîte en vérifiant uniquement par le calcul. Ils prennent plaisir à la réussite, l'incertitude les stimule, ils ont envie de rejouer même quand ils perdent. D'autres n'ont pas compris que le jeu a changé et qu'on peut être sûr de sa réponse sans vérifier dans la boîte. Certains à l'inverse ne sont pas satisfaits car ils sont déjà sûrs, sans produire de preuve, en donnant comme raison leur confiance dans l'exactitude de leur procédé de calcul. D'où :

Objectif : Tous les élèves doivent comprendre qu'ils peuvent donner une réponse qui n'est qu'une proposition, qui pourra être vérifiée par surcomptage sans ouvrir la boîte, et qu'ensuite seulement ils peuvent soit parier, soit ne pas parier, changer de réponse, refaire le surcomptage...etc.....

Matériel : La boîte et son couvercle, des cubes en barres de 10 unités, l'ardoise

Problème écrit au tableau

Dans la boîte, j'ai 45 briques, j'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?

Lecture du problème. Enseignant: Voici la boîte. Que dois-je faire ? Il joue le début du problème en exécutant les consignes données par les élèves (mettre 45, sortir 18). Puis il écrit au tableau :

nombre de briques dans la boîte	nombre de briques sortis	réponses différentes dans la classe	solution
45	18		

Enseignant : Prenez vos ardoises, écrivez votre réponse

Action pendant quelques minutes

Enseignant : Qui serait prêt à parier avec moi sur sa réponse. Que ceux qui veulent parier avec moi montrent leur réponse.

L'enseignant en profite pour repérer un élève qui a une réponse fautive (différente de 27) et il l'écrit dans la colonne des réponses au tableau. Il lui demande s'il veut parier. En général l'élève dit oui. Sinon l'enseignant récupère son hésitation.

Enseignant : Attends, avant de parier (ou tu as raison d'hésiter avant de parier) je voudrais que tu vérifies ta réponse mais sans ouvrir la boîte. Quelqu'un a une idée ?

Si l'idée ne vient pas le maître explique : « Tu dis 31 dans la boîte. Bon ! Supposons cela. Je fais semblant de remettre dans la boîte les 18 cubes que j'ai sortis et je compte combien je vais en avoir dans la boîte dans ce cas ».

L'enseignant remet un à un les 18 cubes sortis sur le couvercle en comptant : 31, 32, 33...49

Enseignant : Alors tu paries sur 31 ? Si l'élève insiste demander son avis au reste de la classe : Noon ! il ne faut pas parier sur 31. Vous avez le droit de changer votre réponse si vous le voulez. Si cet élève continue à insister on vérifie aussitôt en ouvrant la boîte.

Sinon le jeu continue avec une autre réponse fautive, puis l'enseignant choisit une réponse juste, teste ce 27 comme pour les autres réponses, ça a l'air de marcher car on arrive bien à 45. On ouvre la boîte pour vérifier. C'est gagné. Le maître écrit alors 27 dans la colonne solution

Annexe 2 : Description du second moment crucial de l'ingénierie (Berté, 1996, p. 35, Leçon 11)

Objectif : - Permettre à tous les enfants de trouver un premier nombre, de le mettre à l'épreuve par l'addition, puis de réajuster le cas échéant c'est à dire d'arriver en un ou plusieurs essais à trouver la bonne réponse.

- Apprendre à réduire le nombre d'essais. Les élèves qui ont des procédés personnels continuent à les utiliser, mais ils sont conduits au moment des discussions collectives à améliorer la méthode des essais pour ceux qui l'emploient. Le maître va utiliser au tableau une disposition des vérifications par addition qui doit aider les élèves à réduire le nombre d'essais

Matériel : Ardoises individuelles pour la phase 1- La boîte et les cubes

Problème écrit au tableau

J'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?

Faire remarquer aux élèves que le nombre de cubes est grand. Si on veut dessiner ce sera long. Il va falloir bien choisir le premier nombre. On va apprendre à le faire

1/ Choix du premier nombre : Tout le monde lit le texte. Chacun propose une première réponse sur son ardoise puis la montre. C'est votre premier choix, ne le testez pas, on va le faire après.

Le maître collecte 4 à 5 réponses différentes, n'hésite pas à ajouter un élève imaginaire avec une réponse qui peut être intéressante. Les réponses sont discutées collectivement

a/ On élimine les nombres plus grands que le tout (> 94)

b/ On remarque les qualités de certaines réponses proposées :

- les dizaines n'ont pas été choisies au hasard (7 dizaines donc 9 - 2) de sorte que la réponse ne doit pas être loin de la solution. S'il y a moins de 6 dizaines c'est sûr que le nombre sera trop petit
- ou bien les unités n'ont pas été choisies au hasard (5) pour que en faisant le test on trouve 4 car 9 + 5 fait 14

Ceux qui se rendent compte que leur première proposition n'est pas très bonne effacent leur ardoise et en choisissent une autre en la montrant au maître pour voir s'ils améliorent.

S'il y a moins de 6 dizaines le nombre risque bien d'être trop petit. Les réponses 65 ou 75 supposent que l'élève a tenu compte des contraintes sur les deux choix. Quelle est la bonne ?

2/ Travail sur la somme : Le maître propose de préparer ainsi le travail (tableau) :

Preuve à obtenir	premier essai	deuxième essai	troisième essai
29	29	29	29
+.....	+.....	+.....	+.....
94			

Puis on fait les essais

Preuve à obtenir	premier essai	deuxième essai	troisième essai
29	29	29	29
+.....	+38	+35	+.....
94	7	64	94

Au premier essai je trouve 7 pour les unités. Inutile de continuer le 8 ne va pas, il faut un 5. J'améliore tout de suite en ajustant les unités. C'est trop petit. De combien ? Le prochain essai peut être le bon. Le but est d'arriver au plus en deux coups. A la fin de la leçon on va s'entraîner.

3/ Vérification dans la boîte : Mimer le problème. Bien mettre en évidence les barres de 10 et les unités qui sont dans la boîte. Pour enlever 9 unités comment faire. Il faut que les élèves imaginent ce qui se passe (déjà fait dans les ateliers où ils ont manipulé eux-mêmes). Certains doivent bien arriver à imaginer qu'il faut casser une barre de 10. Il y aura des problèmes plus faciles que d'autres dans lesquels on n'aura pas besoin de casser une barre pour retirer les unités

4/ Entraînement pour le premier choix : Reprendre le même problème avec 94 et 17. Le but est d'arriver à la solution avec deux coups. Les élèves écrivent sur l'ardoise le premier nombre. L'enseignant relève les propositions différentes. Puis test et deuxième proposition. L'enseignant note la deuxième proposition. Test. Qui a n'a pas réussi. Pourquoi ?