



HAL
open science

**George D. Dantzig, 1960, George D. Dantzig, 1960, On
the Shortest Route Through a Network. Version
bilingue et commentée**

George D. Dantzig, Laurent Beauguitte

► **To cite this version:**

George D. Dantzig, Laurent Beauguitte. George D. Dantzig, 1960, George D. Dantzig, 1960, On the Shortest Route Through a Network. Version bilingue et commentée. 2023. hal-03996661

HAL Id: hal-03996661

<https://hal.science/hal-03996661v1>


Submitted on 20 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

George D. Dantzig, 1960, On the Shortest Route
Through a Network,
Management Science, vol. 6, n°2, pp. 187-190.
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.

The logo consists of three colored dots arranged horizontally: a blue dot on the left, a red dot in the middle, and a yellow dot on the right. A curved arrow points from the red dot to the blue dot, and another curved arrow points from the red dot to the yellow dot.

Février 2023

Version traduite et commentée par Laurent Beauguitte, CNRS, UMR Géographie-cités

Présentation

Cet article du mathématicien George D. Dantzig (1914-2005) s'inscrit dans un courant de recherche très actif dans les années 1950-1960 et concerne l'optimisation des flux. Comme nombre d'articles de la même période, il est issu de la *RAND Corporation* - après une thèse de mathématiques soutenue en 1946, Dantzig y travaille de 1952 à 1960 avant de rejoindre Berkeley (cf sa [page wikipedia](#)). Son manuel paru en 1963, *Linear Programming and Extensions* est [accessible en ligne](#) sur le site de la *RAND Corporation*.

Si l'auteur cite ses collègues de la *RAND Corporation* et ses propres articles sur le sujet, le nombre de personnes ayant travaillé sur la détermination des plus courts chemins dans un réseau est beaucoup plus vaste (Schrijver, 2012).

Alexander Schrijver, 2012, On the history of the shortest path problem, *Documenta Mathematica*, 17() : 155-167. [\[En ligne\]](#).

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1960. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

On the Shortest Route Through a Network¹

GEORGE B. DANTZIG
The RAND Corporation

The chief feature of the method is that it fans out from the origin working out the shortest path to one new node from the origin and never having to backtrack. No more than $n(n - 1)/2$ comparisons are needed to find the shortest route from a given origin to all other nodes and possibly less between two fixed nodes.

Except for details and bias of various authors towards a particular brand of proof, *this problem has been solved the same way by many authors*. This paper *refines* these proposals to give what is believed to be the shortest procedure for finding the shortest route when it is little effort to arrange distances in increasing order by nodes or to skip consideration of arcs into nodes whose shortest route to the origin has been determined earlier in the computation.

In practice the number of comparisons is much less than indicated bounds because *all* arcs leading to nodes previously evaluated are deleted from further consideration. A further efficiency can be achieved in the event of ties by including least distances from origin to many nodes simultaneously during the fanning out process. However, these are shown as separate steps to illustrate the underlying principle.

The purpose of this paper is to give what is believed to be the shortest procedure for obtaining the shortest route from a given origin to all other nodes in the network or to a particular destination point. The method can be interpreted as a slight refinement of those reported by Bellman, Moore, Ford, and the author in [1], [2], [3], [4], and those proposed by Gale and Fulkerson in informal conversations. It is similar to Moore's method of fanning out from the origin. However, its special feature - which is believed to be new is that the fanning out is done one point at a time and the distance assigned is final.

It is assumed (a) that one can write down without effort for each node the arcs leading to other nodes in increasing order of length and (b) that it is no effort to ignore an arc of the list if it leads to a node that has been reached earlier. It will be shown that no more than $n(n - 1)/2$ comparisons are needed in an n node network to determine the shortest routes from a given origin to all other nodes and less than half this number for a shortest route to particular node. The basic idea is as follows :

[188]

1. Received November 1959.

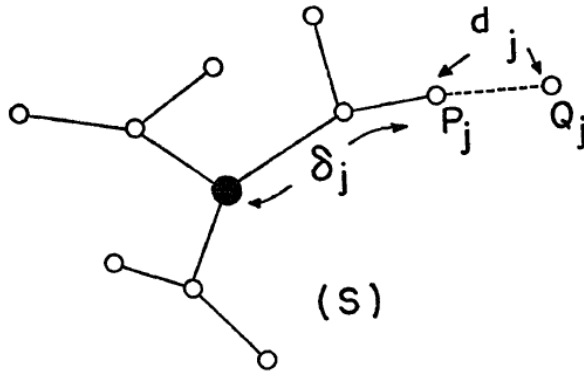


FIG. 1

Suppose at some stage k in the computing process the shortest distances to k of the nodes from some origin are known as well as the paths. Call the set of these points S .

- (1) Let P_j be one of the nodes in S ,
- (2) Let δ_j be its least distance to the origin \bullet ,
- (3) let Q_j be the nearest node to P_j not in S ,
- (4) let d_j be the distance from P_j to Q_j . Choose as the $k + 1$ point, Q_s , where s satisfies

$$\delta_s + d_s = \text{Min}(\delta_j + d_j) \quad j = 1, 2, \dots, k$$

The minimum distance of Q_s to the origin is $\delta_s + d_s$ and the best path to the origin is via P_s . The reason is obvious for if the best path from Q_s were via some other j in S or via several other points not in S and then via some other j in S , then the distance is at least $\delta_j + d_j \geq \delta_s + d_s$. In case of ties for minimum, several such nodes Q_s could be determined at the same time and the process made more efficient.

It will be noted that the minimum requires only k comparisons for a decision as to the $k + 1$ st point. Hence in an n node network no more than

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

comparisons are needed.

In practice the number of comparisons can be considerably less than this bound because after several stages one or more of the nodes in S have only arcs leading to points in S [in the 8 node example below only a total of 16 comparisons was needed instead of $7 \times 8/2 = 28$ comparisons].

If the problem is to determine only the shortest path from a given origin to a given terminal, the number of comparisons may often be reduced by

fanning out both from the origin and the terminal simultaneously - adding alternatively one point at a time to sets S about the origin and S' about the terminal.

Once the shortest distance from a node to origin is evaluated the node is conceptually connected directly to the origin by a hypothetical arc with the specified shortest distance and disconnected from all arcs leading to other nodes evaluated earlier. Nodes whose shortest distance to the terminal which have [189] been determined are similarly treated. Once the origin is reached by either fanning system the process terminates.

Example

Distances on links of the network are as indicated.

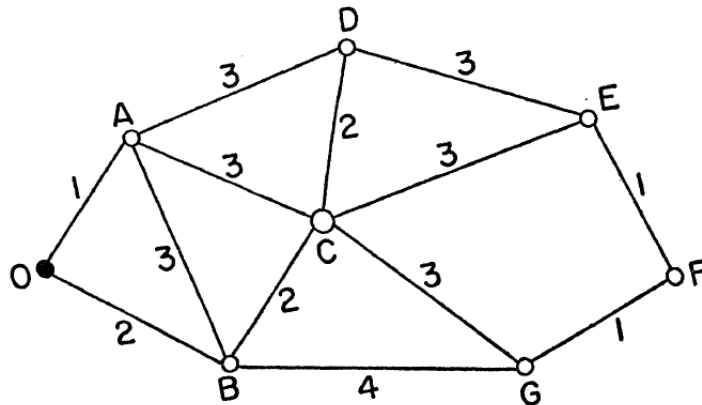


FIG. 2

Arrange in ascending order the nodes by distances to a given node

(O)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
OA-1	AB-3	BC-2	CB-2	DC-2	EF-1	FE-1	GF-1
OB-2	AC-3	BA-3	CD-2	DA-3	EC-3	FG-1	GC-3
	AD-3	BG-4	CA-3	DE-3	ED-3		GB-4
			CG-3				
			CE-3				

Step 1. Choose path OA ; place its distance 1 above A column, delete all arcs into A.

Step 2. Compare $OB-2$ and $AB-(3 + 1)$ and choose path OB : place its distance 2 above B column, delete all arcs into B.

Step 3. Compare $AC-(3 + 1)$, $AD-(3 + 1)$, $BC-(2 + 2)$, and because of ties choose paths AC (or BC) and AD ; place distance 4 above C column, delete all arcs into C and D.

Step 4. Compare $BG-(4 + 2)$, $CG-(3 + 4)$, $DE-(3 + 4)$ and *choose path BG*, place its distance 6 above G column, delete all arcs *into G*.

Step 5. Compare $CE-(3 + 4)$, $DE-(3 + 4)$, $GF-(1 + 6)$ and *choose path CE or (DE), GF*; place distance 7 above E and F columns, delete all arcs *into E and F*.

Step 6. Compare $EF-(1 + 7)$, $GF-(1 + 6)$ and *choose path GF*, place its distance 7 above F column, delete all arcs *into F*.

Because of ties many of the steps were carried on simultaneously.

The shortest paths from the origin to other nodes are along paths OA, OB, AC, AD, BG, CE, GF with alternative BC for AC and DE for CE.

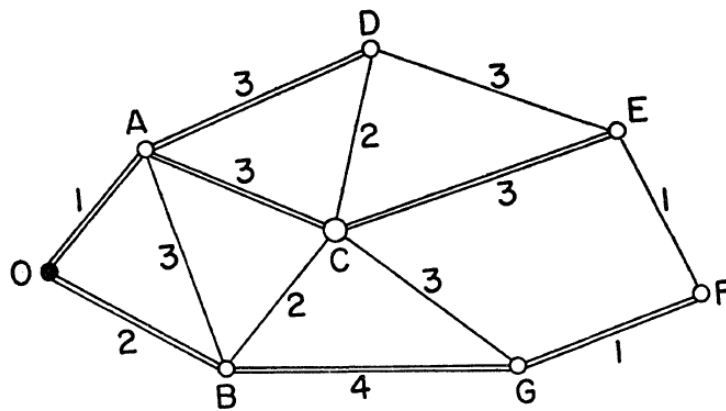


FIG. 3

References

1. Bellman, Richard, "On a Routing Problem," *Q. Appl. Math.*, Vol. XVI, No. 1, April 1958, pp. 87-90.
2. Dantzig, George B., "Discrete Variable Extreme Problems," *JORSA*, Vol. 5, No. 2, April 1957, pp. 266-277.
3. Moore, E. F., "The Shortest Path through a Maze," unpublished mimeographed report, 16 pages.
4. Ford, L. R. Jr., "Network Flow Theory," RAND Paper P-923, 1956.

Sur le plus court chemin dans un réseau¹

GEORGE B. DANTZIG
The RAND Corporation

La caractéristique principale de la méthode est qu'elle se propage à partir de l'origine en construisant le chemin le plus court vers un nouveau nœud sans jamais faire marche arrière. Un maximum de $n(n-1)/2$ comparaisons est nécessaire pour trouver le chemin² le plus court d'un nœud donné à tous les autres nœuds ; ce nombre peut être inférieur pour trouver le plus court chemin entre deux nœuds donnés.

Si l'on met de côté les détails et les biais personnels concernant l'administration de la preuve, *ce problème a été résolu de la même façon par de nombreux auteurs*. Ce document *raffine* ces propositions et donne ce qui semble la procédure la plus rapide pour trouver le chemin le plus court dans la mesure où il est peu coûteux de classer des distances par nœud dans l'ordre croissant ou de négliger des arcs³ quand le chemin le plus court a été déterminé plus tôt dans le calcul.

En pratique, le nombre de comparaisons est bien inférieur aux limites indiquées parce que *tous* les arcs conduisant à des nœuds précédemment évalués sont supprimés au fur et à mesure. La sélection des liens peut être rendue plus efficace en incluant simultanément les distances minimales entre l'origine et de nombreux noeuds. Cependant, ces étapes sont présentées séparément pour illustrer le principe sous-jacent.

Le but de cet article est de donner ce qui est considéré comme la procédure la plus rapide pour obtenir le chemin le plus court d'une origine donnée à tous les autres nœuds du réseau ou à une destination précise. La méthode peut être interprétée comme un léger raffinement de celles proposés par Bellman, Moore, Ford ou l'auteur dans [1], [2], [3], [4] et celles proposés par Gale et Fulkerson⁴ lors de conversations informelles. Elle est similaire à la méthode de Moore et se déploie à partir de l'origine. Cependant, cette méthode est spécifique et nouvelle : ce déploiement se fait sommet après sommet et la distance attribuée est définitive.

On suppose (a) qu'on peut sans effort lister pour chaque nœud les arcs menant à d'autres noeuds dans l'ordre de longueur croissante et (b) qu'il est

1. Reçu en novembre 1959.

2. L'auteur utilise les termes *path* et *route* de façon indifférenciée ; les deux termes sont traduits ici par *chemin*.

3. La distinction classique en théorie des graphes anglophone entre *arc* (lien orienté) et *edge* (lien non orienté) n'est pas reprise par l'auteur, il utilise les termes *arcs* ou *ties* pour un réseau non orienté.

4. Tous les auteurs cités sont mathématiciens, spécialisés notamment en algèbre linéaire, et tous travaillent à l'époque pour la *RAND Corporation*.

aisé d'enlever un arc de la liste s'il conduit à un nœud qui a déjà été atteint. Il sera montré qu'un maximum de $n(n - 1)/2$ comparaisons est nécessaire dans un réseau de n nœuds pour déterminer les chemins les plus courts d'une origine donnée à tous les autres nœuds et moins de la moitié de ce nombre pour le chemin le plus court entre deux nœuds donnés. L'idée de base est la suivante :

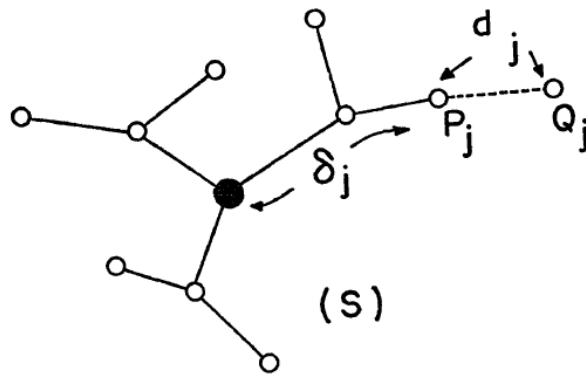


FIG. 1

Supposons qu'à l'étape k dans le processus de calcul, les distances et les chemins les plus courts de k nœuds à partir d'une origine donnée sont connus. L'ensemble de ces points est noté S .

- (1) Soit P_j l'un des nœuds de S ,
- (2) soit δ_j la distance la plus faible par rapport à l'origine \bullet ,
- (3) soit Q_j le nœud le plus proche de P_j et n'appartenant pas à S ,
- (4) soit d_j la distance entre P_j et Q_j . Choisissez $k + 1$ point, Q_s , où s satisfait

$$\delta_s + d_s = \text{Min}(\delta_j + d_j) \quad j = 1, 2, \dots, k$$

La distance minimale de Q_s à l'origine est $\delta_s + d_s$ et le plus court chemin vers l'origine passe par P_s . La raison est évidente : si le plus court chemin de Q_s passe par un autre nœud j de S ou par plusieurs autres nœuds non inclus dans S , puis par un autre nœud j de S , alors la distance est au moins égale à $\delta_j + d_j \geq \delta_s + d_s$. S'il existe plusieurs plus courts chemins, plusieurs des nœuds Q_s peuvent être déterminés simultanément, ce qui rend le processus plus efficace.

On notera que déterminer la distance la plus courte ne nécessite que k comparaisons pour une décision concernant le nœud $k + 1$. Ainsi dans un réseau de n nœuds, le nombre maximal de comparaisons nécessaires est égal à

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

En pratique, le nombre de comparaisons peut être considérablement inférieur car, après plusieurs étapes, un ou plusieurs nœuds de S n'ont que des arcs menant à des nœuds de S [dans l'exemple des 8 nœuds ci-dessous, seules 16 comparaisons sont nécessaires au lieu des $7 \times 8/2 = 28$ comparaisons possibles].

Si le problème est de déterminer le chemin le plus court d'une origine donnée à une destination précise, le nombre de comparaisons peut souvent être réduit en partant simultanément de l'origine et de la destination en ajoutant alternativement à chaque étape un point dans S (origine) et dans S' (destination).

Une fois la distance la plus courte d'un nœud à l'origine évaluée, le nœud est conceptuellement relié directement à l'origine par un arc hypothétique avec la distance la plus courte spécifiée et déconnecté de tous les arcs menant à d'autres nœuds évalués précédemment. Les nœuds dont la distance la plus courte par rapport à la destination a été calculée sont traités de la même façon. Une fois que l'origine est atteinte par l'une ou l'autre suite de liens, le processus se termine.

Exemple

Les distances sont indiquées sur les liens du réseau.

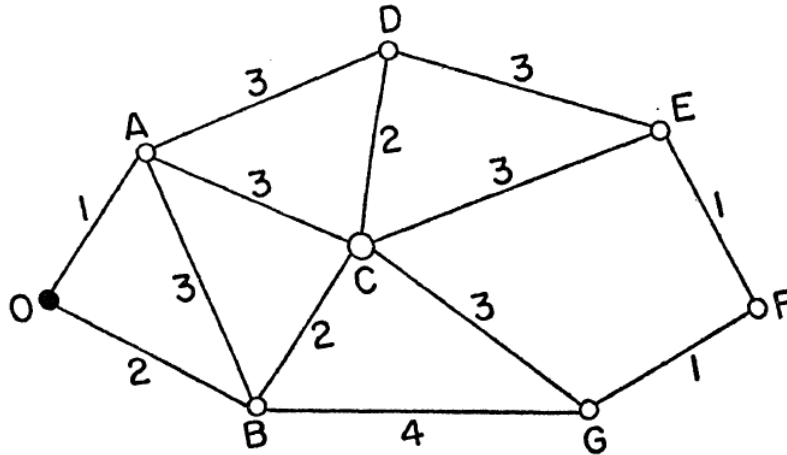


FIG. 2

Classer les nœuds dans l'ordre croissant en fonction des distances par rapport à un nœud donné.

(O)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
OA-1	AB-3	BC-2	CB-2	DC-2	EF-1	FE-1	GF-1
OB-2	AC-3	BA-3	CD-2	DA-3	EC-3	FG-1	GC-3
	AD-3	BG-4	CA-3	DE-3	ED-3		GB-4
			CG-3				
			CE-3				

Étape 1. Choisir le chemin OA ; placer sa longueur (1) au-dessus de la colonne A, supprimer tous les arcs dans A.

Étape 2. Comparer OB (2) et AB (3 + 1) et choisir le chemin OB : placer sa longueur (2) au-dessus de la colonne B, supprimer tous les arcs dans B.

Étape 3. Comparer AC (3+1), AD (3+1), BC (2+2) et, en raison des égalités, choisir les chemins AC (ou BC) et AD ; placer la longueur (4) au-dessus de la colonne C, supprimer tous les arcs dans C et D.

Étape 4. Comparer BG (4+2), CG (3+4), DE (3+4) et choisir le chemin BG , placer sa longueur (6) au-dessus de la colonne G, supprimer tous les arcs dans G.

Étape 6. Comparer CE (3+4), DE (3+4), GF (1+6) et choisir le chemin CE ou (DE), GF ; placer sa longueur (7) au-dessus des colonnes E et F, supprimer tous les arcs dans E et F.

Étape 6. Comparer EF (1+7), GF (1+6) et choisir le chemin GF , placer sa longueur (7) au-dessus de la colonne F, supprimer tous les arcs dans F.

En raison de la configuration des liens, de nombreuses étapes ont été effectuées simultanément.

Les chemins les plus courts de l'origine aux autres nœuds sont les chemins OA , OB , AC , AD , BG , CE , GF avec l'alternative BC pour AC et DE pour CE .

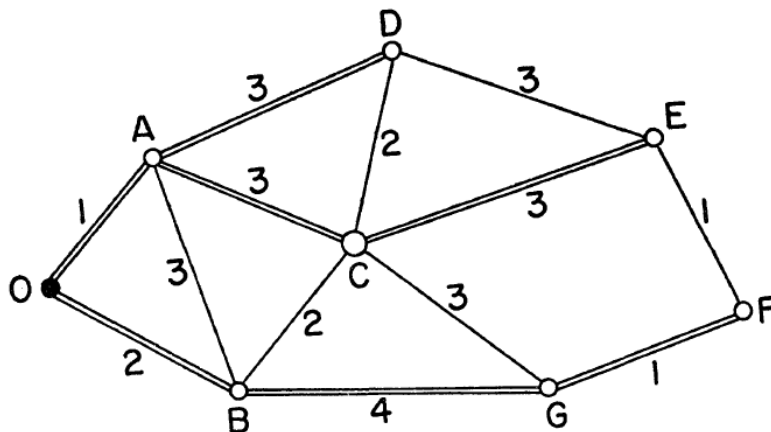


FIG. 3

Références

1. Bellman, Richard, On a Routing Problem, *Q. Appl. Math.*, Vol. XVI, No. 1, April 1958, pp. 87-90⁵.
2. Dantzig, George B., Discrete Variable Extreme Problems, *JORSA*, Vol. 5, No. 2, April 1957, pp. 266-277.
3. Moore, E. F., The Shortest Path through a Maze, unpublished mimeographed report, 16 pages⁶.
4. Ford, L. R. Jr., Network Flow Theory, RAND Paper P-923, 1956⁷.

5. Texte [accessible en ligne](#)

6. Ce rapport a été édité en 1959 par Bell, je n'en ai pas encore retrouvé la trace...

7. Seul ce papier est cité mais Ford, Fulkerson et Dantzig travaillant sur des sujets proches à la RAND Corporation et discutant régulièrement ensemble, il est évident que l'auteur connaît leurs autres articles sur le sujet.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Disponibles en ligne

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».
- L. Beauguitte et J. Fen-Chong, 2021, « [Alex Bavelas, 1950, Communication Patterns in Task-Oriented Groups](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Forrest R. Pitts, 1965, A Graph Theoric Approach to Historical Geography](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [M. L. Northway, 1940, A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2021, « [John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [Edward L. Ullman, 1949, Mapping the world's ocean trade: A research proposal](#) ».
- L. et P. Beauguitte, 2022, « [F. L. Hitchcock, 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities](#) ».
- F. Bahoken, 2022, « [W. R. Tobler, 1969, Review of Sémiologie graphique: Les Diagrammes – Les réseaux – Les Cartes](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [P. R. Gould, 1967, On the Geographical Interpretation of Eigenvalues](#) ».
- L. Beauguitte, F. Bahoken et J. Fen-Chong, 2022, « [E. Forsyth et L. Katz, 1946, A Matrix Approach to the Analysis of Sociometric Data](#) ».
- L. Beauguitte et F. Bahoken, 2023, « [J.L. Moreno et H.H. Jennings, 1938, Statistics of social configurations](#) ».

— L. Beauguitte, 2023, « G. D. Dantzig, 1960, On the Shortest Route Through a Network ».