



HAL
open science

Le paradoxe de Saint Petersburg ou la difficulté de concilier le calcul mathématique et le sens commun

Etienne Fieux

► **To cite this version:**

Etienne Fieux. Le paradoxe de Saint Petersburg ou la difficulté de concilier le calcul mathématique et le sens commun. 2022. hal-03991454

HAL Id: hal-03991454

<https://hal.science/hal-03991454v1>

Preprint submitted on 15 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Le paradoxe de Saint Petersburg

ou la difficulté de concilier le calcul mathématique et le sens commun

Etienne Fieux¹

*preprint*²

1	Naissance du problème de Saint-Petersbourg	1
2	Une panoplie de « solutions »	5
2.1	Trois grands registres d'argumentation	5
2.2	Un mot sur la solution proposée par Daniel Bernoulli	6
2.3	Le cas particulier de D'Alembert	8
3	Le tournant du XIXe siècle	10
3.1	Des attentes irréconciliables	10
3.2	La fin des mathématiques mixtes	10
3.3	Bertrand éclaircit la situation	11
4	Développements en mathématique et en économie	12
4.1	Une généralisation de la loi des grands nombres	12
4.2	A qui est utile la théorie de l'utilité ?	13
5	En guise de conclusion	15

Le mot de Laplace est resté célèbre : « *On voit par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul.* »³. Pourtant, un siècle plus tôt le problème de Saint Petersburg faisait apparaître que le calcul pouvait rentrer en contradiction avec le « sens commun ». Cela veut-il dire qu'un siècle plus tard, il était enfin montré que l'opposition n'était que superficielle ? Et qu'elle n'avait pas résisté aux développements et avancées de la théorie mathématique ? Le seul fait que ce problème de Saint-Petersbourg continue jusqu'à nos jours à faire l'objet de discussions et articles semble indiquer que la réponse à ces questions est négative. Le problème de Saint-Petersbourg questionne le rôle ou l'utilité des mathématiques pour la décision en situation d'incertitude ou, plus généralement, dans la conduite des affaires humaines. Il montre la difficulté persistante à réconcilier le calcul et le bon sens et pointe le risque que l'affirmation de Laplace ne traduise pas une réconciliation mais dise plutôt un renversement, celui du passage du *raisonnable* au *rationnel*.

1 Naissance du problème de Saint-Petersbourg

L'histoire du problème de Saint Pétersbourg commence dans la correspondance entre Nicolas Bernoulli et Pierre Rémond de Montmort que ce dernier a publiée dans la seconde édition de son ouvrage « *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* ». Dans une lettre datée du 9 septembre 1713, Nicolas Bernoulli soumet à Montmort cinq problèmes dont voici les deux derniers ([24, p. 402]) :

1. Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR CNRS 5219, fieux@math.univ-toulouse.fr
2. Article soumis dans le cadre de la publication des Actes du XXIVe colloque de la commission inter-IREM Épistémologie et histoire : « Les mathématiques et la science », à Toulouse, du 20 au 21 mai 2022.
3. Essai philosophique sur les probabilités, 1814.

forts. *Quatrième Problème.* *A* promet de donner un écu à *B*, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points, deux écus s'il amène le six au second, trois écus s'il amène ce point au troisième coup, quatre écus s'il l'amène au quatrième, & ainsi de suite; on demande quelle est l'espérance de *B*. *Cinquième Problème.* On demande la même chose si *A* promet à *B* de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme auparavant. Quoique ces Problèmes pour la plupart ne soient pas difficiles, vous y trouverez pourtant quelque chose de fort curieux: je vous ai déjà proposé le premier dans ma dernière Lettre. Vous me

Le 4e problème est le suivant : *A* et *B* jouent à lancer un dé jusqu'à ce qu'un 6 apparaisse, auquel cas le jeu s'arrête. Si le 6 est apparu au k -ème lancer, *A* donne alors k ducats à *B*. La question est de connaître $E(B)$, l'espérance de gain du joueur *B*. Le calcul donne aussitôt

$$E(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 6$$

Même s'il ne fait pas de doute que Nicolas Bernoulli sait calculer cette somme infinie, on notera cependant l'habile résolution qu'il propose. Au premier jet de dé, l'espérance de *B* est $\frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times E_1(B)$ où $E_1(B)$ est l'espérance de *B* si le premier jet ne donne pas un 6, c'est-à-dire, avec le même jeu qu'au départ à la seule différence que, pour toutes les éventualités, le gain est augmenté de 1. Autrement dit, $E_1(B) = E(B) + 1$ et $E(B) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times (E(B) + 1)$ donne $6E(B) = 1 + 5(E(B) + 1)$, soit encore $E(B) = 6$.

Mais revenons au 5e problème, celui qui va nous préoccuper ici ! Le même jeu y est proposé (lancer d'un dé et arrêt au premier 6) mais en changeant la progression de gains 1, 2, 3, 4, 5, ... , k , ... d'abord par 1, 2, 4, 8, 16, ... , 2^{k-1} , ... , puis par 1, 3, 9, 27, 81, ... , 3^{k-1} , ... , puis encore par 1, 4, 9, 16, 25, ... , k^2 , ... et enfin par 1, 8, 27, 64, 125, ... , k^3 , La question reste chaque fois le calcul de l'espérance de gain de *B* et, dans le premier cas, il n'est pas besoin d'une grande maîtrise des mathématiques pour comprendre que l'espérance de *B* est infinie⁴ :

$$E(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} > \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

A la très évasive réponse de Montmort ([24, Lettre du 15 novembre 1713, p. 413]) : « (...) Les deux derniers de vos cinq Problèmes n'ont aucune difficulté, il ne s'agit que de trouver les sommes des suites dont les numérateurs étant en progression des quarrés, cubes, etc... les dénominateurs soient en progression géométrique : feu M. votre Oncle a donné la methode de trouver la somme de ces suites. », Nicolas Bernoulli répondra :

Il est vrai ce que vous dites que les deux derniers de mes Problèmes n'ont aucune difficulté, cependant vous auriez bien fait d'en chercher la solution, car elle Vous auroit fourni l'occasion de faire une remarque très curieuse. ([5, Lettre du 20 février 1714])

Le cœur du futur « problème de Saint-Petersbourg » ou « paradoxe de Saint-Petersbourg » est là, Bernoulli ne pouvant pas se contenter de ce que le calcul lui dit. En effet, après avoir exposé que l'espérance de gain de *B* est infinie dans le cas de la progression « 1, 2, 4, 8, 16, etc. », il affirme :

Mais il suivroit de là que B devoit donner à A une somme infinie et même plus qu'infinie (s'il est permis de parler ainsi) pour qu'il luy puisse faire l'avantage de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, etc. Or il est certain que B en donnant une telle

4. Il va de soi que, *a fortiori*, $E(B)$ est infinie avec la progression 1, 3, 9, 27, 81, ... , 3^{k-1} , ... ; par contre, on trouve $E(B) = 66$ et $E(B) = 1086$ pour les 3ème et 4ème progressions du 5e problème.

somme perdrait toujours, puisqu'il est moralement impossible que B n'amène pas le six après un nombre de coups fini.

Il n'est pas possible que le jeu ne se termine pas au bout d'un certain nombre de jets, nous dit Nicolas Bernoulli, et le gain de B sera donc toujours fini et par conséquent toujours plus petit que la somme infinie que le calcul lui attribue. Par ailleurs, pour que le jeu soit équitable au sens usuel, il faudrait que la mise de Pierre vaille son espérance de gain ; or il n'est pas possible de miser une infinité d'argent ! Il y a bien là « *une remarque curieuse* » et surtout, pour Nicolas Bernoulli, une remise en cause du calcul usuel de l'espérance (c'est nous qui soulignons) :

De tout ceci je conclus que la juste valeur d'une certaine espérance n'est pas toujours le milieu qu'on trouve en divisant par la somme de tous les cas possibles la somme des produits de chaque espérance par le nombre de cas qui la donnent : ce qui est contre notre règle fondamentale.

Cette « règle fondamentale » est bien entendu le calcul « usuel » de l'espérance comme la somme $\sum_i p_i g_i$ des gains pondérés par leurs probabilités qui est au fondement du calcul des probabilités depuis la résolution par Pascal et Fermat du problème des partis. Nicolas Bernoulli avancera aussitôt une première explication de la nécessité de changer la règle usuelle :

La raison de ceci est que les cas qui ont une très petite probabilité doivent être négligés et censés pour nuls, quoiqu'ils puissent apporter une très grande espérance.

Cette justification (sur laquelle nous reviendrons) ne satisfera cependant pas son souci de comprendre comment concilier l'objectivité du calcul de l'espérance avec les évaluations subjectives qui relèvent du « sens commun ». Si Montmort acquiesce aux calculs de Nicolas Bernoulli, il n'accepte pas pour autant de renoncer au calcul usuel de l'espérance :

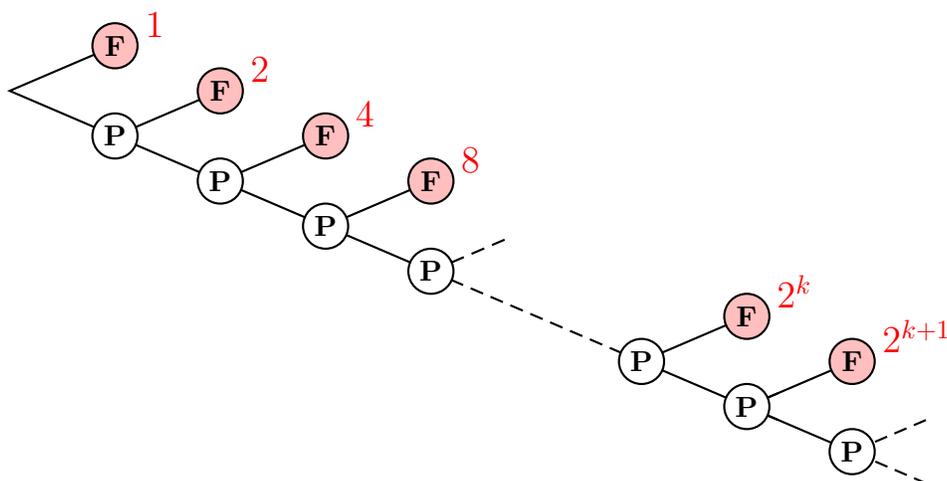
Je ne puis me résoudre à abandonner notre lemme, qui doit être généralement vrai. Vous avez raison de dire que tout cela mérite d'être approfondi, et il est sur sans compliment que personne n'en est plus capable que vous. [5, Lettre du 24 mars 1714]

La suite de la correspondance montre que Montmort ne se satisfait pas non plus de la situation mais nous ne trouverons aucune trace des développements auxquels il s'était engagé auprès de Nicolas Bernoulli⁵. Il faudra attendre 1728 et une lettre de Gabriel Cramer pour avoir une nouvelle et importante contribution. Dans cette lettre, Cramer simplifie la présentation pour lui donner la forme qui passera à la postérité :

(...) Je ne sais si je me trompe, mais je crois tenir la solution du Cas Singulier que vous avés proposé à Mr. de Montmort dans votre Lettre du 9^e 7^{bre} 1713, Prob. 5, Pag. 402. Pour rendre le cas plus simple je supposerai que A jette en l'air une pièce de Monoye, B s'engage à lui donner l'écu, si le côté de la Croix tombe le premier coup 2, si ce n'est que le second, 4 si c'est le 3^e coup, 8 si c'est le 4^e coup, etc. [5, Lettre du 21 mai 1728].

Le « jeu de Saint-Petersbourg » a ainsi trouvé sa forme définitive. Suivant une habitude bien ancrée, on appellera Paul et Pierre les deux joueurs ; ils jouent à lancer une pièce et le jeu s'arrête dès qu'elle tombe sur Face (F). Si cela se produit au k -ème lancer, Paul donne 2^{k-1} ducats à Pierre. Cet arbre dont chaque branche est de poids $1/2$ schématise ce jeu :

5. Montmort décèdera en 1719, atteint de la variole.



Cramer a ainsi simplifié le problème de manière à rendre encore plus apparente la cause du trouble :

$$E(\text{Pierre}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$

Et il expose le « paradoxe » que pose ce jeu (c'est nous qui soulignons) :

Le Paradoxe consiste en ce que le Calcul donne pour l'Equivalent que A [Pierre] doit donner à B [Paul] une somme infinie, ce qui paroit absurde puisqu'il n'y a personne de bon sens qui voulut donner 20 ecus. On demande alors la Raison de cette différence entre le Calcul Mathématique et l'Estime vulgaire.

Il est difficile de surestimer l'importance de ce problème. Depuis les prémices du calcul des probabilités avec la résolution du problème des partis et comme l'annonce triomphalement Pascal dans son adresse à l'Académie parisienne en 1654, le calcul de l'espérance est censé être le calcul *juste* :

(...) la fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. [26]

L'enjeu est ainsi celui du règlement équitable comme le soulignera également L. Daston :

It is significant that the earliest expositions of mathematical probability, as well as the problems addressed by its practitioners, were all couched in terms of expectation, and of expectation conceived as equity. [13]

Nicolas Bernoulli a donc posé une question de première importance. Dans le sillage des espoirs exprimés par son oncle Jacques Bernoulli dont la quatrième partie de son ouvrage majeur « *Ars Conjectandi* » avait pour objectif l'application du calcul des probabilités « *aux affaires civiles, morales et économiques* » ([4]), Nicolas Bernoulli attend aussi de ce calcul de pouvoir résoudre des questions de nature juridique. Le problème qu'il a posé déborde ainsi largement celui de la compréhension du 5ème problème car, avec beaucoup de conséquence, dans sa lettre du 20 février 1714 à Montmort, il ajoutait :

Par cette raison on peut encore douter si la valeur de l'esperance de B dans le cas du 4^{eme} problème telle que je l'ai trouvée ci dessus, n'est pas trop grande. [5, Lettre du 20 février 1714]

Si l'espérance infinie du jeu de Saint-Petersbourg n'est pas acceptable, il faut remettre en cause le mode de calcul de cette espérance et il n'y a alors plus de raison que ce calcul soit également acceptable dans les autres situations où on l'aurait accepté au simple motif qu'il aurait donné une valeur finie. La question est donc immense et Nicolas Bernoulli ne pourra pas se satisfaire des « solutions » de Cramer qui n'expliquent toujours pas pourquoi le calcul (par l'espérance mathématique) vient en contradiction avec ce que le bon sens impose à chacun :

La réponse que vous donnez comme solution [au 5ème problème] satisfait seulement une partie de celui-ci; il suffit, comme vous le dites, de montrer que A ne doit pas donner un équivalent infini à B; mais cela ne montre pas la vraie raison de la différence qu'il y a entre l'espérance mathématique et l'estimation commune. [5, Lettre du 3 juillet 1728]

Il ne suffit pas de rendre la mise de Pierre finie et compatible avec ce que le bon sens suggère au prix de quelque artifice aussi ingénieux et sensé soit-il, il faut encore que le calcul s'impose de manière générale sans distinction des évaluations individuelles. L'arbitraire qui accompagne les « solutions » de Cramer (tantôt décréter quel montant sera posé comme celui d'une richesse maximale, tantôt décréter que 100 de richesse n'est à compter que comme sa racine carrée 10) ne peut pas satisfaire aux exigences d'impartialité de Nicolas Bernoulli.

2 Une panoplie de « solutions »

2.1 Trois grands registres d'argumentation

Tous les auteurs sont unanimes à affirmer que la mise de Pierre doit être finie (c'est ce qu'impose le « sens commun ») et même ne doit pas dépasser 15 à 20 écus. A la lecture des « réponses » apportées par Nicolas Bernoulli ([5]), Gabriel Cramer ([3, 5]), Buffon ([8]) et Daniel Bernoulli ([3]), on distinguera plusieurs arguments invoqués pour justifier que le calcul de l'espérance mathématique doit être corrigé afin de la rendre finie et d'évaluer sa valeur :

Argument 1.1. **Argument de la trop petite probabilité** : Il existe un seuil $\epsilon > 0$ « proche » de 0 tel que toutes les probabilités $p < \epsilon$ doivent être considérées comme nulles.

Les valeurs de ce seuil ϵ varie suivant les auteurs : 1/32 pour N. Bernoulli, $\epsilon = 10^{-4}$ voire 10^{-3} pour Buffon, $\epsilon = 10^{-5}$ pour D. Bernoulli.

Argument 1.2. **Argument de la trop grande somme** : il existe un seuil s au-delà duquel toute somme est inaccessible (et peut être comptée comme valant s)

Cramer emploiera cet argument avec $s = 2^{24}$ et Buffon avec $s = 2^{40}$ (ou $s = 2^{30}$ ou...).

Argument 1.3. **Argument de la trop longue durée** : jouer prend du temps, une vie entière limite forcément le nombre de lancers de dé possible!

Pour Buffon, 2^{11} est une borne raisonnable au nombre de parties jouables.

Argument 2. **Argument de la loi des grands nombres** : si on joue 2^N parties, la moitié rapportera 1, la moitié des 2^{N-1} restantes rapportera 2, la moitié des 2^{N-2} restantes rapportera 4, etc...

Buffon recourt à cet argument, en l'accompagnant d'un test expérimental pour $N = 11$ (soit 2048 parties).

Argument 3. **Argument de la fonction d'utilité** : les gains (ou pertes) x doivent être considérées pour leur utilité $U(x)$.

Cramer proposera $U(x) = \sqrt{x}$ et Daniel Bernoulli, $U(x) = b \log((a+x)/a)$ (a étant la fortune initiale et b une constante inconnue); Buffon évoquera cette approche mais sans la modéliser.

Les valeurs avancées pour la mise de Pierre selon les différentes argumentations sont les suivantes : 2,5 pour N. Bernoulli, 13 puis 3 (avec $\sqrt{\quad}$) pour Cramer, aux alentours de 5 pour Buffon selon de nombreuses variantes; la réponse de D. Bernoulli prend en compte la fortune initiale (cf. 2.2) mais donne également une valeur qui n'excède par 5 à 6. Si l'on excepte un autre argument avancé par

d’Alembert (cf. 2.3), il nous semble que ces premières « réponses » données aux alentours de 1730⁶, épuisent les différents registres d’argumentation que l’on pourra lire jusqu’à aujourd’hui compris.

Cette dernière affirmation peut paraître bien surprenante au vu de la littérature produite sur le sujet jusqu’à aujourd’hui mais il faut noter que beaucoup de commentaires partiront du principe que le jeu n’est pas jouable (comme si les joueurs attendaient pour jouer qu’une théorie mathématique les y autorise !) pour commenter des versions modifiées du jeu. La modification la plus usuelle (à partir de Fontaine et Condorcet et jusqu’à Samuelson) est de ne commencer le jeu qu’en fixant à l’avance le nombre maximal de lancers qui seront autorisés. La justification de cette nouvelle règle tient le plus généralement à une argumentation de type « Arguments 1 » et revient à dire que le jeu n’est pas « jouable » soit parce Pierre n’a pas suffisamment d’argent pour miser ou Paul n’est pas suffisamment riche pour régler son dû à Pierre, soit encore parce qu’ils n’ont pas assez de temps... Ainsi Samuelson ([29]) n’hésite pas à écrire que le problème est mort-né (« *I have to agree with the legion of early writers on the infinite-St Petersburg game that, (...) the infinite game cannot feasibly be played by both parties (or either party) whatever their utilities and desires. So the paradox aborts even before it dies.* »). Les réflexions autour de ce type de considérations, aussi intéressants soient les développements auxquels elles amènent, ne pourront jamais constituer une réponse au problème posé par Nicolas Bernoulli puisque, partant de la suppression du problème (en se plaçant dans un cadre fini), elles éludent la question qu’il pose.

Les différents arguments tels qu’ils sont ici présentés ne sont bien entendu jamais présentés en tant que tels et résultent d’une lecture *a posteriori* ; en particulier, les dénominations « loi des grands nombres » et « fonctions d’utilité » sont des anachronismes pour les années 1730.

Les argument de type 1 traitent en quelque sorte brutalement la nécessité de concilier le bon sens qui impose une mise finie (et pas très importante) avec le calcul usuel de l’espérance mathématique en tronquant la somme infinie $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i g_i$ par tous les moyens possibles : soit en éliminant les p_i trop petits, soit en bornant les g_i , soit en limitant les variations de i .

Les arguments de type 2 et 3 sont de nature très différentes. Ils ne remettent en cause aucun des points que les arguments de type 1 cherchent à « corriger » mais proposent un autre calcul mathématique avec, sous-jacente, la nécessité d’adopter une autre notion de l’équité que celle mesurée par la nullité de l’espérance mathématique. On reviendra sur leurs développements dans la section 4.

L’argument 1.1 de la trop petite probabilité mériterait un développement particulier parce qu’il renvoie à la notion de *certitude morale* avancée par Jacques Bernoulli dans son ouvrage posthume *Ars conjectandi* (« *Est moralement certain ce dont la probabilité égale presque la certitude intégrale, de telle sorte que le manque soit imperceptible (...). Par exemple, si nous tenons pour moralement certain ce qui possède $\frac{999}{1000}$ de certitude, sera moralement impossible ce qui n’a que $\frac{1}{1000}$ de certitude.* », [4, 4e partie, chap. 1]) qui lui permettra d’introduire la distinction entre la *certitude objective* (ou mathématique) et la *certitude subjective*, ouvrant naturellement à son pendant entre *probabilité objective* et *probabilité subjective*. Cramer parlera d’*espérance morale* (ou de la *valeur morale des richesses*) et les difficultés à évaluer la « certitude morale » et le calcul de l’« espérance morale » qui en découle constituent le cœur de l’Essai d’arithmétique morale de Buffon. Pour rendre compte de cette évaluation « morale », D. Bernoulli emploiera le terme « *emolumentum* » traduit par « utilité » dans [3] et qui sera repris par la théorie économique sous la notion de fonction d’« utilité ».

2.2 Un mot sur la solution proposée par Daniel Bernoulli

Sur l’insistance de son cousin, Daniel Bernoulli développera une solution très détaillée qu’il présentera devant l’académie des sciences de Saint-Petersbourg, en 1730 ou 1731. Le texte ne sera publié qu’en 1738 aux *Commentarii* de cette académie et c’est l’importance attachée à cette « résolution » qui explique qu’on parlera désormais du *jeu* (ou du *problème* ou du *paradoxe*) de

6. Les Essais [8] sont publiés en 1777 mais les commentaires concernant la paradoxe de Saint-Petersbourg datent de 1730.

Saint-Petersbourg L'importance de la contribution [3] de Daniel Bernoulli tient sûrement à la remarquable clarté de son exposé et à sa capacité à transcrire mathématiquement ce qui reste de l'ordre du commentaire ou de l'appréciation qualitative chez les autres auteurs. Après avoir rappelé la « règle 1 », c'est-à-dire le calcul usuel de l'espérance mathématique comme somme des gains pondérée par leurs probabilités, il écrit :

Si, de fait, je ne me trompe pas, il est évident qu'on ne peut imposer le même étalon à tous les hommes pour mesurer le sort, ni, par conséquent, adhérer à la règle du §1. Mais n'importe qui, désireux d'examiner attentivement tout ceci, s'aperçoit qu'on peut donner une définition du vocable valeur utilisé dans cette règle, de façon que tout ce qui s'ensuit s'impose à tous, à savoir celle de valeur estimée non pas à partir du prix de la chose mais à partir de l'utilité que chacun peut en tirer. Le prix estimé à partir de la chose elle-même est le même pour tous, l'utilité dépend de la condition de chacun. Il n'y a pas de doutes que 1000 ducats offrent plus d'avantages pour un pauvre que pour un riche, bien que le montant soit le même pour l'un et pour l'autre.
[3]

L'idée n'est pas nouvelle, elle est au contraire partagée par tous les auteurs de l'époque : il ne faut pas compter l'argent pour sa valeur numérique mais il faut l'évaluer en le rapportant à la richesse possédée. D. Bernoulli en conclut qu'il faut abandonner le calcul usuel de l'espérance mathématique pour introduire un nouveau calcul :

§4. *Donc, à ce point maintenant de nos déductions, chacun peut retenir un simple changement de vocable : mais, comme il y a là une hypothèse nouvelle, cela nécessitera quelque éclaircissement. J'ai dressé en conséquence des modèles à présenter en bonne place, et que j'ai médités à cette fin. Mais, pour l'instant, voici la règle fondamentale que nous utiliserons : Par multiplication de l'utilité, de chaque lot par le nombre de cas dans lesquels il est obtenu, sommation des produits et division par le nombre total de cas, on obtiendra sans faille une utilité moyenne et le gain correspondant à cette utilité équilibrera le sort considéré.*

En remplacement de l'espérance mathématique donnée (selon la « règle 1 ») par la **moyenne arithmétique**

$$E = \sum_i p_i g_i ,$$

Daniel Bernoulli propose donc de calculer l'**utilité moyenne**

$$EU = \sum_i p_i U(g_i) .$$

Cramer avait déjà développé ce raisonnement en proposant de remplacer la moyenne $\sum_i p_i g_i$ par $\sum_i p_i \sqrt{g_i}$ mais la nouveauté chez Daniel Bernoulli est de modéliser le principe sous-jacent (qui deviendra, bien plus tard chez les économistes, le principe de la décroissance de l'utilité marginale) rendant ainsi « naturelle » l'apparition de la fonction \log . La variation d'utilité ΔU étant proportionnelle à la variation de richesse Δx rapportée à la richesse x du moment, Daniel Bernoulli pose l'équation

$$\Delta U = b \frac{\Delta x}{x}$$

(où b est une constante de proportionnalité) qui mène à l'équation différentielle $U'(x) = b/x$ et à sa solution

$$U(x) = b \log \left(\frac{a+x}{a} \right)$$

en tenant compte de la fortune initiale a de Pierre. Selon cette approche, l'**espérance morale** de Pierre sera donc donnée par la formule

$$EU = b \sum_i p_i \log \left(\frac{a+g_i}{a} \right)$$

Plus tard, Laplace appellera « *fortune morale* » cette dernière valeur pour la distinguer de la « *fortune physique* » X telle que $U(X) = EU$ et qui se calcule donc à partir de la **moyenne géométrique** :

$$X = \prod_i (a + g_i)^{p_i} - a$$

On notera que $\lim_{a \rightarrow +\infty} X = E$. Et au jeu de Saint-Petersbourg, la mise m que Pierre doit avancer selon Daniel Bernoulli dépend de sa fortune initiale a selon la formule :

$$m = \prod_{k \geq 1} (a + 2^{k-1})^{1/2^k} - a$$

En voici quelques valeurs approchées :

fortune initiale a	0	10	100	1000
gain espéré (env.)	2	3	4	6

2.3 Le cas particulier de D'Alembert

Il aurait fallu ajouter un « argument 4 » à la liste des différents registres d'argumentation avec le « problème de l'équiprobabilité » soulevé par la proposition de d'Alembert que la probabilité d'avoir Pile après une série de Pile soit d'autant plus éloignée (par valeurs inférieures) de $1/2$ que cette série aura été longue ([1, 12, 28, 29]). Mais cette idée semble être restée lettre morte et d'ailleurs d'Alembert lui-même n'a pas essayé d'évaluer cet amoindrissement affirmant même ([28, note 1, p. 1372]) : « *D'assigner la loi de cette diminution, c'est ce que ni moi, ni personne, je crois, ne peut faire.* ». Elle contredit bien entendu l'idée de lancers successifs indépendants mais témoigne surtout des doutes de d'Alembert, non pas sur le calcul de probabilités qu'il comprenait fort bien, mais sur la pertinence de son application à des questions concrètes :

On se plaint assez communément que les formules des mathématiques, appliquées aux objets de la nature, ne se trouvent que trop en défaut. Personne néanmoins n'avait encore aperçu ou cru apercevoir cet inconvénient dans le calcul des probabilités.... [9]

Pour d'Alembert, la difficulté de concilier le calcul et le sens commun réside au cœur même du calcul des probabilités et le problème de Saint-Petersbourg constituera une référence constante dans sa lecture critique de l'usage des probabilités, au sujet desquelles il tient un discours très singulier et parfois déroutant, comme l'illustre son affirmation dans l'Encyclopédie que la probabilité d'obtenir au moins un Face lorsqu'on lance deux fois une pièce est $2/3$ et non $3/4$ comme l'affirme le calcul usuel ([2]). Pour ne pas se méprendre, il ne faut pas perdre de vue que la question de l'applicabilité des calculs aux questions concrètes est essentielle pour D'Alembert et qu'à ce titre, il fera une distinction entre ce qui est mathématiquement (ou « *métaphysiquement* ») concevable et ce qui est « *physiquement* » possible ([1]). Les très petites probabilités relèveraient ainsi de la première catégorie mais pas de la seconde. D'Alembert argumente sa position en divers endroits de son œuvre et on retiendra seulement ici qu'il affirme avec beaucoup de clarté que le calcul usuel de l'espérance mathématique ne lui semble pas pertinent :

8. *Il me semble d'abord que toutes les idées d'espérance, d'enjeu, de somme qu'il faut donner pour jouer au pair, ne sont pas bien faciles à fixer d'une manière précise.*

La difficulté vient, si je ne me trompe, de ce que l'idée d'espérance enferme deux choses ; la somme qu'on espère, & la probabilité qu'on gagnera cette somme. Or il me semble que c'est principalement la probabilité qui doit régler l'espérance ; & que la somme espérée ne doit y entrer, si je puis parler de la sorte, que d'une manière subordonnée au degré de probabilité : cependant on les fait entrer toutes deux également & de la même manière dans le calcul.

10. *Je ne sais (en conséquence de ce cette réflexion) si l'espérance est bien estimée en général, en multipliant la somme à espérer par la probabilité. Qu'on propose de choisir entre 100 combinaisons, dont 99 feront gagner mille écus, & la 100^e 99 mille écus ; quel*

sera l'homme insensé pour préférer celle qui donnera 99 mille écus ? L'espérance dans les deux cas n'est pas réellement la même, quoiqu'elle soit la même suivant les règles des probabilités⁷. [1, 23ème mémoire]

De Lacroix (« (...) mais d'Alembert a voulu jeter du doute sur les principes eux-mêmes.(...) [ses objections] prouvent seulement qu'il peut arriver aux hommes le plus justement célèbres, de s'égarer même dans un sujet fort simple. » [21]) jusqu'à Samuelson (« D'Alembert's aberrations » [29]) et en passant par Bertrand (« L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le Calcul des probabilités. » [6]), les très singulières affirmations de d'Alembert lui vaudront bon nombre de railleries qui cacheront surtout un embarras ou une incompréhension de son questionnement. Dans son ouvrage de 1785, Condorcet restera bien plus prudent quant à la question soulevée sur la pertinence de la « règle » usuelle du calcul de l'espérance mathématique :

M. Daniel Bernoulli est le premier qui ait fait voir les inconvénients de cette règle, & qui ait cherché des moyens d'y remédier. M. d'Alembert a depuis attaqué la règle en elle-même, & jusqu'ici ses objections sont restées sans réponses. ([10, p. lxxj])

Mais la possibilité d'une « mathématique sociale » dont il veut jeter les bases ([11, Tableau général de la science]) nécessite le recours au calcul des probabilités et à l'usage de la « valeur moyenne » (i. e., de l'espérance mathématique usuelle). Ainsi, dans son ouvrage posthume sur le calcul des probabilités, Condorcet dit partager certains doutes de d'Alembert :

L'égalité possible des événements n'a été pour nous que l'ignorance absolue des causes qui peuvent déterminer un événement plutôt qu'un autre. (...)

La première considération qui se présente en examinant cette définition [de la probabilité], c'est qu'il n'y a aucun rapport direct et nécessaire entre la probabilité d'un événement et sa réalité. ([11, p. 80])

Néanmoins, ces difficultés principielles ne l'empêcheront pas de développer sa théorie des motifs de croire sur la base du recours au calcul de la valeur moyenne. Et malgré la sérieuse remise en cause de « Cette méthode de prendre la valeur moyenne » provoquée par le problème de Saint-Petersbourg (« Mais un problème célèbre connu sous le nom de problème de Petersbourg, fit naître sur la généralité de cette loi [le recours au calcul de l'espérance mathématique], des doutes qui, jusqu'ici, n'ont peut-être pas été totalement dissipés. », [11, p. 104]) et nonobstant cette affirmation que tous les doutes ne sont pas dissipés, il conclura :

« La règle ordinaire nous donne donc la véritable valeur moyenne d'événements de valeurs différentes et inégalement probables. ([11, p. 107])

On voit donc que, dans tous les cas où l'on peut substituer une valeur moyenne à la vraie valeur, celle que donne la méthode ordinaire, est la seule que l'on doit choisir. ([11, p. 110])

En s'appuyant sur la prise en compte de l'expérience grâce à la loi des grands nombres et à la théorie de Bayes ([9]), Condorcet pourra justifier la légitimité du recours au calcul des probabilités pour faire en sorte que le motif d'y croire reste prépondérant, sauvant ainsi son projet de mathématique sociale. Mais, ainsi que le note Rieucan ([28]), « Malgré les amendements que Condorcet tente d'apporter à la règle de l'espérance mathématique, sa capacité à guider la décision ne va cependant pas de soi. Ainsi, elle ne peut s'appliquer au problème de Petersbourg (...) ».

7. Il faut manifestement comprendre que d'Alembert compare les loteries : « gagner 1000 avec 99 chances sur 100 » et « gagner 99 000 avec 1 chance sur 100 » qui sont de même espérance (égale à 990). Pour d'Alembert, la seconde loterie est à rejeter pour cause d'une trop faible probabilité d'emporter le gain.

3 Le tournant du XIXe siècle

3.1 Des attentes irréconciliables

Le fait que le problème initial soit resté dans la littérature comme le problème « de Saint-Petersbourg » marque bien entendu la très grande importance de la réponse présentée par Daniel Bernoulli. Elle ne satisfera pourtant pas son cousin Nicolas :

(...) et j'ai trouvé V^otre théorie fort ingénieuse, mais Vous me permettrés de Vous dire qu'elle ne resout pas le nœud du problême en question. Il ne s'agit pas de mesurer l'usage ou le plaisir qu'on tire d'une somme que l'on gagne, ni le défaut d'usage ou le chagrin qu'on a de la perte d'une somme; il ne s'agit pas non plus de chercher un équivalent entre ces choses là; mais il s'agit de trouver combien un joueur est obligé selon la justice ou selon l'équité de donner à l'autre pour l'avantage que celui-ci lui accorde dans le jeu de hazard en question, (...) [5, Lettre du 5 avril 1732] (c'est nous qui soulignons)

Et Daniel Bernoulli en convient :

*Cette communication ayant été présentée à l'Académie, j'en ai envoyé copie au distingué Nicolas Bernoulli, cité plus haut, afin de savoir ce qu'il penserait de ma proposition pour résoudre son problème. Et de fait, dans une lettre qu'il m'a écrite en l'an 1732, il atteste que ma manière de voir la mesure des sorts ne lui déplait nullement, **pour autant que quelqu'un ait à estimer son sort mais non, comme cela peut arriver, si un tiers, à l'instar d'un juge, doit fixer en toute équité et justice le sort de l'une et l'autre parties.** [3]*

Pour L. Daston, ce sont deux conceptions distinctes de l'espérance qui sont en jeu, l'une attachée au souci d'équité et l'autre à la prudence ([13]), le différend entre Nicolas et Daniel traduisant des différences d'attente :

Ce qui était en question entre les cousins Bernoulli n'était pas de savoir si l'espérance devait être le modèle du raisonnable mais ce qu'était exactement le raisonnable. Nicolas défend le sens d'égalité dérivé des contrats aléatoires; Daniel, le sens de prudence commerciale. L'homme raisonnable n'est plus le juge désintéressé mais plutôt le marchand avisé : transformation historique que le calcul des probabilités enregistre. [14]

3.2 La fin des mathématiques mixtes

En suivant Daston, le problème de Saint-Petersbourg est surtout le révélateur de la faiblesse des mathématiques mixtes du XVIIIe siècle ([28]), attachées à l'application des mathématiques aux choses concrètes mais sans avoir le formalisme adéquat :

La controverse prolongée sur le problème de Saint-Petersbourg fut un conflit entre les intuitions raisonnables et les résultats du calcul des probabilités; il montre à quel point les mathématiciens ont pris au sérieux le « bon sens ». (...)

Les mathématiciens l'ont nommé « paradoxe »; il ne l'était pas à proprement parler. Le calcul de l'espérance est simple, et il n'y a rien dans la définition de l'espérance mathématique qui exclue une réponse infinie. Les mathématiciens l'ont nommé « paradoxe » parce que les résultats contredisaient le bon sens. Les mathématiciens appliqués au sens moderne auraient simplement mis en question la pertinence de cette théorie mathématique pour cette classe de problèmes. Mais ce chemin n'était pas ouvert aux mathématiciens mixtes du XVIIIe siècle. Pour eux, l'opposition entre les résultats mathématiques et le bon sens menaçait la validité du calcul des probabilités.

Les mathématiques mixtes chères à d'Alembert ([12, 28]) n'étaient pas aptes à faire la part entre le calcul objectif de la théorie et la perception subjective héritée de l'expérience. Pour Daston, l'histoire

du « paradoxe » de Saint Petersburg fait apparaître les ambiguïtés de ce « bon sens » au nom duquel tous les auteurs étaient d'accord pour dire qu'il y avait un « problème » :

Je voudrais attirer l'attention sur l'ambiguïté de ce bon sens. Daniel Bernoulli proposa sa solution en 1738 dans les Annales de l'académie de Saint-Petersbourg. Sa solution a non seulement conduit à baptiser le problème en l'honneur de cette académie ; elle a aussi posé des questions fondamentales (bien qu'implicites) sur la définition de l'espérance probabiliste et sur son rapport avec l'idée du raisonnable. En un mot, il a proposé une nouvelle notion du raisonnable, et une nouvelle définition conforme de l'espérance. (...)
Deux ambiguïtés, jamais reconnues comme telles, obscurcissaient et finalement compromirent la mission de l'interprétation classique [des probabilités] : quantifier le bon sens. Nous avons déjà vu la première ambiguïté dans la controverse sur le problème de Saint-Petersbourg : il y avait plusieurs sortes de bon sens, qui donnaient des solutions différentes du même problème. [14]

Daston renverse ainsi les rôles : ce n'est plus la pertinence du calcul mathématique qui est mise en cause faute de rendre compte de ce que le bon sens imposait à tous mais ce serait l'univocité de ce bon sens qui est remise en cause face à la rationalité des calculs. Au vu de l'exploitation qui en sera faite dans un pan important de l'économie mathématisée à partir de la fin du XIXe s., il ne fait pas de doute que la mathématisation des affaires humaines opérée dans le si bel article de Daniel Bernoulli est l'annonce de ce renversement, de ce passage de l'*attitude raisonnable* qu'appelle le sens commun au *comportement rationnel* que prescrivent les calculs. Mais il importe de comprendre que ce renversement ne dissout d'aucune manière (et, encore moins, ne résoud) le problème posé par Nicolas Bernoulli et qu'il confirme plutôt l'irréductibilité de l'écart entre l'enseignement de la perception « raisonnable » et celui du calcul rationnel. Et la prise de conscience de cet écart ira grandissante avec la nécessité d'affermir les bases théoriques du calcul des probabilités et mènera à une scission de plus en plus marquée entre la théorie et ses applications :

En 1840, le « calcul raisonnable » apparut à beaucoup de mathématiciens et philosophes comme une « aberration de intelligence ». Pour la première fois, les mathématiciens commencèrent à distinguer entre la théorie et les applications du calcul des probabilités, afin de sauver le calcul de ses applications douteuses. (...)
Elle [l'interprétation classique des probabilités] avait aussi perdu la justification de son ambition de fusionner les probabilités objective et subjective. [14]

3.3 Bertrand éclaircit la situation

A l'instar de ce commentaire de Daston ([13]) : « [Daniel] Bernoulli's analysis did more than rechristen the problem in honor of the Academy ; it also set the acceptable terms of solution for his successors. », il est curieusement usuel de voir présentée la résolution de Daniel Bernoulli comme « la » solution au problème posé par son cousin et de voir éclipsé tout autre avis alors que Daniel Bernoulli lui-même comprenait que son cousin ne soit pas satisfait par sa solution. De fait, cette résolution introduit beaucoup d'arbitraire sans compter les difficultés que pose l'application concrète de toute modélisation lorsqu'il s'agit de quantifier les variables et constantes qu'elle introduit. Elle est davantage à considérer comme un mode de raisonnement auquel chacun est libre d'adhérer. Et d'ailleurs, l'avis de Bertrand suffira pour se convaincre que la solution de Daniel Bernoulli est bien loin de faire l'unanimité :

La réponse la plus singulière au prétendu paradoxe est celle de Daniel Bernoulli (...). 100 millions, suivant Daniel Bernoulli, ajoutés à une fortune déjà acquise de 100 millions, ne suffisent pas pour la doubler. (...) Il substitue, en conséquence, à l'espérance mathématique l'espérance morale, dans le calcul de laquelle une fortune dépend non du nombre d'écus dont elle se compose, mais des satisfactions qu'elle procure.
Le problème étant ainsi posé, Bernoulli a l'audace de le résoudre. (...)

Jamais compte n'a été ni ne sera réglé de la sorte ; mais grâce à d'illustres approbations, la théorie de l'espérance morale n'a pas moins contribué à la célébrité de Daniel Bernoulli que ses admirables travaux de Physique. [6]

Pour Bertrand, « il faut approuver absolument et simplement la réponse réputée absurde. (...) Le placement est aventureux mais excellent ; l'avantage infini est réalisable. (...) Quel jour ? Quel siècle ? On l'ignore ; avant la fin des temps certainement, le gain de Pierre sera colossal. ». Sans développer les arguments qu'il avance pour justifier ses propos, il faut noter que Bertrand a pris acte de cette séparation entre le calcul théorique et ses applications que le XIXe siècle a rendue manifeste :

La discussion, jusqu'ici n'a pas dissipé la méprise. La théorie, pourtant, est irréprochable ; il n'est pas juste de lui opposer l'absurdité de ses conseils : elle n'en donne pas. Il est déraisonnable d'exposer au jeu une forte somme, indélicat d'accepter un risque qui peut rendre insolvable. Le calcul des probabilités doit ignorer ces sages appréciations.

On joue, c'est l'hypothèse. A-t-on tort ou raison ? La question n'est pas posée. [6]

Autrement dit, la question de savoir s'il est raisonnable de jouer n'est pas du ressort des mathématiques. Bertrand commentera simplement : « *Le parti raisonnable, si les risques sont grands, est de ne pas jouer.* » et, si l'on se souvient de l'exigence première d'équité chez Nicolas Bernoulli, en notant qu'un jeu peut être à la fois très juste et très déraisonnable, J. Bertrand touche le cœur de la question en jeu :

*Quant au paradoxe du problème de Saint-Pétersbourg, il disparaît entièrement lorsqu'on interprète exactement la réponse du calcul : une convention équitable n'est pas une convention indifférente pour les parties ; **cette distinction éclaire tout.** Un jeu peut être à la fois très juste et très déraisonnable. Supposons, pour mettre cette vérité dans tout son jour, que l'on propose à mille personnes possédant chacune un million de former en commun un capital d'un milliard, qui sera abandonné à l'une d'elles désignée par le sort, toutes les autres restant ruinées. Le jeu sera équitable, et pourtant aucun homme sensé n'y voudra prendre part. En termes plus simples et plus évidents encore : un très gros jeu est insensé sans être inique. ([7], c'est nous qui soulignons)*

4 Développements en mathématique et en économie

4.1 Une généralisation de la loi des grands nombres

Paul Lévy ([20, chap. VI]) jugera très sévèrement Bertrand :

Bertrand nous fait penser à l'astronome qui, découvrant que la planète Mercure ne suit pas exactement la trajectoire qui devrait résulter de la loi de Newton, penserait qu'elle a tort et prendrait l'habitude, en exposant ses calculs, de dire : « Nous venons de calculer la trajectoire que la planète Mercure aurait dû suivre, si elle avait mieux compris l'harmonie de l'univers et de l'œuvre de Newton ; mais n'oublions pas qu'elle se trompe et tenons compte maintenant de son erreur. »

Ce jugement est très étonnant non seulement parce que les affirmations de Bertrand traduisent la volonté bien raisonnable de départir entre ce qui dépend des mathématiques et ce qui n'en dépend pas (comme l'évaluation d'un gain « moral ») mais aussi parce que la lecture de son ouvrage « Calcul des probabilités » ([6]) témoigne d'un souci d'appliquer ce calcul à des questions concrètes, hors du champ de la théorie mathématique pure. Et sur le problème concret de Saint-Petersbourg, il paraît difficile de donner un conseil plus avisé que celui qu'il a formulé (« *Le parti raisonnable, si les risques sont grands, est de ne pas jouer.* »). Mais Lévy semble lui-même tempérer ses reproches : « *L'erreur de Bertrand n'est d'ailleurs pas aussi grande qu'on pourrait le croire. (...) il a bien vu qu'il ne suffit pas de s'assurer que le gain probable est positif ; il faut suivant une expression vulgaire être assuré de pouvoir « tenir le coup », c'est-à-dire pouvoir risquer une mise suffisante pour permettre d'atteindre presque sûrement le moment où l'avantage, d'abord purement théorique, deviendra réel*

par la répétition du jeu. » : en effet, à partir du moment où on considère des itérations du jeu, la loi des grands nombres va pouvoir s'appliquer et Bertrand avait bien esquissé cette réponse ([6, p. 64]). Lévy la développera dans le cas d'un jeu itéré de Saint-Petersbourg tandis que Feller lui donnera un cadre général avec la *loi des grands nombres généralisée* qu'il obtiendra en 1937. Lorsqu'elle est finie, l'espérance permet de définir la notion de jeu équitable (en demandant que la mise soit égale à l'espérance de gain) mais cela ne s'applique pas au problème de Saint-Petersbourg. Après avoir rappelé que la loi forte des grands nombres ne s'applique que pour une variable aléatoire d'espérance finie, Feller introduit pour le cas de variables aléatoires d'espérance infinie une nouvelle notion d'équité :

We shall say that a game with accumulated entrance fees e_n is fair in the classical sense if for every $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{e_n} - 1 \right| > \epsilon \right) = 0$$

[16, chap. 10]

où, comme dans la loi des grands nombres usuelle, X_1, X_2, \dots, X_k indique la répétition d'une même expérience aléatoire pour une variable aléatoire X . Si $E(X) = \mu$ est finie, alors la loi des grands nombres affirme que l'égalité ci-dessus est vraie pour $e_n = n\mu$. Feller a montré que cette égalité peut rester vraie avec certaines espérances infinies. En particulier, si on se donne la loi de probabilités $\mathbb{P}(X = 2^{k-1}) = (1/2)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ simule une suite de n parties au jeu de Saint-Petersbourg et le jeu devient *équitable* au sens de Feller si la mise totale est $e_n = n \log_2 n / 2$ (i. e., $\log_2(n)/2$ par partie). En d'autres termes, le jeu de Saint-Petersbourg **itéré** 2^n fois est équitable pour une mise de Pierre de $n/2$ pour chaque partie. Ainsi, pour Feller, grâce à cette *loi des grands nombres généralisée*, le paradoxe a disparu ([15]) : « *Instead of a paradox we reach the conclusion that the price should depend on n , that is to say vary as the number of trials increases.* ».

Pour $n = 11$, on retrouve la valeur de 5,5 trouvée expérimentalement par Buffon et on peut voir le résultat de Feller comme une formalisation de l'argument 2 de Buffon. Cependant, ainsi que le note Neugebauer, ce jeu équitable n'a de sens que dans le cadre d'un jeu de Saint-Petersbourg itéré et ne s'applique donc pas au problème posé par Nicolas Bernoulli (le cas $n = 1$) : « *Note that the described entry fee can only be fair for the repeated gamble, but it is not applicable to the one-shot gamble, since for $n = 1$, $e_n = 0$.* » ([25]).

Indépendamment de cette dernière remarque, le jeu de Saint-Petersbourg itéré peut être très pertinent au-delà de l'exemple du casino (pour qui tout jeu est itéré autant de fois que des joueurs y jouent). Zajdenweber donne des exemples très concrets : catastrophes naturelles (comme des séismes) ou catastrophes industrielles (comme avec des centrales nucléaires) possédant des distributions « de type Saint-Petersbourg itéré » qui confirment l'importance des très petites probabilités comme le pensait Bertrand et montrent l'utilité de la loi des grands nombres généralisée ([34]).

4.2 A qui est utile la théorie de l'utilité ?

Dans un long article-survey qui fait référence ([29]), l'évocation par Samuelson des commentaires ou contributions de Menger, Keynes, Arrows, Shapley, Brito, lui-même, Aumann « *and many others* » témoigne de l'importance du paradoxe de Saint-Petersbourg dans la littérature économique ; mais force est de constater un glissement : on comprend rapidement que Samuelson ne nous parle plus du problème de Saint-Petersbourg mais de la fonction d'utilité (et de la décroissance de l'utilité marginale). De fait, S. Stigler confirme l'extrême importance en économie de la réponse de Daniel Bernoulli au problème de Saint-Petersbourg :

It is impossible to pick up a current issue of a journal in economics or econometrics without seeing some of the fruits of the seed Daniel Bernoulli planted 255 years ago. [33]

Peters ([27]) fait remarquer que l'article de Daniel Bernoulli a fait l'objet en 1954 d'une traduction en anglais dans *Econometrica*, l'une des plus prestigieuses revues dans le monde académique de l'économie, confirmant le caractère fondateur de cet article dans le développement de la théorie de l'utilité espérée (*EUT, expected utility theory*) : « *Not all academic fields have a clear starting point, a seminal paper that constitutes the foundation of the entire discipline. But economics does. The paper that defines modern formal economics was written by Daniel Bernoulli in 1738. It introduces expected utility theory.* ». En considérant l'utilité d'une somme d'argent plutôt que la somme elle-même et en modélisant l'accroissement d'utilité avec la fonction *log*, Daniel Bernoulli a ainsi ouvert une voie de recherche à l'économie mathématisée, qui prendra vraiment son grand essor avec l'école marginaliste à la fin du XIXe siècle et ne cessera ensuite de prendre de l'importance :

The key idea was that the calculation of the monetary equivalent of a game had to be based on expected utility, and not on expected value. (...) Bernoulli's essay is an extraordinary contribution to the problem of decision making under uncertainty. Furthermore, it is a forerunner of the marginalist revolution of the last quarter of the 19th century with respect to crucial issues such as the adoption of differential calculus and the principle of decreasing marginal utility. [17]

Pour Samuelson, il n'y aura d'ailleurs rien de nouveau avant ce qu'il appellera le « super-paradoxe de Saint-Petersbourg » de Menger : « *After 1738, nothing earthshaking was added to the findings of Daniel Bernoulli and his contemporaries until the quantum jump in analysis provided by Karl Menger.* ». Dans un article de 1934 ([23]), Menger avait noté que la « solution » de Daniel Bernoulli ne prémunit pas d'avoir une espérance infinie (il suffit, par exemple, de remplacer le gain 2^i par un gain 2^{2^i}), montrant ainsi la nécessité que les fonctions d'utilité soient bornées. A en croire Seidl, il aura donc fallu attendre 200 ans pour avoir la résolution du paradoxe de Saint Petersburg :

Menger (1934) was the first to show that boundedness of the utility function is a necessary and sufficient condition for preventing the occurrence of a St. Petersburg Paradox. [30]

Partant de cette conclusion, on ne peut que partager la surprise qu'il exprime ensuite :

In view of two centuries' discussions on such a provocative subject like the St. Petersburg Paradox, one might wonder why its solution had to wait until Menger's discovery. [30]

Cependant, on comprend que cette dernière appréciation n'est pas uniformément partagée avec ce commentaire de Lengwiler en 2008 ([22]) : « *Today, we very often use the constant relative risk aversion specification, i.e. the power or the log function. It is not without irony that the field has found that the original specification that was proposed by Cramer (power function) and by Bernoulli (log) are actually quite useful.* ». La littérature sur le sujet est immense et on évoquera encore Kahneman pour sa lecture plus distanciée de l'article de Daniel Bernoulli. S'il lui reconnaît son caractère précurseur, c'est davantage pour en pointer ses faiblesses :

This deficiency can be traced to the brilliant essay that introduced the first version of expected utility theory (Bernoulli, 1738). (...) As in most modern treatments of decision making, there is no acknowledgment of any tension between prescription and description in Bernoulli's essay. The idea that decision makers evaluate outcomes by the utility of final asset positions has been retained in economic analyses for almost 300 years. This is rather remarkable, because the idea is easily shown to be wrong; I call it [Daniel] Bernoulli's error. Bernoulli's model is flawed because it is reference-independent : it assumes that the value that is assigned to a given state of wealth does not vary with the decision maker's initial state of wealth. [18]

Même si cette dernière affirmation est pour le moins surprenante puisque nous avons rappelé que le calcul de Daniel Bernoulli tient compte de la richesse initiale (cf. 2.2), nous noterons que, dans leurs célèbres travaux, Kahneman et Tversky chercheront davantage à décrire comment les gens choisissent en situation d'incertitude plutôt qu'à décider comment ils doivent rationnellement se

comporter : « *Nous ne cherchions pas à comprendre quel était le choix le plus rationnel ou le plus avantageux ; nous voulions trouver le choix intuitif, celui qui paraissait tentant sur le champ* » ([19, chap. 25]). Peut-être faut-il y voir la volonté de réhabiliter le « sens commun » à l'origine du paradoxe de Saint-Petersbourg ?

Dans tous les cas, nous comprenons que les recherches et controverses initiées par le problème de Saint-Petersbourg dans le domaine économique portent sur le cadre formel initié par Daniel Bernoulli et que la question initiale de Nicolas Bernoulli aura servi de prétexte bien plus que d'objectif à ces développements analytiques, occupant au mieux cette place dans la « mémoire commune de l'esprit analytique cultivé » que lui accorde Samuelson : « *As my historical notes illustrate, so many points were raised by commentators on the problem that the St. Petersburg paradox enjoys an honored corner in the memory bank of the cultured analytic mind.* ». Pourtant, dans sa correspondance avec son cousin, Daniel a été le premier à reconnaître que si elle apportait une manière de traiter le problème, sa résolution ne pouvait pas constituer une réponse acceptable en toute généralité. Mais sa « solution » permet de porter la discussion sur le terrain du calcul et de la modélisation mathématique. En l'occurrence, la théorie de l'utilité espérée propose un modèle de « l'agent rationnel » qui ne se souciera pas de décrire la réalité mais permettra de dire (et prescrire) ce que doivent être les bons comportements ou « comportements rationnels ». Comme le notait Kahneman, il y a un certain confort à rester dans le domaine des hypothèses, aussi « rationnelles » soient-elles :

If Bernoulli's formulation is transparently incorrect as a descriptive model of risky choices, as has been argued here, why has this model been retained for so long? The answer may well be that the assignment of utility to wealth is an aspect of rationality, and therefore compatible with the general assumption of rationality in economic theorizing.
([18])

Le souci de sauver la théorie coûte-que-coûte n'est pas nouveau. Déjà, G. Stigler pointait dans son compte-rendu sur l'histoire de la théorie de l'utilité⁸ :

Ce troisième critère de congruence avec la réalité aurait dû être affiné - affiné en insistant sur le fait que les théories doivent être examinées pour leurs implications sur les comportements observables. L'implication de l'utilité marginale décroissante de l'argent, selon laquelle les gens ne joueront pas, aurait dû être utilisée pour tester cette hypothèse, et non pour reprocher aux individus leur comportement que la théorie est censée décrire. Non seulement ces implications spécifiques n'ont pas été recherchées et testées, mais il y avait une tendance, quand il semblait y avoir la menace d'un test empirique, à reformuler la théorie pour rendre le test inefficace. ([32])

5 En guise de conclusion

Le problème de Saint Petersburg est né de la contradiction entre ce que donnait le calcul mathématique et ce qu'imposait le bon sens. Nous sommes alors au début du XVIII^e siècle et cela questionne l'ambition de faire du calcul des probabilités la pierre d'angle d'une « mathématique sociale », une science qui s'appliquerait à la conduite des affaires humaines comme la science physique s'applique à la description du mouvement des planètes, ainsi que Condorcet en avait exprimé la vision à la fin de ce même siècle⁹ : « *Ces sciences, presque créées de nos jours, dont l'objet est l'homme même, dont le but direct est le bonheur de l'homme, n'auront pas une marche moins sûre*

8. Texte original : « *This third criterion of congruence with reality should have been sharpened - sharpened into the insistence that theories be examined for their implications for observable behavior. The implication of the diminishing marginal utility of money, that people will not gamble, should have been used to test this assumption, not to reproach the individuals whose behavior the theory sought to describe. Not only were such specific implications not sought and tested, but there was a tendency, when there appeared to be the threat of an empirical test, to reformulate the theory to make the test ineffective.* ».

9. DISCOURS DE RÉCEPTION À L'ACADÉMIE FRANÇAISE, 1782.

que celle des sciences physiques ». Près de deux siècles plus tard, la théorie des probabilités sera bien fondée mathématiquement mais ce sera au prix de la confirmation que le juste au sens des calculs n'est pas forcément le raisonnable : un jeu peut être équitable au sens des mathématiques et inéquitable au sens de la justice. Les mathématiques s'occupent d'égalités algébriques quand la justice se pose des questions d'équité. L'importance du problème de Saint-Petersbourg est bien d'obliger à comprendre cet écart.

Pour celui qui s'apprête soit à gagner un gain M , soit à perdre M , que le jeu soit équitable n'empêche pas que la seule alternative est entre le gain ou la perte et, bien souvent, les probabilités ne pourront éclairer la décision que dans un contexte de répétitions du jeu, notamment grâce à la loi des grands nombres ou à sa version généralisée introduite par Feller.

C'est en économie que la littérature sur le problème de Saint-Petersbourg reste la plus abondante. Mais c'est au prix d'oublier la nature de la question initiale pour se focaliser sur le formalisme mathématique, quitte à oublier (ou feindre d'oublier ?) le risque contre lequel d'Alembert avait pourtant alerté « *de regarder comme une loi primitive de la nature ce qui ne serait qu'une conséquence purement mathématique de quelques formules* »¹⁰.

Références

- [1] Jean Le Rond d'Alembert, OPUSCULES MATHÉMATIQUES, 10ème mémoire, tome 2, 1761, 23ème et 27ème mémoires, tome 4, 1768 et 52ème mémoire, tome 7, 1780.
- [2] Jean Le Rond d'Alembert, *Article croix ou pile (analyse des hasards)*, Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome quatrième, 512-513, 1754; accès en ligne : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50536c/f517.item>
- [3] Daniel Bernoulli, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae V, 175-192, 1738. Traduction en français par R. Charreton. *Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort*, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, tome 6, p. 61-77, 1985; accès en ligne : http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1985__6__61_0.
- [4] Jacques Bernoulli, ARS CONJECTANDI, traduction et présentation dans *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi*, document d'études de Norbert Meunier, publication de l'IREM de Rouen Haute Normandie, 1987.
- [5] Nicolas Bernoulli, Correspondance. Les échanges concernant le jeu de Saint-Petersbourg sont reproduits dans [31].
- [6] Joseph Bertrand, THÉORIE DES PROBABILITÉS, Gauthiers-Villars, Paris, 1888.
- [7] Joseph Bertrand, D'ALEMBERT, chapitre 2, 1889.
- [8] Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, ESSAIS D'ARITHMÉTIQUE MORALE, Histoire naturelle, générale et particulière, Supplément, Tome Quatrième, 1777.
- [9] Bernard Bru, *Doutes de d'Alembert sur le calcul des probabilités*, Centre international de synthèse, « Jean d'Alembert, savant et Philosophe », colloque du 15 au 18 juin 1983, pp. 279-292, 1983.
- [10] Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, ESSAI SUR L'APPLICATION DE L'ANALYSE À LA PROBABILITÉ DES DÉCISIONS RENDUES À LA PLURALITÉ DES VOIX, Paris, 1785.
- [11] Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, ELÉMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS, publication posthume, Paris, 1805.
- [12] Lorraine Daston, *D'Alembert's critique of probability theory*, Historia Mathematica, 6, 259-279, 1979; accès en ligne : [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(79\)90125-3](https://doi.org/10.1016/0315-0860(79)90125-3).

10. Discours préliminaire, TRAITÉ DE DYNAMIQUE, p. xxx, 1758.

- [13] Lorraine Daston, *Probabilistic expectation and rationality in classical probability theory*, *Historia Mathematica*, 7, 234-260, 1980; accès en ligne : [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(80\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0315-0860(80)90025-7).
- [14] Lorraine Daston, *L'interprétation classique du calcul des probabilités*, *Annales. Economies, sociétés, civilisations*, 44e année, num. 3, pp. 715-731, 1989; accès en ligne : https://www.persee.fr/doc/ahess_0395-2649_1989_num_44_3_283618
- [15] William Feller, *Note on the law of large numbers and "fair games"*, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 16, No. 3, pp. 301-304, 1945.
- [16] William Feller, *AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS*, vol. 1, 1950.
- [17] Nicola Giocoli, *The true hypothesis of Daniel Bernoulli : what did the marginalists really know ?*, *History of Economic Ideas*, Vol. 6, Num. 2, pp. 7-43, 1998.
- [18] Daniel Kahneman, *Maps of bounded rationality : a perspective on intuitive judgment and choice*, *Lecture pour la réception du Prix de la Banque de Suède*, 2002; accès en ligne : <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/kahnemann-lecture.pdf>.
- [19] Daniel Kahneman, *SYSTÈME 1/SYSTÈME 2. LES DEUX VITESSES DE LA PENSÉE*, Champs-Flammarion, 2016.
- [20] Paul Lévy, *CALCUL DES PROBABILITÉS*, Gauthiers-Villars, 1925.
- [21] Silvestre-François Lacroix, *TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS*, Paris, 1816.
- [22] Yvan Lengwiler, *The Origins of Expected Utility Theory*, Springer Books, in : Wolfgang Hafner & Heinz Zimmermann (ed.), *Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models*, chapter 20, pp. 535-545, 2009.
- [23] Karl Menger, *The role of uncertainty in economics*, in M. Shubik (Ed.), *Essays in mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern*. Princeton University Press, 1967; texte original en allemand, publié en 1934.
- [24] Pierre Rémond de Montmort, *ESSAY D'ANALYSE SUR LES JEUX DE HAZARD*, 2e éd. rev. et augm. d'un *Traité des combinaisons et de plusieurs lettres*, Paris, 1713; accès en ligne : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110519q?rk=21459;2>.
- [25] Tibor Neugebauer, *Moral Impossibility in the Petersburg Paradox : A Literature Survey and Experimental Evidence*, LSF Research Working Paper Series, Luxembourg School of Finance, University of Luxembourg, 41 p., 2010.
- [26] Blaise Pascal, *OEUVRES COMPLÈTES*, présentation et notes de L. Lafuma, Ed. du Seuil, 1963.
- [27] Ole Peters, *The trouble with Bernoulli 1738*, blog discussion, accès en ligne : <https://ergodicityeconomics.com/2018/02/16/the-trouble-with-bernoulli-1738/>, 2018.
- [28] Jean-Nicolas Rieucau, *Les entreprises où les hommes s'exposent à une perte, dans la vue d'un profit Condorcet et l'héritage de d'Alembert*, *Revue économique*, Vol. 49, No. 5, pp. 1365-1404, 1998.
- [29] Paul A. Samuelson *St. Petersburg Paradoxes : Defanged, Dissected, and Historically Described*, *J. of Econ. Literature*, Vol. 15, No. 1, pp. 24-55, 1977
- [30] Christian Seidl, *The St. Petersburg Paradox at 300*, *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 46, Num. 3, pp. 247-264, 2013.
- [31] O. Spieß, *Zur Vorgeschichte des Petersburger Problems*, *Die Werke Von Jakob Bernoulli*, band, Birkhauser, pp. 557-567, 1975.
- [32] Georges J. Stigler, *The Development of Utility Theor, II.*, *J. of Political Economy*, vol. 58, num. 5, pp. 373-396, 1950.
- [33] Stephen M. Stigler, *The Bernoullis of Basel*, *J. of Econometrics* 75, pp. 7-13, 1975.

- [34] Daniel Zajdenweber, *Équité et jeu de Saint-Petersbourg*, Revue économique, vol. 45, num. 1, pp. 21-46, 1994.