



HAL
open science

Dispersion dans un câble coaxial

Frédéric Bernardot, Camille Noûs

► **To cite this version:**

| Frédéric Bernardot, Camille Noûs. Dispersion dans un câble coaxial. 2022. hal-03988659

HAL Id: hal-03988659

<https://hal.science/hal-03988659>

Submitted on 21 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dispersion dans un câble coaxial

par Frédéric BERNARDOT et Camille NOÛS
UFR de physique, université Denis-Diderot Paris-7
frederic.bernardot@insp.jussieu.fr
camille.nous@cogitamus.fr

Les ondes électriques se propageant le long d'un câble coaxial montrent de la dispersion : la vitesse de phase d'une onde sinusoïdale dépend de la fréquence. On étudie ce phénomène de façon quantitative à l'aide d'une expérience d'interférences à deux ondes, dans laquelle la fréquence est balayée de zéro à 20 MHz. De plus, est également examiné l'effet produit par cette dispersion sur la propagation d'une impulsion électrique carrée dans un câble coaxial.

INTRODUCTION

Il est connu [1-4] que la vitesse de phase des ondes électriques dans un câble coaxial est donnée, en première approximation, par l'expression

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

où $c = 299\,792\,458$ m/s est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide [5], et où ϵ_r est la constante diélectrique de l'isolant séparant l'âme et le blindage du câble coaxial ; lorsque cet isolant est le polyéthylène, $\epsilon_r \approx 2,25$ et $v_0 \approx 2 \times 10^8$ m/s. Dans cette approximation, dont la dispersion est absente, il est d'usage de tenir compte de la dissipation provoquée par la résistance électrique finie de l'âme et du blindage du câble coaxial [3,4] ; en effet, on est naturellement conduit sur cette voie par l'observation expérimentale de l'amortissement d'ondes électriques sinusoïdales [3,6] ou d'impulsions [2,7] se propageant le long d'un câble coaxial.

Cependant, ce cadre de conceptions est incomplet : du fait de l'existence des relations de Kramers-Kronig [8] – qui sont elles-mêmes le reflet du principe de causalité –, si le câble coaxial montre de la dissipation (dépendant de la fréquence), alors il doit aussi montrer de la dispersion. L'expérience suivante permet de mettre cette dispersion en évidence.

1. EXPÉRIENCE D'INTERFÉRENCES À DEUX ONDES

On a réalisé une expérience d'interférences à deux ondes, de la manière décrite en figure 1. Un générateur de basses fréquences (GBF, Metrix GX 320) est branché à l'entrée $x = 0$ d'un câble coaxial (modèle URM 76) de longueur nominale $L = 100$ m ; l'extrémité $x = L$ du câble coaxial est court-circuitée. En entrée $x = 0$, est également connecté un oscilloscope (modèle Siglent SDS 1202 X-E, bande passante 200 MHz) à l'aide d'un câble court, de longueur 35 cm.

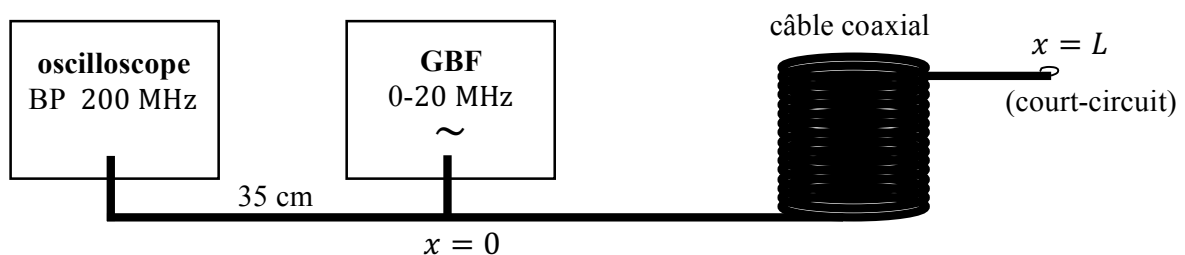


Figure 1 - Schéma de l'expérience d'interférences à deux ondes.

Sur l'oscilloscope est observée la superposition $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ de l'onde de tension

$$U_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

créée en $x = 0$ par le GBF, où $\omega = 2\pi f$ (avec $0 < f < 20$ MHz) et $U_0/\sqrt{2} \approx 4$ V, et de

$$U_2(t) = U_0 e^{-2\alpha L} \cos(\omega t - 2kL + \pi)$$

qui est l'onde de tension réfléchie en $x = L$ lorsqu'elle parvient en $x = 0$, après avoir parcouru la distance $2L$. Dans cette dernière expression, α est le coefficient d'atténuation en amplitude, k est le nombre d'onde (angulaire) – avec $k = \omega/v_0$ en l'absence de dispersion – et le déphasage π supplémentaire provient de la présence du court-circuit en l'extrémité $x = L$ du câble coaxial. Il ne se produit pas de réflexion en $x = 0$ de l'onde retour du fait de la résistance d'entrée $R_G = 50 \Omega$ du générateur, qui coïncide avec l'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$ du câble coaxial. L'annexe 1 fournit des éléments sur les ondes électriques dans un câble coaxial.

La tension efficace associée à $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ est $U_{eff} = \sqrt{\langle U(t)^2 \rangle}$, où $\langle \dots \rangle$ note une moyenne temporelle. Il vient alors, tous calculs faits :

$$U_{eff} = U_{eff}^0 \sqrt{1 - 2 e^{-2\alpha L} \cos(2kL) + e^{-4\alpha L}},$$

avec $U_{eff}^0 = U_0/\sqrt{2}$. La figure 2 montre les résultats expérimentaux (disques noirs) de U_{eff}/U_{eff}^0 en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$; les mesures de U_{eff} (le câble coaxial étant branché sur le GBF) et de $2U_{eff}^0$ (le câble coaxial étant débranché) ont été réalisées sur l'oscilloscope même, en employant constamment le gain de 2 V/division.

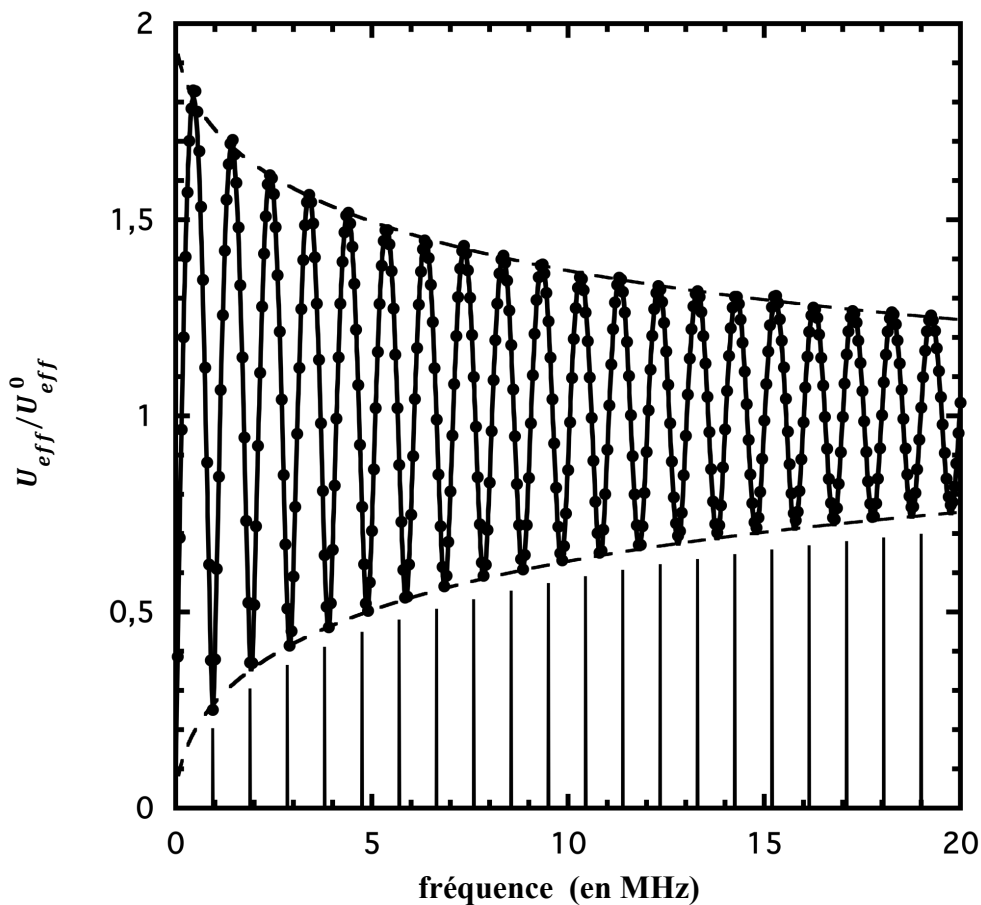


Figure 2 - Expérience d'interférences à deux ondes. Les disques noirs sont les données expérimentales U_{eff}/U_{eff}^0 en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$; les lignes en tirets sont les enveloppes des oscillations ; les lignes verticales en traits fins indiquent la position en fréquence des minima, en l'absence de dispersion ; la ligne continue est un ajustement des points expérimentaux, en présence de dispersion.

Les points expérimentaux tracent une courbe oscillante, comme attendu d'après le terme en $\cos(2kL)$ présent dans la formule précédente ; les enveloppes de ces oscillations sont alors

$$U_{eff}^{min} = U_{eff}^0 (1 - e^{-2\alpha L}) \quad \text{et} \quad U_{eff}^{MAX} = U_{eff}^0 (1 + e^{-2\alpha L}).$$

Le coefficient d'atténuation linéique α provient de la résistivité électrique finie de l'âme et du blindage du câble coaxial, et de l'*effet de peau* [3,9] qui fait que le courant électrique circule sur une couche d'épaisseur $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$ en surfaces de l'âme et du blindage. Lorsque la fréquence est assez élevée pour que l'épaisseur de peau δ soit nettement inférieure aux épaisseurs des deux conducteurs ($f \gtrsim 0,6$ MHz), il vient l'expression suivante du coefficient α , cf. annexe 2 :

$$\alpha(\omega) = A\sqrt{\omega},$$

A étant une constante. Les deux courbes enveloppes sur la figure 2 (lignes en tirets) ont été obtenues avec le paramètre $2\sqrt{2\pi}AL \approx 0,31 \text{ MHz}^{-1/2}$; l'ajustement de ces enveloppes sur les 20 maxima et 20 minima des oscillations des points expérimentaux est très satisfaisant.

Les minima d'oscillation des points expérimentaux sont attendus lorsque la fréquence f est telle que $\cos(2kL) = +1$. En l'absence de dispersion, $k = \omega/v_0$ et ces minima devraient alors se situer aux fréquences $f_m = m v_0/2L$ (m entier positif) régulièrement espacées. Cependant, en se fondant sur la valeur $f_1 = 0,950$ MHz correspondant au premier minimum, on a représenté par des lignes verticales en traits fins, sur la figure 2, les positions $f_m = mf_1$, et l'on constate que ces lignes *ne* pointent *pas* la fréquence des minima d'ordre élevé : un clair décalage apparaît dès le 4^e ordre. La conclusion s'impose donc : la relation de dispersion des ondes électriques sur le câble coaxial *n'est pas* $k = \omega/v_0$, c'est-à-dire que *la propagation de ces ondes est dispersive*.

2. RELATION DE DISPERSION

Comme l'expression $\alpha(\omega) = A\sqrt{\omega}$ du coefficient d'atténuation linéique est tout à fait satisfaisante pour reproduire les enveloppes des oscillations expérimentales de la figure 2, on la conserve dans la formule de Kramers-Kronig qui permet d'atteindre la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ à partir du coefficient d'atténuation $\alpha(\omega)$ [8] :

$$v_\varphi(\omega)^{-1} - v_0^{-1} = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega',$$

où l'indication P signifie que l'intégrale est prise en valeur principale. Le membre de droite de cette formule est alors trouvé égal à $A/\sqrt{\omega}$, cf. annexe 2, et l'on en déduit la relation de dispersion des ondes électriques dans un câble coaxial :

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi(\omega)} = \frac{\omega}{v_0} + A\sqrt{\omega}.$$

Cette relation de dispersion est utilisée pour ajuster les points expérimentaux de la figure 2. L'ajustement obtenu (en ligne continue) est pleinement satisfaisant, et fournit les valeurs suivantes des deux seuls paramètres d'ajustement :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2\pi}AL = (0,31397 \pm 0,00080) \text{ MHz}^{-1/2} \\ 4\pi \frac{L}{v_0} = (6,28990 \pm 0,00034) \text{ MHz}^{-1}. \end{cases}$$

D'après les caractéristiques techniques du câble coaxial employé, $v_0/c = 0,667$ (il s'agit d'un câble coaxial dont l'isolant est en polyéthylène) ; on en déduit la longueur

$$L = 100, (1) \text{ m}$$

qui est en accord avec la longueur nominale de 100 m. La valeur obtenue pour la constante A est alors $A = 6,26 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$; cette valeur se compare favorablement avec celle qui est déduite des caractéristiques du câble coaxial (cf. annexe 2).

Cependant, une question reste en suspens, celle de l'origine physique du terme supplémentaire $A\sqrt{\omega}$ apparaissant dans la relation de dispersion. On précise dans l'annexe 2 que ce terme provient de la *dépendance en ω de l'inductance linéique* du câble coaxial [10,11], du fait que le courant électrique dans l'âme et le blindage est distribué sur l'épaisseur de peau $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$: comme δ dépend de la fréquence, il en est de même de l'auto-inductance linéique.

On remarquera, pour conclure cette section, qu'il est possible de mettre plus simplement en évidence la dispersion dans un câble coaxial en exploitant uniquement les fréquences des minima de la figure 2 [12]. Une autre possibilité est la mesure de la vitesse de phase, avec une extrémité portant une charge adaptée de 50Ω , et l'étude de sa croissance avec la fréquence [4].

3. PROPAGATION D'UNE IMPULSION

Une impulsion électrique dans un câble coaxial se déforme au cours de sa propagation, à cause de la dissipation et de la dispersion. En effet, en prenant l'exemple d'une impulsion de tension carrée en entrée $U(x = 0, t)$ de durée τ , existant entre $t = -\tau/2$ et $t = +\tau/2$, et d'amplitude constante U_0 , son spectre de Fourier possède l'expression

$$\tilde{U}(0, \omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} U_0 e^{-i\omega t} dt = U_0 \tau \text{sinc}[\omega\tau/2],$$

où $\text{sinc}[w] = (\sin w)/w$; par transformation de Fourier inverse, on en déduit la forme suivante de l'impulsion $U(x, t)$ le long du câble coaxial, supposé ici infini suivant les $x > 0$:

$$U(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \tilde{U}(0, \omega) e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx).$$

Ainsi, puisque chaque composante de Fourier $\tilde{U}(0, \omega) \cos \omega t$ se propage avec une vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \omega/k$ et une atténuation linéique $\alpha(\omega)$ qui dépendent de la pulsation ω , l'impulsion électrique ne peut que se déformer au cours de sa propagation.

La figure 3 schématise l'expérience d'étude d'une impulsion électrique se propageant dans le câble coaxial déjà employé dans l'expérience précédente. Le générateur de basses fréquences a été remplacé par un générateur d'impulsions (modèle TTI TGP110) ; l'oscilloscope est maintenant un modèle Tektronix TDS 2014B (bande passante 100 MHz), pour une simple raison de facilité d'interfaçage avec l'acquisition informatisée des données.

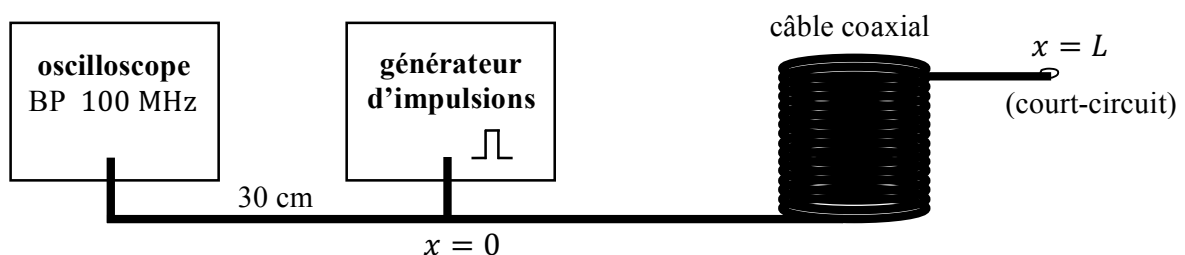


Figure 3 - Schéma de l'expérience de propagation d'une impulsion.

Les impulsions carrées créées par le générateur sont choisies de durée $\tau = 100$ ns. La figure 4 représente l'impulsion de tension $U_{aller}(t)$ à l'entrée du câble coaxial, telle qu'observée sur l'oscilloscope : les disques vides sont les points expérimentaux, et la ligne continue matérialise l'approximation de forme exactement carrée ; l'amplitude vaut $U_0 = 3,0$ V, et le temps sur l'axe horizontal a été décalé de 89 ns de façon que l'impulsion carrée existe entre -50 ns et $+50$ ns.

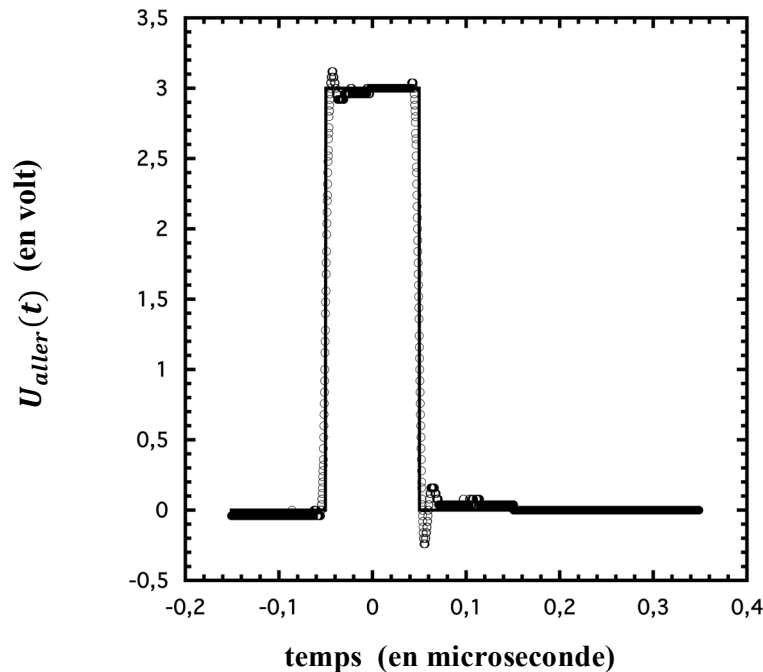


Figure 4 - Impulsion électrique, de durée $\tau = 100$ ns, envoyée sur l'entrée du câble coaxial. La ligne continue est un ajustement des données expérimentales (disques vides) par une impulsion carrée.

Ce même décalage de 89 ns a été opéré sur la figure 5, qui montre l'impulsion électrique après un aller-retour de longueur $2L$ dans le câble coaxial (disques vides) : l'allure de cette impulsion est très nettement éloignée de celle qui correspondrait à une propagation dans un câble coaxial idéal, c'est-à-dire sans dissipation ni dispersion (ligne en pointillés). D'après ce qui précède, l'impulsion de retour doit être décrite par l'expression

$$U_{retour}(t) = \frac{U_0 \tau}{\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{sinc}[\omega\tau/2] e^{-2AL\sqrt{\omega}} \cos(\omega[t - 2L/v_0] - 2AL\sqrt{\omega} + \pi).$$

Un calcul numérique utilisant cette formule, dont tous les paramètres sont connus, produit la ligne continue de la figure 5 ; cet ajustement des points expérimentaux est très satisfaisant (le léger désaccord en amplitude est discuté plus loin), puisqu'il rend compte des changements de pente instantanés lors de la naissance puis de l'extinction de l'impulsion, ainsi que des caractères progressifs de son apparition puis de sa disparition. Pour comparaison, la ligne en tirets de la figure 5 montre ce que serait l'impulsion électrique après un aller-retour si la dispersion n'existait pas : non seulement ce n'est pas du tout la forme temporelle observée, mais cela est aussi heureux car sinon la causalité serait violée, l'impulsion de retour débutant *avant* la date $2L/v_0 - \tau/2 = 0,951 \mu\text{s}$! Cette analyse met ainsi clairement en évidence que la dispersion contribue de manière primordiale à la forme d'une impulsion électrique carrée lorsqu'elle se propage dans un câble coaxial.

La date $2L/v_0 - \tau/2$ à laquelle apparaît l'impulsion de retour correspond au délai temporel $2L/v_0 = 1001$ ns ; cette valeur est en plein accord avec l'expérience de la section 1. En outre, il est aussi utile de remarquer que l'intégrale ci-dessus peut être calculée exactement [12,13] :

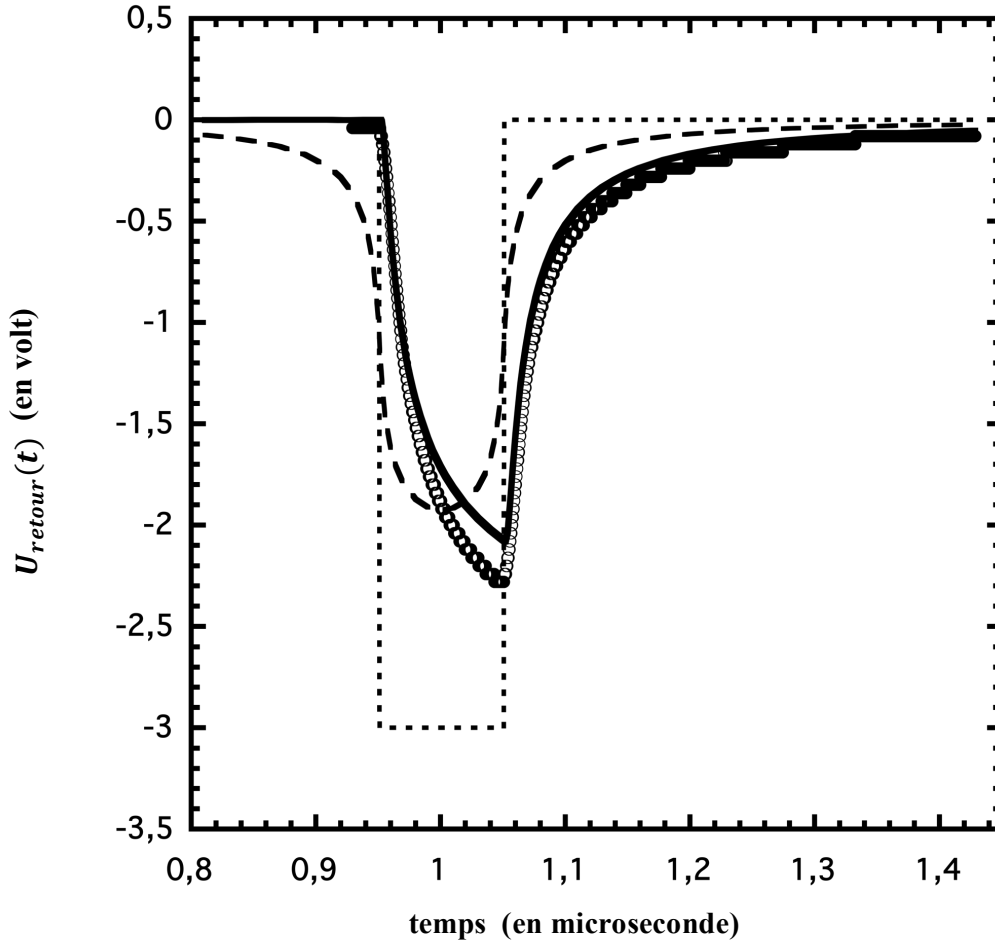


Figure 5 - Impulsion électrique après un aller-retour dans le câble coaxial. Disques vides : données expérimentales ; ligne continue : calcul *avec* dispersion (et dissipation) ; ligne en tirets : calcul *sans* dispersion (avec dissipation) ; ligne en pointillés : cas d'une propagation dans un câble coaxial idéal.

$$U_{retour}(t) = 0 \quad \text{si } t - 2L/v_0 \leq -\tau/2,$$

$$U_{retour}(t) = -U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}AL}{\sqrt{t - 2L/v_0 + \tau/2}}\right) \quad \text{si } -\tau/2 \leq t - 2L/v_0 \leq \tau/2,$$

$$\frac{U_{retour}(t)}{U_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}AL}{\sqrt{t - 2L/v_0 - \tau/2}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}AL}{\sqrt{t - 2L/v_0 + \tau/2}}\right) \quad \text{si } \tau/2 \leq t - 2L/v_0,$$

où $\operatorname{erfc}(u) = (2/\sqrt{\pi}) \int_u^\infty \exp(-z^2) dz$ est la « fonction erreur complémentaire ». L'emploi de cette loi exacte pour $U_{retour}(t)$ reproduit rigoureusement la ligne continue de la figure 5, qui est obtenue numériquement : le léger désaccord entre cette ligne continue calculée et les points expérimentaux ne provient donc pas du calcul numérique, en lequel on peut avoir entièrement confiance. Il est dû au fait que la résistance de sortie du générateur d'impulsions n'est pas exactement adaptée à l'impédance caractéristique du câble coaxial ; cette petite imperfection expérimentale fait que toutes les lois théoriques précédentes pour $U_{retour}(t)$ doivent être multipliées par un facteur légèrement plus grand que l'unité, cf. annexe 4. Bien sûr, ce raffinement ne modifie en rien la validité de la discussion présentée dans cette section.

CONCLUSION

La propagation d'ondes électriques sinusoïdales le long d'un câble coaxial, pour des fréquences allant jusqu'à 20 MHz, révèle une atténuation linéique et une relation de dispersion conformes aux

expressions encadrées des sections 1 et 2, qui proviennent de la résistivité finie de l'âme et du blindage. Cette description, réputée valable jusqu'à des fréquences de plusieurs centaines de MHz lorsque le diélectrique est le polyéthylène [12,14], s'impose dès les fréquences de quelques MHz dans l'expérience d'interférences à deux ondes qui a été présentée. Ces propriétés de dissipation et de dispersion d'un câble coaxial se font particulièrement ressentir sur la déformation d'une impulsion électrique carrée, au cours de sa propagation.

Aux fréquences plus élevées (au-delà de 500 MHz), interviennent les propriétés dissipative et dispersive du diélectrique [6,15]. Cependant, une étude dans ce domaine de fréquences requiert des matériels qui ne sont guère à la portée de la collection d'un enseignement académique...

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient encore Yves Chanteux pour le prêt des matériels de la préparation à l'Agrégation interne de physique-chimie de l'université de Paris Denis-Diderot Paris-7, et également encore Jérôme Jovet pour sa contribution à l'expérience impulsionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Moreau « Trois expériences d'électricité » *Bull. Un. Phys.* n° 564, p. 805-816, avril 1974
- [2] G. Requin « Le câble de Melde » *Bull. Un. Phys.* vol. 93, n° 812, p. 431-443, mars 1999
- [3] Concours externe de l'Agrégation de physique 2008, composition de physique (2° partie), *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* n° 909 (2), p. 20-26, décembre 2008
- [4] V. M. Lenart, R. M. Szmoski, R. F. Turchiello, and S. L. Gómez “Standing waves in a coaxial cable: A simple and low-cost experiment for an instructional wave laboratory” *Am. J. Phys.* vol. 89, n° 1, p. 105-110, january 2021
- [5] Brochure sur *Le Système international d'unités*, 9^e édition, 2019, p. 15
<https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf>
- [6] A. Deiber, O. Kempf et L. Markiewicz « Transition de courants volumiques / surfaciques dans un câble coaxial » *Bull. Un. Phys.* vol. 95, n° 831, p. 263-282, février 2001
- [7] L. Gray “Fast pulses in a coaxial cable” *Phys. Teach.* vol. 23, n° 2, p. 91-92, february 1985
- [8] N. G. van Kampen, F. Lurçat « Causalité et relations de Kramers-Kronig » *J. Phys. Radium* tome 22, n° 3, p. 179-191, mars 1961
- [9] A. E. Blackwell, A. P. Rotunno, and S. Aubin “Demonstration of the lateral AC skin effect using a pickup coil” *Am. J. Phys.* vol. 88, n° 8, p. 676-684, august 2020
- [10] J. Audet “Coaxial cable delay - Theory *Why is the delay changing over frequency?*”, en accès libre sur l'Internet : <http://ve2azx.net>
- [11] S. Ellingson “Dispersion in coaxial cables” *Long Wavelength Array Memo Series*, Memo n° 136, june 2008 (en accès libre sur l'Internet)
- [12] G. Fidecaro “The high frequency properties of a coaxial cable and the distortion of fast pulses” *Il Nuovo Cimento* vol. 15, serie 10, suppl. n° 2, p. 254-263, march 1960
- [13] E. S. Smith “Dispersion in commonly used cables” *Jefferson Lab Experimental Hall B CLAS-NOTE-91-007, CEBAF TN-91-022*, april 1991 (en accès libre sur l'Internet)
- [14] G. Brianti “Distortion of fast pulses in coaxial cables: numerical analysis and applications” *rapport CERN 65-10*, MSC Division, may 1965 (en accès libre sur l'Internet)
- [15] J. S. Bobowski “Modeling and measuring the non-ideal characteristics of transmission lines” *Am. J. Phys.* vol. 89, n° 1, p. 96-104, january 2021
- [16] T. B. Boykin “A more physical formulation of the self-inductance for spatially distributed circuits” *Am. J. Phys.* vol. 67, n° 4, p. 320-324, april 1999
- [17] J.-M. Dusseau « Circuits électriques utilisant certains éléments constitués par des câbles coaxiaux » *Bull. Un. Phys.* vol. 88, n° 768, p. 1579-1592, novembre 1994
- [18] G. S. Smith “A simple derivation for the skin effect in a round wire” *Eur. J. Phys.* vol. 35, n° 2, p. 025002 (13 pages), march 2014
- [19] S. A. Schelkunoff “The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields” *Bell Syst. Tech. J.* vol. 13, n° 4, p. 532-579, october 1934

ANNEXE 1

Première approche du câble coaxial

Un câble coaxial est formé d'un conducteur central cylindrique (âme), de rayon a , entouré d'un conducteur creux cylindrique (blindage), de même axe que celui de l'âme et de rayon intérieur b . L'espace compris entre l'âme et le blindage est occupé par un isolant de constante diélectrique ϵ_r . Des schémas d'un câble coaxial, en coupe droite et en coupe axiale, sont donnés en figure 6 ; pour des photographies, voir la réf. [6]. Une première approche consiste à considérer que l'âme et le blindage sont des conducteurs parfaits, et à décrire un tronçon élémentaire de longueur dx dans le cadre de l'ARQS. Ce tronçon est alors caractérisé par sa capacité $\Gamma_0 dx$ et son inductance $\Lambda_0 dx$.



Figure 6 - Schémas d'un câble coaxial, en coupe droite (à gauche) et en coupe axiale (à droite).

1.1 Capacité et inductance linéiques

La *capacité linéique* Γ_0 est déterminée à l'aide d'un raisonnement standard de l'électrostatique. Dans l'isolant ($a < r < b$), le potentiel électrostatique $V(r)$ suit l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$, d'où l'expression $V(r) = [V_b - V_a] \ln(r/a) / \ln(b/a) + V_a$, puis celle du champ électrostatique (purement radial) : $E_r(r) = -V'(r) = [V_a - V_b] / r \ln(b/a)$. La charge surfacique sur l'âme est alors $\sigma_a = \epsilon_0 \epsilon_r E_r(a)$, d'où l'expression de la charge totale dQ_a sur le tronçon dx : $dQ_a = 2\pi a dx \sigma_a = \Gamma_0 dx [V_a - V_b]$, avec Γ_0 donné par

$$\Gamma_0 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)} .$$

Pour le câble coaxial employé ici (modèle URM 76), $\epsilon_r \approx 2,25$, $a \approx 0,48$ mm et $b \approx 1,48$ mm, d'où la valeur calculée $\Gamma_0 \approx 110$ pF/m. Le constructeur annonce 98 ± 5 pF/m.

La détermination de l'*inductance linéique* Λ_0 résulte d'un raisonnement non standard de la magnétostatique, du fait que le courant électrique dans le câble coaxial est spatialement distribué. Il est certes possible d'obtenir l'expression de l'inductance $\Lambda_0 dx$ du tronçon dx à l'aide d'une démarche qui garde la trace des effets d'auto-induction et d'induction mutuelle parmi des boucles élémentaires de courant, en lesquelles le courant dans le tronçon est décomposé [16]. Cependant, par souci de simplicité, on se contente de présenter ici la détermination de $\Lambda_0 dx$ à l'aide d'un raisonnement énergétique [17] : l'énergie $\int (\vec{B}^2 / 2\mu_0) d^3r$ dans le tronçon dx est identifiée à $\Lambda_0 dx I^2 / 2$, où I est l'intensité du courant circulant sur l'âme et sur le blindage (en sens inverses). Le champ magnétique \vec{B} est purement orthoradial, et le théorème d'Ampère montre que $B_\theta(r)$ n'est non nul que dans l'isolant ($a < r < b$) : $B_\theta(r) = \mu_0 I / 2\pi r$; l'élément de volume en coordonnées cylindriques est $d^3r = r dr d\theta dx$, et le développement de l'intégrale sur r et θ conduit à

$$\Lambda_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a) .$$

Pour le câble coaxial employé ici, on calcule $\Lambda_0 \approx 225$ nH/m.

1.2 Équations des télégraphistes

Avec l'approche choisie dans cette annexe, un tronçon dx du câble coaxial est donc représenté par le schéma électrique de la figure 7 ci-dessous.

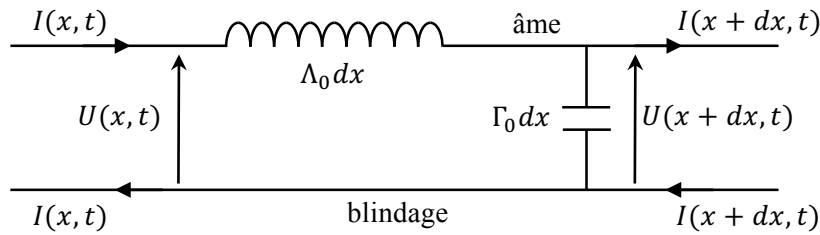


Figure 7 - Représentation électrocinétique d'un tronçon dx du câble coaxial idéal.

La loi des mailles conduit à $U(x, t) = \Lambda_0 dx \frac{\partial I}{\partial t} + U(x + dx, t)$, où $U(x, t) = V_a - V_b$ est la différence de potentiel entre l'âme et le blindage, à la cote x et à l'instant t . On en déduit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\Lambda_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (1)$$

Et la loi des nœuds donne $I(x, t) = \Gamma_0 dx \frac{\partial U}{\partial t} + I(x + dx, t)$, puisque la charge électrique sur le condensateur de capacité $\Gamma_0 dx$ est $\Gamma_0 dx U(x + dx, t)$ – du côté de l'âme –, d'où l'on tire :

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\Gamma_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) ci-dessus portent le nom d'équations des télégraphistes (dans le cas particulier d'un câble coaxial idéal).

1.3 Équation d'onde, impédance caractéristique

Des équations (1) et (2), on déduit que la tension $U(x, t)$ obéit à l'équation d'onde

$$v_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \text{avec la célérité } v_0 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_0 \Lambda_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}};$$

l'intensité $I(x, t)$ suit la même équation. En considérant une onde se propageant dans le sens des x croissants, on a $U_+(x, t) = f(t - x/v_0)$ et l'équation (1) [ou l'équation (2)] fournit l'intensité $I_+(x, t) = U_+(x, t)/Z_0$ associée à cette onde, avec l'impédance caractéristique

$$Z_0 = \sqrt{\Lambda_0 / \Gamma_0}.$$

Pour une onde vers les x décroissants, $U_-(x, t) = g(t + x/v_0)$ et $I_-(x, t) = -U_-(x, t)/Z_0$. Avec le câble coaxial employé ici, on calcule $Z_0 \approx 45 \Omega$; le constructeur annonce $50 \pm 2 \Omega$.

1.4 Réflexion d'une onde sur une résistance terminale

On installe une résistance R en extrémité du câble coaxial. La loi d'Ohm écrite en $x = L$: $U_+(L, t) + U_-(L, t) = R[U_+(L, t) - U_-(L, t)]/Z_0$, conduit alors au coefficient de réflexion

$$\mathcal{R}_U = \frac{U_-(L, t)}{U_+(L, t)} = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}.$$

ANNEXE 2

Effets de la résistivité de l'âme et du blindage

Lorsque l'on prend en compte la résistivité non nulle de l'âme et du blindage du câble coaxial, le schéma électrique de la figure 7 s'en trouve modifié :

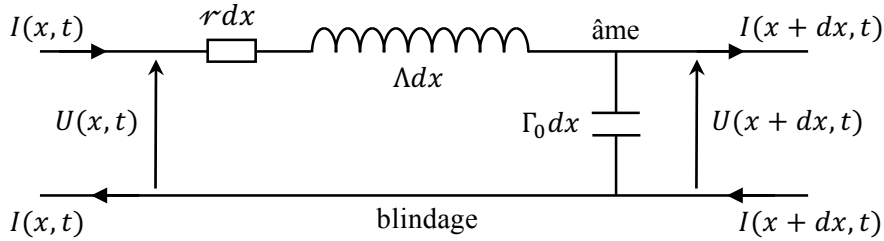


Figure 8 - Représentation électrocinétique d'un tronçon dx du câble coaxial réel.

Sur la figure 8, r est la *résistance linéique* du câble coaxial. On notera que l'inductance linéique Λ n'est plus égale à Λ_0 : on a $\Lambda = \Lambda_0 + \ell$, où ℓ est exprimé plus bas.

2.1 Résistance et inductance linéiques

En régime continu, la résistance linéique est naturellement $r_{\equiv} = \frac{\rho_a}{\pi a^2} + \frac{\rho_b}{2\pi b e}$, où ρ_a et ρ_b sont les résistivités de l'âme et du blindage, respectivement, et où e est l'épaisseur du blindage ($e \ll b$). Par ailleurs, l'inductance linéique Λ est modifiée par rapport à la valeur Λ_0 du fait que le champ magnétique n'est pas nul à l'intérieur de l'âme et du blindage ; l'expression de Λ en régime continu est démontrée dans les réfs [16,17].

Dans le cadre présent, on se place en régime sinusoïdal permanent, à la pulsation ω . En ce cas, le courant électrique circule au voisinage des surfaces en regard des conducteurs, sur une épaisseur caractéristique appelée *épaisseur de peau* [9] :

$$\delta_a = \sqrt{\frac{2\rho_a}{\mu_0\omega}} \quad \text{dans l'âme} \quad \text{et} \quad \delta_b = \sqrt{\frac{2\rho_b}{\mu_0\omega}} \quad \text{dans le blindage} ;$$

ces expressions sont redémontrées dans la suite de cette annexe. Si l'on prend $\rho_a = \rho_b = \rho_{Cu}$ avec la résistivité du cuivre $\rho_{Cu} = 1,76 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ (à 25 °C), alors $\delta_a = \delta_b \approx 67 \mu\text{m}$ à la fréquence $f = 1 \text{ MHz}$. Lorsque $\delta_b < e/4$ ($e \approx 0,34 \text{ mm}$ pour le câble coaxial employé), ce qui se produit pour les fréquences $f > 0,62 \text{ MHz}$, on a *a fortiori* $\delta_a < a/4$ et r peut être écrit sous la forme

$$r = \frac{\rho_a}{2\pi a \delta_a} + \frac{\rho_b}{2\pi b \delta_b} ;$$

la résistance linéique r croît avec la pulsation ω , proportionnellement à $\sqrt{\omega}$.

En outre, du fait que le courant électrique existe dans les volumes de l'âme et du blindage, et que ce courant est distribué sur les épaisseurs de peau δ_a et δ_b , l'inductance linéique Λ du câble coaxial possède l'expression suivante [11], cf. section 2.4 ci-après :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \ell \quad \text{où} \quad \ell = \frac{\mu_0 \delta_a}{4\pi a} + \frac{\mu_0 \delta_b}{4\pi b} ;$$

l'inductance linéique additionnelle ℓ est proportionnelle à $1/\sqrt{\omega}$: elle décroît avec la pulsation.

2.2 Équations des télégraphistes en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω , la tension $U(x, t)$ et l'intensité $I(x, t)$ sont écrites à l'aide de leur représentation complexe :

$$\underline{U}(x, t) = \mathcal{U}(x) e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{I}(x, t) = \mathcal{J}(x) e^{i\omega t} .$$

Comme à l'annexe 1, on peut écrire $\mathcal{U}(x) = r dx \mathcal{J}(x) + i \Lambda dx \omega \mathcal{J}(x) + \mathcal{U}(x + dx)$, d'où :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dx} = -i\Lambda\omega\mathcal{J}(x) - r\mathcal{J}(x) , \quad (1')$$

et aussi $\mathcal{J}(x) = i\Gamma_0 dx \omega \mathcal{U}(x + dx) + \mathcal{J}(x + dx)$, ce qui donne :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = -i\Gamma_0\omega\mathcal{U}(x) . \quad (2')$$

On peut noter que l'équation (2) de l'annexe 1 est inchangée, et fournit l'équation (2') en régime sinusoïdal permanent ; les modifications $r \neq 0$ et $\ell \neq 0$ ne touchent que l'équation (1).

2.3 Onde sinusoïdale progressive et amortie

On cherche à faire se propager une onde électrique le long du câble coaxial, dans le sens des x croissants : $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_0 \exp(-i\beta x)$ et $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}_0 \exp(-i\beta x)$, avec la constante de propagation

$$\beta = k - i\alpha \quad (k > 0 \text{ et } \alpha > 0) ;$$

k est le nombre d'onde (angulaire) et α est le coefficient d'atténuation linéique. Les équations des télégraphistes (1') et (2') fournissent alors le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} \beta \mathcal{U}_0 = \Lambda\omega\mathcal{J}_0 - ir\mathcal{J}_0 & (3) \\ \beta \mathcal{J}_0 = \Gamma_0\omega\mathcal{U}_0 . & (4) \end{cases}$$

Ces équations (3) et (4) impliquent, puisque l'onde est non nulle ($\mathcal{U}_0 \neq 0$ et $\mathcal{J}_0 \neq 0$) :

$$\beta^2 = \Gamma_0(\Lambda_0 + \ell)\omega^2 - ir\Gamma_0\omega .$$

On en déduit, à l'ordre un en r et ℓ , le coefficient d'atténuation en amplitude :

$$\alpha = \frac{r}{2Z_0} = A\sqrt{\omega} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\sqrt{\mu_0/2}}{4\pi Z_0} \left(\frac{\sqrt{\rho_a}}{a} + \frac{\sqrt{\rho_b}}{b} \right) , \quad (5)$$

et la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{v_0} + \frac{\ell\omega}{2Z_0} = \frac{\omega}{v_0} + A\sqrt{\omega} . \quad (6)$$

Trois remarques

(i) Avec des résistivités $\rho_a = \rho_b = \rho_{Cu} = 1,76 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, on calcule le coefficient A pour le câble coaxial étudié ($a \approx 0,48 \text{ mm}$, $b \approx 1,48 \text{ mm}$ et $Z_0 \approx 50 \Omega$) : $A \approx 4,6 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$; cette valeur est du même ordre de grandeur que celle qui a été obtenue expérimentalement dans la section 2, tout en étant un peu plus petite. Cependant, l'âme n'est pas un conducteur cylindrique plein,

mais est faite de sept fils de cuivre étamés et toronnés ; et le blindage n'est pas un conducteur massif lui non plus, mais est fait de fils de cuivre nus tressés. En conséquence, les résistivités ρ_a et ρ_b sont plus grandes que celle du cuivre. En suivant la réf. [11], sur un câble coaxial semblable à celui étudié ici, on prend $\rho_a = 2\rho_{Cu}$ et $\rho_b = 10\rho_{Cu}$, ce qui conduit à $A \approx 8,5 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$; cette fois-ci, la valeur calculée est un peu plus grande que celle mesurée dans section 2. Dans la réf. [11], le blindage était une tresse de fils de cuivre étamés : ici, ρ_b est en fait plus petit que $10\rho_{Cu}$. Des mesures à 4 points, en régime continu, ont donné les résistances linéiques $r_a^- = 31 \text{ m}\Omega/\text{m}$ pour l'âme et $r_b^- = 11 \text{ m}\Omega/\text{m}$ pour le blindage, d'où $\rho_a \approx 1,3\rho_{Cu}$ et $\rho_b \approx 2,2\rho_{Cu}$; puis on tire alors la valeur $A \approx 5,7 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$, qui est proche de celle trouvée dans la section 2.

(ii) L'impédance caractéristique $Z_c = \mathcal{U}_0/\mathcal{J}_0$ n'est pas exactement égale à Z_0 . On s'en aperçoit par division membre à membre des équations (3) et (4) ; il vient, à l'ordre un en r ($\ell\omega = r$) :

$$Z_c = Z_0 + \frac{1-i}{\Gamma_0\omega} \frac{r}{2Z_0}, \quad \text{soit} \quad Z_c = Z_0 \left[1 + (1-i)A \frac{v_0}{\sqrt{\omega}} \right].$$

En utilisant la valeur $A = 6,26 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$ déterminée dans la section 2 et $v_0/c = 0,667$, on peut calculer $Av_0/\sqrt{\omega} \approx 0,050$ à la fréquence de 1 MHz.

(iii) Les expressions de α et de k fournies par les équations (5) et (6) sont conformes à la relation de Kramers-Kronig qui est mentionnée au début de la section 2. En effet, on a avec (5) :

$$\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \frac{4}{\pi} \frac{A}{\sqrt{\omega}} \left\{ \int_0^{1-\eta} \frac{u^2 du}{u^4 - 1} + \int_{1+\eta}^\infty \frac{u^2 du}{u^4 - 1} \right\},$$

où $\eta \rightarrow 0^+$ (a été utilisé le changement de variable $\omega' = \omega u^2$). Ensuite, la seconde intégrale du membre de droite est modifiée avec le changement de variable $u = 1/w$, ce qui conduit à

$$v_\varphi(\omega)^{-1} - v_0^{-1} = \frac{4}{\pi} \frac{A}{\sqrt{\omega}} \left\{ \int_0^{1-\eta} \frac{1-u^2}{1-u^4} du + \int_{1-\eta}^{1-\eta+\eta^2} \frac{du}{1-u^4} \right\}.$$

La première intégrale a pour intégrande $1/(1+u^2)$ et vaut $\pi/4$; la seconde tend vers zéro pour $\eta \rightarrow 0^+$ (le changement de variable $u = 1 - \eta + u'$ mène aisément à cette conclusion). Il reste donc $v_\varphi(\omega)^{-1} - v_0^{-1} = A/\sqrt{\omega}$, ce qui correspond à la relation de dispersion (6).

2.4 Expressions de δ , r et ℓ

Dans une première approche de l'effet de peau, on considère en régime quasi statique un courant électrique de densité volumique $\vec{j} = \text{Re}\{\vec{j}\}$ avec $\vec{j} = j_x(y) e^{i\omega t} \vec{u}_x$, circulant dans un conducteur de résistivité ρ qui occupe tout le demi-espace $y < 0$. Les champs électrique $\vec{\mathcal{E}} = \rho\vec{j}$ et magnétique $\vec{\mathcal{B}}$ dans ce conducteur obéissent aux équations de Maxwell :

$$\bullet \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\mathcal{E}} = -i\omega\vec{\mathcal{B}} \text{ fournit } \vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_z(y) e^{i\omega t} \vec{u}_z \text{ et } \rho \frac{dj_x}{dy} = i\omega\mathcal{B}_z(y); \quad (7)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{j} \text{ donne } \frac{d\mathcal{B}_z}{dy} = \mu_0 j_x(y); \quad (8)$$

$$\bullet \quad \text{div}\vec{\mathcal{E}} = 0 \text{ (pas de charge volumique) et } \text{div}\vec{\mathcal{B}} = 0 \text{ sont vérifiés.}$$

Les équations (7) et (8) fournissent l'équation suivante sur $j_x(y)$ seul :

$$\frac{d^2 j_x}{dy^2} = \frac{2i}{\delta^2} j_x(y), \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$$

est l'épaisseur de peau. On en déduit, à l'intérieur du conducteur ($y < 0$) :

$$j_x(y) = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_x(y) = j_0 \exp\left(\frac{1+i}{\delta} y\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_z(y) = \mu_0 \frac{\delta}{1+i} j_0 \exp\left(\frac{1+i}{\delta} y\right).$$

Ainsi la densité de courant, mais aussi les champs électrique et magnétique, sont-ils confinés au voisinage de la surface $y = 0$ du conducteur, sur l'épaisseur caractéristique δ .

Ces résultats sont généralisés aux cas de l'âme et du blindage d'un câble coaxial, sous les hypothèses $\delta_a \ll a$ et $\delta_b \ll e$ (cette généralisation est justifiée dans l'annexe 3) :

- dans l'âme ($r < a$),

$$\begin{cases} j_x^{(a)}(r) = \frac{1}{\rho_a} \mathcal{E}_x^{(a)}(r) \simeq j_0^{(a)} \exp\left(\frac{1+i}{\delta_a} [r-a]\right) \\ \mathcal{B}_\theta^{(a)}(r) \simeq \mu_0 \frac{\delta_a}{1+i} j_0^{(a)} \exp\left(\frac{1+i}{\delta_a} [r-a]\right); \end{cases}$$

- dans le blindage ($r > b$),

$$\begin{cases} j_x^{(b)}(r) = \frac{1}{\rho_b} \mathcal{E}_x^{(b)}(r) \simeq j_0^{(b)} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta_b} [r-b]\right) \\ \mathcal{B}_\theta^{(b)}(r) \simeq -\mu_0 \frac{\delta_b}{1+i} j_0^{(b)} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta_b} [r-b]\right). \end{cases}$$

La résistance linéique r_a de l'âme est déterminée avec un raisonnement énergétique : la puissance moyenne $dP_{\text{joule}}^{(a)}$ dissipée par effet Joule dans un tronçon dx de l'âme est $r_a dx I_{eff}^2$, où I_{eff} est la valeur efficace de l'intensité $I(t)$ du courant. Avec $I(t) = \text{Re}\left\{\int_0^a 2\pi r dr j_x^{(a)}(r) e^{i\omega t}\right\}$, il vient, tous calculs faits : $I_{eff} = \sqrt{\langle I(t)^2 \rangle} = \pi a \delta_a |j_0^{(a)}|$ (à l'ordre le plus bas en δ_a). Par ailleurs, $dP_{\text{joule}}^{(a)} = dx \int_0^a 2\pi r dr \frac{1}{2} \text{Re}\left\{j_x^{(a)}(r) \mathcal{E}_x^{(a)}(r)\right\} = dx \pi a \rho_a |j_0^{(a)}|^2 \delta_a / 2$ (à l'ordre le plus bas en δ_a). In fine, $dP_{\text{joule}}^{(a)} = r_a dx I_{eff}^2$ où $r_a = \rho_a / 2\pi a \delta_a$ [18]. Avec la même méthode, on aboutit à l'expression $r_b = \rho_b / 2\pi b \delta_b$ pour la résistance linéique du blindage, et la résistance linéique du câble coaxial est donc égale à $r = r_a + r_b$ (cf. § 2.1).

L'inductance linéique Λ du câble coaxial est trouvée en identifiant l'énergie magnétique moyenne $\int (\vec{B}^2 / 2\mu_0) d^3r$ dans un tronçon dx du câble coaxial, à $\Lambda dx I_{eff}^2 / 2$. Dans l'isolant ($a < r < b$), le théorème d'Ampère fournit $B_\theta(r, t) = \mu_0 I(t) / 2\pi r$, et la partie de l'intégrale spatiale limitée à l'isolant donne la contribution Λ_0 à Λ (cf. annexe 1). Dans l'âme ($r < a$), on peut exprimer $\langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\mathcal{B}_\theta^{(a)}(r) \mathcal{B}_\theta^{(a)}(r)\right\} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 \delta_a)^2}{2} |j_0^{(a)}|^2 \exp(2[r-a]/\delta_a)$; la partie de l'intégrale spatiale limitée à l'âme vaut alors $dx \frac{1}{8} \mu_0 \delta_a^2 |j_0^{(a)}|^2 \pi a \delta_a$, ce qui met en jeu la contribution ℓ_a à Λ , où ℓ_a vérifie $\frac{\pi}{8} \mu_0 a \delta_a^3 |j_0^{(a)}|^2 = \ell_a I_{eff}^2 / 2$, soit $\ell_a = \mu_0 \delta_a / 4\pi a$. Dans une même démarche, la partie de l'intégrale spatiale limitée au blindage fournit la contribution ℓ_b à Λ , avec $\ell_b = \mu_0 \delta_b / 4\pi b$. Et finalement, l'inductance linéique du câble coaxial est de la forme $\Lambda = \Lambda_0 + \ell$ où $\ell = \ell_a + \ell_b$ (cf. § 2.1).

ANNEXE 3

Théorie électromagnétique du câble coaxial [19]

3.1 Câble coaxial idéal

Dans un câble coaxial idéal (où la résistivité de l'âme et du blindage est négligée), le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ n'existe que dans l'isolant. On cherche qu'une onde se propage le long du câble coaxial, dans le sens des x croissants ; par symétries, les composantes non nulles sont

$$\begin{cases} B_\theta(r, x, t) = \text{Re}\{ \mathcal{B}_\theta(r) \exp(i[\omega t - kx]) \} \\ E_r(r, x, t) = \text{Re}\{ \mathcal{E}_r(r) \exp(i[\omega t - kx]) \} \\ E_x(r, x, t) = \text{Re}\{ \mathcal{E}_x(r) \exp(i[\omega t - kx]) \} \end{cases}$$

en coordonnées cylindriques, pour une onde progressive de pulsation ω et de nombre d'onde (angulaire) k . Les équations de Maxwell dans l'isolant ($a < r < b$) donnent les relations

$$\begin{cases} ik\mathcal{E}_r(r) + \mathcal{E}'_x(r) = i\omega\mathcal{B}_\theta(r) & \text{(I)} \\ k\mathcal{B}_\theta(r) = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\mathcal{E}_r(r) & \text{(II)} \\ [r\mathcal{B}_\theta(r)]' = i\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega r\mathcal{E}_x(r), & \text{(III)} \end{cases}$$

où ε_r est la constante diélectrique de l'isolant. Les équations (II) et (III) permettent d'exprimer $\mathcal{E}_r(r)$ et $\mathcal{E}_x(r)$ en fonction de $\mathcal{B}_\theta(r)$; en injectant ces deux expressions dans l'équation (I), il vient

$$\mathcal{B}_\theta''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{B}_\theta'(r) + \left[\frac{\omega^2}{v_0^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \mathcal{B}_\theta(r) = 0, \quad \text{(IV)}$$

avec la notation $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_r}$. Cette équation (IV) est à discuter suivant le signe de $k - \omega/v_0$.

Cas (i) : $k > \omega/v_0$. En posant $\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2/v_0^2}$, $\mathcal{B}_\theta(r)$ est une combinaison linéaire des deux fonctions de Bessel modifiées d'ordre un, $I_1(\gamma r)$ et $K_1(\gamma r)$. Mais l'équation (III) permet d'exprimer la composante $\mathcal{E}_x(r)$ du champ électrique, et l'on constate alors que les conditions aux limites $\mathcal{E}_x(r = a) = \mathcal{E}_x(r = b) = 0$ ne peuvent être vérifiées : le cas $k > \omega/v_0$ est impossible.

Cas (ii) : $k = \omega/v_0$. L'équation (IV) s'écrit $\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r\mathcal{B}_\theta(r)] \right\} = 0$, et l'on trouve aisément sa solution générale : $\mathcal{B}_\theta(r) = A_1 r + A_2/r$, où A_1 et A_2 sont deux constantes. L'équation (III) permet d'obtenir $\mathcal{E}_x(r) = 2A_1/i\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega$; alors les conditions aux limites $\mathcal{E}_x(r = a) = \mathcal{E}_x(r = b) = 0$ imposent $A_1 = 0$. La constante A_2 est finalement déterminée par la condition obéie en $r = a$ par $\mathcal{B}_\theta(r)$: $\mathcal{B}_\theta(r = a) - 0 = \mu_0 \frac{J_0}{2\pi a}$, où l'on a écrit $I(x, t) = \text{Re}\{J_0 \exp(i[\omega t - kx])\}$ pour l'intensité du courant sur la surface de l'âme, et la forme de $\mathcal{E}_r(r)$ est trouvée avec l'équation (II) :

$$\mathcal{B}_\theta(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi r}, \quad \mathcal{E}_r(r) = v_0 \frac{\mu_0 J_0}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_x(r) = 0.$$

L'expression de $\mathcal{B}_\theta(r)$ est conforme au théorème d'Ampère (car $E_x = 0$) ; et on peut vérifier que la condition obéie par $\mathcal{B}_\theta(r)$ en $r = b$ est en cohérence avec l'intensité $-I(x, t)$ du courant sur la surface du blindage. Par ailleurs, la tension $U(x, t) = \text{Re}\{U_0 \exp(i[\omega t - kx])\}$ s'écrit avec

$$U_0 = \int_a^b \mathcal{E}_r(r) dr, \quad \text{soit} \quad U_0 = Z_0 J_0 \quad \text{comme attendu.}$$

Cas (iii) : $k < \omega/v_0$. En posant $k_T = \sqrt{\omega^2/v_0^2 - k^2}$, $\mathcal{B}_\theta(r)$ est une combinaison linéaire des deux fonctions de Bessel d'ordre un, $J_1(k_T r)$ et $Y_1(k_T r)$: $\mathcal{B}_\theta(r) = \alpha_1 J_1(k_T r) + \alpha_2 Y_1(k_T r)$. Alors l'équation (III) fournit $\mathcal{E}_x(r)$: $i\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \mathcal{E}_x(r) = k_T [\alpha_1 J_0(k_T r) + \alpha_2 Y_0(k_T r)]$, où $J_0(u)$ et $Y_0(u)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro. Les conditions aux limites sur l'âme et sur le blindage : $\mathcal{E}_x(r = a) = \mathcal{E}_x(r = b) = 0$, imposent alors que k_T soit une solution de l'équation caractéristique $Y_0(k_T a)/J_0(k_T a) = Y_0(k_T b)/J_0(k_T b)$. Avec les approximations $J_0(u) \simeq \sqrt{2/\pi u} \cos(u - \pi/4)$ et $Y_0(u) \simeq \sqrt{2/\pi u} \sin(u - \pi/4)$, on a les solutions $k_T \simeq m\pi/(b - a)$, $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, puis la relation de dispersion suivante, à m entier non nul donné :

$$k \simeq \sqrt{\frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{m^2 \pi^2}{(b - a)^2}}.$$

Le mode de propagation m n'existe donc que si $\omega > \omega_c^{[m]}$, où $\omega_c^{[m]}$ est la pulsation de coupure $\omega_c^{[m]} \simeq m\pi v_0/(b - a)$. Pour le câble étudié, on peut calculer $f_c^{[1]} = \omega_c^{[1]}/2\pi \approx 100$ GHz (!) : dans les gammes de fréquence usuellement employées, les modes à $k < \omega/v_0$ n'interviennent pas.

3.2 Câble coaxial réel : champ dans l'isolant

En prenant en compte la résistivité de l'âme et du blindage, une onde électromagnétique qui se propage (avec amortissement) le long du câble coaxial est de la forme suivante, dans l'isolant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_\theta(r, x, t) = \text{Re}\{\mathcal{B}_\theta(r) \exp(i[\omega t - \beta x])\} \\ \mathcal{E}_r(r, x, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}_r(r) \exp(i[\omega t - \beta x])\} \\ \mathcal{E}_x(r, x, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}_x(r) \exp(i[\omega t - \beta x])\}, \end{cases}$$

avec la constante de propagation $\beta = k - i\alpha$ ($k > 0$, $\alpha > 0$). Les équations de Maxwell donnent

$$\begin{cases} i\beta \mathcal{E}_r(r) + \mathcal{E}_x'(r) = i\omega \mathcal{B}_\theta(r) & \text{(I')} \\ \beta \mathcal{B}_\theta(r) = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \mathcal{E}_r(r) & \text{(II')} \\ [r\mathcal{B}_\theta(r)]' = i\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega r \mathcal{E}_x(r). & \text{(III)} \end{cases}$$

La présence de dissipation dans le câble coaxial est traitée comme une perturbation du mode de propagation unique trouvé au § 3.1. On démarre la procédure perturbative avec (pour $a < r < b$)

$$\mathcal{B}_\theta(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi r}, \quad \text{où } J_0 = \int_0^a 2\pi r dr j_x^{(a)}(r)$$

est l'amplitude complexe de l'intensité $I(x, t) = \text{Re}\{J_0 \exp(i[\omega t - \beta x])\}$ du courant dans l'âme. Alors les éqs (II') puis (I') fournissent les expressions de $\mathcal{E}_r(r)$ puis de $\mathcal{E}_x(r)$:

$$\mathcal{E}_r(r) = \frac{\beta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \frac{J_0}{2\pi r}, \quad \mathcal{E}_x(r) = i \left[\omega \mu_0 - \frac{\beta^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \right] \frac{J_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \mathcal{C},$$

\mathcal{C} étant une constante. À ce stade, on introduit les *impédances de surface* Z_a et Z_b de l'âme et du blindage, respectivement, qui sont définies par les égalités

$$\mathcal{E}_x(r = a) = Z_a J_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_x(r = b) = -Z_b J_0;$$

les expressions de Z_a et Z_b sont obtenues plus bas. La fonction $\mathcal{E}_x(r)$ étant connue, on a donc

$$C = Z_a J_0 \quad \text{et} \quad i \left[\omega \mu_0 - \frac{\beta^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \right] \frac{J_0}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + C = -Z_b J_0,$$

ce qui détermine β : $\Lambda_0 \omega - \beta^2 / \Gamma_0 \omega = i(Z_a + Z_b)$, c'est-à-dire, à l'ordre le plus bas en $Z_{a,b}$:

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{v_0} - i \frac{Z_a + Z_b}{2 Z_0}}. \quad (\text{V})$$

L'éq. (III) permet de déduire le terme correctif à la forme $\mathcal{B}_\theta(r) = \mu_0 J_0 / 2\pi r$ de départ ; on peut obtenir de cette façon $\mathcal{B}_\theta(r) = \mu_0 J_0 / 2\pi r + \delta \mathcal{B}_\theta(r)$, où $\delta \mathcal{B}_\theta(r)$ est d'ordre un en $Z_{a,b}$. Il reste à trouver les expressions des impédances de surface Z_a et Z_b .

3.3 Impédance de surface de l'âme

Pour déterminer l'impédance de surface Z_a , il est nécessaire d'étudier le champ électromagnétique à l'intérieur de l'âme ($r < a$). Les amplitudes complexes $\mathcal{B}_\theta^{(a)}(r)$, $\mathcal{E}_r^{(a)}(r)$ et $\mathcal{E}_x^{(a)}(r)$ de ce champ sont liées par les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} i\beta \mathcal{E}_r^{(a)} + \mathcal{E}_x^{(a)'} = i\omega \mathcal{B}_\theta^{(a)} & (\text{VI}) \\ i\beta \rho_a \mathcal{B}_\theta^{(a)} = \mu_0 \mathcal{E}_r^{(a)} & (\text{VII}) \\ \rho_a [r \mathcal{B}_\theta^{(a)}]' = \mu_0 r \mathcal{E}_x^{(a)}. & (\text{VIII}) \end{cases}$$

Dans les éqs (VII) et (VIII), le terme $\varepsilon_0 \partial \vec{E}^{(a)} / \partial t$ a été négligé devant $\vec{j}^{(a)} = \vec{E}^{(a)} / \rho_a$, du fait que $\varepsilon_0 \omega \rho_a \ll 1$: avec $\rho_a = \rho_{Cu} = 1,76 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, $\varepsilon_0 \omega \rho_a \approx 1 \times 10^{-12}$ pour $\omega / 2\pi = 1 \text{ MHz}$. Les fonctions $\mathcal{E}_r^{(a)}(r)$ et $\mathcal{E}_x^{(a)}(r)$, tirées des éqs (VII) et (VIII), sont mises dans l'éq. (VI) ; il vient

$$\mathcal{B}_\theta^{(a)''}(r) + \frac{1}{r} \mathcal{B}_\theta^{(a)'}(r) - \left[\frac{2i}{\delta_a^2} + \frac{1}{r^2} \right] \mathcal{B}_\theta^{(a)}(r) = 0, \quad (\text{IX})$$

où $\delta_a = \sqrt{2\rho_a / \mu_0 \omega}$. Pour obtenir l'éq. (IX), on a négligé $\beta^2 \simeq \omega^2 / v_0^2$ devant $1/\delta_a^2$; en effet, $\beta^2 \delta_a^2 \sim \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega \rho_a \sim 10^{-12}$ pour $\omega / 2\pi = 1 \text{ MHz}$. On en déduit finalement, dans l'âme :

$$\mathcal{B}_\theta^{(a)}(r) = \gamma_1 I_1 \left(\frac{[1+i]r}{\delta_a} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_x^{(a)}(r) = \gamma_1 \frac{(1+i)\rho_a}{\mu_0 \delta_a} I_0 \left(\frac{[1+i]r}{\delta_a} \right), \quad (\text{X})$$

où $I_0(u)$ et $I_1(u)$ sont les fonctions de Bessel modifiées de 1^{re} espèce, d'ordres zéro et un, γ_1 étant une constante. On remarque que la composante radiale $\mathcal{E}_r^{(a)} \propto \mathcal{B}_\theta^{(a)}$ est non nulle, en toute rigueur ; cependant, $\mathcal{E}_r^{(a)} / \mathcal{E}_x^{(a)} \sim \beta \delta_a \sim 10^{-6}$ pour $\omega / 2\pi = 1 \text{ MHz}$, et $\mathcal{E}_r^{(a)}$ est donc négligeable.

Dès lors, l'impédance de surface Z_a peut être déterminée. La continuité du champ magnétique en $r = a$: $\gamma_1 I_1([1+i]a/\delta_a) = \mu_0 J_0 / 2\pi a$, fixe la constante γ_1 . Alors $\mathcal{E}_x^{(a)}(a) = Z_a J_0$ fournit

$$Z_a = \frac{(1+i)\rho_a}{2\pi a \delta_a} \frac{I_0 \left(\frac{[1+i]a}{\delta_a} \right)}{I_1 \left(\frac{[1+i]a}{\delta_a} \right)}.$$

Cette expression n'est guère d'utilité pratique... En utilisant les deux approximations suivantes :

$I_0(u) \simeq \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 + \frac{1}{8u}\right)$ et $I_1(u) \simeq \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 - \frac{3}{8u}\right)$ si $|u| \gg 1$, il vient $Z_a = Z_a^{[r]} + iZ_a^{[i]}$ avec

$$\boxed{\begin{cases} Z_a^{[r]} = \text{Re}\{Z_a\} = r_a + r_a^-/4 \\ Z_a^{[i]} = \text{Im}\{Z_a\} = r_a, \end{cases}} \quad (\text{XI})$$

où $r_a = \rho_a/2\pi a\delta_a$ (cf. annexe 2, § 2.4) et $r_a^- = \rho_a/\pi a^2$ est la résistance linéique de l'âme en régime continu. On peut apprécier la large validité des formules (XI) en calculant, pour le câble coaxial étudié, $\sqrt{2}a/\delta_a \approx 10$ à la fréquence $\omega/2\pi = 1$ MHz.

On remarque, par ailleurs, que le comportement dominant $I_0(u) \simeq I_1(u) \sim e^u$ mis dans les deux éqs (X) permet de justifier les expressions de $\mathcal{E}_x^{(a)}(r)$ et $\mathcal{B}_\theta^{(a)}(r)$ vues dans l'annexe 2, § 2.4.

3.4 Impédance de surface du blindage

Pour trouver l'expression de l'impédance de surface Z_b , on étudie le champ électromagnétique à l'intérieur du blindage ($b < r < b + e$). Les amplitudes complexes $\mathcal{B}_\theta^{(b)}(r)$, $\mathcal{E}_r^{(b)}(r)$ et $\mathcal{E}_x^{(b)}(r)$ de ce champ sont liées par les équations de Maxwell (VI), (VII) et (VIII), en remplaçant ρ_a par ρ_b . Le champ magnétique $\mathcal{B}_\theta^{(b)}(r)$ obéit alors à l'éq. (IX), avec $\delta_b = \sqrt{2\rho_b/\mu_0\omega}$ au lieu de δ_a , d'où :

$$\mathcal{B}_\theta^{(b)}(r) = \xi_1 I_1\left(\frac{[1+i]r}{\delta_b}\right) + \xi_2 K_1\left(\frac{[1+i]r}{\delta_b}\right), \quad (\text{XII})$$

les deux constantes ξ_1 et ξ_2 étant fixées par les deux conditions aux limites $\mathcal{B}_\theta^{(b)}(b) = \mu_0 J_0/2\pi b$ et $\mathcal{B}_\theta^{(b)}(b+e) = 0$. L'éq. (VIII) donne alors accès à $\mathcal{E}_x^{(b)}(r)$:

$$\mathcal{E}_x^{(b)}(r) = \frac{(1+i)\rho_b}{\mu_0\delta_b} \left\{ \xi_1 I_0\left(\frac{[1+i]r}{\delta_b}\right) - \xi_2 K_0\left(\frac{[1+i]r}{\delta_b}\right) \right\}. \quad (\text{XIII})$$

La composante radiale $\mathcal{E}_r^{(b)} \propto \mathcal{B}_\theta^{(b)}$ n'est pas nulle ; cependant, comme $\mathcal{E}_r^{(b)}/\mathcal{E}_x^{(b)} \sim \beta\delta_b \sim 10^{-6}$ à la fréquence $\omega/2\pi = 1$ MHz, $\mathcal{E}_r^{(b)}$ est négligeable.

Enfin, de la relation $\mathcal{E}_x^{(b)}(b) = -Z_b J_0$, on tire l'expression de l'impédance de surface Z_b :

$$Z_b = \frac{(1+i)\rho_b}{2\pi b\delta_b} \frac{I_1(B')K_0(B) + K_1(B')I_0(B)}{I_1(B')K_1(B) - K_1(B')I_1(B)},$$

avec les deux notations $B = [1+i]b/\delta_b$ et $B' = [1+i](b+e)/\delta_b$. En employant les expressions approchées de $I_0(u)$ et $I_1(u)$ déjà mentionnées, ainsi que $K_0(u) \simeq \sqrt{\pi/2u} e^{-u} \left(1 - \frac{1}{8u}\right)$ et $K_1(u) \simeq \sqrt{\pi/2u} e^{-u} \left(1 + \frac{3}{8u}\right)$ si $|u| \gg 1$, il vient $Z_b = Z_b^{[r]} + iZ_b^{[i]}$ avec simplement

$$\boxed{\begin{cases} Z_b^{[r]} = \text{Re}\{Z_b\} = r_b - \rho_b/4\pi b^2 \\ Z_b^{[i]} = \text{Im}\{Z_b\} = r_b, \end{cases}} \quad (\text{XIV})$$

où $r_b = \rho_b/2\pi b\delta_b$ (cf. annexe 2, § 2.4). Pour la validité des formules (XIV), il est nécessaire que $2e/\delta_b \gg 1$; dans le câble coaxial étudié, $2e/\delta_b \approx 10$ à la fréquence $\omega/2\pi = 1$ MHz.

Par ailleurs, l'utilisation des formes approchées pour les fonctions de Bessel dans les deux éqs (XII) et (XIII) permet de justifier les expressions de $\mathcal{E}_x^{(b)}(r)$ et $\mathcal{B}_\theta^{(b)}(r)$ vues à l'annexe 2, § 2.4.

3.5 Câble coaxial réel : conclusion

En insérant les impédances de surface Z_a et Z_b [tirées des éqs (XI) et (XIV)] dans l'expression de la constante de propagation $\beta = k - i\alpha$, cf. éq. (V), on retrouve bien la forme de la relation de dispersion (6) vue à l'annexe 2 :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_0} + \frac{r_a + r_b}{2Z_0} = \frac{\omega}{v_0} + A\sqrt{\omega}.$$

Cependant, par rapport à l'éq. (5), le coefficient d'atténuation possède un terme supplémentaire :

$$\alpha(\omega) = A\sqrt{\omega} + \alpha_0 \quad \text{où} \quad \alpha_0 = \frac{1}{8\pi Z_0} \left[\frac{\rho_a}{a^2} - \frac{\rho_b}{b^2} \right].$$

Le terme additionnel α_0 n'est pas en contradiction avec la relation de Kramers-Kronig citée dans la section 2 : $\alpha_0 = Cste$ donne une contribution nulle à l'intégrale prise en valeur principale. Mais, dans l'expérience décrite en section 1, il n'a pas été possible d'extraire une contribution α_0 lors de l'ajustement des données expérimentales de la figure 2. Pour faire une estimation quantitative de α_0 , on a considéré $\rho_a = 1,3\rho_{Cu}$ et $\rho_b = 2,2\rho_{Cu}$ (cf. annexe 2, § 2.3) ; cela permet d'obtenir la valeur $\alpha_0 \approx 6 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Avec $A = 6,26 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{1/2}$ (cf. section 2), $A\sqrt{\omega} \approx 0,002 \text{ m}^{-1}$ à la fréquence 1 MHz : il apparaît ainsi que $A\sqrt{\omega} \gg \alpha_0$. D'après la littérature, il semble habituel que le terme α_0 constant soit négligé [12-14].

Par ailleurs, la tension $U(x, t) = Re\{U_0 \exp(i[\omega t - \beta x])\}$ s'écrit avec

$$U_0 = \int_a^b \varepsilon_r(r) dr = \int_a^b \frac{\beta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \frac{J_0}{2\pi r} dr = \frac{\beta}{\Gamma_0 \omega} J_0;$$

on retrouve ainsi $U_0 = Z_c J_0$ avec l'impédance caractéristique $Z_c = \beta/\Gamma_0 \omega$ de l'annexe 2, § 2.3, en négligeant le terme α_0 [l'effet de $\delta B_\theta(r)$ sur $\varepsilon_r(r)$ a aussi été négligé, cf. § 3.2].

ANNEXE 4

Sur la petite imperfection de l'expérience en impulsions

Dans l'expérience de la section 3, on peut visualiser la tension à l'entrée du câble coaxial en utilisant une base de temps 250 ns/division, plus grande que les 50 ns/division des figures 4 et 5. L'oscillogramme de la figure 9 montre alors à la fois l'impulsion aller (au voisinage de $t = 0$) et l'impulsion de retour (au voisinage de $t = 2L/v_0 \approx 1 \mu\text{s}$) ; mais il montre aussi un second écho, au voisinage de $t = 4L/v_0 \approx 2 \mu\text{s}$. Ce signal supplémentaire est la signature de la réflexion partielle de l'onde retour lorsqu'elle parvient à l'entrée du câble coaxial, du fait que la résistance de sortie R_{GI} du générateur d'impulsions diffère notablement de l'impédance caractéristique du câble : une nouvelle impulsion exécute un autre aller-retour le long du câble coaxial, avant d'être détectée.

Suivant ce schéma explicatif, les formules de $U_{retour}(t)$ doivent être multipliées par le facteur

$$1 + \mathcal{R}, \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \frac{R_{GI} - Z_0}{R_{GI} + Z_0}$$

est le coefficient de réflexion sur l'entrée du câble coaxial ; on néglige ici la petite dépendance de l'impédance caractéristique avec la fréquence. La ligne continue de la figure 9 est alors construite pour ajuster au mieux la forme de l'impulsion de retour : cela est obtenu avec la valeur $\mathcal{R} = 0,090$.

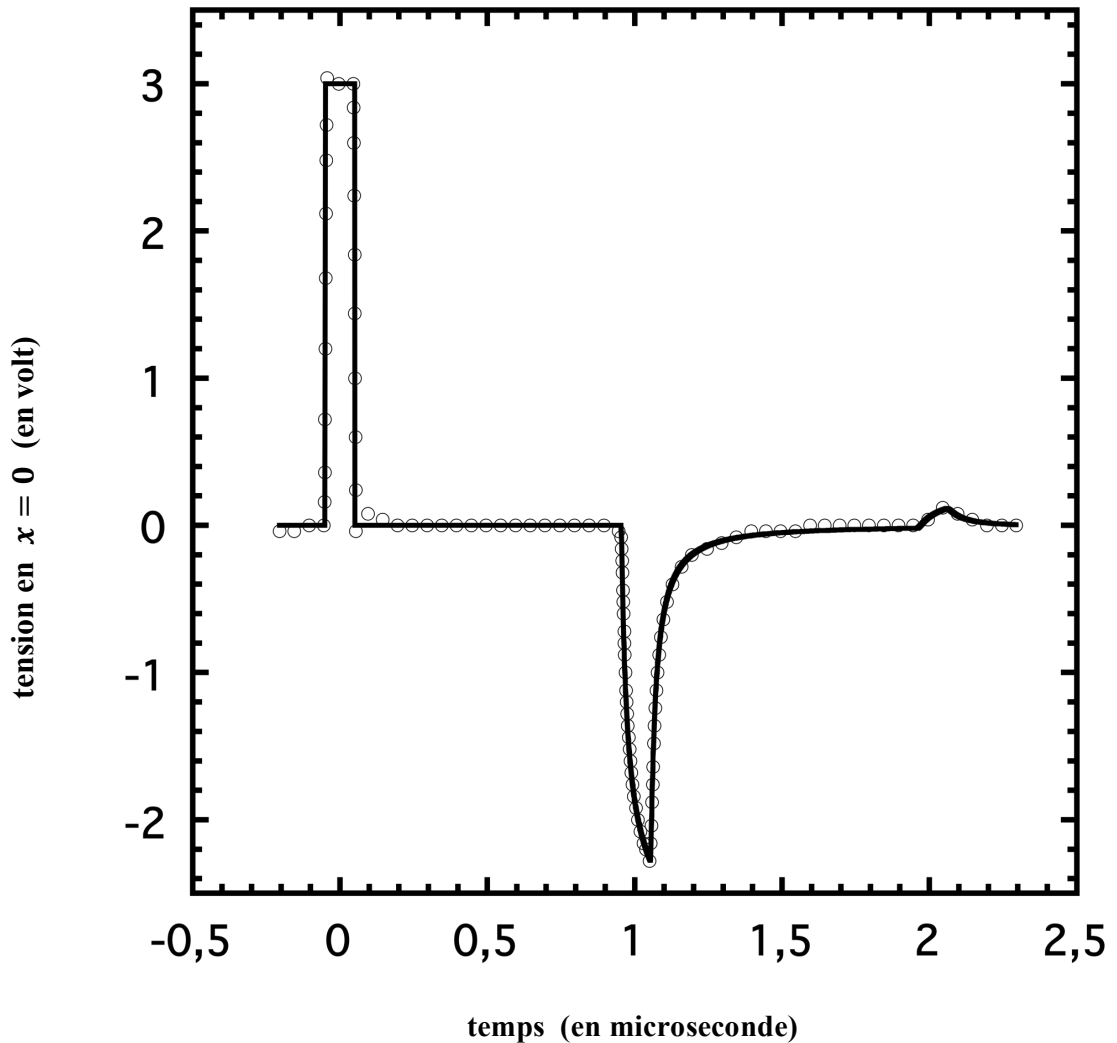


Figure 9 - Tension en $x = 0$ observée à l'oscilloscope. Les disques vides sont les données expérimentales (pour la clarté, seule une partie des données est représentée) ; la ligne continue en est l'ajustement théorique.

Pour achever l'ajustement des données de la figure 9, on ajoute la contribution du second écho, qui est construite ainsi : dans l'expression $U_{retour}(t)$ écrite à la fin de la section 3, L est remplacé par $2L$, et on utilise le facteur multiplicatif $-\mathcal{R}(1 + \mathcal{R}) = -0,098$, le changement de signe provenant du court-circuit en l'extrémité du câble coaxial. La ligne continue de la figure 9 reproduit alors fidèlement l'amplitude du second écho ; néanmoins, la faible résolution numérique de l'oscilloscope n'a pas permis d'en étudier la forme temporelle exacte.

On remarquera finalement que le coefficient de réflexion $\mathcal{R} = 0,090$ correspond à un rapport $R_{GI}/Z_0 = 1,2$: la différence entre R_{GI} et Z_0 est notable (on pourrait avoir des valeurs $Z_0 = 50 \Omega$ et $R_{GI} = 60 \Omega$, par exemple). Cependant, des essais avec deux autres générateurs d'impulsions du même modèle, émettant des impulsions carrées de 100 ns, ont produit des résultats semblables : $R_{GI}/Z_0 = 1,12$ et 1,17.